KESİRLİ OPIAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevgi DEMİR

DANIŞMAN

Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2016

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ OPIAL EŞİTSİZLİKLERİ

Sevgi DEMİR

DANIŞMAN
Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Sevgi DEMİR tarafından hazırlanan "Kesirli Opial Eşitsizlikleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 11/07/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./........./........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/07/2016

Sevgi Demir

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ OPIAL EŞİTSİZLİKLERİ

Sevgi DEMİR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Bu tez, dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli türevler içeren Opial tipli eşitsizlikler için bazı sonuçlar verildi. Son bölümde iki değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli türevlerini içeren Opial tipli eşitsizliklerin bazı sonuçları verildi.

2016, v + 81 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türevler, Kesirli İntegraller

ABSTRACT

M.ScThesis

FRACTIONAL OPIAL INEQUALITIES

Sevgi DEMİR

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter fundamental definitions and results required in the sequal are given. In the third chapter an Opial type inequalities involving fractional derivatives. The later chapter includes Opial type inequalities involving Riemann-Liouville fractional derivatives of two functions.

2016, v + 81 pages

Key Words: Fractional Derivatives, Fractional Integrals

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman, her konuda bana destek veren, bugünlere ulaşmama vesile olan aileme ve tez çalışmam boyunca bana yardım eden Şuayb KARDAŞ'a çok teşekkür ederim.

Sevgi DEMİR

AFYONKARAHİSAR, 2016

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\int$	İntegral Operatörü
$\int_a^b$	Belirli İntegral
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
$t^{(n)}$	Faktöriyel Fonksiyonu
$\frac{d}{dt}$	Türev
$\frac{d^n f}{dx^n}$	n-inci Mertebeden Türev
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L^{\infty}(a,b)$	(a,b) aralığında Lebesgue ölçülebilir ve sınırlı tüm fonksiyonların kümesi
$\in$	Elemanıdır
R	Reel Sayılar Kümesi
lim	Limit

1. GİRİŞ

Reel sayılar kümesinde türev ve integral operatörleri analizin iki temel içeriğidir. Benzer olarak tam sayılar kümesinde de toplam ve fark operatörleri de ayrık analizin iki temel içeriğidir. Genellikle türev veya integral operatörleri n-inci mertebeden bir fonksiyona uygulanabilir burada n tamsayıdır ve $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\Delta^n \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ şeklinde gösterilir.
Aslında kesirli analiz, türev veya integral operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabildiğini ifade eder. Örneğin bir fonksiyonun $1/2$-inci mertebeden türevi veya $\sqrt{3}$-üncü mertebeden integrali gibi.

Kesirli analiz uygulamalı matematiğin bir dalıdır, keyfi mertebeden türev ve integrallerle ilgilidir. Bunların uygulamaları fen, mühendislik, uygulamalı matematik ve diğer dallarda görülür. $D = \frac{d}{dx}$ operatörünü içeren diferansiyel analizin özellikleri ile fark operatörü olarak bilinen $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ operatörünü içeren ayrık kesirli analizin özellikleri arasında bir benzerlik olduğu bilinir. Aynı benzerlik kesirli ve ayrık kesirli analizin operatörleri arasında da vardır.

Kesirli analizin kökleri yaklaşık 3 yüzyıl önce L-Hospital'den Leibniz'e gönderilen bir mektupla ekildi. Burada L-Hospital $n = 1/2$ ise $d^n y / dx^n$ ' in anlamı hakkında bir soru ortaya çıkardı. Leibniz' in 30 Kasım 1695 tarihli mektuba cevabı ile kesirli analiz hakkındaki araştırmalar başlamış oldu.

Sonra John Bernoulli'nin cevabı ile birlikte, Leibniz genel mertebelerin türevlerini ispatladı. Leibniz $1/2$ mertebeden türevin ifadesine $d^{1/2}y$ gösterimini kullandı. Kesirli türevler birçok farklı içerikle ispatlandı. Liouville, Riemann, Grünward ve Letnikov tarafından kesirli türevler, kesirli analiz ile ilgili çalışmalar için genel tanımlar olarak literatürde yerini aldı.

$D^\alpha f$ mertebeden kesirli türev, kapsamlı bir şekilde düşünülmesine rağmen, kesirli mertebeden fark yıllardır daha az dikkat çekti. Kesirli mertebeden farklar ilk defa Kuttner tarafından ispatlandı. Miller ve Ross (1993) kesirli mertebeden fark ve toplam operatörlerini tanımladı ve kesirli fark denklemleri teorisinin gelişimine birçok makale ve kitapla katkıda bulundu.

Bu katkıların yardımıyla kesirli türev matematikte birçok çalışma alanı bulmuştur. Türev içeren eşitsizlikler üzerine kesirli türev ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu eşitsizliklerden biride Opial eşitsizliğidir. Opial eşitsizliği Z. Opial tarafından elde edilmiştir.

Teorem 1.1: Eğer $f \in C^1[0,a]$ ile $f(a) = f(0) = 0$ ve $(0,a)$ üzerinde $f(x) > 0$ olsun. O zaman

$$\int_0^a |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{a}{4}\int_0^a \left(f'(x)\right)^2 dx$$

$\frac{a}{4}$ sabiti mümkün olan en iyi sayıdır (Opial 1960).

Daha sonra birçok yazar tarafından Opial eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca G.A. Anastassiou kesirli türev içeren Opial eşitsizlikleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır (Anastassiou 1998, 1999, 2008, 2009, Anastassiou *et al.* 2001, 2002a, b). Bu tezde G. A. Anastassiou tarafından yapılan iki ayrı çalışma incelendi (Anastassiou *et al.* 2001, Anastassiou 2008). Bu çalışmalar kesirli türevler için Opial eşitsizliklerini içermektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$Re\,\alpha > 0$ ve f, $J' = (0,\infty)$ da parçalı sürekli ve $J = [0,\infty)$ sınırlı alt aralıkta integrallenebilir olsun. O zaman $t > 0$ için $\alpha -$inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki şekildedir.

$$ {}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \tag{2.1} $$

Dirichlet Formülü: Eğer $G(x,y)$, $[a,b] \times [a,b]$ de sürekli ise,

$$ \int_a^b dx \int_a^x G(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b G(x,y)dx \tag{2.2} $$

yazılabilir.

Bununla birlikte $\int_a^x Gdy$ ve $\int_y^b Gdx$ integralleri mevcut, öyle ki, sıradan veya Riemann integraline genişletilebilir olmak üzere eğer G sürekli değilse genel şartlar altında integrasyonun mertebesinde değişiklik yapmak zordur.

F, Öklid düzleminde sürekli ve α, β, γ pozitif sayılar olsun. O zaman

$$ \int_a^t (t-x)^{\beta-1} dx \int_a^x (y-a)^{\alpha-1} (x-y)^{\gamma-1} F(x,y) dy $$

$$ = \int_a^t (y-a)^{\alpha-1} dy \int_y^t (t-x)^{\beta-1} (x-y)^{\gamma-1} F(x,y) dx \tag{2.3} $$

yazılır (Miller and Ross 1993).

Eğer $a = 0, \alpha = 1$ ve $F(x,y) = g(x)f(y)$ ise (2.3) aşağıdaki şekilde olur.

$$ \int_0^t (t-x)^{\beta-1} g(x) dx \int_0^x (x-y)^{\gamma-1} f(y) dy $$

$$ = \int_0^t f(y) dy \int_y^t (t-x)^{\beta-1} (x-y)^{\gamma-1} g(x) dx \tag{2.4} $$

2.1 Kesirli İntegraller

n −katlı

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \cdots d\gamma_2 d\gamma_1 \tag{2.5}$$

integrali göz önüne alınsın. Bu (2.5) integralinde integrasyon sınırı ve buna bağlı olarak integralin sırası değiştirildiğinde

$a < \gamma_1 < x$	$\gamma_2 < \gamma_1 < x$
$a < \gamma_2 < \gamma_1$	$\gamma_3 < \gamma_2 < x$
$a < \gamma_3 < \gamma_2$	$\gamma_4 < \gamma_3 < x$
…	…
$a < \gamma_{n-2} < \gamma_{n-3}$	$\gamma_{n-1} < \gamma_{n-2} < x$
$a < \gamma_{n-1} < \gamma_{n-2}$	$\gamma_n < \gamma_{n-1} < x$
$a < \gamma_n < \gamma_{n-1}$	$a < \gamma_n < x$

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \cdots d\gamma_2 d\gamma_1 = \int_a^x f(\gamma_n) \cdots \left(\int_{\gamma_3}^x \left(\int_{\gamma_2}^x d\gamma_1 \right) d\gamma_2 \right) \cdots d\gamma_n$$

elde edilir.

Bu yeni sınırlara göre, (2.5) integrali yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \cdots d\gamma_2 d\gamma_1 &= \int_a^x f(\gamma_n) \cdots \left(\int_{\gamma_3}^x \left(\int_{\gamma_2}^x d\gamma_1 \right) d\gamma_2 \right) \cdots d\gamma_n \\
&= \int_a^x f(\gamma_n) \cdots \left(\int_{\gamma_3}^x (x - \gamma_2) d\gamma_2 \right) \cdots d\gamma_n \\
&= \int_a^x f(\gamma_n) \cdots \left(\int_{\gamma_4}^x \frac{(x - \gamma_3)^2}{2} d\gamma_3 \right) \cdots d\gamma_n \\
&\cdots \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\gamma_n)(x - \gamma_n)^{n-1} d\gamma_n
\end{aligned}$$

bulunur. Şayet burada,

$$(n-1)! = \Gamma(n)$$

olduğu göz önüne alınırsa; (2.5) ile ifade edilen n −katlı integral,

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n)\, d\gamma_n d\gamma_{n-1} \cdots d\gamma_2 d\gamma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\gamma_n)(x-\gamma_n)^{n-1} d\gamma_n \qquad (2.6)$$

şeklinde yeniden yazılır (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004). (2.6) eşitliğinin sağ tarafındaki n, pozitif bir tamsayıdır. Bununla birlikte Γ fonksiyonu, tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden n nin tamsayı olmaması durumunda da (2.6) eşitliğinin sağ tarafı için bir tanım verilebilir.

Tanım 2.1.1: $f(x) \in L_1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \qquad , \quad x > a$$

$$(2.7)$$

$$(\mathrm{I}_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \qquad , \quad x < a$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α −inci mertebeden kesirli integral denir. Bu integraller genel olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri olarak bilinir (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004).

Örnek 2.1.2:

$f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli integrali hesaplansın.

$$\left(\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \qquad , \quad x > a$$

integralinden,

$$\left(\mathrm{I}_{a^+}^{\frac{1}{2}} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

eşitliği yazılabilir. Şayet bu eşitlikte,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ve $t = a + (x-a)\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa verilen integral,

$$\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left((x-a)\tau\right)^{\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} (x-a)\, d\tau$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

şekline dönüşür. Burada,

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

şeklindeki β fonksiyonu göz önüne alındığında, verilen integral aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f\right)(x) = \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}$$

Buradan,

$$f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ −inci mertebeden kesirli integralinin,

$$\frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.1.3: $f(t) = \frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için Riemann-Liouville integrali hesaplansın.

$$\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^x \frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(x-a)\tau(x-a)^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}(x-a)d\tau$$

$$=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\int_0^1 \tau(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

$$=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\beta\left(2,\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{1!\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{4}{3}$$

$$=\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}$$

Örnek 2.1.2 ve Örnek 2.1.3'ten; bir fonksiyonun ard arda iki defa $\alpha=\frac{1}{2}-$inci mertebeden integrali alınırsa bu sonuç, fonksiyonun klasik integraline eşittir.

2.2 Kesirli Türev

Keyfi bir $y=f(x)$ fonksiyonunun ardışık türevleri,

$$f(x),\frac{df(x)}{dx},\frac{d^2f(x)}{dx^2},\frac{d^3f(x)}{dx^3},\cdots,\frac{d^nf(x)}{dx^n},\cdots$$

olsun. Bu ardışık türevler keyfi bir fonksiyonun türevlenebilmesi şartı ile adı altındadır. Bir fonksiyonun $1-$inci mertebeden türevi yoktur, ama $2-$nci mertebeden türevi olabilir. Buradaki temel amaç n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $\frac{d^nf}{dx^n}$ türevinin mertebesi olan tamsayı yerine kesirli bir sayı getirilerek yeni bir türevin nasıl tanımlanacağı şeklindedir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarı türev denen bir türev formülü elde edilerek bir uygulama yapılsın ve daha sonra daha genel kesirli türev formülü verilsin.

Bunun için $f(x) = x^k$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun k pozitif bir tamsayı olmak üzere α −inci mertebeden türevine bakılırsa;

$$\begin{aligned} f(x) = x^k \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = k \cdot x^{k-1} \\ &\Rightarrow \quad f''(x) = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} \\ &\Rightarrow \quad f'''(x) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot x^{k-3} \\ &\qquad \vdots \\ &\Rightarrow \quad f^{(a)}(x) = k \cdot (k-1) \cdots \big(k - (a-1)\big) \cdot x^{k-a} \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu son eşitlik, faktöriyel yarımıyla,

$$f^{(a)}(x) = \frac{k!}{(k-a)!} \cdot x^{k-a}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

ifadesi kullanılırsa;

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} \cdot x^{k-a}$$

eşitliği yazılır (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004). Artık elde edilen bu formal yapıda a sayısının pozitif bir tamsayı olması gerekmez.

Örnek 2.2.1: $k = 2$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olması durumunda fonksiyonun $\frac{1}{2}$−nci mertebeden türevine, diğer bir deyişle yarım türevine bakılırsa;

$$f(x) = x^k \;\Rightarrow\; f(x) = x^2 \;\;,\;\; a = \frac{1}{2}$$

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} \cdot x^{k-a}$$

$$f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2 - \frac{1}{2} + 1\right)} \cdot x^{2-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2!}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

olarak bulunur.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{df}{dx}$$

olması gerekeceğinden bu durum, aşağıda verilen örnekle gerçeklensin.

Örnek 2.2.2:

$$f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \ , k = \frac{3}{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\left(f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} \cdot x$$
$$= 2x$$

Örnek 2.2.1 ve Örnek 2.2.2’den;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2\right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}\right) = 2x$$

yazılabilir.

$a = 0$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$(\mathrm{I}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

şeklinde yazılabilir (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004).

Örnek 2.2.3:

$$f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ −nci mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğu gösterilsin.

$$(\mathrm{I}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

$$\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{8}{3\pi} \int_0^x t^{\frac{3}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

Elde edilen bu integralde,

$$t = ux \qquad , \qquad dt = xdu$$

değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f\right)(x) = \frac{8}{3\pi} \int_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}} (x-ux)^{-\frac{1}{2}} xdu$$

$$= \frac{8}{3\pi} x^2 \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

eşitliği burada kullanılırsa;

$$\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f\right)(x) = \frac{8}{3\pi} x^2 \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= x^2$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.3 te yarım türevle yarım integralin ilişkisinin doğru olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi de daha genel bir kesirli türev formülü için bir tanım verilsin.

Tanım 2.2.4: $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \qquad , \qquad x > a \tag{2.8}$$

şeklindeki Abel integral denklemi ele alınsın. Buradaki (2.8) integralinde x yerine t, t yerine s yazılırsa,

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \tag{2.9}$$

bulunur. Elde edilen bu (2.9) integralinin her iki yanı $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpılarak a'dan x'e kadar integrali alındığında,

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left[\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \right] (x-t)^{-\alpha} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} ds \right) dt$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlikte Dirichlet formülü olarak bilinen

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y) dx \right) dy \tag{2.10}$$

eşitliği kullanılırsa;

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \varphi(s) \left[\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} dt \right] ds \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.11) ifadesinin sağ tarafındaki iç integralde $t = s + \tau(x-s)$, $dt = (x-s)d\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} dt = \int_0^1 (s + \tau(x-s) - s)^{\alpha-1} \big(x - s - \tau(x-s)\big)^{-\alpha} (x-s) d\tau$$

$$= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha} d\tau$$

$$= \beta(\alpha, 1-\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}$$

olduğu görülür. Bu ifade (2.11)'de yerine yazıldığında;

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt = \Gamma(1-\alpha) \int_a^x \varphi(s)ds$$

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt$$

olur. Bu ifadenin her iki yanının x e göre türevi alınırsa;

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \tag{2.12}$$

bulunur. Elde edilen (2.12) ifadesine α −inci mertebeden fractional ya da kesirli türev denir (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004). Bu türev Riemann-Liouville türevi olarak da bilinir.

Örnek 2.2.5: $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(x) = x^2$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^1 (x-ux)^{-\frac{1}{2}} u^2 x^2 x du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^2 x^{\frac{5}{2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x^{\frac{5}{2}} \beta\left(\frac{1}{2}, 3\right) \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.2.6: f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{N}, m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α −inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki şekildedir (Samko *et al.* 1993).

$$D_{RL}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \tag{2.13}$$

Tanım 2.2.7: $m, m < \alpha < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, m+1)$ türevleri de $[a, x]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun α −inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$D_{GL}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^{m-\alpha} dt \tag{2.14}$$

dir (Samko *et al.* 1993, Özen ve Öztürk 2004).

Tanım 2.2.8: $m, m-1 < \alpha < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, α herhangi bir pozitif tamsayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun α −inci mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_{C}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \tag{2.15}$$

ile tanımlanır (Samko *et al.* 1993, Özen ve Öztürk 2004).

Lemma 2.2.1: $\upsilon > 0$ ve $\mathrm{m} = [\upsilon] + 1$ olsun. $\mathrm{f} \in \mathrm{L}(0, \mathrm{x})$ fonksiyonunun integrallenebilir kesirli $\mathrm{D}^{\upsilon}\mathrm{f}$ vardır ancak ve ancak

$$\mathrm{D}^{\upsilon-\mathrm{k}}\mathrm{f} \in \mathrm{C}[0, \mathrm{x}], \quad \mathrm{k} = 1, \dots, \mathrm{m} \quad \text{ve } \mathrm{D}^{\upsilon-1}\mathrm{f} \in \mathrm{AC}[0, \mathrm{x}] \tag{2.16}$$

dır. Ayrıca $\mathrm{f} \in \mathrm{I}^{\upsilon}\big(\mathrm{L}(0, \mathrm{x})\big)$ ancak ve ancak f integrallenebilen kesirli türevi $\mathrm{D}^{\upsilon}\mathrm{f}$ ‘e sahiptir ve

$$D^{\upsilon-k} f(0) = 0, \qquad k = 1, \dots, m \tag{2.17}$$

koşulunu sağlar.

İspat: $\left(\frac{\mathrm{d}}{ds}\right)^k \mathrm{I}^{m-\upsilon} f = \left(\frac{d}{ds}\right)^k \mathrm{I}^{k-(\upsilon-m+k)} f = D^{\upsilon-m+k} f$ kesirli türevi tanımının görünümü ve $[\upsilon - m + k] + 1 = k$ olduğuna dikkat edelim. O zaman (2.16)’nın (1.4) ile eşdeğer ve (2.17)’nin (1.5) ile eşdeğerdir. ($k = m$ için (2.3.1)’de $D^{\upsilon-m} f = \mathrm{I}^{m-\upsilon} f$ şartı kullanıldı.)

(1.3) birleşik gösterimi kullanılarak kesirli integral ve türev için indeks kuralları aşağıdaki sonuçları gerektirir.

Lemma 2.2.2: (Theorem 1.2.5 (Mitrinović *et al.* 1993)) İndeks kuralları

$$\mathrm{I}^{u}\mathrm{I}^{v}f = \mathrm{I}^{u+v}f$$

aşağıdaki durumlarda geçerli olacaktır.

(i) $v > 0, u + v > 0$ ve $f \in L(0,x)$;

(ii) $v < 0, u > 0$ ve $f \in \mathrm{I}^{-u}\big(L(0,x)\big)$;

(iii) $u < 0, u + v < 0$ ve $f \in \mathrm{I}^{-u-v}\big(L(0,x)\big)$.

Sonuç olarak $D^{\gamma}f$ kesirli türevi bize bir integral gösterimini verir (Handley *et al.* 2001).

Teorem 2.2.1: $\upsilon > \gamma \geq 0$ olsun. $f \in L(0,x)$ fonksiyonu $D^{\upsilon}f \in L^{\infty}(0,x)$ integrallenebilen kesirli türeve sahiptir ve $D^{\upsilon-k}f(0) = 0, k = 1, \ldots, [\upsilon] + 1$ olsun. O zaman

$$D^{\gamma}f(s) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon-\gamma)}\int_{0}^{s}(s-t)^{\upsilon-\gamma-1}\,D^{\upsilon}f(t)dt, \quad s \in [0,x] \tag{2.18}$$

dır.

İspat: $D^{\gamma}f(s) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon-\gamma)}\int_{0}^{s}(s-t)^{\upsilon-\gamma-1}\,D^{\upsilon}f(t)dt$ olup $D^{\gamma}f(s) = \mathrm{I}^{\upsilon-\gamma}D^{\upsilon}f(t)$ olduğunu gösterelim. $u = -\gamma > 0$ ve $v = -\upsilon < 0$ olsun. $(u - \upsilon = -\gamma \; ise \; u + v = -\gamma)$. Lemma 2.2.1'e göre $f \in \mathrm{I}^{-\upsilon}\big(L(0,x)\big)$'dır. O zaman Lemma 2.2.2'nin **(ii)** durumundan u, v'in seçimi için indeks kuralları geçerlidir, yani;

$$D^{\gamma}f = \mathrm{I}^{-\gamma}f = \mathrm{I}^{u+v}f = \mathrm{I}^{u}\mathrm{I}^{v}f = \mathrm{I}^{\upsilon-\gamma}\mathrm{I}^{\upsilon}f = \mathrm{I}^{\upsilon-\gamma}D^{-\upsilon}f = \mathrm{I}^{\upsilon-\gamma}D^{\upsilon}f$$

olup (2.18) bulunmuş olur.

İki farklı fonksiyon içeren kesirli Opial eşitsizlikleri ile ilgili bilgiler verelim. Burada Riemann-Liouville kesirli türevini kullanacağız. Biz burada şu tür eşitsizliklerle ilgileniyoruz. $x \geq 0$ için;

$$\int_0^x q(\omega)\left[|(D^{\gamma_1}f_1)(\omega)|^{\lambda_\alpha}|(D^{v}f_1)(\omega)|^{\lambda_v} + |(D^{\gamma_1}f_2)(\omega)|^{\lambda_\alpha}|(D^{v}f_2)|^{\lambda_v}\right]d\omega$$

$$\leq C(x, q(\omega), \lambda_1, v, \lambda_\alpha, \lambda_v, p(\omega), p). \left[\int_0^x p(\omega)[|(D^{v}f_1)(\omega)|^{p} + |(D^{v}f_2)|^{p}]d\omega\right]^{\frac{\lambda_\alpha+\lambda_v}{p}}$$

fonksiyonları için $f_1, f_2 \in L_1(0,x); p(\omega), q(\omega), {}^1/_{p(\omega)} \in L_\infty(0,x)$ tüm üsler ve mertebelerde kesir vardır. Burada $D^{\beta}f$, mertebesi $\beta \geq 0$ olan Riemann- Liouville kesirli türevi temsil eder. Ayrıca, kesirli diferansiyel eşitsizliklerin bir sistemi olan

$$\left(D^{v}f_j\right)(t) \coloneqq F_j(t, \{(D^{\gamma_i}f_1)(t)\}_{i=1}^{r}, \{(D^{\gamma_i}f_2)(t)\}_{i=1}^{r}), \text{ tüm } t \in [0,x]$$

için $j = 1,2$ ve $D^{v-j}f_j(0) = d_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n+1$ dir. Burada $n \coloneqq [v], v > 0$ için integral parçasıdır.

Kesirli analiz ile ilgili daha fazla bilgi için Kiryakova (1994), Oldham ve Spanier (2006) ve Podlubny (1999)'nin çalışmaları incelenebilir.

3. KESİRLİ TÜREVLER İÇİN OPIAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde kesirli türevler içeren Opial tipli eşitsizlikler için bazı sonuçlar verilecektir. Bölüm boyunca $x > 0,\ \upsilon, \gamma \geq 0$ ve $f \in L(0, x)$ kabul edilecektir. Ayrıca $k = 1, \dots, m$ için $D^{\upsilon-k} f \in C[0, x]$ ve $D^{\upsilon-1} f \in AC[0, x]$ olacak şekilde f fonksiyonunun $D^{\upsilon} f$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olduğu kabul edilecektir. Daha sonra kesirli başlangıç değer problemleri için çözümün tekliği araştırılacaktır.

Teorem 3.1: $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1$ ve $\gamma \geq 0, \upsilon > \gamma + 1 - \frac{1}{p}$ olsun. Ayrıca $f \in L(0, x)$ fonksiyonu $j = 1,2, \dots, [\upsilon] + 1$ için $D^{\upsilon-j} f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{\upsilon} f \in L^{\infty}(0, x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun.

O zaman,

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{\upsilon} f(s)| ds \leq \Omega(x) \left(\int_0^x |D^{\upsilon} f(s)|^q ds \right)^{\frac{2}{q}} \tag{3.1}$$

dir. Burada,

$$\Omega(x) = \frac{x^{(rp+2)/p}}{2^{1/q} \Gamma(r+1) \big((rp+1)(rp+2) \big)^{1/p}}, \qquad r = \upsilon - \gamma - 1 \tag{3.2}$$

dir.

İspat: $\Phi(t) = |D^{\upsilon} f(t)|$ ve $r = \upsilon - \gamma - 1$ yazalım. $1 - \frac{1}{p} > 0$ olduğundan $\upsilon > \gamma$ olur ve Teorem 2.2.1 uygulanır. Ayrıca $r > -1$ ve herhangi bir $s \in [0, x]$ için

$t \to (s - t)^r \in L(0, s)$'dir. (2.18) ifadesinde Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$|D^{\gamma} f(s)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\upsilon - \gamma)} \int_0^s (s - t)^{\upsilon - \gamma - 1} D^{\upsilon} f(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r+1)} \left(\int_0^s |(s - t)^r|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s |D^{\upsilon} f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r+1)}\left(\int_0^s |(s-t)^r|^q dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^s \Phi(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r+1)}\frac{s^{(rp+1)/p}}{(rp+1)^{1/p}}\left(\int_0^s \Phi(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.3}$$

bulunur. Burada $z(s) = \int_0^s \Phi(t)^q$ yazılır. O zaman $(0, s)$ aralığında hemen hemen her yerde $z'(s) = \Phi(t)^q$ olur. Böylece $(0, x)$ aralığında hemen hemen her yerde

$$|D^{\upsilon} f(s)| = \Phi(t) = \left(z'(s)\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.4}$$

olur. O halde,

$$|D^{\gamma} f(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(r+1)}\frac{s^{(rp+1)/p}}{(rp+1)^{1/p}}\left(z(s)\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.5}$$

dir.

(3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\gamma} f(s) D^{\upsilon} f(s)| \leq \frac{s^{(rp+1)/p}}{\Gamma(r+1)(rp+1)^{1/q}}\left(z(s)z'(s)\right)^{1/q}$$

olur.

$s^{(rp+1)}\left(z(s)z'(s)\right)^{1/q}$ fonksiyonu $rp+1 \geq 0$ iken $(0, x)$ aralığı üzerinde integrallenebilirdir ve $\left(z(s)z'(s)\right)$, $(0, x)$ üzerinde sınırlı ve ölçülebilirdir. Hölder eşitsizliğinden,

$$\int_0^x \left(z(s)z'(s)\right)^{1/q} ds \leq \left(\int_0^x s^{rp+1} ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^x z(s)\, z'(s) ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{x^{(rp+2)/p}}{(rp+2)^{1/q}} \frac{z(s)^{2/q}}{2^{1/q}}$$

bulunur. Sonuç olarak $|D^{\gamma} f(s) D^{\upsilon} f(s)|$, $D^{\gamma} f \in AC[0, x]$ ve $D^{\upsilon} f \in L^{\infty}(0, x)$'de integrallenebilirdir.

Aşağıdaki sonuç bir önceki teoremin $p = 1$ ve $q = \infty$ olduğu uç noktalardaki durumlarını inceler.

Teorem 3.2: $\upsilon > \gamma \geq 0$ olsun. Ayrıca $f \in L(0, x)$ fonksiyonu $j = 1,2, \dots, [\upsilon] + 1$ için $D^{\upsilon - j} f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{\upsilon} f \in L^{\infty}(0, x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun. O zaman,

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{\upsilon} f(s)| ds \leq \Omega_1 \operatorname*{ess\,sup}_{s \in [0,x]} |D^{\upsilon} f(s)|^2 \tag{3.6}$$

dir. Burada,

$$\Omega_1 = \frac{x^{r+2}}{\Gamma(r+3)}, \qquad r = \upsilon - \gamma - 1$$

dir.

İspat: $f(t) = t^{\upsilon}$ fonksiyonu için Gama fonksiyonunun bilinen özelliklerinden

$$\int_0^s (s-t)^{u-1} t^{v-1} dt = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} s^{u+v-1}, \qquad u, v > 0$$

dır.

$0 \leq j \leq [\upsilon] + 1, m = [\upsilon] - j + 1$ ve $\alpha = \upsilon - [\upsilon]$ olsun. O zaman $1 - \alpha > 0, \upsilon + 1 > 0$ ve

$$D^{\upsilon - j} f(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{ds}\right)^m \int_0^s (s-t)^{(1-\alpha)-1} t^{(\upsilon+1)-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(m+j+1)} \left(\frac{d}{ds}\right)^m s^{m+j}$$

$$= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{j!} s^j$$

dir. O zaman $D^{\upsilon-j}f(0) = 0,\ j = 1, \dots, [\upsilon] + 1$ iken $D^{\upsilon}f(s) = \Gamma(\upsilon + 1)$ $ess\ sup|D^{\upsilon}f(s)|^2 = \Gamma(\upsilon + 1)^2$ olur.

O halde,

$$D^{\gamma}f(s) = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-\gamma+1)} s^{\upsilon-\gamma} \text{ ve } D^{\upsilon}f(s) = \Gamma(\upsilon+1)$$

olduğundan

$$|D^{\gamma}f(s)D^{\upsilon}f(s)| = \left|\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-\gamma+1)} \Gamma(\upsilon+1) s^{\upsilon-\gamma}\right|$$

$$\int_0^x |D^{\gamma}f(s)D^{\upsilon}f(s)| \leq \frac{\Gamma(\upsilon+1)^2}{\Gamma(\upsilon-\gamma+1)} \int_0^x s^{\upsilon-\gamma} ds$$

$$= \frac{\Gamma(\upsilon+1)^2}{\Gamma(\upsilon-\gamma+1)} \frac{x^{\upsilon-\gamma+1}}{(\upsilon-\gamma+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\upsilon+1)^2}{\Gamma(\upsilon-\gamma+2)} s^{\upsilon-\gamma+1}$$

$$= \Gamma(\upsilon+1)^2 \frac{x^{r+2}}{\Gamma(r+3)}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3: $0 < p < 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\upsilon > \gamma \geq 0$ olsun. Ayrıca $f \in L(0, x)$ fonksiyonu $j = 1, 2, \dots, [\upsilon] + 1$ için $D^{\upsilon-j}f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{\upsilon}f \in L^{\infty}(0, x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip ve $(D^{\upsilon}f)^{-1} \in L^{\infty}(0, x)$ olsun.

O zaman,

$$\int_0^x |D^\gamma f(s) D^\upsilon f(s)| ds \geq \Omega(x) \left(\int_0^x |D^\upsilon f(s)|^q ds \right)^{2/q} \tag{3.7}$$

dir. Burada,

$$\Omega(x) = \frac{x^{(rp+2)/p}}{2^{1/q}\Gamma(r+1)\big((rp+1)(rp+2)\big)^{1/p}}, \qquad r = \upsilon - \gamma - 1$$

dir.

İspat: $r = \upsilon - \gamma - 1$ ve $\Phi(t) = |D^\upsilon f(t)|$ yazalım. $0 < p < 1, q < 0$ olsun. (2.18) eşitliğine ters Hölder eşitsizliği uygularsa (Mitrinović *et al.* 1993);

$$|D^\gamma f(s)| = \frac{1}{\Gamma(\upsilon - \gamma)} \int_0^s |(s-r)^{\upsilon-\gamma-1} D^\upsilon f(t)| dt$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(r+1)} \left(\int_0^s ((s-r)^r)^q dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s |D^\upsilon f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(r+1)} \left(\int_0^s ((s-r)^r)^q dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s \Phi(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(r+1)} \frac{s^{(rp+1)/p}}{(rp+1)^{1/p}} \left(\int_0^s \Phi(t)^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada $z(t) = \int_0^s \Phi(t)^q dt$ ise $z'(t) = \Phi(t)^q$ olur.

$$|D^\upsilon f(s)| = \left(z'(t)\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.8}$$

olup,

$$|D^{v} f(s)| \geq \frac{1}{\Gamma(r+1)} \frac{s^{(rp+1)/p}}{(rp+1)^{1/p}} \big(z(s)\big)^{\frac{1}{q}} \tag{3.9}$$

dir. Burada (3.8) ve (3.9) ifadeleri taraf tarafa çarpılır ve integra edilirse;

$$|D^{\gamma} f(s) D^{v} f(s)| \geq \frac{s^{(rp+1)/p}}{\Gamma(r+1)(rp+1)^{1/p}} \big(z(s) z'(s)\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{v} f(s)| ds \geq \frac{1}{\Gamma(r+1)(rp+1)^{1/p}} \int_0^x s^{(rp+1)/p} \big(z(s) z'(z)\big)^{\frac{1}{q}} ds$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(r+1)(rp+1)^{1/p}} \left(\int_0^x s^{rp+1} ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x z(s) z'(s) ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(r+1)(rp+1)^{1/p}} \frac{x^{(rp+2)/p}}{(rp+2)^{1/p}} \frac{z(s)^{2/q}}{2^{1/q}}$$

olur.

Böylece;

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{v} f(s)| ds \geq \frac{x^{(rp+2)/p}}{2^{1/q} \Gamma(r+1) \big((rp+1)(rp+2)\big)^{1/q}} \left(\int_0^x |D^{v} f(s)|^{q} ds \right)^{\frac{2}{q}}$$

elde edilir.

Teorem 3.4: $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\gamma \geq 0,\ v \geq \gamma + 2 - \frac{1}{p}$ olsun. Ayrıca $f \in L(0, x)$ fonksiyonu $j = 1,2, \dots, [v] + 1$ için $D^{v-j} f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{v} f \in L^{\infty}(0, x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun.

O zaman,

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{\gamma+1} f(s)| ds \leq \Omega_2\,(x) \left(\int_0^x |D^{v} f(s)|^{q} ds \right)^{\frac{2}{q}} \tag{3.10}$$

dir. Burada,

$$\Omega_2 = \frac{x^{2(rp+1)/p}}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2 (rp+1)^{2/q}}, \qquad r = \upsilon - \gamma - 1 \tag{3.11}$$

dir.

İspat: $\Phi(t) = |D^{\upsilon} f(s)|$ ve $r = \upsilon - \gamma - 1$ yazalım. Teorem 2.2.1'den biliyoruz ki $\mathrm{I}^{\upsilon-\gamma} D^{\upsilon} f = \mathrm{I}^{u}\mathrm{I}^{\upsilon} f = \mathrm{I}^{u+\upsilon} f = \mathrm{I}^{-\gamma} f = D^{\gamma} f$ dir ve kesirli integral tanımından

$$|D^{\gamma} f(t)| \le U(t) \coloneqq \mathrm{I}^{r+1}\Phi(x), \;\; |D^{\gamma+1} f(t)| \le \mathrm{I}^{r}\Phi(x)$$

elde edilir.

$$U'(x) = \left(\mathrm{I}^{r+1}\Phi(t)\right)' = \mathrm{I}'\Phi(t)$$

göz önüne alınır ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(t) D^{\gamma+1} f(t)| dt \le \int_0^x U(t)U'(t)dt = \frac{1}{2}U^2(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}^{r+1}\Phi(x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma(r+1)}\int_0^x (x-t)^r \Phi(t)dt\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2}\left(\int_0^x (x-t)^r \Phi(t)\, dt\right)^2$$

$$\le \frac{1}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2}\left(\int_0^x (x-t)^{rp} dt\right)^{2/q} \left(\int_0^x \Phi(t)^q\right)^{2/q}$$

$$= \frac{1}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2}\frac{x^{2(rp+1)/p}}{(rp+1)^{2/q}}\left(\int_0^x \Phi(t)^q\, dt\right)^{2/q}$$

dir. Burada,

$$\Omega_2 = \frac{x^{2(rp+1)/p}}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2 (rp+1)^{2/q}}, \quad \Phi(t) = |D^{v} f(t)|$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5: $\gamma \geq 0, v > \gamma + 1$ olsun. Ayrıca $f \in L(0,x)$ fonksiyonu $j = 1,2, \dots, [v] + 1$ için $D^{v-j} f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{v} f \in L^{\infty}(0,x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun. O zaman,

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{\gamma+1} f(s)| ds \leq \Omega_3 \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,x]} |D^{v} f(t)|^2 \tag{3.12}$$

dir. Burada,

$$\Omega_3 = \frac{x^{2(v-\gamma)}}{2\big(\Gamma(v-\gamma+1)\big)^2} \tag{3.13}$$

dir.

İspat: $f(t) = t^{v}$ fonksiyonu için

$$D^{v} f(s) = \frac{\Gamma(v+1)}{j!} s^{j}, \qquad ess\ sup |D^{v} f(s)|^2 = \big(\Gamma(v+1)\big)^2$$

dir. O zaman,

$$D^{\gamma} f(s) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\gamma+1)} s^{v-\gamma}, \quad D^{\gamma+1} f(s) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\gamma)} s^{v-\gamma-1}$$

dir. Böylece,

$$|D^{\gamma} f(s) D^{\gamma+1} f(s)| = \left| \frac{\Gamma(v+1)^2}{\Gamma(v-\gamma+1)\Gamma(v-\gamma)} s^{2(v-\gamma)-1} \right|$$

$$\int_0^x |D^{\gamma} f(s) D^{\gamma+1} f(s)|\, ds \leq \frac{\Gamma(v+1)^2}{\Gamma(v-\gamma+1)\Gamma(v-\gamma)} \int_0^x s^{2(v-\gamma)-1} ds$$

$$\leq \frac{\Gamma(\upsilon+1)^2}{2\Gamma(\upsilon-\gamma+1)\Gamma(\upsilon-\gamma+1)} x^{2(\upsilon-\gamma)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\Omega_3 = \frac{x^{2(\upsilon-\gamma)}}{2\big(\Gamma(\upsilon-\gamma+1)\big)^2}, \qquad ess\ sup|D^{\upsilon}f(s)|^2 = \big(\Gamma(\upsilon+1)\big)^2$$

dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.6: $0 < p < 1$ olmak üzere $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\upsilon > \gamma \geq 0$ olsun. Ayrıca $f \in L(0,x)$ fonksiyonu $j = 1,2,\dots,[\upsilon]+1$ için $D^{\upsilon-j}f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{\upsilon}f \in L^{\infty}(0,x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip ve $(D^{\upsilon}f)^{-1} \in L^{\infty}(0,x)$ olsun.
O zaman,

$$\int_0^x |D^{\gamma}f(s)D^{\gamma+1}f(s)|ds \geq \Omega_2(x)\left(\int_0^x |D^{\upsilon}f(s)|^q ds\right)^{2/q} \tag{3.14}$$

dir. Burada,

$$\Omega_2 = \frac{x^{2(rp+1)/p}}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2(rp+1)^{2/q}}, \qquad r = \upsilon-\gamma-1$$

dir.

İspat: $\Phi(t) = |D^{\upsilon}f(s)|$ ve $r = \upsilon-\gamma-1$ olsun. Teorem 2.2.1'den biliyoruz ki $\mathrm{I}^{\upsilon-\gamma}D^{\upsilon}f = \mathrm{I}^{u}\mathrm{I}^{\upsilon}f = \mathrm{I}^{u+\upsilon}f = \mathrm{I}^{-\gamma}f = D^{\upsilon}f$'dir ve kesirli integralin tanımından

$$|D^{\gamma}f(x)| \leq U(t) := \mathrm{I}^{r+1}\Phi(x), \qquad |D^{\gamma+1}f(x)| \leq \mathrm{I}^{r}\Phi(x)$$

dir. Buradan $U'(t) = \left(\mathrm{I}^{r+1}\Phi(x)\right)' = \mathrm{I}^{r}\Phi(x)$ dir.

$0 < p < 1$ olduğunda ters Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\int_0^x |D^\gamma f(t) D^{\gamma+1} f(t)| dt \geq \int_0^x U(t)U'(t)dt = \frac{1}{2}U^2(x)$$

$$= \frac{1}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2}\left(\int_0^x (x-t)^r \Phi(t)dt\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2}\left(\int_0^x (x-t)^r dt\right)^{2/p}\left(\int_0^x \Phi(t)^q dt\right)^{2/q}$$

$$= \frac{1}{2\big(\Gamma(r+1)\big)^2}\frac{x^{2(rp+1)/p}}{(rp+1)^{2/p}}\left(\int_0^x |D^\upsilon f(s)|^q dt\right)^{2/q}$$

elde edilir.

Teorem 3.7: $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\gamma \geq 0,\ \upsilon > \gamma + 1 - \frac{1}{p}$ olsun.Ayrıca $f \in L(0,x)$ fonksiyonu $j = 1,2,\dots,[\upsilon]+1$ için $D^{\upsilon-j}f(0) = 0$ olacak şekilde $D^\upsilon f \in L^\infty(0,x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun. O zaman herhangi bir $m > 0$ için

$$\int_0^x |D^\gamma f(s)|^m ds \leq \Omega_4 \left(\int_0^x |D^\upsilon f(s)|^q ds\right)^{m/q} \tag{3.15}$$

dir. Burada,

$$\Omega_4 = \frac{x^{(rm+1+m/p)}}{\big(\Gamma(r+1)\big)^m (rm+1+m/p)(rp+1)^{m/p}}, \quad r = \upsilon - \gamma - 1 \tag{3.16}$$

dir.

İspat: $\Phi(x) = |D^\upsilon f(t)|$ ve $r = \upsilon - \gamma - 1$ yazalım. $1 - \frac{1}{p} > 0$ olduğundan $\upsilon > \gamma$ olur. $r > -1$ ve herhangi bir $s \in [0,x]$ $t \to (s-t)^r \in L(0,s)$'dir. (2.18) eşitliğinde Hölder eşitsizliği uygularsa;

$$|D^{\gamma}f(s)| = \left|\frac{1}{\Gamma(r+1)}\int_0^s (s-t)^r D^{\upsilon}f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r+1)}\left(\int_0^s (s-t)^{rp}dt\right)^{1/p}\left(\int_0^s |D^{\upsilon}f(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(r+1)}\frac{s^{(rp+1)/p}}{(rp+1)^{1/p}}\left(\int_0^s \Phi(t)^q dt\right)^{1/q} \tag{3.17}$$

olup (3.17) eşitliğin m. kuvveti alınıp 0 dan x'e integrali alınırsa;

$$|D^{\gamma}f(s)|^m \leq \frac{1}{\left(\Gamma(r+1)\right)^m}\frac{s^{(rp+1)m/p}}{(rp+1)^{m/p}}\left(\int_0^s \Phi(t)^q dt\right)^{m/q}$$

$$\int_0^x |D^{\gamma}f(s)|^m ds \leq \frac{1}{\left(\Gamma(r+1)\right)^m}\left(\int_0^x \frac{s^{(rp+1)m/p}}{(rp+1)^{m/p}}ds\right)\left(\int_0^x |D^{\upsilon}f(s)|^q ds\right)^{m/q}$$

$$\leq \frac{1}{\left(\Gamma(r+1)\right)^m}\frac{x^{(rm+1+m/p)}}{(rp+1)^{m/p}(rm+1+m/p)}\left(\int_0^x |D^{\upsilon}f(s)|^q ds\right)^{m/q}$$

olur. O halde (3.16) ispatlanmış olur.

Teorem 3.8: $\upsilon > \gamma \geq 0$ olsun. Ayrıca$f \in L(0,x)$ fonksiyonu $j = 1,2,\ldots,[\upsilon]+1$ için $D^{\upsilon-j}f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{\upsilon}f \in L^{\infty}(0,x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun. O zaman $m > 0$ için

$$\int_0^x |D^{\gamma}f(s)|^m ds \leq \Omega_5 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,x]} |D^{\upsilon}f(t)|^m \tag{3.18}$$

dir. Burada,

$$\Omega_5 = \frac{x^{(r+1)m+1}}{\left(\Gamma(r)\right)^m (rm+1+m/p)\left((r+1)m+1\right)},\quad r = \upsilon-\gamma-1 \tag{3.19}$$

dir.

Şimdi kesirli başlangıç değer problemleri çözümünün tekliğini araştıralım.

$$\begin{cases} \gamma_i \geq 0, \upsilon \geq \gamma_i + 1/2\,, i = 1, \dots, r \in \mathbb{N} \text{ olsun.} \\ f \in L(0,x) \text{ fonksiyonu } j = 1,2, \dots, [\upsilon] + 1 \text{ için } D^{\upsilon - j} f(0) = 0 \\ \text{olacak şekilde } D^{\upsilon} f \in L^{\infty}(0,x) \text{ integrallenebilir kesirli türeve} \\ \text{sahip olsun.} \\ \text{Ayrıca, tüm } t \in [0,x] \text{ için } D^{\upsilon} f(t) = F(t, \{D^{\gamma_i} f(t)\}_{i=1}^{r}) \text{ olsun.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Burada $F(t, x_1, \dots, x_r)$ fonksiyonu $(x_1, \dots, x_r)$ için süreklidir, $t \in [0,x]$ için sınırlıdır ve

$$\left|F(t, z_1, \dots, z_r) - F\left(t, z_1', \dots, z_r'\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{r} q_i(t) \left|z_i - z_i'\right| \tag{3.21}$$

Lipschitz koşulunu sağlar. Burada $i = 1, \dots, r$ için $q_i(t) \geq 0$ fonksiyonu $[0,x]$ üzerinde sınırlıdır. $i = 1, \dots, r$ ve $0 \leq s \leq x$ için

$$\Delta_i := \frac{s^{\upsilon - \gamma_i}}{2\Gamma(\upsilon - \gamma_i)\sqrt{(\upsilon - \gamma_i)(2\upsilon - 2\gamma_i - 1)}}, \qquad \psi(s) = \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} \Delta_i(s) \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|q_i\|_{\infty} = sup_{t \in [0,x]} |q_i(t)|$'dir.

Kabul edelim ki

$$\psi(x) := \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} \Delta_i(x) < 1 \tag{3.23}$$

olsun.

$g \in L(0,x)$ fonksiyonu $j = 1, \dots, [\upsilon] + 1$ için $D^{\upsilon - j} f(0) = 0$ olacak şekilde $D^{\upsilon} f \in L^{\infty}(0,x)$ integrallenebilir kesirli türeve sahip olsun. O zaman Teorem 2.2.1'den

$$D^{\gamma_i} g(s) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon - \gamma_i)} \int_0^s (s-t)^{\upsilon - \gamma_i - 1} D^{\upsilon} g(t) dt, \qquad s \in [0,x], i = 1, \dots, r \tag{3.24}$$

dir. (3.1) eşitliğinde $p = q = 2$ alınırsa, $i = 1, \dots, r$ için

$$\int_0^x |(D^{\gamma_i} g)(w)| |(D^{\upsilon} g)(w)| dw \leq \Delta_i(x) \int_0^x |(D^{\upsilon} g)(w)|^2 dw \tag{3.25}$$

olur.

f_1, f_2, (3.20) başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Yani $k = 1,2$ için

$$(D^{\upsilon} f_k)(t) = F(t, \{(D^{\upsilon} f_k)(t)\}_{i=1}^{r}), t \in [0, x]$$

ve

$$D^{\upsilon-j} f_k(0) = \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, [\upsilon] + 1$$

olsun.

Eğer $g \coloneqq f_1 - f_2$ ise

$$D^{\upsilon} f(t) = F(t, \{(D^{\gamma_i} f_1)(t)\}_{i=1}^{r}) - F(t, \{(D^{\gamma_i} f_2)(t)\}_{i=1}^{r}) \tag{3.26}$$

ve

$$D^{\upsilon-j} g(0) = 0, j = 1,2, .., [\upsilon] + 1$$

dir. (3.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\left|F\left(t, D^{\gamma_1} f_1(t), \dots, D^{\gamma_r} f_1(t)\right) - F\left(t, D^{\gamma_1} f_2(t), \dots, D^{\gamma_r} f_2(t)\right)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} q_i(t) |D^{\gamma_i} f_1(t) - D^{\gamma_i} f_2(t)| \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i(t) |D^{\gamma_i} g(t)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} |D^{\gamma_i} g(t)| \end{aligned} \tag{3.27}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} |D^{\upsilon} g(t)|^2 &= |D^{\upsilon} g(t)| |F(t, \{D^{\gamma_i} f_1(t)\}_{i=1}^{r}) - F(t, \{D^{\gamma_i} f_2(t)\}_{i=1}^{r})| \\ &\leq |D^{\upsilon} g(t)| \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} |D^{\gamma_i} g(t)| \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_\infty \, |D^{\gamma_i} g(t)||D^{\upsilon} g(t)|$$

bulunur.

Sonuç olarak;

$$\int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 \leq \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_\infty \int_0^x |D^{\gamma_i} g(t)||D^{\upsilon} g(t)| dt$$

$$\overset{(3.25)}{\leq} \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_\infty \Delta_i(x) \int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 dt$$

$$\overset{(3.23)}{\leq} \psi(x) \int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 dt$$

dir. Buradan,

$$\int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 dt \leq \psi(x) \int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 dt \tag{3.28}$$

elde edilir.

Eğer $\int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 dt \neq 0$ ise o zaman (3.28)'den $\psi(x) \geq 1$ elde edilir, bu da $\psi(x) < 1$ kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $\int_0^x |D^{\upsilon} g(t)|^2 dt = 0$ dır. Yani, $[0, x]$ üzerinde $D^{\upsilon} g(t) = 0$ olur. Fakat $j = 1, \dots, [\upsilon] + 1$ için $D^{\upsilon - j} g(0) = 0$ dir. O zaman $\gamma = 0$ için (2.18)'den $[0, x]$ üzerinde $g(t) \equiv 0$ bulunur. Bu, $[0, x]$ üzerinde $f_1 = f_2$ demektir. Böylece (3.20) başlangıç değer probleminin çözümünün tekliği ispatlanmış olur.

Şimdi kesirli başlangıç değer probleminin çözümü için $D^{\upsilon} f$'in üst sınırlarını inceleyelim.

$$\begin{cases} 0 \le t \le x \text{ için} \\ (D^{\upsilon} f)'(t) = F(t, \{D^{\gamma_i} f(t)\}_{i=1}^{r}, D^{\upsilon} f); \\ \gamma_i \ge 0, \upsilon \ge \gamma_i + 1/2, i = 1, \dots, r \in \mathbb{N}; \\ \text{burada } f \in L(0,x) \text{ fonksiyonu } D^{\upsilon} f(0) \in L^{\infty}(0,x) \\ \text{integrallenebilen kesirli türeve sahiptir,} \\ \text{kabul edelim ki } j = 1, \dots, [\upsilon] + 1 \text{ için } D^{\upsilon - j} f(0) = 0 \text{ ve } D^{\upsilon} f(0) = \mathrm{A} \in \mathbb{R} \\ \text{başlangıç değer problemini göz önüne alalım.} \end{cases} \tag{3.29}$$

Burada F fonksiyonu $[0,x] \times \mathbb{R}^{r+1}$ üzerinde Lebesgue ölçülebilirdir ve

$$|F(t, x_1, \dots, x_r, x_{r+1})| \le \sum_{i=1}^{r} q_i(t)|x_i| \tag{3.30}$$

koşulunu sağlar. Burada $i = 1, \dots, r$ için $q_i(t) \ge 0$ fonksiyonu $[0,x]$ üzerinde sınırlıdır. Böylece,

$$D^{\upsilon} f(t)(D^{\upsilon} f)'(t) = D^{\upsilon} f(t) F\big(t, \{D^{\gamma_i} f(t)\}_{i=1}^{r}, D^{\upsilon} f(t)\big)$$

bulunur ve $0 \le s \le x$ için

$$\int_0^s D^{\upsilon} f(t)(D^{\upsilon} f)'(t)dt = \int_0^s D^{\upsilon} f(t) F\big(t, \{D^{\gamma_i} f(t)\}_{i=1}^{r}, D^{\upsilon} f(t)\big)dt$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|D^{\upsilon} f(t)|^2 \Big|_0^s &\le \int_0^s |D^{\upsilon} f(t)| \left|F\big(t, \{D^{\gamma_i} f(t)\}_{i=1}^{r}, D^{\upsilon} f(t)\big)\right| dt \\ &\overset{(3.30)}{\le} \int_0^s |D^{\upsilon} f(t)| \left(\sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} |D^{\gamma_i} f(t)| \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} \left(\int_0^s |D^{\gamma_i} f(t)|\, |D^{\upsilon} f(t)| dt \right) \end{aligned}$$

dir.

$\psi(s)$ ve $\Delta_i(s)$ için (3.22)'deki gösterimi hatırlayalım. O zaman,

$$|D^{\upsilon}f(s)|^2 \leq \mathrm{A}^2 + 2\sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} \left(\int_0^s |D^{\gamma_i}f(t)|\,|D^{\upsilon}f(t)|dt \right)$$

$$\overset{(3.1.1)}{\leq} \mathrm{A}^2 + \left(\sum_{i=1}^{r} \|q_i\|_{\infty} \Delta_i(s) \right) \left(\int_0^s |D^{\upsilon}f(t)|^2 dt \right)$$

$$= \mathrm{A}^2 + \psi(s) \int_0^s |D^{\upsilon}f(t)|^2 dt$$

olur. Yani,

$$|D^{\upsilon}f(s)|^2 \leq \mathrm{A}^2 + \psi(s) \int_0^s |D^{\upsilon}f(t)|^2 dt \tag{3.31}$$

dir.

$0 \leq s \leq x$ için $\theta(s) := |D^{\upsilon}f(s)|^2$ ve $\rho := \mathrm{A}^2$ olsun. Bu durumda,

$$\theta(s) \leq \rho + \psi(s) \int_0^s \theta(t) dt$$

dir. Burada tüm $0 \leq s \leq x$ için $\rho \geq 0, \psi(s) \geq 0, \psi(0) = 0, \theta(s) \geq 0$ dir.

$H(x) = x$ alarak Genelleştirilmiş Gronwall Lemması (Dragomir 1988) uygulanırsa;

$$\theta(s) \leq \rho \left(1 + \psi(s) exp\big(\psi(s)\big) \int_0^s exp\big(-\psi(t)\big) dt \right), \qquad \psi(t) = \int_0^s \psi(u) du \tag{3.32}$$

olur. Tüm $0 \leq s \leq x$ için

$$|D^{\upsilon}f(s)| \leq |\mathrm{A}| \left(1 + \psi(s) exp\big(\psi(s)\big) \int_0^s exp\big(-\psi(t)\big) dt \right)^{1/2} =: K(s) \tag{3.33}$$

elde edilir. Tüm $0 \leq s \leq x$ için (2.5.1)'de $\gamma = 0$ alınırsa,

$$|f(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^s (s-t)^{\upsilon-1} |D^{\upsilon} f(t)| dt$$

elde edilir. (3.33) eşitliğini uygulanırsa,

$$|f(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^s (s-t)^{\upsilon-1} K(t) dt \tag{3.34}$$

elde edilir. Ayrıca (2.18)'den tüm $0 \leq s \leq x$ ve $i = 1, \dots, r$ için

$$|D^{\gamma_i} f(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\upsilon-\gamma_i)} \int_0^s (s-t)^{\upsilon-\gamma_i-1} |D^{\upsilon} f(t)| dt$$

olur. Sonuç olarak, (3.33)'ten tüm $0 \leq s \leq x$ ve $i = 1, \dots, r$ için

$$|D^{\gamma_i} f(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\upsilon-\gamma_i)} \int_0^s (s-t)^{\upsilon-\gamma_i-1} K(t) dt \tag{3.35}$$

elde edilir.

4. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVLERİNİ İÇEREN OPIAL TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Teorem 4.1: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_1, \alpha_2,\ \beta - \alpha_i > (1/p),\ p > 1,\ i = 1,2$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2, L_\infty$'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta] + 1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. Ayrıca tüm $p(t), \frac{1}{p(t)}, q(t) \in L_\infty(0,x)$ olmak üzere $p(t) > 0$ ve $q(t) \geq 0$ olduğu göz önüne alınsın. $\lambda_\beta > 0$ ve $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2} \geq 0$ öyle ki $\lambda_\beta < p$ olsun. Burada $p > 1$'dir.

$$P_i(s) := \int_0^s (s-t)^{\frac{p(\beta-\alpha_i-1)}{p-1}} \big(p(t)\big)^{-1/(p-1)}\, dt, \qquad i = 1,2; 0 \leq s \leq x, \tag{4.1}$$

$$A(s) := \frac{q(s)\big(P_1(s)\big)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\big(P_2(s)\big)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\big(p(s)\big)^{-\lambda_\beta/p}}{\big(\Gamma(\beta-\alpha_1)\big)^{\lambda_{\alpha_1}}\big(\Gamma(\beta-\alpha_2)\big)^{\lambda_{\alpha_2}}} \tag{4.2}$$

$$A_0(x) := \left(\int_0^x \big(A(s)\big)^{p/(p-\lambda_\beta)} ds\right)^{(p-\lambda_\beta)/p} \tag{4.3}$$

ve

$$\delta_1 := \begin{cases} 2^{1-((\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)/p)}, & \lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta \leq p \ ise \\ 1, & \lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta \geq p \ ise \end{cases} \tag{4.4}$$

olsun.

Eğer $\lambda_{\alpha_2} = 0$, ise

$$\int_0^x q(s)\left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right] ds$$

$$\leq \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right)\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p} \delta_1 \left[\int_0^x p(s)\left[\left|D^\beta f_1(s)\right|^p + \left|D^\beta f_2(s)\right|^p\right] ds\right]^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)} \tag{4.5}$$

olur.

İspat: (2.18) eşitliğinden,

$$D^{\alpha_i} f_j(s) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_i-1} D^\beta f_j(t)dt, \qquad \forall\in [0,x], i=1,2;\ j=1,2 \tag{4.6}$$

dir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \int_0^s (-t)^{\beta-\alpha_i-1} \big(p(t)\big)^{-1/p} \big(p(t)\big)^{1/p} \left|D^\beta f_j(t)\right| dt \tag{4.7}$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \left(\int_0^s \left((s-t)^{\beta-\alpha_i-1} \big(p(t)\big)^{-1/p} \right)^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{(p-1)}{p}} \tag{4.8}$$

$$\times \left(\int_0^s p(t) \left|D^\beta f_j(t)\right|^p dt \right)^{1/p} = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \big(p_i(s)\big)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^s p(t) \left|D^\beta f_j(t)\right|^p dt \right)^{1/p} \tag{4.9}$$

elde edilir. Yani,

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \big(p_i(s)\big)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^s p(t) \left|D^\beta f_j(t)\right|^p dt \right)^{1/p} \tag{4.10}$$

sağlanır.

$$z_j(s) := \int_0^s p(t) \left|D^\beta f_j(t)\right|^p dt \tag{4.11}$$

olsun. Böylece $(0,x)$ açık aralığında hemen hemen her yerde $j=1,2$ olmak üzere $z_j(0)=0$ için

$$z_j'(s) = p(s) \left|D^\beta f_j(s)\right|^p \tag{4.12}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \left(p_i(s)\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(z_j(s)\right)^{1/p} \tag{4.13}$$

ve $i = 1,2,\ j = 1,2$ için $(0, x)$ aralığında

$$\left|D^{\beta} f_j(s)\right|^{\lambda_\beta} = \left(p(s)\right)^{-\lambda_\beta/p} z_j'(s)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.14}$$

dir. Bu nedenle $i = 1,2, j = 1,2$ için (4.13) eşitsizliğinin λ_{α_1}ve λ_{α_2}kuvvetleri alınırsa,

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{1}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left(P_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_1}\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{p}} \tag{4.15}$$

$$|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \frac{1}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \left(P_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{p}} \tag{4.16}$$

denklemleri elde edilir. Buradan,

$$q(s)|(D^{\alpha_1} f_1)(s)||(D^{\alpha_2} f_2)(s)|\left|\left(D^{\beta} f_1\right)(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq q(s) \frac{1}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left(P_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_1}\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{p}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}$$

$$\leq \frac{1}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \left(P_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{p}} \left(p(s)\right)^{-\lambda_\beta/p} \left(z_j'(s)\right)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.17}$$

$$= \frac{q(s)\left(P_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_1}\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(P_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(p(s)\right)^{-\lambda_\beta/p}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}} \left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{p}} \left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{p}} \left(z_1'(s)\right)^{\lambda_\beta/p}$$

$$= A(s)\left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{p}} \left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{p}} \left(z_j'(s)\right)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.18}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Hölder eşitliği uygulandığında $\left(p/\lambda_\beta > 1\right)$

$$\int_0^x q(s)|(D^{\alpha_1}f_1)(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|(D^{\alpha_2}f_2)(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|\left(D^{\beta}f_1\right)(s)\right|^{\lambda_\beta} ds$$

$$\leq A_0(x)\left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}\left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}}\left(z_1'(s)\right)ds\right)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.19}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\int_0^x q(s)|(D^{\alpha_1}f_2)(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|(D^{\alpha_2}f_1)(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|\left(D^{\beta}f_2\right)(s)\right|^{\lambda_\beta} ds$$

$$\leq A_0(x)\left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}}\left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}\left(z_2'(s)\right)ds\right)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.20}$$

bulunur.

$\lambda_{\alpha_2} = 0$ alınarak (4.19) ve (4.20) toplanırsa;

$$\int_0^x q(s)\left[|(D^{\alpha_1}f_1)(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|\left(D^{\beta}f_1\right)(s)\right|^{\lambda_\beta} + |(D^{\alpha_1}f_2)(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|\left(D^{\beta}f_2\right)(s)\right|^{\lambda_\beta}\right] ds$$

$$\leq \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right)\left[\left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}\left(z_1'(s)\right)ds\right)^{\lambda_\beta/p} + \left(\int_0^x \left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}\left(z_2'(s)\right)ds\right)^{\lambda_\beta/p}\right] \tag{4.21}$$

$$= \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right)\left[\left(z_1(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)} + \left(z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)}\right]\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.22}$$

$$= \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right)\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}$$

$$\cdot\left[\left(\int_0^x p(t)\left|D^\beta f_1(t)\right|^p dt\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)}+\left(\int_0^x p(t)\left|D^\beta f_2(t)\right|^p dt\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)}\right]=: \qquad (4.23)$$

elde edilir.

$$2^{r-1}(a^r+b^r)\leq(a+b)^r\leq a^r+b^r,\quad a,b\geq 0, 0\leq r\leq 1 \qquad (4.24)$$

ve

$$a^r+b^r\leq a^r+b^r\leq\ 2^{r-1}(a^r+b^r),\quad a,b\geq 0,\ r\geq 1 \qquad (4.25)$$

eşitsizliklerinde son olarak (4.4), (4.24) ve (4.25) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$(*)\leq\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right)\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}\delta_1\left[\int_0^x p(t)\left[\left|D^\beta f_1(t)\right|^p+\left|D^\beta f_2(t)\right|^p\right]dt\right]^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)} \qquad (4.26)$$

elde edilir. Böylece (4.5) eşitliği kanıtlanmış olur.

Teorem 4.2: $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+,\ \beta>\alpha_1,\alpha_2,\ \beta-\alpha_i>(1/p),\ p>1,\ i=1,2$ olsun. $x\in\mathbb{R}_+-\{0\}$ olmak üzere $f_1,f_2\in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2, L_\infty$'da kesirli türevlere sahip ve $k=1,\dots,[\beta]+1, i=1,2$ için $D^{\beta-k}f_i(0)=0$ olsun. Ayrıca tüm $p(t),\frac{1}{p(t)},q(t)\in L_\infty(0,x)$ olmak üzere $p(t)>0$ ve $q(t)\geq 0$ olduğu göz önüne alınsın. $\lambda_\beta>0$ ve $\lambda_{\alpha_1},\lambda_{\alpha_2}\geq 0$ öyle ki $\lambda_\beta<p$ olsun. Burada $p>1$'dir.

$$P_i(s):=\int_0^s(s-t)^{\frac{p(\beta-\alpha_i-1)}{p-1}}\left(p(t)\right)^{-1/(p-1)}dt,\qquad i=1,2;\ 0\leq s\leq x,$$

$$A(s):=\frac{q(s)\left(P_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\left(P_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\left(p(s)\right)^{-\lambda_\beta/p}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}$$

$$A_0(x) := \left(\int_0^x \left(A(s)\right)^{p/(p-\lambda_\beta)} ds \right)^{(p-\lambda_\beta)/p}$$

ve

$$\delta_3 := \begin{cases} 2^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} - 1, & \lambda_{\alpha_2} \geq \lambda_\beta \text{ ise} \\ 1, & \lambda_{\alpha_2} \leq \lambda_\beta \text{ ise} \end{cases} \tag{4.27}$$

dir. Eğer $\lambda_{\alpha_1} = 0$ ise

$$\int_0^x q(s) \left[|(D^{\alpha_2} f_2)(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|(D^\beta f_1)(s)\right|^{\lambda_\beta} + |(D^{\alpha_2} f_1)(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|(D^\beta f_2)(s)\right|^{\lambda_\beta} \right] ds$$

$$\leq \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0} \right) 2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}} \left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta} \right)^{\lambda_\beta/p} {\delta_3}^{\lambda_\beta/p}$$

$$\cdot \left(\int_0^x p(s) \left[\left|(D^\beta f_1)(s)\right|^p + \left|(D^\beta f_2)(s)\right|^p \right] ds \right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}} \tag{4.28}$$

dir.

İspat: $\lambda_{\alpha_1} = 0$ olduğunda (4.19) ve (4.20) eşitsizliklerinden $0 < \frac{\lambda_\beta}{p} < 1$ olmak üzere (4.24) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\int_0^x q(s) \left[|(D^{\alpha_2} f_2)(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|(D^\beta f_1)(s)\right|^{\lambda_\beta} + |(D^{\alpha_2} f_1)(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|(D^\beta f_2)(s)\right|^{\lambda_\beta} \right] ds$$

$$\leq \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0} \right)$$

$$\cdot \left[\left(\int_0^x \left(z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} \left(z_1'(s)\right) ds \right)^{\lambda_\beta/p} + \left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} \left(z_2'(s)\right) ds \right)^{\lambda_\beta/p} \right] \tag{4.29}$$

$$\leq \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) 2^{1-\frac{\lambda_\beta}{p}} \left(M(x)\right)^{\lambda_\beta/p} =: (*) \tag{4.30}$$

elde edilir. Burada;

$$M(x) := \int_0^x \left[(z_2)(s)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} z_1'(s) + \left(z_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} z_2'(s)\right] ds \tag{4.31}$$

dir.

$$\delta_2 := \begin{cases} 1, & \lambda_{\alpha_2} \geq \lambda_\beta \text{ ise} \\ 2^{1-(\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta)}, & \lambda_{\alpha_2} \leq \lambda_\beta \text{ ise} \end{cases} \tag{4.32}$$

olduğundan

$$M(x) = \int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} + \left(z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} \left(z_1'(s) + z_2'(s)\right) ds$$

$$- \int_0^x \left| z_1(s)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} z_1'(s) + \left(z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} z_2'(s)\right| ds \tag{4.33}$$

$$\overset{(4.24),\,(4.25)}{\leq} \delta_2 \int_0^x \left(z_1(s) + z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} \left(z_1(s) + z_2(s)\right)' ds$$

$$- \left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta}\right) \left[\left(z_1(x)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}} + \left(z_2(x)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}}\right] \tag{4.34}$$

$$= \delta_2 \left(z_1(s) + z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} \left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta}\right) - \left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta}\right)$$

$$\cdot \left[\left(z_1(x)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}} + \left(z_2(x)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}}\right] \tag{4.35}$$

$$\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta}\right) \left[\delta_2 \left(z_1(x) + z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}\right.$$

$$-\left(\left(z_1(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}+\left(z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}\right)\Bigg] \tag{4.36}$$

$$\overset{(4.25)}{\leq}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)\left[\delta_2 2^{\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}}\left(\left(z_1(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}+\left(z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}\right)\right.$$

$$-\left(\left(z_1(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}+\left(z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}\right)\Bigg] \tag{4.37}$$

$$=\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)\left(\delta_2 2^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta}-1\right)\left[\left(z_1(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}+\left(z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)}\right] \tag{4.38}$$

$\left(\delta_3=\delta_2 2^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta}-1\right)$

$$\overset{(4.25)}{\leq}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)\delta_3\left(z_1(x)+z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)} \tag{4.39}$$

dir.

Yani,

$$M(x)\leq\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)\delta_3\left(z_1(x)+z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)} \tag{4.40}$$

olur.

Bunun sonucunda da (4.30) ve (4.40) eşitsizliklerinden,

$$(*)\leq\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right)2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}{\delta_3}^{\lambda_\beta/p}\left(z_1(x)+z_2(x)\right)^{(\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)/p} \tag{4.41}$$

$$=\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right)2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}$$

$$\cdot\, \delta_3{}^{\lambda_\beta/p}\left[\int_0^x p(s)\left[\left|D^\beta f_1(s)\right|^p+\left|D^\beta f_2(s)\right|^p\right]ds\right]^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}\right)} \tag{4.42}$$

Elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3: $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+,\ \beta>\alpha_1,\alpha_2,\ \beta-\alpha_i>(1/p),\ p>1,\ i=1,2$ olsun. $x\in\mathbb{R}_+-\{0\}$ olmak üzere $f_1,f_2\in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞'da kesirli türevlere sahip ve $k=1,\dots,[\beta]+1,\ i=1,2$ için $D^{\beta-k}f_i(0)=0$ olsun. Ayrıca tüm $p(t),\frac{1}{p(t)},q(t)\in L_\infty(0,x)$ olmak üzere $p(t)>0$ ve $q(t)\geq 0$ olduğu göz önüne alınsın. $\lambda_\beta>0$ ve $\lambda_{\alpha_1},\lambda_{\alpha_2}\geq 0$ öyle ki $\lambda_\beta<p$ olsun. Burada $p>1$'dir.

$$P_i(s):=\int_0^s (s-t)^{\frac{p(\beta-\alpha_i-1)}{p-1}}\big(p(t)\big)^{-1/(p-1)}dt,\qquad i=1,2;\ 0\leq s\leq x,$$

$$A(s):=\frac{q(s)\big(P_1(s)\big)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\big(P_2(s)\big)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\big(p(s)\big)^{-\lambda_\beta/p}}{\big(\Gamma(\beta-\alpha_1)\big)^{\lambda_{\alpha_1}}\big(\Gamma(\beta-\alpha_2)\big)^{\lambda_{\alpha_2}}}$$

$$A_0(x):=\left(\int_0^x \big(A(s)\big)^{p/(p-\lambda_\beta)}ds\right)^{(p-\lambda_\beta)/p}$$

dir.

$$\widetilde{\gamma_1}:=\begin{cases}2^{((\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})/\lambda_\beta)}-1, & \lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}\geq\lambda_\beta \text{ ise}\\ 1, & \lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}\leq\lambda_\beta \text{ ise}\end{cases} \tag{4.43}$$

ve

$$\widetilde{\gamma_2}:=\begin{cases}1, & \lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta\geq p \text{ ise}\\ 2^{1-((\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)/p)}, & \lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta\leq p \text{ ise}\end{cases} \tag{4.44}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\int_0^x q(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}+|D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq A_0(x)\left(\frac{\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\frac{\lambda_\beta}{p}}\left[\lambda_{\alpha_1}^{\frac{\lambda_\beta}{p}}\widetilde{\gamma_2}+2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}\left(\widetilde{\gamma_1}\lambda_{\alpha_2}\right)^{\frac{\lambda_\beta}{p}}\right]$$

$$\left(\int_0^x p(s)\left(\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^p+\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^p\right)ds\right)^{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)/p} \tag{4.45}$$

olur.

İspat: $a,b\geq 0$ ve $p,q>1$ öyle ki $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \tag{4.46}$$

dir.Burada,

$$\int_0^x q(s)|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}ds$$

$$\leq A_0(x)\left[\int_0^x\left[\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)(z_1(s))^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)(z_2(s))^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)}\right]z_1'(s)ds\right]^{\lambda_\beta/p} \tag{4.47}$$

$$\overset{(4.24)}{\leq} A_0(x)\left[\left(\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)\frac{(z_1(x))^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^x\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)(z_2(s))^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)}z_1'(s)ds\right)^{\lambda_\beta/p}\right] \tag{4.48}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$\int_0^x q(s)|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}ds$$

$$\leq A_0(x)\left\{\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}^{\lambda_\beta/p}\left(z_1(x)\right)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p}\left(\int_0^x\left(z_2(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)}z_1'(s)ds\right)^{\lambda_\beta/p}\right\} \tag{4.49}$$

olup, benzer şekilde,

$$\int_0^x q(s)|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}ds$$

$$\leq A_0(x)\left\{\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}^{\lambda_\beta/p}\left(z_2(x)\right)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p}\left(\int_0^x\left(z_1(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)}z_2'(s)ds\right)^{\lambda_\beta/p}\right\} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.49) ve (4.50) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$\Omega := \int_0^x q(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}+|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq A_0(x)\left\{\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}^{\lambda_\beta/p}\left(\left(z_1(x)\right)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}+\left(z_2(x)\right)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p}\left[\left(\int_0^x\left(z_2(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)}z_1'(s)ds\right)^{\lambda_\beta/p}\right.$$

$$\cdot\left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)} z_2'(s)ds\right)^{\lambda_\beta/p}\Bigg\} \tag{4.51}$$

$$\overset{(4.24)}{\leq} A_0(x)\left\{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p}\right.$$

$$\cdot\left(\left(z_1(x)\right)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}+\left(z_2(x)\right)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p} 2^{1-\left(\frac{\lambda_\beta}{p}\right)}\left(\Gamma^*(x)\right)^{\lambda_\beta/p}\right\} \tag{4.52}$$

elde edilir. Burada,

$$\Gamma^*(x) := \int_0^x \left(\left(z_2(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)} z_1'(s) + \left(z_1(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_\beta}\right)} z_2'(s)\right)ds \tag{4.53}$$

dir.

(4.31) ve (4.40) eşitsizlikleri tekrar göz önüne alınırsa,

$$\Gamma^*(x) \leq \left(\frac{\lambda_\beta\widetilde{\gamma}_1}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)\left(z_1(x)+z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{p}\right)} \tag{4.54}$$

olur.

Böylece (4.54) eşitsizliğinden,

$$\Omega \leq A_0(x)\Bigg\{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p}\Bigg(\big(z_1(x)\big)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}$$
$$+\big(z_2(x)\big)^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}{\lambda_\beta}}\Bigg)$$
$$+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p}2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}\left(\frac{\lambda_\beta\widetilde{\gamma_1}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}\cdot\big(z_1(x)$$
$$+z_2(x)\big)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{p}\right)}\Bigg\} \tag{4.55}$$

$$\overset{(4.24),(4.25)}{\leq} A_0(x)\Bigg\{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p}$$
$$\cdot\widetilde{\gamma_2}\big(z_1(x)\ \ +z_2(x)\big)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{p}\right)}+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p}$$
$$2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}\left(\frac{\lambda_\beta\widetilde{\gamma_1}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}\cdot\big(z_1(x)+z_2(x)\big)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{p}\right)}\Bigg\} \tag{4.56}$$
$$= A_0(x)\Bigg\{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p}\widetilde{\gamma_2}+\left(\frac{\lambda_{\alpha_2}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}}\right)^{\lambda_\beta/p}2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}$$
$$\cdot\left(\frac{\lambda_\beta\widetilde{\gamma_1}}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}\Bigg\}\big(z_1(x)+z_2(x)\big)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}{p}\right)} \tag{4.57}$$
$$= A_0(x)\left(\frac{\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p}\cdot\left[\left[\lambda_{\alpha_1}^{\frac{\lambda_\beta}{p}}\widetilde{\gamma_2}+2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}}\big(\widetilde{\gamma_1}\lambda_{\alpha_2}\big)^{\frac{\lambda_\beta}{p}}\right]\right.$$
$$\left.\cdot\left[\int_0^x p(s)\big(\left|D^\beta f_1(s)\right|^p+\left|D^\beta f_2(s)\right|^p\big)ds\right]^{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta)/p}\right. \tag{4.58}$$

elde edilir.

Teorem 4.4: $0 \leq s \leq x$ ve $f \in L_{\infty}([0,x]), r > 0$ olsun.

$$F(s) := \int_0^s (s-t)^r f(t)dt \tag{4.60}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda tüm $s \in [0,x]$ için

$$F'(s) = r\int_0^s (s-t)^{r-1} f(t)dt \tag{4.61}$$

mevcuttur.

İspat: $s_0 \in [0,x]$ bir sabit ve

$$F(s_0) = \int_0^{s_0} (s_0-t)^r f(t)dt = \int_0^x \chi_{[0,s_0]}(t)(s_0-t)^r f(t)dt$$

olsun. Her $s_0 \in [0,x]$ için $\mathrm{g}(s,t) := \chi_{[0,s_0]}(t)(s_0-t)^r f(t)$ fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir. Yani tüm t $\in [0,x]$ için $\mathrm{g}(s_0,t) = \chi_{[0,s_0]}(t)(s_0-t)^r f(t)$ ve

$$F(s_0) = \int_0^{s_0} (s_0-t)^r f(t)dt$$

dir.

$$\frac{\partial_g(s_0,t)}{\partial_s} = f(t)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\chi_{[0,s_0+h]}(t)(s_0+h-t)^r - \chi_{[0,s_0]}(t)(s_0-t)^r}{h}\right) \tag{4.62}$$

olduğunu göstereceğiz.

Bunun için üç farklı durumu göz önüne alalım:

1) $x \geq t > s_0$ olsun. O zaman yeteri kadar küçük $h > 0$ vardır öyle ki $t \geq s_0 \pm h$'dir. Yani,

$$\chi_{[0,s_0+h]}(t) = \chi_{[0,s_0]}(t) = 0$$

dır.

Bu nedenle tüm $s_0 < t \leq x$ için

$$\frac{\partial_g(s_0,t)}{\partial_s} = 0 \tag{4.63}$$

mevcuttur.

2) $0 \leq t < s_0$ olsun. O zaman yeteri kadar küçük $h > 0$ vardır öyle ki $t < s_0 \pm h$ ‘dir. Yani,

$$\chi_{[0,s_0+h]}(t) = \chi_{[0,s_0]}(t) = 1$$

dir.

Bu durumda hemen hemen tüm $0 \leq t < s_0$ için

$$\frac{\partial_g(s_0,t)}{\partial_s} = f(t)\left(\lim_{h\to 0}\frac{(s_0+h-t)^r-(s_0-t)^r}{h}\right)$$
$$= (r)(s_0-t)^{r-1}f(t) \tag{4.64}$$

dir.

3) $t = s_0$ olsun. O zaman görülür ki,

$$\frac{\partial_g+(s_0,s_0)}{\partial_s} = f(s_0)\left(\lim_{h\to 0+}\frac{h^r}{h}\right) = f(s_0)\left(\lim_{h\to 0+} h^{r-1}\right) \tag{4.65}$$

dir.

Son limit eğer $0 < r < 1$ ise mevcur değil, $r = 1$ ise $f(s_0)$ eşit ve $r > 1$ ise sıfıra eşittir. Ayrıca $\chi_{[0,s_0+h]}(s_0) = 0$, $h < 0$ ise

$$\frac{\partial_{g\_}(s_0,s_0)}{\partial_s} = f(s_0)\left(\lim_{h\to 0-}\frac{\chi_{[0,s_0+h]}(s_0)h^r}{h}\right)$$
$$= f(s_0)\left(\lim_{h\to 0-}\chi_{[0,s_0+h]}(s_0)h^{r-1}\right) = 0$$

dır.

Yani,

$$\frac{\partial_{g\_}(s_0,s_0)}{\partial_s} = 0 \tag{4.66}$$

dır.

Genel olarak tüm $t \in [0,x]$ için $\frac{\partial_g(s_0,t)}{\partial_s}$ mevcuttur.

$h \neq 0$ ve $D_{s_0}(0,t) := 0$ için

$$D_{s_0}(h,t) := f(t)\left(\frac{\chi[0,s_0+h](t)(s_0+h-t)^r - \chi[0,s_0](t)(s_0-t)^r}{h}\right) \tag{4.67}$$

şeklinde tanımlansın.

Buna göre yukarıdaki üç durumu tekrar göz önüne alalım:

1) $x \geq t > s_0$ olsun. O zaman yeteri kadar küçük $h > 0$ vardır öyle ki $t > s_0 \pm h$'dir. Böylece $D_{s_0}(h, t) = 0$ olduğu açıktır.

2) $0 \leq t < s_0$ olsun. O zaman yeteri kadar küçük $h > 0$ vardır öyle ki $t < s_0 \pm h$'dir. Bundan dolayı,

$$D_{s_0}(\pm h, r) = f(t)\left(\frac{(s_0 \pm h - t)^r - (s_0 - t)^r}{\pm h}\right) \tag{4.68}$$

dir.

$\rho := s_0 - t > 0$ ve $\rho \leq x$ olsun. $r > 0$ ve $h \neq 0$ olmak üzere

$$\varphi(h) := \frac{(p + h)^r - p^r}{h} = \frac{(s_0 + h - t)^r - (s_0 - t)^r}{h} \tag{4.69}$$

olarak tanımlansın.

Yani,

$D_{s_0}(h, t) = f(t)\varphi(h)$. Eğer $r = 1$ ise daha sonra $\varphi(h) = 1$ ve

$$D_{s_0}(h, t) = f(t) \tag{4.70}$$

dir.

Şimdi bu durumun alt durumlarını inceleyelim:

$\big(2(i)\big)$ Eğer $r > 1$ ise o zaman $0 \leq \rho \leq x$ için $\gamma(\rho) := \rho^r$ konveks ve artandır.

Eğer $h > 0$ ise o zaman ortalama değer teoreminden

$$\varphi(h) < rx^{r-1}$$

olur. Yani,

$$\left|D_{s_0}(h, t)\right| \leq rx^{r-1}|f(t)| \tag{4.71}$$

dir.

Eğer $h < 0$ ise yine benzer şekilde,

$$\varphi(h) = \frac{\rho^r - (\rho + h)^r}{-h} < rx^{r-1}$$

dir. Yeterince küçük $|h|$ için

$$\left|D_{s_0}(h, t)\right| \leq rx^{r-1}|f(t)| \, , r \geq 1 \tag{4.72}$$

olur.

$\big(2(ii)\big)$ Eğer $0 < r < 1$ ise o zaman $0 \le \rho \le x$ için $\gamma(\rho) = \rho^r$ ise konkav ve artandır. $h > 0$ ise $\varphi(h) < \rho^{r-1} = (s_0 - t)^{r-1}$ ve $h < 0$ için yine $\varphi(h) < \rho^{r-1} = (s_0 - t)^{r-1}$'dir.

Yani yeterince küçük $|h|$ için

$$\left|D_{s_0}(h,t)\right| \le (s_0 - t)^{r-1}|f(t)| \tag{4.73}$$

dir.

3) $t = s_0$ olsun. O zaman,

$$h > 0 \text{ için } D_{s_0}(h, s_0) = f(s_0)h^{r-1} \tag{4.74}$$

ve

$$h < 0 \text{ için } D_{s_0}(h, s_0) = 0 \tag{4.75}$$

dır.

Böylece eğer $r \ge 1$ ise, yeterince küçük $|h|$ için,

$$D_{s_0}(h, s_0) \le |f(s_0)|x^{r-1} \tag{4.76}$$

elde edilir.

Eğer $0 < r < 1$ ise o zaman $h > 0$ küçük için $D_{s_0}(h, s_0)$ fonksiyonu sınırlı değildir.

Sonuç olarak;

(1) $r \ge 1$ için hemen hemen tüm $t \in [0, x]$ için

$$\left|D_{s_0}(h,t)\right| \le r x^{r-1}\left||f(t)|\right|_\infty < +\infty \tag{4.77}$$

(2) $0 < r < 1$ için hemen hemen tüm $t \in [0, x]$ için

$$\left|D_{s_0}(h,t)\right| \le \lambda(t) \tag{4.78}$$

olur. Burada,

$$\lambda(t) := \begin{cases} (s_0 - t)^{r-1}|f(t)|, & 0 \le t \le s_0 \\ 0, & s_0 \le t \le x \end{cases} \tag{4.79}$$

dir. Açıktır ki λ , $[0, x]$ üzerinde integrallenebilirdir. O zaman Teorem 24.5 (Charalambos *et al.* 1998)'den $\frac{\partial_g(s_0,\cdot)}{\partial_s}$ fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$F'(s_0) = \int_0^x \frac{\partial_g(s_0,t)}{\partial_s} dt = r\int_0^{s_0} (s_0 - t)^{r-1} f(t)dt + \int_{s_0}^x 0dt$$

$$= r\int_0^{s_0} (s_0 - t)^{r-1} f(t)dt \tag{4.80}$$

elde edilir.

Teorem 4.5 $\beta > \alpha_1 + 1$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2, L_\infty$'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. Ayrıca tüm $p(t), \frac{1}{p(t)}, q(t) \in L_\infty(0,x)$ olmak üzere $p(t) > 0$ ve $q(t) \geq 0$ olduğu göz önüne alınsın. $\lambda_\alpha \geq 0, 0 < \lambda_{\alpha+1} < 1$ ve $p > 1$'dir.

$$\theta_3 := \begin{cases} 2^{\lambda_\alpha/(\lambda_{\alpha+1})} - 1, & \lambda_\alpha \geq \lambda_{\alpha+1} \text{ ise} \\ 1, & \lambda_\alpha \leq \lambda_{\alpha+1} \text{ise} \end{cases} \tag{4.81}$$

$$L(x) := \left(2 \int_0^x \left(q(s)\right)^{(1/(1-\lambda_{\alpha+1}))} ds \right)^{(1-\lambda_{\alpha+1})} \left(\frac{\theta_3 \lambda_{\alpha+1}}{\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+1}} \right)^{\lambda_{\alpha+1}} \tag{4.82}$$

ve

$$P_1(x) := \int_0^x (x-s)^{(\beta-\alpha_1-1)p/(p-1)} \left(p(s)\right)^{-1/(p-1)} ds \tag{4.83}$$

$$T(x) := L(x) \left(\frac{P_1(x)^{((p-1)/p)}}{\Gamma(\beta - \alpha_1)} \right)^{\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+1}} \tag{4.84}$$

ve

$$\omega_1 := 2^{\left(\frac{p-1}{p}\right)(\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+1})} \tag{4.85}$$

$$\phi(x) := T(x)\omega_1 \tag{4.86}$$

dir. O zaman,

$$\int_0^x q(s) \left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_\alpha} |D^{\alpha_1+1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha+1}} + |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_\alpha} |D^{\alpha_1+1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha+1}} \right] ds$$

$$\leq \phi(s)\left[\int_0^x p(s)\left(\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^p+\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^p\right)ds\right]^{\frac{(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}{p}} \tag{4.87}$$

elde edilir.

İspat: Kolaylık sağlaması için $\alpha_2 \coloneqq \alpha_1 + 1$ yazalım. (4.88)

Teorem 2.2.1'den $\forall\, s \in [0,x], i = 1,2$ için

$$D^{\alpha_1}f_i(s) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_1)}\int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_1-1}\, D^{\beta}f_i(t)dt \tag{4.89}$$

ve

$$D^{\alpha_2}f_i(s) = D^{\alpha_1+1}f_i(s) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_1-1)}\int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_1-2}D^{\beta}f_i(t)dt \tag{4.90}$$

dir. Teorem 4.4'ten $\forall\, s \in [0,x]$, $i = 1,2$ için

$$(D^{\alpha_1 f_i(s)})' = D^{\alpha_1+1}f_i(s) = D^{\alpha_2}f_i(s) \tag{4.91}$$

ve

$$D^{\alpha_i}f_i(s) \leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)}\int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_i-1}|D^{\beta}f_j(t)|dt =: g_{j,\alpha_i}(s) \tag{4.92}$$

dir. Burada $j = 1,2$, $i = 1,2$, $0 \leq s \leq x$'dir.

Teorem 4.4'ten

$$(g_{j,\alpha_1}(s))' = g_{j,\alpha_2}(s); \quad g_{j,\alpha_i}(0) = 0 \tag{4.93}$$

dir.

Eğer $\beta - \alpha_2 = 1$ ise

$$g_{j,\alpha_2}(s) = \int_0^s |D^{\beta}f_j(t)dt \tag{4.94}$$

dir. $\frac{1}{\lambda_{\alpha+1}}, \frac{1}{(1-\lambda_{\alpha+1})}$ indeksleri için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_0^x q(s)|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_\alpha}|D^{\alpha_1+1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha+1}}ds \leq \int_0^s q(s)\left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)^{\lambda_\alpha}\left(\left(g_{2,\alpha_1}(s)\right)'\right)^{\lambda_{\alpha+1}} ds$$

$$\leq \left(\int_0^s \left(q(s)\right)^{\left(\frac{1}{1-\lambda_{\alpha+1}}\right)} ds\right)^{(1-\lambda_{\alpha+1})} \left(\int_0^x \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)^{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}}\left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)' ds\right)^{\lambda_{\alpha+1}} \tag{4.95}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_0^x q(s)|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_\alpha}|D^{\alpha_1+1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha+1}}ds$$

$$\leq \left(\int_0^s \left(q(s)\right)^{\left(\frac{1}{1-\lambda_{\alpha+1}}\right)} ds\right)^{(1-\lambda_{\alpha+1})} \left(\int_0^x \left(g_{2,\alpha_1}(s)\right)^{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}} \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)' ds\right)^{\lambda_{\alpha+1}} \tag{4.96}$$

elde edilir.

(4.95) ve (4.96) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$\int_0^x q(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_\alpha}|D^{\alpha_1+1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha+1}} + |D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_\alpha}|D^{\alpha_1+1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha+1}}\right]ds$$

$$\leq \left(\int_0^s \left(q(s)\right)^{\left(\frac{1}{1-\lambda_{\alpha+1}}\right)} ds\right)^{(1-\lambda_{\alpha+1})} \left[\left(\int_0^x \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)^{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}} \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)' ds\right)^{\lambda_{\alpha+1}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^x \left(g_{2,\alpha_1}(s)\right)^{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}} \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)' ds\right)^{\lambda_{\alpha+1}}\right] \tag{4.97}$$

$$\overset{(4.24)}{\leq} \left(2\int_0^x \left(q(s)\right)^{\left(\frac{1}{1-\lambda_{\alpha+1}}\right)} ds\right)^{1-\lambda_{\alpha+1}}$$

$$\cdot \left[\int_0^x \left[\left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)^{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}} \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)' + \left(g_{2,\alpha_1}(s)\right)^{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}} \left(g_{1,\alpha_1}(s)\right)'\right] ds\right]^{\lambda_{\alpha+1}} \tag{4.98}$$

$$\leq \left(2\int_0^x \left(q(s)\right)^{\left(\frac{1}{1-\lambda_{\alpha+1}}\right.}\right)^{(1-\lambda_{\alpha+1})} \left(\frac{\lambda_{\alpha+1}\theta_3}{\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+1}}\right)^{\lambda_{\alpha+1}}$$

$$. \left(g_{1,\alpha_1}(x) + g_{2,\alpha_1}(x)\right)^{(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})} \tag{4.99}$$

$$= L(x)\left(g_{1,\alpha_1}(x) + g_{2,\alpha_1}(x)\right)^{\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1}} \tag{4.100}$$

$$= \frac{L(x)}{(\Gamma(\beta - \alpha_1)^{(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}}$$

$$\cdot\left[\int_0^x (x-t)^{\beta-\alpha_1-1}\big(p(t)\big)^{-1/p}\big(p(t)\big)^{1/p}\left[\left|D^\beta f_1(t)\right|+\left|D^\beta f_2(t)\right|\right]dt\right]^{(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})} \tag{4.101}$$

$$\leq \frac{L(x)}{(\Gamma(\beta-\alpha_1)^{(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}}\left[\int_0^x (x-t)^{\frac{(\beta-\alpha_1-1)p}{(p-1)}}\big(p(t)\big)^{\frac{-1}{(p-1)}}dt\right]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}$$

$$\cdot\left[\int_0^x p(t)\left(\left|D^\beta f_1(t)\right|+\left|D^\beta f_2(t)\right|\right)^p dt\right]^{\left(\frac{\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1}}{p}\right)} \tag{4.102}$$

$$=\frac{L(x)(P_1(x))^{\left(\frac{p-1}{p}\right)(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}}{(\Gamma(\beta-\alpha_1)^{(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}}\left[\int_0^x p(t)\left(\left|D^\beta f_1(t)\right|+\left|D^\beta f_2(t)\right|\right)^p dt\right]^{\left(\frac{\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1}}{p}\right)} \tag{4.103}$$

$$=T(x)\left[\int_0^x p(t)\left(\left|D^\beta f_1(t)\right|+\left|D^\beta f_2(t)\right|\right)^p dt\right]^{\left(\frac{\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1}}{p}\right)} \tag{4.104}$$

$$=T(x)2^{\left(\frac{p-1}{p}\right)(\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1})}\left[\int_0^x p(t)\left(\left|D^\beta f_1(t)\right|+\left|D^\beta f_2(t)\right|\right)^p dt\right]^{\left(\frac{\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1}}{p}\right)} \tag{4.105}$$

$$=\Phi(x)\left[\int_0^x p(t)\left(\left|D^\beta f_1(t)\right|+\left|D^\beta f_2(t)\right|\right)^p dt\right]^{\left(\frac{\lambda_\alpha+\lambda_{\alpha+1}}{p}\right)} \tag{4.106}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.6 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+,\ \beta>\alpha_1,\alpha_2,\ \beta-\alpha_i>(1/p),\ p>1,\ i=1,2$ olsun. $x\in\mathbb{R}_+-\{0\}$ olmak üzere $f_1,f_2\in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2, L_\infty$'da kesirli türevlere sahip ve $k=1,\ldots,[\beta]+1, i=1,2$ için $D^{\beta-k}f_i(0)=0$ olsun. Ayrıca tüm $p(t),\frac{1}{p(t)},q(t)\in L_\infty(0,x)$ olmak üzere $p(t)>0$ ve $q(t)\geq 0$ olduğu göz önüne alınsın. $\lambda_\beta>0$ ve $\lambda_{\alpha_1},\lambda_{\alpha_2}\geq 0$ öyle ki $\lambda_\beta<p$ olsun. Burada $p>1$'dir.

$$P_i(s)\coloneqq\int_0^s (s-t)^{\frac{p(\beta-\alpha_i-1)}{p-1}}\big(p(t)\big)^{-1/(p-1)}dt,\qquad i=1,2;\ 0\leq s\leq x,$$

$$A(s) := \frac{q(s)\left(P_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\left(P_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}\left(\frac{p-1}{p}\right)}\left(p(s)\right)^{-\lambda_\beta/p}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}$$

$$A_0(x) := \left(\int_0^x \left(A(s)\right)^{p/(p-\lambda_\beta)} ds\right)^{(p-\lambda_\beta)/p}$$

$\lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta$ özel durumunu düşünelim.

$$\tilde{T}(x) := A_0(x)\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p} 2^{(p-2\lambda_{\alpha_1}-3\lambda_\beta)/p} \tag{4.107}$$

olsun.

O zaman,

$$\int_0^x q(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}|D^\beta f_1(s)|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^\beta f_2(s)|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq \tilde{T}(x)\left(\int_0^x p(s)\left(\left|D^\beta f_1(s)\right|^p + \left|D^\beta f_2(s)\right|^p\right)ds\right)^{\frac{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}{p}} \tag{4.108}$$

dir.

İspat: (4.19) ve (4.20) eşitsizliklerine $\lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta$ uygulanır ve taraf tarafa toplanırsa,

$$\int_0^x q(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq A_0(x)\left[\left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}\left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{\lambda_\beta}} z_1'(s)ds\right)^{\lambda_\beta/p} + \left(\int_0^x \left(z_1(s)\right)^{(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)/\lambda_\beta}\left(z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_1}/\lambda_\beta} z_2'(s)ds\right)^{\frac{\lambda_\beta}{p}}\right] \tag{4.109}$$

$$\overset{(4.24)}{\leq} A_0(x)2^{1-\left(\frac{\lambda_\beta}{p}\right)}\left[\int_0^x\left(\left(z_1(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}\left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}+1}z_1'(s)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(z_1(s)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}\right)+1}\left(z_2(s)\right)^{\frac{\lambda_{\alpha_1}}{\lambda_\beta}}z_2'(s)\right)ds\right] \tag{4.110}$$

$$+A_0(x)2^{1-\left(\frac{\lambda_\beta}{p}\right)}\left[\int_0^x\left(z_1(s)z_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_1}/\lambda_\beta}[z_2(s)z_1'(s)+z_1(s)z_2'(s)]ds\right]^{\frac{\lambda_\beta}{p}} \tag{4.111}$$

$$=A_0(x)2^{(p-\lambda_\beta)/p}\left[\int_0^x\left(z_1(s)z_2(s)\right)^{(\lambda_{\alpha_1}/\lambda_\beta)}\left(z_1(s)z_2(s)\right)'ds\right]^{\frac{\lambda_\beta}{p}} \tag{4.112}$$

$$=A_0(x)2^{\left(\frac{p-\lambda_\beta}{p}\right)}\left(z_1(x)z_2(x)\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p} \tag{4.113}$$

$$\leq A_0(x)2^{\left(\frac{p-\lambda_\beta}{p}\right)}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}\left(\frac{z_1(x)+z_2(x)}{2}\right)^{\frac{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}{p}} \tag{4.114}$$

$$=\tilde{T}(x)\left(z_1(x)+z_2(x)\right)^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)/p} \tag{4.115}$$

$$=\tilde{T}(x)\left[\int_0^x p(s)\left(\left|D^\beta f_1(s)\right|^p+\left|D^\beta f_2(s)\right|^p\right)ds\right]^{\frac{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}{p}} \tag{4.116}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi, yukarıdaki teoremlerin özel durumlarını vereceğiz.

Sonuç 4.1: Teorem 4.1'de $\lambda_{\alpha_2}=0, p(t)=q(t)=1$ ise

$$\int_0^x\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}+|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq C_1(x)\left[\int_0^x\left[\left|D^\beta f_1(s)\right|^p+\left|D^\beta f_2(s)\right|^p\right]ds\right]^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{p}\right)} \tag{4.117}$$

dir. Burada,

$$C_1(x) := \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right)\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}\delta_1 \tag{4.118}$$

$$\delta_1 := \begin{cases} 2^{1-((\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)/p)}, & \text{eğer } \lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta \le p \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } \lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta \ge p \text{ ise} \end{cases} \tag{4.119}$$

dir. Böylece,

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right) = \left\{\left(\frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1})/p)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}(\beta p-\alpha_1 p-1)^{((\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1})/p)}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{(p-\lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}}{(\lambda_{\alpha_1}\beta p-\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 p-\lambda_{\alpha_1}+p-\lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}}\right)\right\}\cdot x^{((\lambda_{\alpha_1}\beta p-\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 p-\lambda_{\alpha_1}+p-\lambda_\beta)/p)} \tag{4.120}$$

bulunur.

İspat: (4.3) eşitliğinden,

$$A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0} = \left(\int_0^x \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right)^{p/(p-\lambda_\beta)} ds\right)^{(p-\lambda_\beta)/p} \tag{4.121}$$

dir. Burada (4.2) eşitliğinden,

$$A(s)|_{\lambda_{\alpha_2}=0} = \frac{\left(P_1(s)\right)^{\lambda_{\alpha_1}(p-1)/p}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \tag{4.122}$$

ve (4.1) eşitliğinden,

$$P_1(s) = \int_0^s (s-t)^{\frac{p(\beta-\alpha_1-1)}{(p-1)}} dt \tag{4.123}$$

elde edilir. Böylece,

$$P_1(s) = \left(\frac{p-1}{\beta p-\alpha_1 p-1}\right) s^{((\beta p-\alpha_1 p-1)/(p-1))} \tag{4.124}$$

ve

$$A(s)|_{\lambda_{\alpha_2}=0} = \left(\frac{p-1}{\beta p-\alpha_1 p-1}\right)^{\left(\frac{\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1}}{p}\right)} \frac{1}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} s^{\frac{(\lambda_{\alpha_1}\beta p-\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 p-\lambda_{\alpha_1})}{p}} \tag{4.125}$$

elde edilir.

Yani,

$$A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0} = \left(\frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1})/p)}}{(\beta p-\alpha_1 p-1)^{((\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1})/p)}\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \right)$$

$$\cdot \left(\int_0^x s^{((\lambda_{\alpha_1}\beta p-\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 p-\lambda_{\alpha_1})/(p-\lambda_\beta))}\, ds \right)^{(p-\lambda_\beta)/p}$$

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right) = \left\{ \left(\frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1})/p)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}(\beta p-\alpha_1 p-1)^{((\lambda_{\alpha_1}p-\lambda_{\alpha_1})/p)}} \right) \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{(p-\lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}}{(\lambda_{\alpha_1}\beta p-\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 p-\lambda_{\alpha_1}+p-\lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}} \right) \right\} \cdot x^{((\lambda_{\alpha_1}\beta p-\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 p-\lambda_{\alpha_1}+p-\lambda_\beta)/p)} \qquad (4.126)$$

dir.

Sonuç 4.2: Teorem 4.1'de $\lambda_{\alpha_2} = 0,\ p(t) = q(t) = 1,\ \lambda_{\alpha_1} = \lambda_\beta = 1,\ p = 2$ olsun. Ayrıca $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_1, \alpha_2,\ \beta - \alpha_1 > (1/2),\ \ i = 1,2$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2,\ L_\infty$ kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^x [|D^{\alpha_1} f_1(s)|\,|D^\beta f_1(s)| + |D^{\alpha_1} f_2(s)||D^\beta f_2(s)|]ds$$

$$\leq \left(\frac{x^{(\beta-\alpha_1)}}{2\Gamma(\beta-\alpha_1)\sqrt{\beta-\alpha_1}\sqrt{2\beta-2\alpha_1-1}} \right) \left(\int_0^x \left[\left(D^\beta f_1(s)\right)^2 + \left(D^\beta f_2(s)\right)^2 \right] ds \right) \qquad (4.127)$$

dir.

İspat: $\lambda_{\alpha_2} = 0, p(t) = q(t) = 1, \lambda_{\alpha_1} = \lambda_\beta = 1, p = 2$ olduğundan ve $\delta_1 = 1$ için

$$\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta} \right)^{\lambda_\beta/p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4.128)$$

olur. Ayrıca,

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_2}=0}\right) = \left(\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_1)\sqrt{2\beta-2\alpha_1-1}} \right) \left(\frac{x^{(\beta-\alpha_1)}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta-\alpha_1}} \right) \qquad (4.129)$$

dir. Son olarak,

$$C(x) = \frac{x^{(\beta-\alpha_1)}}{2\Gamma(\beta-\alpha_1)\sqrt{\beta-\alpha_1}\sqrt{2\beta-2\alpha_1-1}} \qquad (4.130)$$

dir.

Sonuç 4.3: Teorem 4.2'de $\lambda_{\alpha_1} = 0, p(t) = q(t) = 1$ alınırsa,

$$\int_0^x [|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}] ds$$

$$\leq C_2(x) \left(\int_0^x [\left|D^\beta f_1(s)\right|^p + \left|D^\beta f_2(s)\right|^p] ds \right)^{(\lambda_\beta + \lambda_{\alpha_2})/p} \tag{4.131}$$

olur. Burada,

$$C_2(x) := \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) 2^{\frac{(p-\lambda_\beta)}{p}} \left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p} \delta_3^{\lambda_\beta/p} \tag{4.132}$$

$$\delta_3 := \begin{cases} 2^{\lambda_{\alpha_2}/\lambda_\beta} - 1, & \text{eğer } \lambda_{\alpha_2} \geq \lambda_\beta \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } \lambda_{\alpha_2} \leq \lambda_\beta \text{ ise} \end{cases} \tag{4.133}$$

dir. Bu durumda,

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) = \left\{ \left(\frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)}}{\left(\Gamma(\beta - \alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}} (\beta p - \alpha_2 p - 1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)}} \right) \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{(p-\lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}}{(\lambda_{\alpha_2}\beta p - \lambda_{\alpha_2}\alpha_2 p - \lambda_{\alpha_2} + p - \lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}} \right) \right\} \cdot x^{((\lambda_{\alpha_2}\beta p - \lambda_{\alpha_2}\alpha_2 p - \lambda_{\alpha_2} + p - \lambda_\beta)/p)} \tag{4.134}$$

bulunur.

İspat: (4.3)'ten

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) = \left(\int_0^x \left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right)^{p/(p-\lambda_\beta)} ds \right)^{(p-\lambda_\beta)/p} \tag{4.1.135}$$

ve (4.2)'den

$$\left(A(s)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) = \frac{\left(P_2(s)\right)^{\lambda_{\alpha_2}(p-1)/p}}{\left(\Gamma(\beta - \alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}, \tag{4.136}$$

ve (4.1)'den

$$P_2(s) = \int_0^s (s-t)^{\frac{(\beta-\alpha_2-1)p}{(p-1)}} dt, \qquad 0 \le s \le x \tag{4.137}$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$P_2(s) = \left(\frac{p-1}{\beta p - \alpha_2 p - 1}\right) s^{((\beta p - \alpha_2 p - 1)/(p-1))} \tag{4.138}$$

ve

$$\left(A(s)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) = \frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)} s^{((\lambda_{\alpha_2}\beta p - \lambda_{\alpha_2}\alpha_2 p - \lambda_{\alpha_2} + p - \lambda_\beta)/p)}}{(\beta p - \alpha_2 p - 1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)} \left(\Gamma(\beta - \alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \tag{4.139}$$

dir. Yani,

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) = \left(\frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)}}{(\beta p - \alpha_2 p - 1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)} \left(\Gamma(\beta - \alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\right)$$

$$\cdot \left(\int_0^x s^{((\lambda_{\alpha_2}\beta p - \lambda_{\alpha_2}\alpha_2 p - \lambda_{\alpha_2})/(p - \lambda_\beta))} ds\right)^{((p-\lambda_\beta)/p)} \tag{4.140}$$

$$= \left\{\left(\frac{(p-1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)}}{(\beta p - \alpha_2 p - 1)^{((\lambda_{\alpha_2} p - \lambda_{\alpha_2})/p)} \left(\Gamma(\beta - \alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot \left(\frac{(p-\lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}}{(\lambda_{\alpha_2}\beta p - \lambda_{\alpha_2}\alpha_2 p - \lambda_{\alpha_2} + p - \lambda_\beta)^{((p-\lambda_\beta)/p)}}\right)\right\} \cdot x^{((\lambda_{\alpha_2}\beta p - \lambda_{\alpha_2}\alpha_2 p - \lambda_{\alpha_2} + p - \lambda_\beta)/p)} \tag{4.141}$$

elde edilir.

Sonuç 4.4: Teorem 4.2'de $\lambda_{\alpha_1} = 0,\ p(t) = q(t) = 1,\ \lambda_{\alpha_2} = \lambda_\beta = 1,\ p = 2$ olsun. Ayrıca $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_2,\ \beta - \alpha_2 > (1/2)$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞ kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun.
O zaman,

$$\int_0^x [|D^{\alpha_2} f_2(s)|\left|D^\beta f_1(s)\right| + |D^{\alpha_2} f_1(s)|\left|D^\beta f_2(s)\right|] ds$$

$$\leq C_2^*(x)\left(\int_0^x \left[\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^2+\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^2\right]ds\right) \tag{4.142}$$

dir. Burada,

$$C_2^*(x) := \frac{x^{(\beta-\alpha_2)}}{\sqrt{2}\Gamma(\beta-\alpha_2)\sqrt{\beta-\alpha_2}\sqrt{2\beta-2\alpha_2-1}} \tag{4.143}$$

dir.

İspat: $\lambda_{\alpha_1}=0,\ p(t)=q(t)=1,\ \lambda_{\alpha_2}=\lambda_\beta=1,\ p=2$ olduğundan ve $\delta_3^{\lambda_\beta/p}=1$, $2^{(p-\lambda_\beta)/p}=\sqrt{2}$'nin

$$\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha_2}+\lambda_\beta}\right)^{\lambda_\beta/p}=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.144}$$

olur. Ayrıca,

$$\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right)=\left(\frac{x^{(\beta-\alpha_2)}}{\sqrt{2}\Gamma(\beta-\alpha_2)\sqrt{\beta-\alpha_2}\sqrt{2\beta-2\alpha_2-1}}\right) \tag{4.145}$$

dir. Sonuç olarak,

$$C_2^*(x)=\left(A_0(x)|_{\lambda_{\alpha_1}=0}\right) \tag{4.146}$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5: Teorem 4.3'te $\lambda_{\alpha_1}=\lambda_{\alpha_2}=\lambda_\beta=1,\ p=3,\ p(t)=q(t)=1$ olsun. Bu durumda,

$$\int_0^x [|D^{\alpha_1}f_1(s)||D^{\alpha_2}f_2(s)||D^{\beta}f_1(s)|+|D^{\alpha_2}f_1(s)||D^{\alpha_1}f_2(s)||D^{\beta}f_2(s)|]ds$$
$$\leq A_0(x)\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)\left(\int_0^x (\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^3+\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^3)ds\right) \tag{4.147}$$

olur. Burada,

$$A_0(x)=\frac{4x^{(2\beta-\alpha_1-\alpha_2)}}{\Gamma(\beta-\alpha_1)\Gamma(\beta-\alpha_2)[3(3\beta-3\alpha_1-1)(3\beta-3\alpha_2-1)(2\beta-\alpha_1-\alpha_2)]^{2/3}} \tag{4.148}$$

dir.

İspat: (4.45) eşitsizliğini uygulayalım. Burada $\tilde{\gamma}_1 = 3,\ \tilde{\gamma}_2 = 1$ için

$$\left(\frac{\lambda_\beta}{(\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2})(\lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2} + \lambda_\beta)}\right)^{\lambda_\beta/p} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \tag{4.149}$$

dir.

Ayrıca,

$$\left[\lambda_{\alpha_1}^{\lambda_\beta/p}\tilde{\gamma}_2 + 2^{(p-\lambda_\beta)/p}\left(\tilde{\gamma}_1\lambda_{\alpha_2}\right)^{\lambda_\beta/p}\right] = 1 + \sqrt[3]{12} \tag{4.150}$$

dir.

(4.149)-(4.150) çarpımı $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)$'dır. Burada, (4.3) eşitsizliğinden

$$A_0(x) = \left(\int_0^x \left(A(s)\right)^{3/2} ds\right)^{2/3} \tag{4.151}$$

ve (4.2) eşitliğinden,

$$A(s) = \frac{\left(P_1(s)\right)^{2/3}\left(P_2(s)\right)^{2/3}}{\Gamma(\beta - \alpha_1)\Gamma(\beta - \alpha_2)} \tag{4.152}$$

ve bir de (4.1) eşitliğinden,

$$P_i(s) = \int_0^s (s - t)^{(\beta - \alpha_i - 1)\frac{3}{2}} dt, \qquad i = 1,2 \tag{4.153}$$

elde edilir.

Yani,

$$P_i(s) = \frac{2s^{(3\beta - 3\alpha_i - 1)/2}}{(3\beta - 3\alpha_i - 1)}, \qquad i = 1,2 \tag{4.154}$$

ve

$$A(s) = \left(\frac{2^{4/3}s^{((6\beta - 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2)/3)}}{\Gamma(\beta - \alpha_1)\Gamma(\beta - \alpha_2)(3\beta - 3\alpha_1 - 1)^{2/3}(3\beta - 3\alpha_2 - 1)^{2/3}}\right) \tag{4.155}$$

dir. Sonuç olarak,

$$A_0(x) = \left(\frac{2^{4/3}}{\Gamma(\beta - \alpha_1)\Gamma(\beta - \alpha_2)(3\beta - 3\alpha_1 - 1)^{2/3}(3\beta - 3\alpha_2 - 1)^{2/3}}\right) \cdot \left(\int_0^x s^{((6\beta - 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2)/2)} ds\right)^{2/3}$$

$$= \frac{4x^{(2\beta-\alpha_1-\alpha_2)}}{\Gamma(\beta-\alpha_1)\Gamma(\beta-\alpha_2)[3(3\beta-3\alpha_1-1)(3\beta-3\alpha_2-1)(2\beta-\alpha_1-\alpha_2)]^{2/3}} \tag{4.156}$$

elde edilir.

Sonuç 4.6: Teorem 4.5'te $\lambda_\alpha = 1$, $\lambda_{\alpha+1} = 1/2$, $p = 3/2)$, $p(t) = q(t) = 1$ olsun. Ayrıca $\beta > \alpha_1 + 1$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. O zaman,

$$\int_0^x [|D^{\alpha_1} f_1(s)|\sqrt{|D^{\alpha_1+1} f_2(s)|} + |D^{\alpha_1} f_2(s)|\sqrt{|D^{\alpha_1+1} f_1(s)|}]ds$$

$$\leq \Phi^*(x)\left[\int_0^x \left(\left|D^\beta f_1(s)\right|^{3/2} + \left|D^\beta f_2(s)\right|^{3/2}\right) ds\right] \tag{4.157}$$

dir. Burada,

$$\Phi^*(x) = \frac{2x^{(3\beta-3\alpha_1-1)/2}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{3/2}\sqrt{3\beta-3\alpha_1-2}} \tag{4.158}$$

dir.

İspat: $\lambda_\alpha = 1, \lambda_{\alpha+1} = 1/2$, $p = 3/2)$, $p(t) = q(t) = 1$ olduğundan ve $\theta_3 = 3, L(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$ için

$$P_1(x) = \frac{x^{3\beta-3\alpha_1-2}}{(3\beta-3\alpha_1-2)}$$

ve

$$T(x) = \sqrt{2}\left(\frac{x^{(3\beta-3\alpha_1-2)/2}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{3/2}\sqrt{3\beta-3\alpha_1-2}}\right) \tag{4.159}$$

elde edilir . Ayrıca $\omega_1 = \sqrt{2}$'dir.

Son olarak,

$$\Phi^*(x) = \frac{2x^{(3\beta-3\alpha_1-2)/2}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{3/2}\sqrt{3\beta-3\alpha_1-2}} \tag{4.160}$$

olsun. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.7: Teorem 4.6'da $p = 2(\lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta) > 1,\ p(t) = q(t) = 1$ olsun.

$$\int_0^x [|D^{\alpha_1} f_1(s)|\sqrt{|D^{\alpha_1+1} f_2(s)|} + |D^{\alpha_1} f_2(s)|\sqrt{|D^{\alpha_1+1} f_1(s)|}]ds$$

$$\leq \tilde{\tilde{T}}(x)\left(\int_0^x \left(\left|D^\beta f_1(s)\right|^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)} + \left|D^\beta f_2(s)\right|^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right) ds\right) \tag{4.161}$$

dır. Burada,

$$\tilde{\tilde{T}}(x) \coloneqq \tilde{A}_0(x)\left(\frac{\lambda_\beta}{2\left(\lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta\right)}\right)^{\left(\frac{\lambda_\beta}{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right)} \tag{4.162}$$

ve

$$\tilde{A}_0(x) \coloneqq \sigma\sigma^* x^\theta \tag{4.163}$$

dir. Burada,

$$\sigma \coloneqq \frac{1}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}}\left(\frac{2\lambda_{\alpha_1} + 2\lambda_\beta - 1}{2\lambda_{\alpha_1}\beta + 2\lambda_\beta\beta - 2\lambda_{\alpha_1}\alpha_1 + 2\lambda_\beta\alpha_1 - 1}\right)^{\frac{(2\lambda_{\alpha_1}^2+2\lambda_{\alpha_1}\beta-\lambda_{\alpha_1})}{(2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta)}}$$

$$\cdot\left(\frac{2\lambda_{\alpha_1} + 2\lambda_\beta - 1}{2\lambda_{\alpha_1}\beta + 2\lambda_\beta\beta - 2\lambda_{\alpha_1}\alpha_2 + 2\lambda_\beta\alpha_2 - 1}\right)^{((2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta-1)/2)} \tag{4.164}$$

$$\sigma_0 \coloneqq \left(\frac{2\lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta}{4\lambda_{\alpha_1}^2\beta + 6\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\beta - 2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_1 - 2\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_1 - 2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_2 - 4\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_2 + 2\lambda_\beta^2\beta - 2\lambda_\beta^2\alpha_2}\right)$$

$$\sigma^* \coloneqq \sigma_0^{\frac{(2\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}} \tag{4.165}$$

ve

$$\theta \coloneqq \left(\frac{4\lambda_{\alpha_1}^2\beta + 6\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\beta - 2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_1 - 2\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_1 - 2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_2 - 4\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_2 + 2\lambda_\beta^2\beta - 2\lambda_\beta^2\alpha_2}{2\lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta}\right) \tag{4.166}$$

dir.

İspat: $p = 2(\lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta) > 1,\ p(t) = q(t) = 1$ olduğundan (4.3) ifadesinden,

$$\tilde{A}_0(x) = \left(\int_0^x \left(A(s)\right)^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)/(2\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)} ds \right)^{\left(\frac{2\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right)} \tag{4.167}$$

elde eldelir. Burada (4.2)'den

$$A(s) = \frac{\{P_1(s)^{\lambda_{\alpha_1}((2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta-1)/2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta))}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}(\Gamma(\beta-\alpha_2)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}} \tag{4.168}$$

ve (4.1)'den $i = 1{,}2$ ve $0 \leq s \leq x$ için

$$P_i(s) = \int_0^s (s-t)^{[(2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta)(\beta-\alpha_i-1)/(2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta-1)]} dt \tag{4.169}$$

olur. Dolayısıyla $i = 1{,}2$ için

$$P_i(s) = \frac{\left(2\lambda_{\alpha_1} + 2\lambda_\beta - 1\right)s^{\left((2\lambda_{\alpha_1}\beta+2\lambda_\beta\beta-2\lambda_{\alpha_1}\alpha_i-2\lambda_\beta\alpha_i-1)/(2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta-1)\right)}}{(2\lambda_{\alpha_1}\beta + 2\lambda_\beta\beta - 2\lambda_{\alpha_1}\alpha_i - 2\lambda_\beta\alpha_i - 1)} \tag{4.170}$$

$$A(s) = \sigma s^{\left\{\frac{\left(4\lambda_{\alpha_1}^2\beta+6\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\beta-2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_1-2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_2-2\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_1-4\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_2-2\lambda_\beta^2\alpha_2+2\lambda_\beta^2\beta-2\lambda_{\alpha_1}-\lambda_\beta\right)}{(2\lambda_{\alpha_1}+2\lambda_\beta)}\right\}} \tag{4.171}$$

dir.

$$\tilde{A}(x_0) = \sigma \cdot \left(\int_0^x s^{\frac{\left(4\lambda_{\alpha_1}^2\beta+6\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\beta-2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_1-2\lambda_{\alpha_1}^2\alpha_2-2\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_1-4\lambda_{\alpha_1}\lambda_\beta\alpha_2-2\lambda_\beta^2\alpha_2+2\lambda_\beta^2\beta-2\lambda_{\alpha_1}-\lambda_\beta\right)}{(2\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}} \right)^{\left(\frac{2\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right)}$$

$$= \sigma\sigma^* x^\theta \tag{4.172}$$

elde edilir.

Sonuç 4.8: Teorem 4.6'da $p = 4$, $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_\beta = 1$, $p(t) = q(t) = 1$ ise

$$\int_0^x \left[|D^{\alpha_1} f_1(s)| \left(D^{\alpha_2} f_2(s)\right)^2 \left|D^\beta f_1(s)\right| + \left(D^{\alpha_2} f_1(s)\right)^2 |D^{\alpha_1} f_2(s)| \left|D^\beta f_2(s)\right| \right] ds$$

$$\leq T^*(x)\left(\int_0^x \left(\left[D^\beta f_1(s)\right]^4 + \left(D^\beta f_2(s)\right)^4\right) ds\right) \tag{4.173}$$

sağlanır. Böylece,

$$T^*(x) = \frac{A_0^*(x)}{\sqrt{2}} \tag{4.174}$$

ve

$$A_0^*(x) = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^* x^{\tilde{\theta}} \tag{4.175}$$

dir. Burada,

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_1)\left(\Gamma(\beta-\alpha_2)\right)^2}\left(\frac{3}{4\beta-4\alpha_1-1}\right)^{3/4}\left(\frac{3}{4\beta-4\alpha_1-1}\right)^{3/2} \tag{4.176}$$

$$\tilde{\sigma}^* = \left(\frac{3}{12\beta-4\alpha_1-8\alpha_2}\right)^{3/4} \tag{4.177}$$

ve

$$\tilde{\theta} \coloneqq 3\beta-\alpha_1-2\alpha_2 \tag{4.178}$$

elde edilir.

İspat: Sonuç (4.7)'den açıktır.

Teorem 4.7: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_1, \alpha_2$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \ldots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. $p(s) \geq 0$, $p(s) \in L_\infty(0,x)$ ve $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \lambda_\beta \geq 0$ olduğunu göz önüne alınsın.

$$\rho(x) \coloneqq \left\{\frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left[\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1\right]}\right\} \tag{4.179}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right] ds$$

$$\leq \frac{\rho(x)}{2}\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)} + \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right] \tag{4.180}$$

dir.

İspat: (4.6) eşitliğinden,

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_i-1} \left|D^\beta f_j(t)\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \left(\int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_i-1} dt \right) \left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \tag{4.181}$$

$$= \frac{\left\|D^\beta f_j\right\|_\infty}{\Gamma(\beta-\alpha_i)} \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{(\beta-\alpha_i)} = \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{\Gamma(\beta-\alpha_i+1)} \left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \tag{4.182}$$

elde edilir. Yani $\forall s \in [0,x], i = 1,2;\ j = 1,2$ için

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{\Gamma(\beta-\alpha_i+1)} \left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \tag{4.183}$$

dir. O zaman,

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}} \tag{4.184}$$

$$|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.185}$$

$$\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} \leq \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_\beta} \tag{4.186}$$

dir.

(4.184)-(4.186) aralığındaki son üç eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2})}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.187}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$|D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.188}$$

$$|D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}} \tag{4.189}$$

$$\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta} \leq \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_\beta} \tag{4.190}$$

dir.

(4.188)-(4.190) aralığındaki son üç eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1})}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \tag{4.191}$$

dir. (4.187) ve (4.191) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2})}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}$$

$$\cdot \left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right] \tag{4.192}$$

elde edilir.

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}+|D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq \frac{\|p(s)\|_\infty\left(\int_0^x s^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2})}ds\right)}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}$$

$$\cdot\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}+\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right] \tag{4.193}$$

$$=\frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left[\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1\right]}$$

$$\cdot\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}+\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right] \tag{4.194}$$

$$\leq\frac{\rho(x)}{2}\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_2}}+\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_2}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right] \tag{4.195}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 4.7'nin bazı özel durumlarını inceleyelim.

Teorem 4.8: $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+,\ \beta>\alpha_1,\alpha_2$ olsun. $x\in\mathbb{R}_+-\{0\}$ olmak üzere $f_1,f_2\in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2,\ L_\infty$'da kesirli türevlere sahip ve $k=1,\ldots,[\beta]+1, i=1,2$ için $D^{\beta-k}f_i(0)=0$ olsun. $p(s)\geq 0$, $p(s)\in L_\infty(0,x)$ ve $\lambda_{\alpha_1},\lambda_\beta\geq 0$ ve $\lambda_{\alpha_2}=0$ olduğu göz önüne alınsın.

$$\rho(x):=\left\{\frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left[\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1\right]}\right\} \tag{4.179}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}+|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right]ds$$

$$\leq \frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left[\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+1\right]}\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}+\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}\right] \qquad (4.196)$$

dir.

İspat: (4.6) eşitliğinden,

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)}\int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_i-1}\left|D^\beta f_j(t)\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha_i)}\left(\int_0^s (s-t)^{\beta-\alpha_i-1} dt\right)\left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \qquad (4.197)$$

$$= \frac{\left\|D^\beta f_j\right\|_\infty}{\Gamma(\beta-\alpha_i)}\frac{s^{\beta-\alpha_i}}{(\beta-\alpha_i)} = \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{\Gamma(\beta-\alpha_i+1)}\left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \qquad (4.198)$$

elde edilir. Yani $\forall s \in [0,x], i = 1,2; j = 1,2$ için

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{\Gamma(\beta-\alpha_i+1)}\left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \qquad (4.199)$$

dir. O zaman,

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}}\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}} \qquad (4.200)$$

$$\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} \leq \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_\beta} \qquad (4.201)$$

dir.

(4.200)-(4.201) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}}\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}}\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \qquad (4.202)$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$|D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}} \tag{4.203}$$

$$\left|D^{\beta} f_2(s)\right|^{\lambda_{\beta}} \leq \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{\lambda_{\beta}} \tag{4.204}$$

dir.

(4.203)-(4.204) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^{\beta} f_2(s)\right|^{\lambda_{\beta}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}} \left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.205}$$

dir. (4.202) ve (4.205) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^{\beta} f_1(s)\right|^{\lambda_{\beta}} + |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^{\beta} f_2(s)\right|^{\lambda_{\beta}}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \cdot \left[\left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}} \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_2}} \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}\right] \tag{4.206}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s) \left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^{\beta} f_1(s)\right|^{\lambda_{\beta}} + |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^{\beta} f_2(s)\right|^{\lambda_{\beta}}\right] ds$$

$$\leq \frac{\|p(s)\|_{\infty} \left(\int_0^x s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}} ds\right)}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \cdot \left[\left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}} + \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}\right] \tag{4.207}$$

$$\leq \frac{\|p(s)\|_{\infty} x^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}} \left[\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+1\right]} \left[\left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}} + \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}\right] \tag{4.208}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.9: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_1, \alpha_2$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0, x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0, x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \ldots, [\beta] + 1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. $p(s) \geq 0$, $p(s) \in L_\infty(0, x)$ ve $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_\beta \geq 0$ ve $\lambda_{\alpha_2} = \lambda_{\alpha_1} + \lambda_\beta$ olduğu göz önüne alınsın.

$$\rho(x) := \left\{\frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}[\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1]}\right\} \tag{4.209}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}\right.$$

$$\left. + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}\right] ds$$

$$\leq \left\{\frac{\|p(s)\|_\infty x^{(2\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_\beta - \alpha_2\lambda_{\alpha_1} - \alpha_2\lambda_\beta + 1)}}{\left(\Gamma(\beta - \alpha_1 + 1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta - \alpha_2 + 1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}[2\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_\beta - \alpha_2\lambda_{\alpha_1} - \alpha_2\lambda_\beta + 1]}\right\}$$

$$\cdot \left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)} + \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}\right] \tag{4.210}$$

dir.

İspat: (4.6) eşitliğinden $\forall s \in [0, x], i = 1,2; j = 1,2$ için

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{\Gamma(\beta - \alpha_i + 1)} \left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \tag{4.211}$$

dir. O zaman,

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta - \alpha_1 + 1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}} \tag{4.212}$$

$$|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}}{\left(\Gamma(\beta - \alpha_2 + 1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \tag{4.213}$$

$$\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} \leq \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_\beta} \tag{4.214}$$

dir.

(4.212)-(4.214) aralığındaki son üç eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_\beta-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_\beta)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \tag{4.215}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$|D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \tag{4.216}$$

$$|D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_1)\lambda_{\alpha_1}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}} \tag{4.217}$$

$$\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta} \leq \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_\beta} \tag{4.218}$$

dir.

(4.216)-(4.218) aralığındaki son üç eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_\beta-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_\beta)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}} \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \tag{4.219}$$

dir. (4.215) ve (4.219) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} \left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_\beta} + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_\beta}$$

$$\leq \frac{s^{(2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_\beta-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_\beta)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_\beta}}$$

$$\cdot\left[\left\|D^{\beta}f_1\right\|_{\infty}^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta})}+\left\|D^{\beta}f_2\right\|_{\infty}^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta})}\right] \tag{4.220}$$

elde edilir.

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}\left|D^{\beta}f_1(s)\right|^{\lambda_{\beta}}\right.$$

$$\left.+|D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\left|D^{\beta}f_2(s)\right|^{\lambda_{\beta}}\right]ds$$

$$\leq\frac{\|p(s)\|_{\infty}\left(\int_0^x s^{(2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\beta}-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_{\beta})}ds\right)}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}}$$

$$\cdot\left[\left\|D^{\beta}f_1\right\|_{\infty}^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta})}+\left\|D^{\beta}f_2\right\|_{\infty}^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta})}\right] \tag{4.221}$$

$$\leq\left\{\frac{\|p(s)\|_{\infty}x^{(2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\beta}-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_{\beta}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta}}\left[2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\beta}-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_{\beta}+1\right]}\right\}$$

$$\cdot\left[\left\|D^{\beta}f_1\right\|_{\infty}^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta})}+\left\|D^{\beta}f_2\right\|_{\infty}^{2(\lambda_{\alpha_1}+\lambda_{\beta})}\right] \tag{4.222}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.10: $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+,\ \beta>\alpha_1,\alpha_2$ olsun. $x\in\mathbb{R}_+-\{0\}$ olmak üzere $f_1,f_2\in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^{\beta}f_1, D^{\beta}f_2$, L_{∞}'da kesirli türevlere sahip ve $k=1,\dots,[\beta]+1, i=1,2$ için $D^{\beta-k}f_i(0)=0$ olsun. $p(s)\geq 0$, $p(s)\in L_{\infty}(0,x)$ ve $\lambda_{\beta}=0$, $\lambda_{\alpha_1}=\lambda_{\alpha_2}$ olduğu göz önüne alınsın.

$$\rho^*(x):=\left\{\frac{\|p(s)\|_{\infty}x^{(2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left[2\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}-\alpha_2\lambda_{\alpha_1}+1\right]}\right\} \tag{4.223}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} + |D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\right]ds$$

$$\leq \rho^*(x)\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_1}} + \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_1}}\right] \tag{4.224}$$

dir.

İspat: Teorem 4.7'de $\lambda_\beta = 0$ olduğunda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} + |D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}|D^{\alpha_1}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\right]ds$$

$$\leq \rho(x)\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_1}}\right] \tag{4.225}$$

eşitsizliği bulunur. $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2}$ için (4.223) ve (4.224) eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 4.11: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\beta > \alpha_1, \alpha_2$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k}f_i(0) = 0$ olsun. $p(s) \geq 0$, $p(s) \in L_\infty(0,x)$ ve $\lambda_{\alpha_1} = 0$, $\lambda_{\alpha_2} = \lambda_\beta$ olduğu göz önüne alınsın.

$$\rho(x) := \left\{\frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left[\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1\right]}\right\} \tag{4.226}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_2}f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}} + |D^{\alpha_2}f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}}\right]ds$$

$$\leq \left(\frac{x^{(\beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1)}\|p(s)\|_\infty}{\left(\beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1\right)\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\left[\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_2}}\right]\right) \tag{4.226}$$

elde edilir.

İspat: (4.6) eşitliğinden $\forall s \in [0,x], i = 1,2; j = 1,2$ için

$$\left|D^{\alpha_i} f_j(s)\right| \leq \frac{s^{\beta-\alpha_i}}{\Gamma(\beta-\alpha_i+1)}\left\|D^\beta f_j\right\|_\infty \tag{4.227}$$

dir. O zaman,

$$|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.228}$$

$$\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.229}$$

dir.

(4.228)-(4.229) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^\beta f_1(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.230}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$|D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.231}$$

$$\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}} \leq \left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.232}$$

dir.

(4.231)-(4.232) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa;

$$|D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}}\left|D^\beta f_2(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\left\|D^\beta f_1\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}}\left\|D^\beta f_2\right\|_\infty^{\lambda_{\alpha_2}} \tag{4.233}$$

dir. (4.230) ve (4.233) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^{\beta} f_1(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}} + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^{\beta} f_2(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}}$$

$$\leq \frac{s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} . \left[\left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{2\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{2\lambda_{\alpha_2}}\right] \tag{4.234}$$

elde edilir.

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_2} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^{\beta} f_1(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}} + |D^{\alpha_2} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_2}} \left|D^{\beta} f_2(s)\right|^{\lambda_{\alpha_2}}\right] ds$$

$$\leq \frac{\|p(s)\|_{\infty}\left(\int_0^x s^{(\beta-\alpha_2)\lambda_{\alpha_2}} ds\right)}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}} . \left[\left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{2\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{2\lambda_{\alpha_2}}\right] \tag{4.235}$$

$$\leq \left(\frac{x^{(\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1)}\|p(s)\|_{\infty}}{\left(\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1\right)\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}}\left[\left\|D^{\beta} f_1\right\|_{\infty}^{2\lambda_{\alpha_2}} + \left\|D^{\beta} f_2\right\|_{\infty}^{2\lambda_{\alpha_2}}\right]\right) \tag{4.236}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.9: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_1, \alpha_2$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,x]$ üzerinde $D^{\beta} f_1, D^{\beta} f_2$, L_{∞}'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \ldots, [\beta]+1, i = 1,2$ için $D^{\beta-k} f_i(0) = 0$ olsun. $p(s) \geq 0$, $p(s) \in L_{\infty}(0,x)$ ve $\lambda_{\beta} = 0$, $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2}$, $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$ olduğu göz önüne alınsın.

$$\rho(x) := \left\{\frac{\|p(s)\|_{\infty} x^{(\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1)}}{\left(\Gamma(\beta-\alpha_1+1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}}\left(\Gamma(\beta-\alpha_2+1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}}\left[\beta\lambda_{\alpha_1}-\alpha_1\lambda_{\alpha_1}+\beta\lambda_{\alpha_2}-\alpha_2\lambda_{\alpha_2}+1\right]}\right\} \tag{4.237}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_1+1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} + |D^{\alpha_1+1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}}\right] ds$$

$$\leq \left(\frac{x^{(2\beta\lambda_{\alpha_1} - 2\alpha_1\lambda_{\alpha_1} - \lambda_{\alpha_1} + 1)} \|p(s)\|_\infty}{(2\beta\lambda_{\alpha_1} - 2\alpha_1\lambda_{\alpha_1} - \lambda_{\alpha_1} + 1)(\beta - \alpha_1)^{\lambda_{\alpha_1}} \left(\Gamma(\beta - \alpha_1)\right)^{2\lambda_{\alpha_1}}} \right)$$

$$\cdot \left[\left\| D^\beta f_1 \right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_1}} + \left\| D^\beta f_2 \right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_1}} \right] \tag{4.238}$$

dir.

İspat: Teorem 4.7'de $\lambda_\beta = 0$, $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2}$, $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$ olduğunda,

$$\int_0^x p(s)\left[|D^{\alpha_1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_1+1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} + |D^{\alpha_1+1} f_1(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} |D^{\alpha_1} f_2(s)|^{\lambda_{\alpha_1}} \right] ds$$

$$\leq \left(\frac{x^{(2\beta\lambda_{\alpha_1} - 2\alpha_1\lambda_{\alpha_1} - \lambda_{\alpha_1} + 1)} \|p(s)\|_\infty}{(2\beta\lambda_{\alpha_1} - 2\alpha_1\lambda_{\alpha_1} - \lambda_{\alpha_1} + 1)(\beta - \alpha_1)^{\lambda_{\alpha_1}} \left(\Gamma(\beta - \alpha_1)\right)^{2\lambda_{\alpha_1}}} \right)$$

$$\cdot \left[\left\| D^\beta f_1 \right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_1}} + \left\| D^\beta f_2 \right\|_\infty^{2\lambda_{\alpha_1}} \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.10: $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+,\ \beta > \alpha_1 + 1$ olsun. $x \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ olmak üzere $f_1, f_2 \in L_1(0, x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0, x]$ üzerinde $D^\beta f_1, D^\beta f_2$, L_∞'da kesirli türevlere sahip ve $k = 1, \dots, [\beta] + 1, i = 1,2$ için $D^{\beta - k} f_i(0) = 0$ olsun. $p(s) \geq 0$, $p(s) \in L_\infty(0, x)$ ve $\lambda_\beta = 0$, $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2}$, $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$ olduğu göz önüne alınsın.

$$\rho(x) := \left\{ \frac{\|p(s)\|_\infty x^{(\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1)}}{\left(\Gamma(\beta - \alpha_1 + 1)\right)^{\lambda_{\alpha_1}} \left(\Gamma(\beta - \alpha_2 + 1)\right)^{\lambda_{\alpha_2}} [\beta\lambda_{\alpha_1} - \alpha_1\lambda_{\alpha_1} + \beta\lambda_{\alpha_2} - \alpha_2\lambda_{\alpha_2} + 1]} \right\} \tag{4.239}$$

dir. Bu durumda,

$$\int_0^x [|D^{\alpha_1} f_1(s)||D^{\alpha_1+1} f_2(s)| + |D^{\alpha_1+1} f_1(s)||D^{\alpha_1} f_2(s)|] ds$$

$$\leq \left(\frac{x^{2(\beta - \alpha_1)}}{2(\beta - \alpha_1)^2 \left(\Gamma(\beta - \alpha_1)\right)^2} \right) \left[\left\| D^\beta f_1 \right\|_\infty^2 + \left\| D^\beta f_2 \right\|_\infty^2 \right] \tag{4.240}$$

dir.

İspat: (4.238)’de $\lambda_{\alpha_1} = 1$ ve $p(s) = 1$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

5. KAYNAKLAR

Anastassiou, G.A. (1998). General fractional Opial type inequalities. *Acta Applicandae Mathematica,* **54:** 303-317.

Anastassiou, G.A. (1999). Opial type inequalities involving fractional derivatives of functions. *Nonlinear Studies,* **6 (2):** 207-230.

Anastassiou, G.A. and Goldstein, J.A. (2002a). Fractional Opial type inequalities and fractional differential equations. *Results in Mathematics,* **41:** 197-212.

Anastassiou, G.A., Koliha, J.J. and Pecaric, J. (2001). Opial inequalities for fractional derivatives. *Dynamic Systems of Applications,* **10 (3):** 395-406.

Anastassiou, G.A., Koliha, J.J. and Pecaric, J. (2002b). Opial type L^p-inequalities for fractional derivatives. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* **31 (2):** 85-95.

Anastassiou, G.A. (2008). Opial type inequalities involving Riemann-Liouville fractional derivatives of two functions with applications. *Mathematical and Computer Modelling,* **48:** 344-374.

Anastassiou, G.A. (2009). Fractional Differentiation Inequalities. Springer Science, New York.

Dragomir, S.S. (1988). On some Gronwall type lemmas . *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica,* **33:** 29-36.

Handley, G.D., Koliha, J.J. and Pecaric, J. (2001). Hilpert-Pachpatte type integral inequalities for fractional derivatives. *Fractioanl Calculus and Applied Analysis.* **4 (1):** 37-46.

Kiryakova, V. (1994). Generalized Fractional Calculus and Applications. Pitman Research Notes in Math. Series, vol. 301, Longman Scientific and Technical, Harlow; copublished in U.S.A with John Wiley & Sons, Inc., New York.

Miller, K. and Ross, B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M. (1993). Classical and New inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrect.

Oldham, K. and Spanier, J. (2006). The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Dover Publications, New York.

Opial, Z. (1960). Sur une inégalite. *Annales Polonici Mathematici.* **8:** 29-32.

Özen, S. (2003). Kesirsel Türevler İçin Opial Eşitsizlikleri. Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Özen, S. and Öztürk, İ. (2004). Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* **20**(1-2): 66-76.

Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Reading.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı- Soyadı : Sevgi DEMİR

Doğum Tarihi : 23.03.1991

Doğum Yeri : AFYONKARAHİSAR

Eğitim Bilgileri

Lise : Anafartalar Anadolu Lisesi (2005- 2009)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2009-2013)

Pedagojik Formasyon : Afyon Kocatepe Üniversitesi (Şubat 2014- Haziran 2014)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2013-)

Yüksek Lisans Ana Bilim Dalı: Matematik

Yüksek Lisans Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

İletişim Bilgileri

Telefon: 0 534 429 20 92

Mail : sevgidemir_03@windowslive.com