n-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL VE λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hanife DÜĞÜNCÜ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN, 2016

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

n-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL VE λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Hanife DÜĞÜNCÜ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN, 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Hanife DÜĞÜNCÜ tarafından hazırlanan "n-Normlu Uzaylarda İstatistiksel ve λ-İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 30/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Özer TALO
Celal Bayar Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2016 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30/06/2016

Hanife DÜĞÜNCÜ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

n-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL
VE λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Hanife DÜĞÜNCÜ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalıştığımız tez konusu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon, örnek ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarla ilgili tanım, kavram ve teoremler verilerek 2-normlu uzaylarla ilgili bazı önemli özellikler incelendi. Dördüncü bölümde, n-normlu uzaylarla ilgili tanım, kavram ve teoremler verilerek n-normlu uzaylarla ilgili bazı önemli özellikler incelendi. Beşinci bölümde, n-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılarak bu kavramın bazı önemli özellikleri, ilgili teoremler ve ispatları ile bazı örnekler verildi. Ayrıca, n-normlu uzaylarda istatistiksel Cauchy dizi kavramı ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisi incelendi. Altıncı bölümde, n-normlu uzaylarda λ-istatistiksel yakınsaklık kavramı ve $(C, 1)$-toplanabilme ve kuvvetli (V, λ)-toplanabilme kavramları verilerek aralarındaki ilişkiler incelendi.

2016, v+47 sayfa

Anahtar Kelimeler : 2-normlu uzaylar, n-normlu uzaylar, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizi, λ-istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON STATISTICAL AND λ-STATISTICAL
CONVERGENCE IN n-NORMED SPACES

Hanife DÜĞÜNCÜ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, historical development of related notions of the thesis subject was mentioned. In the second chapter, some basic definitions, notions, examples and theorems related to study were given. In the third chapter, definitions, concepts, and theorems related to 2-normed spaces were given and some important properties about 2-normed spaces were examined. In the fourth chapter, the concepts, definitions and theorems related to n-normed spaces were given and some important properties about n-normed spaces were investigated. In the five chapter, introducing the concept of statistical convergent in n-normed spaces, some properties, theorems with proofs and some examples of this concept were given. Also, the concept of Cauchy sequence in n-normed spaces was defined and relationships between this concept and statistical convergent was examined. In the six chapter, the concepts of λ-statistical convergent, $(C, 1)$-summability and (V, λ)-summability were given and relationships between them were investigated.

2016, v+47 pages

Key Words : 2-normed spaces, n-normed spaces, statistical convergence, statistical Cauchy sequence, λ-statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği geçen ve bu branşı seçmemde katkısı olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan babam Ömer DÜĞÜNCÜ ve annem Nimet DÜĞÜNCÜ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Hanife DÜĞÜNCÜ

AFYONKARAHİSAR, 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu reel öklid uzayı
$\mathbb{R}^d$	d-boyutlu reel öklid uzayı
$\|.,.\|$	2-norm fonksiyonu
$\|.\|_p$	$2 \leq p \leq \infty$ olmak üzere baz ile elde edilen norm
$\|.\|_\infty$	2-normların maksimumu olan sonsuz norm fonksiyonu
$\|.,...,.\|$	n-norm fonksiyonu
$\|.,...,.\|_\infty$	$(n-1)$-boyutlu norm fonksiyonu
$\{u_1,...,u_d\}$	d boyutlu baz
$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x,r)$	$\{u_1,...,u_d\}$ bazı altındaki x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
(X,d)	Metrik uzay
$(X,\|.,.\|)$	2-Banach uzayı
$(C,\|\|\|)$	Banach cebiri
$\lvert K\rvert$	K kümesinin kardinelitesi
$< .,. >$	iç çarpım uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_n)	Reel sayı dizisi
F	Sınırlı lineer 2-fonksiyonel
$st-\lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti

1 GİRİŞ

Reel sayılarda metrik uzaylarda ve topolojik uzaylarda limit, yakınsaklık ve süreklilik gibi kavramlar Analiz ve Fonksiyonel Analiz alanının temelini oluşturan en önemli kavramlardır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise Toplanabilme Teorisinde ve Fonksiyonel Analiz' de büyük öneme sahiptir. 1951' de Fast'in istatistiksel yakınsak kavramını tanımlanmasından bu yana istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları ile ilgili çalışmalar Connor (1989), Schoenberg (1959), Maddox (1970), Šalát (1980), Fridy (1985, 1993), Fridy ve Orhan (1997), Nuray ve Ruckle (2000), Rath ve Tripathy (1994) ve daha birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır.

2-metrik uzay ve 2-normlu uzay kavramları ilk önce Gähler (1963, 1965) tarafından tanıtıldı. Daha sonra bu kavramlar Açıkgöz (2007), Gunawan ve Mashadi (2001), Gürdal ve Pehlivan (2004, 2009), Gürdal ve Açık (2008), Gürdal (2006), Lewandowska (2001, 2003), Rezapour (2005), Mursaleen ve Alotaibi (2011), Sarabadan ve Talebi (2011), Şahiner vd. (2007), Tripathy vd. (2012), White (1969) ve birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Gunawan ve Mashadi (2001) sonlu boyutlu 2-normlu uzayları çalıştılar ve 2-normdan türetilen belli bir normu kullanarak 2-normlu uzayların topolojilerinin tam olarak tanımlanabileceğini gösterdiler. 2-Banach uzayının da Banach uzayı olduğunu gösterdiler ve bu gerçeği kullanarak Sabit Nokta Teoremi' ni ispatladılar. Dahası, elde ettikleri sonuçların bazı sonsuz boyutlu 2-normlu uzaylara genişletilebileceğini gösterdiler. Açıkgöz (2007), 2-normlu uzaylar teorisini ve onların yapılarını inceleyip, bu yapıların normlu uzaylar ile farkını açıkladı. Ayrıca, genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar olarak adlandırılan yeni bir yapı tanımladı.

Gürdal ve Pehlivan (2009), 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık çalıştılar. Reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığının bazı özelliklerinin 2-normlu uzaylardaki diziler için de elde edilebileceğini gösterdiler. Ayrıca, 2-normlu uzaylarda istatistiksel Cauchy dizisini tanımlayıp, 2-normlu uzaylarda ki bir dizi için istatistiksel Cauchy dizisi olma kriterini elde ettiler. Bunun yanında, 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizisi arasındaki ilişkiyi incelediler. Gürdal ve Pehlivan (2004), 2-Banach uzaylarda istatistiksel yakınsaklık çalıştılar. Ayrıca, 2-Banach uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizisinin çakıştığını elde ettiler.

Şahiner vd. (2007) 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizisini tanımlayıp bazı özelliklerini araştırdılar. Ayrıca, 2-normu kullanarak bazı yeni dizi uzaylarını incelediler. Ayrıca, Gürdal ve Açık (2008) ve yine Gürdal (2006) 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını incelediler.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, matematik alanında önemli ve bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özellikler ile örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından yapılan çalışmadaki *2*-normlu uzaylarda temel tanım, teorem, özellikler ve örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından yapılan çalışmadaki n-normlu uzaylarda temel tanım, teorem, özellikler ve örnekler detaylı bir biçimde incelenmiş ve not edilmiştir.

Beşinci bölümde, Reddy (2010) tarafından yapılan makaledeki n-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi ile ilgili tanım, teorem ve özellikler detaylı bir şekilde ele alınarak not edilmiştir.

Altıncı bölümde, Hazarika ve Savaş (2013) tarafından yapılan çalışmadaki n-normlu uzaylarda λ-istatistiksel yakınsaklık tanımı ve bu yakınsaklığın özelliklerini veren teoremler ile $(C, 1)$-toplanabilme ve kuvvetli (V, λ)-toplanabilme kavramları incelenmiş ve not edilmiştir.

Son olarak, tez için temel kaynak olarak kullandığımız kitap, makale ve tezler kaynaklar kısmında verilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı temel bilgiler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay ve alt uzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik ve Metrik Uzay). X boştan farklı bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

M1. $d(x, x) = 0$,

M2. $d(x, y) = d(y, x)$,

M3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

M1. $d(x, x) = 0$ şartı yerine $(\mathrm{M1})'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şartını alırsak d fonksiyonuna *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Bir lineer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).

Bu çalışmamızda, $\mathbb{R}$ reel uzay üzerinde

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan alışılmış mutlak değer metriğini göz önüne alacağız. Burada $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2 (Dizi Uzayı). Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞, c, c_0, ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary and Nanda 1989).

Tanım 2.1.3 (Yarı Norm ve Norm). X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

N1. $\|x\| \geq 0$,

N2. $\|\theta\| = 0$,

N3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

N4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *yarı normlu uzay* denir.

Burada (N2) şartı yerine

$$(N2)^{'} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

şartı sağlanırsa, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.4 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

1) Her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa, (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

2) $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir x vektörü varsa (yani, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) (x_n) dizisi x e *yakınsaktır*, denir. Bu x vektörü (x_n) dizisi tarafından bir tek olarak belirtilir.

3) $m, n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise (yani, verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.5 (Normlu Cebir, Banach Cebiri). C bir cebir ve C üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olsun. Bu norm, her $x, y \in C$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

şartını sağlıyorsa ve C nin birim elemanı olması halinde de

$$\|e\| = 1$$

ise C ye *normlu cebir* denir. $(C, \|.\|)$ normlu cebiri, normlu lineer uzay olarak tam ise bu normlu cebire *Banach cebiri* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.6 (Açık ve Kapalı Yuvar). (X, d) metrik uzayında, x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için;

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

kümelerine sırasıyla, x_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* ve *kapalı yuvar* denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.7 (Kompakt Uzay, Dizisel Kompaktlık). Bir topolojik uzayın her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahip ise bu uzaya *kompakt uzay* denir.

Bir metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut ise bu metrik uzaya *dizisel kompakttır*, denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.8 (Lineer Bağımsızlık, Lineer Bağımlılık). L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de L nin sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa S cümlesine veya $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) *lineer bağımsızdır*, denir.

Lineer bağımsız olmayan kümeye *lineer bağımlı küme* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.9 (Baz (Taban)). L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, L kümesinin bir alt kümesi olsun. B lineer bağımsız ve B, L yi geriyorsa, yani $< B >= L$ ise B ye (F üzerinde) L nin bir *bazı (tabanı)* denir (Bayraktar 2006).

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, tek dizilerde yoğunluk kavramını, istatistiksel yakınsaklık tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.2.1 (Doğal Yoğunluk) $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ kümelerini alalım. $|K| = card\, K$ (K kümesinin kardinalitesi) olmak üzere,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine, sırasıyla, K kümesinin *alt* ve *üst yoğunluğu* denir. $\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K kümesinin *doğal yoğunluğu* denir. $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven *et al.* 1991).

Şimdi doğal yoğunluk ile ilgili bazı özellik ve örnekler verelim:

1) $K \subseteq \mathbb{N}$ sonlu ise $\delta(K) = 0$ dır.

2) $K = \mathbb{N}$ ise $\delta(K) = \frac{n}{n} = 1$ dir.

(1) ve (2) den bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $0 \leq \delta(K) \leq 1$ dir.

3) $K = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = T$ ise

$$\delta(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

olur.

4) $K = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = C$ ise

$$\delta(C) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

olur.

5) $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ise

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olur.

6) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ise

$$\delta(K_1 \cup K_2) - \delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$$

olur.

7) $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ olur.

8) $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$ dır.

Tanım 2.2.2 (İstatistiksel Yakınsaklık) Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise, $x = (x_n)$ dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır,* denir (Fast 1951).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ile ilgili ve literatürde mevcut bulunan bir kaç örnek verelim:

Örnek 2.2.3

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \{k : |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k : k = n^2\}$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olduğundan, $st - \lim x = 0$ elde edilir.

Örnek 2.2.4

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k = n^3, n = 1, 2, 3, \cdots \\ 1 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8, \ldots\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \{k : |x_k - 1| \geq \varepsilon\} = \{k : k = n^3\}$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olduğundan, $st - \lim x = 1$ elde edilir.

Örnek 2.2.5

$$x_k = \begin{cases} -1 & , \quad k \ tek \ ise \\ 1 & , \quad k \ çift \ ise \end{cases}$$

dizisinin yoğunluğu 0 olmadığından istatistiksel yakınsak değildir.

Önerme 2.2.6 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsakır.

Bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani, istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 2.2.7 Bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k : |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy 1985).

Teorem 2.2.8 Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir:

i. x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

ii. x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii. h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

3 2-NORMLU UZAYLAR

3.1 Sonlu Boyutlu 2-Normlu Uzaylar ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, öncelikle Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından incelenen 2-normlu uzaylar ile ilgili temel tanım, lemma ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.1.1 $2 \leq d < \infty$ olmak üzere X, d boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde

$$\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\|.,.\|$ fonksiyonuna bir *2-norm* denir.

(i) $\|x,y\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır,

(ii) $\|x,y\| = \|y,x\|$,

(iii) $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\|x,y\|, (\alpha \in \mathbb{R})$,

(iv) $\|x,y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\|$.

$(X, \|.,.\|)$ çiftine ise *2-normlu uzay* denir.

2-normlu uzayın standart bir örneği aşağıdaki 2-normla donatılmış $\mathbb{R}^2$ dir:

$\|x,y\| :=$ köşeleri $\theta = (0,0)$, x ve y vektörleri olan üçgensel bölge.

Herhangi bir $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x,y\| \geq 0 \text{ ve } \|x,y+\alpha x\| = \|x,y\|$$

özelliklerinin sağlandığı açıktır. Aynı zamanda, x, y ve z lineer bağımlı ise (bu, örneğin $d = 2$ olduğunda olur) o zaman,

$$\|x,y+z\| = \|x,y\| + \|x,z\| \text{ veya } \|x,y-z\| = \|x,y\| + \|x,z\|$$

dir.

$(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı verilsin. Aşağıda tanımlanan bir dizinin limit kavramından faydalanılarak bir topoloji elde edilebilir.

Her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

ise X deki bir (x_n) dizisine x değerine *yakınsaktır*, denir. Bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ile gösterilir ve x' e (x_n) *dizisinin limitidir*, denir.

2-normlu uzaylarda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim. (x_n) dizisi X deki iki farklı x ve y limitlerine yakınsıyor olsun. $\|x-y,z\| \neq 0$ olacak şekilde $z \in X$ seçelim ve aynı anda

$$\|x_N - x, z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\| \text{ ve } \|x_N - y, z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\|$$

olacak şekilde yeterince büyük $N = N(\varepsilon, z) \in X$ alalım. O zaman üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|x-y,z\| &\leq \|x-x_N,z\| + \|x_N-y,z\| \\ &< \frac{1}{2}\|x-y,z\| + \frac{1}{2}\|x-y,z\| \\ &= \|x-y,z\| \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece, eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

limiti varsa tek olmalıdır.

Bundan sonra $(X, \|.,.\|)$ ikilisini 2-normlu uzay olarak alacağız. Aksi belirtilmedikçe X in d boyutunun $2 \leq d < \infty$ olduğunu kabul edeceğiz.

Sabit $\{u_1, ..., u_d\}$, X için bir baz olsun. O zaman aşağıdakileri yazabiliriz:

Lemma 3.1.2 X üzerinde bir (x_n) dizisi X de bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

dır.

Lemma 3.1.3 X üzerinde bir (x_n) dizisi X de bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \max\{\|x_n - x, u_i\| : i = 1, ..., d\} = 0$$

dır.

Bu basit gerçek bizi X üzerindeki bir normun tanımına götürür. X üzerinde $\{u_1, ..., u_d\}$ bazıyla bir norm tanımlayabiliriz. $\|.\|_\infty$ normunu

$$\|x\|_\infty = \max\{\|x, u_i\| : i = 1, ..., d\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Gerçekten de;

(i) $\|x\|_\infty = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.

(ii) $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \|x\|_\infty$ dir.

(iii) Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ dir.

Genel olarak $1 \leq p \leq \infty$ için X üzerinde $\|.\|_p$ fonksiyonunu

$$\|x\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^{d} \|x, u_i\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Fakat X sonlu boyutlu olduğundan tüm bu normlar denktir. Bu nedenle aksi belirtilmedikçe bu bölüm boyunca sadece $\|.\|_\infty$ ile çalışacağız.

Burada bazın seçimi önemli değildir. Eğer X için $\{v_1, ..., v_d\}$ şeklinde başka bir baz seçer ve $\|.\|_\infty$ normunu bu baza bağlı olarak tanımlarsak sonuçta elde edilen norm, $\{u_1, ..., u_d\}$ bazına göre tanımlanan norma denk olacaktır.

Türetilmiş $\|.\|_\infty$ normunu kullanarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 3.1.4 X üzerindede bir (x_n) dizisinin $x \in X$ e yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$$

olmasıdır.

Türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu yardımıyla, x noktasında r yarıçaplı ve (x, r) merkezli $B_{\{u_1,...,u_d\}}$ açık yuvarları

$$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x, r) = \{y : \|x - y\|_\infty < r\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yuvarlar kullanılarak Lemma 3.1.4 aşağıdaki gibi verilebilir:

Lemma 3.1.5 X üzerinde bir (x_n) dizisinin $x \in X$ e yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\{u_1,...,u_d\}}(x, \varepsilon)$ olmasıdır.

Tüm sonuçları özetleyerek aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.1.6 Herhangi bir sonlu boyutlu 2-normlu uzay normlu bir uzaydır ve onun topolojisi, türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu tarafından üretilen topoloji ile bağdaşır (uyuşur).

Aşağıda göstereceğimiz gibi,normlu bir uzaydaki bir çok sonuç, türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu veya onun birleşmiş yuvarları kullanılarak 2-normlu uzaylarda doğrulanabilir. Önce bazı örnekleri inceleyelim:

Örnek 3.1.7 $X = \mathbb{R}^2$, $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarsal bölge (Aynı zamanda $\theta = (0, 0)$, x ve y vektörlerinin oluşturduğu üçgensel bölge) 2-normu ile donatılmış olsun. Bu açıkca

$$\|x, y\| = |x_1y_2 - x_2y_1|, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

formülü ile verilebilir. $\mathbb{R}^2$ için $\{i, j\}$ standart bazını alalım. Bu durumda

$$\|x, i\| = |x_2| \text{ ve } \|x, j\| = |x_1|$$

ve böylece $\{i, j\}$ bazı ile türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}, x = (x_1, x_2)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, burada tanımlanan $\|.\|_\infty$ normu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki düzgün norm ile tamamen aynıdır. Bundan dolayı $B_{\{i,j\}}(x, r)$ yuvarı x merkezli r yarıçaplı bir karedir. Türetilen norm, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklid normuna denk olduğundan yukarıdaki 2-norm ile donatılan $\mathbb{R}^2$ düzlemi Öklid düzleminden başka birşey değildir.

Daha genel olarak;

Uyarı 3.1.8 $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarsal bölge olmak üzere, $(\mathbb{R}^d, \|., .\|)$ 2-normlu uzayı, normu Öklid normuna denk olan bir normlu uzaydır.

Uyarı 3.1.9

Yukarıdaki $(\mathbb{R}^d, \|., .\|)$ 2-normlu uzayı için,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d} \|x, e_j\|^2 = (d-1) \sum_{i=1}^{d} x_i^2$$

olduğu gözlemlenir yani, $\|.\|_2$ normu Öklid normunun bir katıdır.

Hatırlayalım ki, eğer X uzayında her Cauchy dizisi herhangi bir $x \in X$ e yakınsaksa, yani her $y \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, y\| = 0$$

olacak şekilde bir $(x_n) \in X$ varsa, $(X, \|.\|)$ 2-Banach uzayıdır.

Fakat öncelikle aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var :

Lemma 3.1.10 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayının bir 2-Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart $(X, \|.\|_\infty)$ un bir Banach uzayı olmasıdır.

Sonuç 3.1.11 (Sabit Nokta Teoremi). $(X, \|.,.\|)$ bir 2-Banach uzayı olsun. k, $(0,1)$ aralığında bir sabit olmak üzere; her $x, y, z \in X$ için

$$\|T_x - T_y, z\| \leq k\|x - y, z\|$$

olacak şekilde T, X in kendi kendine eşlemesi olsun. Bu durumda T, X de tek bir sabit noktaya sahiptir.

4 n-NORMLU UZAYLAR

Bu kısımda, Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından çalışılan n-normlu uzaylarda tanım, teorem ve özellikleri inceleyeceğiz.

Tanım 4.0.1 $n \in \mathbb{N}$ ve X, $d \geq n$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. (Burada, d' yi sonsuz alabiliriz). X^n üzerinde reel değerli bir $\|\cdot, \cdots, \cdot\|$ fonksiyonu aşağıdaki dört şartı sağlarsa, X üzerinde n-norm olarak adlandırılır ve $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ çiftine bir n-normlu uzay denir:

(1) $\|x_1, \cdots, x_n\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_1, \cdots, x_n$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır,

(2) $\|x_1, \cdots, x_n\|$ permütasyon altında değişmezdir,

(3) $\|x_1, \cdots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\|$, (keyfi $\alpha \in \mathbb{R}$ için),

(4) $\|x_1, \cdots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, \cdots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \cdots, x_{n-1}, z\|$.

n-normlu uzayın aşikar bir örneği, her bir $i = 1, 2, ..., n$ için

$$x_i = (x_{i1}, ..., x_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere aşağıdaki n-norm ile donatılmış $X = \mathbb{R}^n$ dir:

$$\|x_1, \cdots, x_n\|_E := abs \left(\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \right). \tag{4.1}$$

(Burada E alt indis Öklid için kullanılmıştır.) Örneğin, n normlu $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ uzayında, tüm $x_1, \cdots, x_n \in X$ ve $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ için

$$\|x_1, \cdots, x_n\| \geq 0$$

ve

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\| = \|x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}\|$$

olduğunu söyleriz.

Bu çalışmada, $n \geq 2$ olmak üzere her n-normlu uzayın bir $(n-1)$-normlu uzay olduğunu göstereceğiz ve böylece tümevarımla her $r = 1, \cdots, n-1$ için bir $(n-1)$ normlu uzay olduğunu göstereceğiz. Özellikle verilen bir n-normlu uzay için, n-normdan $(n-1)$-norm oluşturmak için basit bir yol sunacağız.

Ayrıca, sonuçlarımızı daha sonra tanımlanacak olan n-normlu uzaylarda tamlık ve yakınsaklık çalışmalarına uygulayacağız. Bu n-normlu uzaylar için bir Sabit Nokta Teoremi ispatlamamızı sağlar.

4.1 İlk Sonuçlar

Bundan sonra $n \geq 2$ ve $d \geq n$ olmak üzere $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ nin n-normlu bir uzay olduğunu kabul edeceğiz. X' de lineer bağımsız bir $\{a_1, \cdots, a_n\}$ küme alalım.
$\{a_1, \cdots, a_n\}$ e göre X^{n-1} üzerinde $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonunu

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-1}, a_i\| : i = 1, \cdots, n\} \tag{4.2}$$

ile tanımlayalım. O halde şu sonuca ulaşırız.

Teorem 4.1.1 $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$-normu tanımlar.

İspat 4.1.2 $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonunun bir $(n-1)$-normunun dört özelliğini sağladığını göstereceğiz.

(1) Eğer $x_1, \cdots, x_{n-1}$ lineer bağımlıysa, o zaman her $i = 1, \cdots, n$ için

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\| = 0$$

ve böylece

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty = 0$$

dır. Tersine, eğer $\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty = 0$ ise, o zaman $\|x_1, \cdots, x_{n-1}, a_i\| = 0$ ve her $i = 1, \cdots, n$ için $x_1, \cdots, x_{n-1}, a_i$ lineer bağımlıdır. Fakat, bu sadece $x_1, \cdots, x_{n-1}$ lineer bağımlı olduğu zaman mümkün olabilir.

(2) $\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ herhangi bir permütasyon altında $\|x_1, \cdots, x_{n-1}, a_i\|$ invaryant (değişmez) olduğundan, $\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty$ fonksiyonunda herhangi bir permütasyon altında invaryant (değişmez) olduğunu buluruz.

(3)

$$\begin{aligned} \|x_1, \cdots, x_{n-2}, \alpha x_{n-1}\|_\infty &= \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-2}, \alpha x_{n-1}, \alpha_i\| : i = 1, \cdots, n\} \\ &= |\alpha| \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, \alpha_i\| : i = 1, \cdots, n\} \\ &= |\alpha| \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}\|_\infty. \end{aligned}$$

elde edilir.

(4)

$$\begin{aligned}
\|x_1, \cdots, x_{n-2}, y+z\|_\infty &= \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-2}, y+z, \alpha_i\| : i = 1, \cdots, n\} \\
&\leq \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-2}, y, \alpha_i\| : i = 1, \cdots, n\} \\
&+ \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-2}, z, \alpha_i\| : i = 1, \cdots, n\} \\
&= \|x_1, \cdots, x_{n-2}, y\|_\infty + \|x_1, \cdots, x_{n-2}, z\|_\infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$, X üzerinde bir $(n-1)$-norm tanımlar.

Sonuç 4.1.3 Tüm $r = 1, \cdots, n-1$ için, her n-normlu uzay bir $(n-r)$-normlu uzaydır. Özellikle, her n-normlu uzay bir normlu uzaydır.

Uyarı 4.1.4 $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere genellikle

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_1, \cdots, x_{n-1}, \alpha_i\|^p \right\}^{1/p}$$

fonksiyonu ayrıca, X üzerinde bir $(n-1)$ norm tanımlar. Fakat, bu $(n-1)$-normları, $a_1, \cdots, a_n$ n vektörlerin kümesini aynı kullandığımız sürece $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonuna eşittirler. Bazı belli durumlarda, n vektörlerin farklı kümelerini kullansak bile, $(n-1)$-normlarına eşit olması mümkün olabilir.

Alışılmış Durum: Alışılmış bir örneğe göz atalım. X, $d \geq n$ boyutlu reel bir iç çarpım uzayı olsun. $< .,. >$, X üzerinde iç çarpımı olmak üzere, X standart n-norm

$$\|x_1, \cdots, x_n\|_S := \begin{vmatrix} < x_1, x_1 > & \cdots & < x_1, x_n > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < x_n, x_1 > & \cdots & < x_n, x_n > \end{vmatrix}^{1/2}. \tag{4.3}$$

ile birlikte donatılsın. (Eğer $X = \mathbb{R}^n$ ise, o zaman bu n norm daha öncede belirtildği gibi Öklid n norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_E$ ile tam olarak aynıdır.)

Farkına varmalıyız ki, $n = 1$ için yukarıdaki n norm, x_1 in uzunluğu olan

$$\|x_1\|_s =< x_1, x_1 >^{1/2}$$

alışılmış normdur, $n = 2$ iken de x_1 ve x_2 tarafından paralelkenarın alanını temsil eden

$$\|x_1, x_2\|_S = \{\|x_1\|_S^2 \|x_2\|_S^2 - < x_1, x_2 >^2\}^{1/2}$$

ile standart 2-normu tanımlar. Dahası, eğer $X = \mathbb{R}^3$ ise, o zaman

$$\|x_1, x_2, x_3\|_S = \|x_1, x_2, x_3\|_E$$

eşitliği, x_1, x_2 and x_3 tarafından belirlenen paralelkenarın hacminden başka birşey değildir. Genel olarak $\|x_1, \cdots, x_n\|_S$, X' de $x_1, \cdots, x_n$ tarafından belirlenen n-boyutlu paralellenarın hacmine karşılık gelir.

Şimdi, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ X' de bir ortonormal küme olsun. O zaman, Teorem 4.1.1 gereğince, aşağıdaki

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-1}, e_i\|_S : i = 1, \cdots, n\}$$

fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$-normu tanımlar. Dahası, aşağıdaki gerçeğe sahip oluruz:

Teorem 4.1.5 Standart bir X n-normlu uzay üzerinde, $\{e_1, \cdots, e_n\}$' e göre tanımlanan, türetilmiş $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$, standart $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_S$ ye eşittir. Açık olarak, tüm $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ için

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_S \leq \sqrt{n}\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

İspat. Kabul edelim ki $x_1, \cdots, x_{n-1}$ lineer bağımsız olsun. Her $i = 1, \cdots, n$ için

$$e_i^o \in span\{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \text{ ve } e_i^\perp \perp span\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$$

olmak üzere

$$e_i = e_i^o + e_i^\perp$$

yazalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|x_1,\cdots,x_{n-1},e_i\|_S &= \|x_1,\cdots,x_{n-1},e_i^{\perp}\|_S \\
&= \begin{vmatrix} <x_1,x_1> & \cdots & <x_1,x_{n-1}> & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ <x_{n-1},x_1> & \cdots & <x_{n-1},x_{n-1}> & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & <e_i^{\perp},e_i^{\perp}> \end{vmatrix}^{1/2} \\
&\le \begin{vmatrix} <x_1,x_1> & \cdots & <x_1,x_{n-1}> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <x_{n-1},x_1> & \cdots & <x_{n-1},x_{n-1}> \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_S
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_\infty \le \|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_S$$

sonucuna ulaşırız. Sonra, bir

$$e = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

birim vektör alalım öyle ki

$$e \perp span\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$$

olsun. (Burada biz hala $x_1,\cdots,x_{n-1}$ lineer bağımsız olduğunu varsayıyoruz.) O halde, özellikle n-normun (3) ve (4) özelliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_S &= \|x_1,\cdots,x_{n-1},e\|_S \\
&\le |\alpha_1|\|x_1,\cdots,x_{n-1},e_1\|_S + \cdots + |\alpha_n|\|x_1,\cdots,x_{n-1},e_n\|_S \\
&\le (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)\|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_\infty.
\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le \left\{\sum_{i=1}^{n} 1^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right\}^{1/2} = \sqrt{n}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_S \le \sqrt{n}\|x_1,\cdots,x_{n-1}\|_\infty$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Sonlu Boyutlu Durum. Sonlu boyutlu n-normlu $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ uzay için aşağıdaki yöntemden n-normdan genel olarak $(n-1)$-norm türetiriz. X'de $n \leq m \leq d$ ile bir lineer bağımsız $\{a_1, \cdots, a_m\}$ kümesini alalım. $\{a_1, \cdots, a_m\}$'e göre, X^{n-1} üzerinde $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonunu

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1, \cdots, x_{n-1}, \alpha_i\| : i = 1, \cdots, m\}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde, Teorem 4.1.1 deki gibi, $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$ norm tanımlar.

Daha sonra göreceğimiz gibi, n' den ziyade X' de lineer bağımsız bir vektör olan d' nin bir kümesi ile $(n-1)$-normu elde edebiliriz (yani, X için bir baz kullanarak).

4.2 Uygulamalar ve Ek Sonuçlar

Bir n-normlu $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ uzayında bir $x(k)$ dizisinin, her $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-1}, x(k) - x\| = 0$$

olduğunda $x \in X$' e yakınsadığını hatırlayalım.

Aşağıdaki önerme n-normda yakınsaklığın X de herhangi bir $\{a_1, \cdots, a_n\}$ lineer bağımsız kümeye göre tanımlı türetilmiş $(n-1)$-norm $\|., \cdots, .\|_\infty$ da yakınsaklığı sağladığını ifade eder.

Önerme 4.2.1 Eğer $x(k)$, n-normda $x \in X$ e yakınsarsa, bu durumda $x(k)$ ayrıca türetilmiş $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ da x' e yakınsar, yani her $x_1, \cdots, x_{n-2} \in X$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_\infty = 0$$

olur.

İspat 4.2.2 Eğer $x(k)$, n-normda herhangi bir $x \in X$ e yakınsarsa, o zaman her $x_1, \cdots, x_{n-2} \in X$ ve $i = 1, \cdots, n$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x, a_i\| = 0$$

ve böylece her $x_1, \cdots, x_{n-2} \in X$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_\infty = 0$$

yani, $x(k)$ türetilmiş $(n-1)$-normlu $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ uzayda x' e yakınsaktır.

Standart Durum. Standart bir n-normlu $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|_S)$ uzayda, özellikle türetilmiş $(n-1)$-normlu $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ uzayı bölüm 4.1' deki gibi X' de bir ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ kümeye göre tanımlı olduğunda, önerme 4.2.1 in tersi ayrıca doğru olsun.

Teorem 4.2.3 Bir standart n-normlu X uzayda bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart türetilmiş $(n-1)$-normlu $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ uzayda yakınsak olmasıdır.

İspat 4.2.4 Kabul edelim ki $x(k)$ türetilmiş $(n-1)$-normlu $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$ uzayda bir $x \in X$' e yakınsak olsun. $x(k)$ dizisinin ayrıca n-normlu uzayda da x' e yakınsadığını göstermek istiyoruz. $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ alalım. O zaman, $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_S$ ve $\|.\|_S$ X üzerinde sırasıyla, standart $(n-1)$-norm ve alışılmış norm olmak üzere,

$$\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x(k) - x\|_S \leq \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_s \|x_{n-1}\|_S$$

dir. Gerçek 4.1.5 ile

$$\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x(k) - x\|_S \leq \sqrt{n}\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_\infty \|x_{n-1}\|_S$$

elde edilir. Fakat

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_\infty = 0$$

ve böylece

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-1}, x(k) - x\|_S = 0$$

sonucuna ulaşırız yani, $x(k)$ n-normlu uzayda x' e yakınsaktır.

Sonuç 4.2.5 Bir standart n-normlu uzayda bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter şart standart $(n-1)$-normda ve indüksiyon ile tüm $r = 1, \cdots, (n-1)$ için $(n-r)$-normda yakınsak olmasıdır. Özellikle, standart bir n-normlu uzayda bir dizinin n-normda yakınsaması için gerek ve yeter şart alışılmış $\|.\||_S := < .,. >^{1/2}$-normda yakınsamasıdır.

Sonlu Boyutlu Durum. Sonlu boyutlu n-normlu $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ uzay içinde benzer sonuçlara sahip oluruz. Kabul edelim ki $\{b_1, \cdots, b_d\}$,X için bir baz olsun. $\{b_1, \cdots, b_d\}$ bazına göre, X^{n-1} üzerinde aşağıdaki $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_{\bowtie} := max\{\|x_1, \cdots, x_{n-1}, b_i\| : i = 1, \cdots, d\}.$$

O halde, daha önce belirtildiği gibi $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ fonksiyonu X üzerinde $(n-1)$-normu tanımlar. Türetilmiş $(n-1)$-norm ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 4.2.6 Sonlu boyutlu n-normlu X uzayında bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter şart türetilmiş $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ da yakınsak olmasıdır.

İspat 4.2.7 Eğer X üzerindeki bir dizi n-normda yakınsak ise, o zaman $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ da kesinlikle yakınsak olacaktır. Tersine $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ da $x(k)$' nın $x \in X$ e yakınsak olduğunu varsayalım. $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ olsun.

$$x_{n-1} = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_d b_d$$

yazarak

$$\begin{aligned}
\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x(k) - x\| &\leq |\alpha_1|\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x, b_1\| \\
&+ \cdots + |\alpha_d|\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x, b_d\| \\
&\leq (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_d|)\|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_{\bowtie}.
\end{aligned}$$

elde ederiz. Fakat

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-2}, x(k) - x\|_{\bowtie} = 0$$

ve böylece

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-1}, x(k) - x\| = 0$$

elde ederiz yani, $x(k)$ n-normda x' e yakınsar.

Standart, Ayrılabilir Durum.

X bölüm 4.1 deki gibi standart n-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_S$ ile donatılmış $d \geq n$ boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olmak üzere, standart duruma geri dönelim. Fakat şimdi varsayalım ki X ayrılabilir ve $I_d := \{1, \cdots, d\}$ ($d < \infty$ ise) veya N ($d = \infty$ ise), $\{e_i : i \in I_d\}$ X için bir ortonormal taban olsun. O zaman,her $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ için ve her $e_i (i \in I_d)$ baz vektör için, $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_S$ X üzerinde standart $(n-1)$-norm olmak üzere,

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}, e_i\|_S \leq \|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_S$$

elde edilir. Böylece, $\{e_i : i \in I_d\}$ ye göre X^{n-1} üzerinde $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ fonksiyonunu

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_{\bowtie} := \sup\{\|x_1, \cdots, x_{n-1}, e_i\|_S : i \in I_d\}$$

ile tanımlanabilir ve X üzerinde bir $(n-1)$-norm tanımladığı kontrol edilir. Üstelik iki türetilmiş $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\bowtie}$ ve $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_{\infty}$ $(n-1)$-norm arasında aşağıdaki ilişki vardır.

($\{e_1, \cdots, e_n\}$ ile ilgili olarak yalnızca ikinci olan tanımlanmış.) Her $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ için

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\bowtie \leq \|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_S \leq \sqrt{n}\|x_1, \cdots, x_{n-1}\|_\infty$$

dir. Böylece, sonuç olarak aşağıdaki gerçeği elde ederiz.

Gerçek 4.2.8 X standart bir n-normlu uzay üzerinde,türetilmiş iki $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$, $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\bowtie$ ve standart $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_S$ eşdeğerdir. Bu nedenle, standart bir n-normlu X uzayında bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter şart üç $(n-1)$-normun birinde yakınsak olmasıdır.

Cauchy Dizisi, Tamlık ve Sabit Nokta Teoremi. $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ n-normlu uzayda bir $x(k)$ dizisi için her $x_1, \cdots, x_{n-1} \in X$ olmak üzere

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x_1, \cdots, x_{n-1}, x(k) - x(l)\| = 0$$

ise (n-norma göre) $x(k)$'nın bir Cauchy dizisi olduğunu hatırlayalım. Eğer herhangi bir Cauchy dizisi X' de bir $x \in X$' e yakınsaksa o zaman(n norma göre) X'e tam denir. Bir tam n-normlu uzaya n-Banach uzayı denir.

"$x(k)$ x' e yakınsar" ile "$x(k)$ Cauchy dizisidir" ve "$x(k) - x$" ile "$x(k) - x(l)$" ifadeleri yer değiştirirse, Önerme 4.2.1, Gerçek 4.2.3, Sonuç 4.2.5, Önerme 4.2.6 ve Gerçek 4.2.8' de elde edilen sonuçlar Cauchy dizi için de geçerlidir.

Böylece standart veya sonlu boyutlu durum için aşağıdaki sonuca ulaşırız:

Önerme 4.2.9 (a) Standart bir n-normlu uzayın tam olması için gerek ve yeter şart $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\infty$, $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\bowtie$ veya $\|., \cdots, .\|_S$ üç $(n-1)$-normların birine göre tam olmasıdır. Tümevarım ile standart bir n-normlu uzayın tam olması için gerek ve yeter şart standart $\|.\|_S :=< ., . >^{1/2}$ norma göre tam olmasıdır.

(b) Sonlu boyutlu bir n-normlu uzayın tam olması için gerek ve yeter şart türetilmiş $(n-1)$-norm $\|\cdot, \cdots, \cdot\|_\bowtie$' a göre tam olmasıdır.

Netice olarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.2.10 (Sabit Nokta Teoremi) $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ standart veya sonlu boyutlu n-Banach uzayı ve T, X ten X e bir büzülme dönüşümü,(yani sabit bir $C \in (0,1)$ var öyleki, X de tüm $x_1, \cdots, x_{n-1}, y, z$ için

$$\|x_1, \cdots, x_{n-1}, T_y - T_z\| \leq C\|x_1, \cdots, x_{n-1}, y - z\|$$

olsun.) O zaman T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat 4.2.11 . Önce $n = 2$ durumunu gösterelim. Önerme 4.2.9 e göre, X in türetilmiş $\|.\|_\infty$ (standart durum için) veya $\|.\|_{\bowtie}$ (sonlu boyutlu durum için) normuna göre bir Banach uzayı olduğunu biliyoruz. $\|.\|_\infty$ veya $\|.\|_{\bowtie}$ ile T büzülme dönüşümü olduğu için Banach uzayları için sabit nokta teoremi ile T nin X de biricik sabit nokta olduğu sonucuna ulaşırız.

$n > 2$ için, aşağıdaki sonuca tümevarımla ulaşırız.

Uyarı 4.2.12 Sonlu boyutlu durumda, X in n-normlu uzay olduğunu kabul etmek aslında yeterlidir. Çünkü sonlu boyutlu normlu uzayın tam olduğunu biliyoruz ve Önerme 4.2.9 den böylece tüm sonlu boyutlu n-normlu uzaylar tamdır.

4.3 Nihai Sonuç

$n \geq 2$ olmak üzere bir n-normlu uzayın $(n-1)$-normlu uzay olduğunu ve standart veya sonlu boyutlu durum için $(n-1)$-normun n-normdan türetilebildiğini ve bu yolla n-normda yakınsaklık ve tamlığın türetilmiş $(n-1)$-normdakilerle eşdeğer olduğunu göstermiştik

Aşağıdaki örnek, standart olmayan ve sonsuz boyutlu 2-normlu uzayın bir örneği olup, 2-normlu uzaydan bir norm üretebileceğimizi öyleki 2-normlu uzayda yakınsaklık ve tamlığın türetilmiş normdakilere eşit olduğunu gösterir.

$X = \ell^\infty$ reel sayılar olmak üzere sınırlı dizilerin uzayı olsun. X, $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$ olmak üzere,

$$\|x, y\| := \sup_{i \in N} \sup_{j \in N} |x_i y_j - x_j y_i|$$

2-normla donatılmış olsun.

$$a_1 = (1, 0, 0, \cdots) \text{ ve } a_2 = (0, 1, 0, \cdots)$$

alalım. $\{a_1, a_2\}$ ye göre

$$\|x\|_\infty := \max\{\|x, a_1\|, \|x, a_2\|\}$$

üzerinde $\|.\|_\infty$ normu türetilir. Fakat

$$\|x, a_1\| = \sup_{i \in N \setminus \{1\}} |x_i| \quad ve \quad \|x, a_2\| = \sup_{i \in N \setminus \{2\}} |x_i|,$$

olup buradan l^∞ üzerinde

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in N} |x_i|$$

genel normunu elde ederiz.

Şimdi kabul edelim ki $x(k)$ türetilmiş $\|.\|_\infty$ normunda x' e yakınsayan bir dizi olsun. Her $y \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|x(k)-x,y\| &= \sup_{i\in N}\sup_{j\in N} |(x_i(k)-x_i)y_j - (x_j(k)-x_j)y_i| \\
&\leq \sup_{i\in N}\sup_{j\in N} |x_i(k)-x_i||y_j| - |x_j(k)-x_j||y_i| \\
&\leq 2\|x(k)-x\|_\infty \|y\|_\infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k)-x,y\| = 0$$

dır. Buradan, $x(k)$ 2-norm $\|.,.\|$ da x' e yakınsar.

Böylece, bu özel örnek için, görüyoruz ki 2-normda yakınsama türetilmiş normdakine eşdeğerdir. Benzer idaalarla 2-normda tamlık, türetilmiş normadaki tamlığa eşdeğerdir.

5 n-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Reddy (2010) tarafından çalışılmış olan n-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi ile ilgili tanım, teorem ve özellikleri vereceğiz.

Üçüncü bölümde n-normlu uzay tanımını vermiştik. n-normlu uzayların basit bir örneği; her $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$x_i = (x_{i1}, \cdots, x_{in}) \in R^n$$

olmak üzere, aşağıdaki Öklidyen n-norm

$$\|x_1, x_2, \cdots, x_n\|_E = |\det(x_{ij})| = abs\left(\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

ile donatılmış $X = R^n$ dir:

$(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$, boyutu $d \geq n$ olmak üzere, sonlu boyutlu n-normlu bir uzay ve $u = \{u_1, u_2, \cdots, u_d\}$, X' in bazı olsun. X^{n-1} üzerinde $\|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|_\infty$ normunu

$$\|x, z_2, \cdots, z_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x, z_2, \cdots, z_{n-1}, u_i\| : i = 1, 2, \cdots, d\}$$

olarak tanımlayabiliriz.

Türetilmiş $\|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|_\infty$ normla ilgili olarak, merkezi x yarıçapı r olan $B_u(x, \varepsilon)$ (kapalı) yuvarını,

$$\|x - y, z_2, \cdots, z_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x - y, z_2, \cdots, z_{n-1}, u_j\| : j = 1, 2, \cdots, d\}$$

olmak üzere

$$B_u(x, \varepsilon) := \{y : \|x - y, z_2, \cdots, z_{n-1}\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

ile tanımlayabiliriz.

5.1 n-Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, n-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtacak ve çalışmanın temel sonuçlarını vereceğiz.

Tanım 5.1.1 $\{x_k\}$, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ n-normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve X de sıfırdan farklı her bir $z_2, \cdots, z_n \in X$ için

$$\{k \in N : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, $\{x_k\}$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır, denir. Diğer bir değişle, X de sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}|\{k : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $\{x_k\}$, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ n-normlu uzayda L ye istatistiksel yakınsaktır. Demek ki her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için,

$$\|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \varepsilon, \text{ (h.h.k. için,)}$$

dir. Bu durumda,

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

yazabiliriz.

Uyarı 5.1.2 $\{x_k\}$, X' de herhangi bir dizi ve L, X in herhangi bir elemanı ise o zaman, $i = 2, 3, \cdots, n$ için eğer $z_i = \overline{0}$ (0 vektör) ise

$$\|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = 0 \ngeq \varepsilon$$

olduğundan dolayı

$$\{k \in N : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon, \text{ her } z_2, z_3, \cdots, z_n \in X \text{ için}\} = 0$$

kümedir. Böylece, yukarıdaki küme boştur.

Eğer $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ n-normlu uzayda bir dizi yakınsak ise, herhangi sonlu kümenin doğal yoğunluğu 0 olduğundan dolayı,bu dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Bu iddianın aksi genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnekte bu durum görülebilir.

Örnek 5.1.3 $X = R^n$, her $i = 1, 2, \cdots, n$ için

$$x_i = (x_{i1}, \cdots, x_{in}) \in R^n$$

olmak üzere,

$$\|x_1, x_2, \cdots, x_n\| = |\det(x_{ij})| = abs\left(\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}\right)$$

formülü ile n-normla donatılmış olsun.

$(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ n-normlu uzayda,

$$x_k = \begin{cases} (1, 1, \cdots, 1, k), k = m^2, m \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ (1, 1, \cdots, 1, \frac{k-1}{k}), \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile $\{x_k\}$ dizisini tanımlayalım.

$L = (1, 1, \cdots, 1, 1)$ ve $i = 2, 3, \cdots, n$ için $z_i = (z_{i1}, \cdots, z_{in})$ alalım. Eğer, $i = 2, 3, \cdots, n$ için $z_{i1} = 0$ ise, o zaman her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$K = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} = 0$$

dır. Böylece, $\delta(K) = 0$ olur. Bu durumda, $i = 2, 3, \cdots, n$ için $z_{i1} \neq 0$ elde ederiz. Her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : k \neq m^2, m \leq \frac{|\det(z_{i1})|}{\varepsilon}, i = 2, 3, \cdots, n-1\}$$

bir sonlu kümedir, böylece

$$\begin{aligned} & \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} \\ = & \left\{k \in \mathbb{N} : k = m^2, m \geq \sqrt{\Big(\frac{\varepsilon}{|\det(z_{i1})|} + 1\Big)}, i = 2, 3, \cdots, n-1\right\} \\ \bigcup & \ \{\text{sonlu küme}\} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda, X te her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k}|\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}| \\ = & \frac{1}{k}\left|\left\{k \in \mathbb{N} : k = m^2, m \geq \sqrt{\Big(\frac{\varepsilon}{|\det(z_{i1})|} + 1\Big)}, i = 2, 3, \cdots, n-1\right\}\right| \bigcup \frac{1}{k} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir ki bu

$$st - \lim_{k \to \infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

anlamına gelir. Fakat, $\{x_k\}$ dizisi L ye yakınsak değildir.

Örnek 5.1.4 n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayında $\{x_k\}$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} (0,0,\cdots,0,n), k = m^2, m \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ (0,0,\cdots,0,0), \text{ diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ile tanımlayalım ve $L = (0,0,\cdots,0,0)$ ve $z_i = (z_{i1},\cdots,z_{in})$ tanımlayalım. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 4, 9, 16, \cdots, k^2, \cdots\}$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde ederiz. Bu

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

olmasını gerektirir. Fakat, $\{x_k\}$ dizisi L ye yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmez. Bu gerçek, Örnek 5.1.3 ve 5.1.4 den görülebilir.

Teorem 5.1.5 $\{x_k\}$, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ n-normlu uzayında bir dizi ve $L, L^{'} \in X$ olsun. Eğer

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

ve

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

ise o zaman, $L = L^{'}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $L \neq L^{'}$ olsun. O halde $L - L^{'} \neq \overline{0}$ ve böylece $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ vardır öyle ki $L - L^{'}$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n$ lineer bağımsızdır ($d \geq n$ olduğundan, $z_2, z_3, \cdots, z_n$ vardır). Bu nedenle, $\varepsilon > 0$ için

$$\|L - L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = 2\varepsilon$$

dır. Şimdi

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= \|(L - x_k) + (x_k - L^{'}), z_2, z_3, \cdots, z_n\| \\ &\leq \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| + \|x_k - L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \end{aligned}$$

ve böylece,

$$\{k : \|x_k - L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \varepsilon\} \subseteq \{k : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}$$

dir. Fakat

$$\delta(\{k : \|x_k - L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \varepsilon\}) = 0$$

olduğundan, bu $x_k \to L^{'}$ (istatistiksel olarak) gerçeği ile çelişir. $\square$

Teorem 5.1.6 $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$, n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayında birer dizi olsun. Eğer $\{y_k\}$ yakınsak bir dizi öyleki $x_k = y_k$ *h.h.k.* ise, o halde $\{x_k\}$ istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\}) = 0 \quad ve \quad \lim_{k\to\infty} \|y_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

olsun. O zaman,her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\begin{aligned} &\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} \\ \subseteq\ &\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} \ \bigcup\ \{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} &\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) \\ \leq\ &\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) \ + \ \delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\}). \qquad (1) \end{aligned}$$

Her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

olduğu için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu sayıda tamsayı içerir. Böylece,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

dır. (1) eşitsizliğini kullanarak, her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$st-\lim_{k\to\infty}\|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.7 $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$, n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayda birer dizi olmak üzere $L, L^{'} \in X$ ve $a \in R$ olsun. Sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st-\lim_{k\to\infty}\|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

ve

$$st-\lim_{k\to\infty}\|y_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

ise, o zaman

(i) Sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st-\lim_{k\to\infty}\|x_k + y_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L + L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\|,$$

(ii) Sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st-\lim_{k\to\infty}\|ax_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|aL, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st-\lim_{k\to\infty}\|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

ve

$$st-\lim_{k\to\infty}\|y_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$

$$K_1 = K_1(\varepsilon) := \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon) := \left\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere, $\delta(K_1) = 0$ ve $\delta(K_2) = 0$' dır.

$$K = K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : \|(x_k + y_k) - (L + L^{'}), z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}$$

olsun. $\delta(K)=0$ olduğunu ispatlamak için

$$K \subset K_1 \cup K_2$$

olduğunu göstermek yeterlidir.$n_0 \in K$ olsun. O halde

$$\|(x_{n_0}+u_{n_0})-(L+L^{'}), z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon \qquad (2)$$

elde edilir.

Tersine $n_0 \notin K_1 \cup K_2$ olsun. O halde $n_0 \notin K_1$ ve $n_0 \notin K_2$'dir. Eğer $n_0 \notin K_1$ ve $n_0 \notin K_2$ ise o halde

$$\|x_{n_0}-L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ve \quad \|y_{n_0}-L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned} \|(x_{n_0}+y_{n_0})-(L+L^{'}), z_2, z_3, \cdots, z_n\| &\leq \|x_{n_0}-L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \\ &+ \|y_{n_0}-L^{'}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu durum (2) ile çelişmektedir. Böylece $n_0 \in K_1 \bigcup K_2$ yani, $K \subset K_1 \bigcup K_2$ dir.

(ii) Kabul edelim ki

$$st-\lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|, \quad a \in R$$

ve $a \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k-L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\right)=0$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \{k \in \mathbb{N} : \|ax_k-aL, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} &= \{k \in \mathbb{N} : |a|\|x_k-L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k-L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\} \end{aligned}$$

olur. Böylece, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı 0 a eşittir. Bu nedenle sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st-\lim_{k\to\infty} \|ax_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|aL, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

elde edilir. □

5.2 n-Normlu Uzaylarda İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu kısımda, n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayda istatistiksel Cauchy dizisi tanımını ve bazı özelliklerini verelim.

Tanım 5.2.1 n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayda bir $\{x_k\}$ dizisi, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her sıfırdan farklı $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için bir $N = N(\varepsilon, z_2, z_3, \cdots, z_n)$ sayısı vardır öyle ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_N, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani, her sıfırdan farklı $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\|x_k - x_N, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \varepsilon, \text{ h.h.k için}$$

ise, X' de istatistiksel Cauchy dizisidir, denir.

Teorem 5.2.2 $\{x_k\}_{k\geq 1}$, sonlu boyutlu n-normlu bir $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayında bir istatistiksel Cauchy dizisi olsun. O halde, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayında yakınsak bir $\{y_k\}_{k\geq 1}$ dizisi vardır öyleki h.h.k için $x_k = y_k$' dır.

İspat. İlk olarak $\{x_k\}_{k\geq 1}$, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|_\infty)$ da bir istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bir doğal sayı $N(1)$ seçelim öyleki kapalı $B_u^1 = B_u(x_{N(1)}, 1)$ yuvarı h.h.k için x_k' yı içersin. O halde, bir doğal sayı $N(2)$ seçelim öyleki kapalı $B_2 = B_u(x_{N(1)}, \frac{1}{2})$ yuvarı h.h.k için x_k' yı içersin. Ayrıca, $B_u^2 = B_u^1 \bigcap B_2$ h.h.k için x_k' yı içerir. Böylece, bu işleme devam edersek iç içe kapalı yuvarların bir $\{B_u^m\}_{m\geq 1}$ dizisini elde edebiliriz öyleki $\text{diam}(B_u^m) \leq \frac{1}{2^m}$' dir. Bu nedenle,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} B_u^m = \{A\}$$

dır. Her bir B_u^m h.h.k için x_k' yı içerdiğinden dolayı, kesin artan doğal sayıların bir $\{T_m\}_{m\geq 1}$ dizisini seçebiliriz öyleki

$$\frac{1}{k}|\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_u^m\}| < \frac{1}{m}, k > T_m \;\; ise$$

dir. Her $m \geq 1$ için

$$W_m = \{k \in \mathbb{N} : k > T_m, x_k \notin B_u^m\}$$

alalım ve $W = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m$ olsun.

Şimdi, $\{y_k\}_{k\geq 1}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$y_k = \begin{cases} A, & k \in W \text{ ise} \\ x_k, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

Burada, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = A$ olur. Aslında her $\varepsilon > 0$ için bir m doğal sayısı seçelim öyleki $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ olsun. O halde herbir $k > T_m$ veya $y_k = A$ veya $y_k = x_k \in B_u^m$ için ve böylece her durumda,

$$\|y_k - A, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}\|_\infty \leq \operatorname{diam}(B_u^m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

dir.

$$\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_u^m\}$$

olduğu için,

$$\frac{1}{k}|\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{k}|\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_u^m\}| < \frac{1}{m}$$

diyebiliriz. Böylece,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq x_k\}) = 0$$

dır. Bu nedenle $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|_\infty)$ uzayda h.h.k için $x_k = y_k$ dır. Kabul edelim ki $\{u_1, u_2, \cdots, u_d\}$, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ için bir baz olsun. Her $1 \leq i \leq d$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - A, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}\|_\infty = 0$$

ve

$$\|y_k - A, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}, u_i\| \leq \|y_k - A, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}\|_\infty$$

olduğu için her $z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}, z_n \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - A, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}, z_n\|_\infty = 0$$

dır. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 5.2.3 $\{x_k\}$, n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayında bir dizi olsun. $\{x_k\}$ dizisinin istatistiksel yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart $\{x_k\}$' nın bir istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

olsun. O halde, her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$\|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ h.h.k için}$$

elde ederiz. Eğer $N = N(\varepsilon, z_2, z_3, \cdots, z_n)$ seçilirse öyleki

$$\|x_N - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} \|x_k - x_N, z_2, z_3, \cdots, z_n\| &\leq \|x_k - L, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \\ &+ \|L - x_N, z_2, z_3, \cdots, z_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ h.h.k için} \\ &= \varepsilon, \text{ h.h.k. için} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\{x_k\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tersine, kabul edelim ki $\{x_k\}$ bir istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Teorem 5.2.2 gereğince, $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ de bir $\{y_k\}$ yakınsak dizisi vardır. Yani, h.h.k için $x_k = y_k$ dır. Teorem 5.1.6 gereğince, her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

elde ederiz. □

Teorem 5.2.4

$\{x_k\}$, n-normlu $(X, \|\bullet, \bullet, \cdots, \bullet\|)$ uzayında bir dizi öyle ki her $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

ise o halde, $\{x_k\}$ dizisi $\{x_{k_i}\}$ alt dizisine sahiptir öyleki her sıfırdan farklı $z_2, z_3, \cdots, z_n \in X$ için

$$st - \lim_{i\to\infty} \|x_{k_i}, z_2, z_3, \cdots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \cdots, z_n\|$$

dir.

6 n-NORMLU UZAYLARDA λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu kısımda, Hazarika ve Savaş (2013) tarafından çalışılan n-normlu uzaylarda λ-istatistiksel yakınsaklık ile ilgili tanım, teorem ve özellikleri vereceğiz.

$\lambda = (\lambda_m)$ pozitif sayıların ∞ a giden azalmayan bir dizisi olsun öyle ki

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \lambda_1 = 1$$

dir. Böyle λ dizilerinin koleksiyonu Δ ile gösterilecektir.

Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması, $I_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere

$$t_m(x) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} x_k$$

ile tanımlanır.

Tanım 6.0.1 $x = (x_k)$ dizisi eğer, $m \to \infty$ iken

$$t_m(x) \to l$$

ise bir l sayısına (V, λ)-toplanabilirdir, denir.

Eğer, $\lambda_m = m$ ise, o zaman (V, λ)-toplanabilirlik, $(C, 1)$-toplanabilirliğe indirgenir. $x = (x_k)$ dizisinin kümeleri için

$$[C, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |x_k - l| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} |x_k - l| = 0 \right\}$$

yazabiliriz öyleki $x = (x_k)$ dizileri kuvvetli *Cesàro* toplanabilir ve l ye kuvvetli (V, λ) toplanabilirdir. Yani sırasıyla,

$$(x_k) \overset{[C,1]}{\to} l \text{ ve } (x_k) \overset{[V,\lambda]}{\to} l$$

dir (Leindler 1965).

Tanım 6.0.2 $x = (x_k)$ dizisi kompleks sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l ye λ-istatistiksel yakınsaktır veya l ye S_λ-yakınsaktır denir.

Bu durumda, $S_\lambda - \lim_x = l$ veya $(x_k) \overset{S_\lambda}{\rightarrow} l$ ve

$$S_\lambda = \{x = (x_k) : \exists l \in R, \;\; S_\lambda - \lim x = l\}$$

yazabiliriz.

$\lambda_m = m$ ise, o halde S_λ nın S ile aynı olduğu açıktır. (Mursaleen 2000).

$S^{nN}(X)$ ile n-normlu X uzayında istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterelim.

Bu kısımda, n-normlu uzaylarda λ-istatistiksel yakınsaklığı inceleyeceğiz. Reel sayıların n-normlu uzaylardaki dizilerin λ-istatistiksel yakınsaklığının bazı özellikleri olduğunu göstereceğiz. n-normlu uzayda istatistiksel yakınsak, λ-istatistiksel yakınsaklık, $(C, 1)$-toplanabilme ve kuvvetli (V, λ)-toplanabilme arasında bazı ilişkileri bulacağız.

Tanım 6.0.3 n-normlu $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ uzayındaki bir $x = (x_k)$ dizisi için, her $\varepsilon > 0$ ve her $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1} \in X$ olmak üzere

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise n-norma göre λ-istatistiksel yakınsak veya $l \in X$ ye S_λ-yakınsaktır, denir. Bu durumda,

$$S_\lambda^{nN} - \lim x = l \text{ veya } (x_k) \overset{S_\lambda^{nN}}{\rightarrow} l$$

ve

$$S_\lambda^{nN}(X) = \{x = (x_k) : \exists l \in R, S_\lambda^{nN} - limx = l\}$$

olarak yazabiliriz.

n-normlu X uzayında λ-istatisitiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\lambda^{nN}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 6.0.4 n-normlu bir $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi için,eğer

$$m \to \infty \text{ iken } \quad t_m(x) \to l$$

ise $l \in X$ e n-norma göre (V, λ)-toplanabilirdir, denir.

$\lambda_m = m$ ise, o halde n-norma göre, (V, λ)-toplanabilirlik, $(C, 1)$-toplanabilirliğe indirgenir. X-değerli $x = (x_k)$ dizilerinin kümeleri için

$$[C, \lambda]^{nN}(X) = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| = 0 \right\}$$

ve

$$[V,\lambda]^{nN}(X)=\left\{x=(x_k):\exists l\in R,\ \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}\sum_{k\in I_m}\|x_k-l,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|=0\right\}$$

yazılabilir öyleki $x=(x_k)$ dizileri n-norma göre l ye kuvvetli Cesáro toplanabilir ve (V,λ)-kuvvetli toplanabilirdir yani, sırasıyla

$$(x_k)\overset{[C,1]^{nN}}{\longrightarrow} l \text{ ve } (x_k)\overset{[V,\ \lambda]^{nN}}{\longrightarrow} l$$

elde edilir.

Teorem 6.0.5 X bir n-normlu uzay ve $\lambda=(\lambda_n)\in\Delta$ olsun. (x_k), X de bir dizi öyle ki $S_\lambda^{nN}-\lim x_k=l$ varsa, o halde tektir.

İspat. Kabul edelim ki X de l_1,l_2 $(l_1\neq l_2)$ elemanları var öyle ki

$$S_\lambda^{nN}-\lim_{k\to\infty}x_k=l_1;\quad S_\lambda^{nN}-\lim_{k\to\infty}x_k=l_2$$

olsun. $l_1\neq l_2$ olduğundan, $l_1-l_2\neq 0$ ve böylece $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\in X$ vardır öyleki l_1-l_2 ve $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$ lineer bağımsızdır. Bu yüzden

$$\|l_1-l_2,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|=2\varepsilon>0$$

dır.

$$S_\lambda^{nN}-\lim_{k\to\infty}x_k=l_1 \text{ ve } S_\lambda^{nN}-\lim_{k\to\infty}x_k=l_2$$

olduğundan aşağıdakiler geçerlidir:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}|\{k\in I_m:\|x_k-l_1,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\varepsilon\}|=0$$

ve

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda_m}|\{k\in I_m:\|x_k-l_2,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde $k\in I_m$ vardır öyle ki

$$\|x_k-l_1,z_1,z_1,\cdots,z_{n-1}\|<\varepsilon \text{ ve } \|x_k-l_2,z_1,z_1,\cdots,z_{n-1}\|<\varepsilon$$

dir. Ayrıca, bu k için

$$\begin{aligned}\|l_1-l_2,z_1,z_1,\cdots,z_{n-1}\| &\leq \|x_k-l_1,z_1,z_1,\cdots,z_{n-1}\|+\|x_k-l_2,z_1,z_1,\cdots,z_{n-1}\|\\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz öyleki bu bir çelişkidir. Bu ispatı tamamlar. □

Şimdi vereceğimiz teorem n-normlu uzay üzerinde λ-istatistiksel yakınsaklığın cebirsel karakterizasyonunu verir:

Teorem 6.0.6 X bir n-normlu uzay olsun. $\lambda = (\lambda_n) \in \Delta$, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ X de iki dizi olsun.

(a) $S_\lambda^{nN} - \lim_{k\to\infty} x_k = l$ ve $c\ (\neq 0) \in R$ için $S_\lambda^{nN} - \lim_{k\to\infty} c.x_k = c.l$ olur.

(b) $S_\lambda^{nN} - \lim_{k\to\infty} x_k = l_1$ ve $S_\lambda^{nN} - \lim_{k\to\infty} y_k = l_2$ ise o zaman

$$S_\lambda^{nN} - \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = l_1 + l_2$$

olur.

İspat. Teoremin ispatı açık olduğundan vermeden geçeceğiz. □

Teorem 6.0.7 X bir n-Banach uzayı ise $S_\lambda^{nN}(X) \cap \ell_\infty(X)$, $\ell_\infty(X)$ nin kapalı bir alt kümesidir.

İspat. Kabul edelim ki $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$, $x^i = (x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$, $S_\lambda^{nN}(X) \cap \ell_\infty(X)$' de $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ e yakınsayan yakınsak bir dizidir.

$$x \in S_\lambda^{nN}(X) \cap \ell_\infty(X)$$

olduğunu ispat etmemiz gerekir. Her $i \in N$ için $(x_k^i)_k \overset{S_{\lambda^{nN}}}{\to} \ell_i$ olduğunu kabul edelim. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}$ olmak üzere azalan pozitif bir $(\varepsilon_i)_{i\in N}$ yakınsak dizisini alalım. Açıkça $(\varepsilon_i)_{i\in N}$, 0 a yakınsar. i pozitif bir tamsayısını seçelim öyle ki her $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1} \in X$ için

$$\|x - x^i, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\|_\infty < \frac{\varepsilon_i}{4}$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m}|\{k \in I_m : \|x_k^i - l_i, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon_i}{4}\}| = 0$$

ve

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m}|\{k \in I_m : \|x_k^{i+1} - l_{i+1}, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon_{i+1}}{4}\}| = 0$$

olur. $m \in N$ için

$$\frac{1}{\lambda_m}|\{k \in I_m : \|x_k^i - \ell_i, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon_i}{4} \quad \vee$$

$$\|x_k^{i+1}-l_{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\frac{\varepsilon_{i+1}}{4}\}|<1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}&\{k\in I_m:\|x_k^{i}-l_{i},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\frac{\varepsilon_{i}}{4}\}\\ \cap&\{k\in I_m:\|x_k^{i+1}-l_{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\frac{\varepsilon_{i+1}}{4}\}\end{aligned}$$

sonsuzdur. Dolayısıyla bunun için bir $k\in I_m$ olması gerekir öyleki aynı anda

$$\|x_k^{i}-l_{i},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|<\frac{\varepsilon_{i}}{4}\text{ ve }\|x_k^{i+1}-l_{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|<\frac{\varepsilon_{i+1}}{4}$$

olur. O zaman,aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\|l_i-l_{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\| &\leq \|l_i-x_k^i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\\ &+ \|x_k^i-x_k^{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\\ &+ \|x_k^{i+1}-l_{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\\ &\leq \|x_k^i-l_i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\\ &+ \|x_k^{i+1}-l_{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\\ &+ \|x-x^i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|_\infty\\ &+ \|x-x^{i+1},z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|_\infty\\ &< \frac{\varepsilon_i}{4}+\frac{\varepsilon_{i+1}}{4}+\frac{\varepsilon_i}{4}+\frac{\varepsilon_{i+1}}{4}<\varepsilon_i.\end{aligned}$$

Bu (l_i) nin X de bir Cauchy dizisi olmasını sağlar ve burada bir $l\in X$ elemanı vardır öyleki $i\to\infty$ iken $l_i\to l$ olur. $(x_k)\overset{S_\lambda^{nN}}{\to} l$ olduğunu ispatlamamız gerekir. $\varepsilon>0$ için $i\in\mathbb{N}$ seçilir öyleki $\varepsilon_i<\frac{\varepsilon}{4}$,

$$\|x_k-x_k^i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|_\infty<\frac{\varepsilon}{4},\quad \|l_i-l,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|<\frac{\varepsilon}{4}$$

dir. O halde, $m\to\infty$ iken

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda_m}|\{k\in I_m:\|x_k-l,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\varepsilon\}|\\ \leq&\ \frac{1}{\lambda_m}|\{k\in I_m:\|x_k^i-l_i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\\ +&\ \|x_k-x_k^i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|_\infty+\|l_i-l,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\varepsilon\}|\\ \leq&\ \frac{1}{\lambda_m}|\{k\in I_m:\|x_k^i-l_i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\geq\varepsilon\}|\\ \leq&\ \frac{1}{\lambda_m}|\{k\in I_m:\|x_k^i-l_i,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}|\to 0\end{aligned}$$

olur. Bu $(x_k)\overset{S_\lambda^{nN}}{\to} l$ olduğunu verir. İspat tamamlanır. □

Teorem 6.0.8 X bir n-normlu uzay ve $\lambda = (\lambda_m) \in \Delta$ olsun. O halde,

(i) $(x_k) \overset{[V,\lambda]^{nN}}{\to} l \Rightarrow (x_k) \overset{S_\lambda^{nN}}{\to} l$,

(ii) $[V,\lambda]^{nN}(X)$, $S_\lambda^{nN}(X)$ in özel bir altkümesidir.

(iii) $x \in l_\infty(X)$ ve $(x_k) \overset{S_\lambda^{nN}}{\to} l$ ise o zaman $(x_k) \overset{[V,\lambda]^{nN}}{\to} l$ ve böylece $(x_k) \overset{[C,1]^{nN}}{\to} l$, neticede $x = (x_k)$ sabit olmadığını sağlar.

(iv) $S_\lambda^{nN}(X) \cap \ell_\infty(X) = [V,\lambda]^{nN}(X) \cap \ell_\infty(X)$ dir.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ ve $(x_k) \overset{[V,\lambda]^{nN}}{\to} l$ ise

$$\sum_{k \in I_m} \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq$$

$$\geq \sum_{k \in I_m, \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon} \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq$$
$$\geq \varepsilon |\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}|$$

ve böylece

$$\frac{1}{\varepsilon\lambda_m} \sum_{k \in I_m} \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq$$

$$\frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}|$$

dir.

(ii)

$$[V,\lambda]^{nN}(X) \subset S_\lambda^{nN}(X)$$

kapsamasını kurmak için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} k, m - [\sqrt{\lambda_m}] + 1 \leq k \leq m \text{ ise} \\ 0, \text{ diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $x \notin l_\infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için $(0 < \varepsilon < 1)$,

$$\frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} \|x_k - 0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \leq \frac{[\sqrt{\lambda_m}]}{\lambda_m} \to 0, \ \ m \to \infty,$$

yani

$$(x_k) \overset{S_\lambda^{nN}}{\to} 0$$

olur. Diğer yandan,

$$\frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : \|x_k - 0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \to \infty, m \to \infty,$$

yani $[V,\lambda]^{nN}(X)$ de (x_k), 0 a yakınsamaz.

(iii) Kabul edelim ki $(x_k) \overset{S_\lambda^{nN}}{\to} l$ ve $(x_k) \in l_\infty(X)$ olsun. O zaman, bir $M > 0$ vardır öyle ki her $k \in N$ için

$$\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \leq M$$

dir. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda_m}\sum_{k\in I_m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
= & \frac{1}{\lambda_m}\sum_{k\in I_m, \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
+ & \frac{1}{\lambda_m}\sum_{k\in I_m, \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| < \frac{\varepsilon}{2}}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
\leq & \frac{M}{\lambda_m}|\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $(x_k) \overset{[V,\lambda]^{nN}}{\to} l$ olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \leq & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-\lambda_m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
+ & \frac{1}{m}\sum_{k\in I_m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
\leq & \frac{1}{\lambda_m}\sum_{k=1}^{m-\lambda_m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
+ & \frac{1}{\lambda_m}\sum_{k\in I_m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \\
\leq & \frac{2}{\lambda_m}\sum_{k\in I_m}\|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\|
\end{aligned}$$

dir. Böylece, $(x_k) \overset{[V,\lambda]^{nN}}{\to} l$ olduğundan, $(x_k) \overset{[C,1]^{nN}}{\to} l$ dir.

(iv) Bu *(i)*,*(ii)* ve *(iii)*' nin bir sonucudur. □

Teorem 6.0.9 X, n-normlu bir uzay ve $\lambda = (\lambda_m) \in \Delta$ olsun. O zaman $S^{nN}(X) \subset S_\lambda^{nN}(X)$ gerek ve yeter şart $\liminf_m \frac{\lambda_m}{m} > 0$' dır.

İspat. İlk olarak $\liminf_m \frac{\lambda_m}{m} > 0$ olsun. O zaman verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m}|\{k \leq m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \geq \\
\geq & \frac{1}{m}|\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \\
\geq & \frac{\lambda_m}{m}.\frac{1}{\lambda_m}|\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

dir. Bu ise

$$(x_k) \overset{S^{nN}}{\to} l \Rightarrow (x_k) \overset{S_\lambda^{nN}}{\to} l$$

demektir. Böylece

$$S^{nN}(X) \subset S_\lambda^{nN}(X)$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki

$$\liminf_m \frac{\lambda_m}{m} = 0$$

olsun. O zaman bir $(m(j))_{j=1}^{\infty}$ altdizisini seçebiliriz öyle ki

$$\frac{\lambda_{m(j)}}{m(j)} < \frac{1}{j}$$

dir. Bir $x = (x_k)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$x_k = \begin{cases} 1, k \in I_{m(j)}, j = 1, 2, 3, ... \text{ ise} \\ \quad 0, \text{ diğer durumlarda.} \end{cases}$$

O zaman, x istatistiksel yakınsaktır ve böylece $x \in S^{nN}(X)$ olur. Fakat

$$x \notin [V, \lambda]^{nN}(X)$$

dir. Teorem 6.0.8 *(iii)* şıkkından $x \notin S_{\lambda^{nN}}(X)$ olduğunu sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 6.0.10 X, n-normlu bir uzay ve $\lambda = (\lambda_m) \in \Delta$ alalım öyle ki $\lim_m \frac{\lambda_m}{m} = 1$ olsun. O zaman,

$$S_\lambda^{nN}(X) \subset S^{nN}(X)$$

olur.

İspat. $\lim_m \frac{\lambda_m}{m} = 1$ ise, o zaman $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m}|\{k \leq m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \\ \leq & \frac{1}{m}|\{k \leq m - \lambda_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \\ + & \frac{1}{m}|\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \\ \leq & \frac{m - \lambda_m}{m} + \frac{1}{m}|\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \\ = & \frac{m - \lambda_m}{m} + \frac{\lambda_m}{m}.\frac{1}{\lambda_m}|\{k \in I_m : \|x_k - l, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer (x_k) λ-istatistiksel yakınsaksa bu (x_k) nın istatistiksel yakınsak olmasını gerektirir. Böylece, $S_\lambda^{nN}(X) \subset S^{nN}(X)$ olur. $\square$

Uyarı 6.0.11 Teorem 6.0.10 da $\lim_m \frac{\lambda_m}{m} = 1$ şartının gerekli olup olmadığını bilmiyoruz ve onu açık bir problem olarak bırakıyoruz.

7 KAYNAKLAR

Açıkgöz, M. (2007). A Review on 2-Normed Structures, *International Journal of Mathematics Analysis*, **1(4):** 187–191.

Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Choudhary, B. and Nanda, S. (1989). Functional Analysis with Applications, John wiley-Sons, NewYork.

Connor, J. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canadian Mathematical Bulletin*, **32:** 194–198.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique, *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis*, **5:** 301–313.

Fridy, J. A. (1993). Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118:** 1187–1192.

Fridy, J. A. and Orhan C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American Mathema tical Society* **125:** 3625–3631.

Gähler, S. (1963). 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur, *Mathematische Nachrichten* **26:** 115–148.

Gähler,S. (1965). Lineare 2-normietre Räume, *Mathematische Nachrichten*, **28:** 1–43.

Gähler, S. (1965). Uber der Uniformisierbarkeit 2-metrische Räume, *Mathematische Nachrichten*, **28:** 235–244.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On n-normed spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **27(10):** 631–639.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On Finite Dimensional 2-normed spaces, *Soochow Journal of Mathematics*, **27(3):** 321–329.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2009). The Statistical Convergence in 2-Normed Spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **33:** 257–264.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2004). The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces, *Thai Journal of Mathematics*, **2(1):** 107–113.

Gürdal, M. (2006). On ideal convergent sequences in 2-normed spaces, *Thai Journal of Mathematics,* **4(1):** 85–91.

Hazarika, B., Savaş, E., (2013). λ-statistical convergence in n-normed spaces, Analele *Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta,* **4(1)**: 85–91.

L. Leindler, Über die de la Vallée-Pousinsche Summmierbarkeit allgenmeiner Othogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **16** (1965), 375–387.

Lewandowska, Z. (2001). Generalized 2-normed spaces, *Stuspskie Prace Matematyyczno Fizyczne*, **1:**, 33–40.

Lewandowska, Z. (2003). On 2-normed sets, *Glasnik Matematicki Series III*, **38(1):** 99–110.

Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). On $\mathcal{I}$-convergence in random 2-normed spaces, *Mathematica Slovaca,* **61(6):** 933–940.

Mursaleen, M. (2000). λ-statistical convergence, *Mathematica Slovaca,* **50(1):** 111–115.

Musayev, B., Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

Niven, I., Zuckermann, H.S. and Montgomery, H.L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley and Sons Incorporated Company, New York.

Nuray, F. and Ruckle, W.H. (2000). Generalized statistical convergence and con vergence free spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 245 (2), 513-527:.

Rath, D. and Tripaty, B. C. (1994). On statistically convergence and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25(4):** 381–386.

Reddy B. Surender, (2010). Statistical convergence in n-normed spaces, International Mathematical Forum, **5(24):** 1185–1193.

Rezapour, Sh. (2005). Quasi-Chebyshew Subspaces in generalized 2-normud spaces, *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences*, **2(1):**53–61.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca* **30:** 139–150.

Sarabadan, S. and Talebi, S. (2011). Statistical convergence and ideal convergence of sequences of functions in 2-normed spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol(2011), 10 pages.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly,* **66:** 361–375.

Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S. and Gunawan, H. (2007). Ideal convergence in 2-normed spaces, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11:** 1477–1484.

Tripathy, B. C., Sen, M. and Nath, S. (2012). $\mathcal{I}$-convergence in probabilistic n-normed space, *Soft Computing*, **16:** 1021–1027.

White, A. (1969). 2-Banach spaces, *Mathematische Nachrichten* **42:** 43–60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hanife DÜĞÜNCÜ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 07/04/1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: hanifeduguncu022@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Atatürk Lisesi, 2010
Lisans	: Aksaray Üniversitesi, 2014

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ahlat Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi, 2016-...