MAKSİMUM TİPLİ $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$

FARK DENKLEMİNİN DİNAMİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali ÇAKIR

DANIŞMAN
Doç. Dr. Özkan ÖCALAN
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN, 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKSİMUM TİPLİ $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$

FARK DENKLEMİNİN DİNAMİĞİ

Ali ÇAKIR

DANIŞMAN
Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN, 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Ali ÇAKIR tarafından hazırlanan "Maksimum tipli $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$ fark denkleminin dinamiği" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23./06./2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Başkan **:** Doç. Dr. Nesip AKDAĞ
Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Özkan ÖCALAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

08/08/2014

Ali ÇAKIR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM TİPLİ $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$

FARK DENKLEMİNİN DİNAMİĞİ

Ali ÇAKIR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde rasyonel ve maksimum tipli fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmaların literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde $\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{A} + \frac{(\mathrm{x}_\mathrm{n})^\mathrm{p}}{(\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1})^\mathrm{p}}$ rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri, global çekiciliği ve periyodiklik karakteri üzerine çalışılmıştır. Dördüncü bölümde maksimum tipli $\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} = \max\left\{\mathrm{c}, \frac{\mathrm{x}_\mathrm{n}^\mathrm{p}}{\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1}^\mathrm{p}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri ve global çekiciliği üzerine çalışılmıştır. Son bölümde ise maksimum tipli $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin dinamiği ele alınmıştır.

2014, v+38 sayfa

Anahtar Kelimeler: Maksimum tipli fark denklemleri, Sınırlılık, Periyodiklik.

ABSTRACT

M. Sc Thesis

DYNAMICS OF THE MAX-TYPE $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$

DIFFERENCE EQUATION

Ali ÇAKIR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

This study consists of five sections. In the first section, a summary of literature was given about the rational and max-type difference equations. In the second section, general definitions and theorems were given about difference equations. In the third section, studies the boundedness character, global attractivity and periodicity of the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = A + \frac{(x_n)^p}{(x_{n-1})^p}$. In the forth section, studies the boundedness and global attractivity for the positive solutions of the max-type difference equation $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$ .In the last section, studies the dynamics of the positive solution of the max-type difference equation $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$.

2014, v+38 pages

Key Words: Max-type Difference equations, The boundedness, The periodicity.

TEŞEKKÜR

Öncelikle eğitim ve öğretim hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim tüm dostlarıma ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bana bu araştırma konusunu tez çalışması olarak veren, çalışmamın her aşamasında benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen, çalışmalarımın yönlendirilmesinde ve tez çalışmamın başarıyla sonuçlanmasında en büyük pay sahibi olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Özkan Öcalan'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmamın başından sonuna kadar hiçbir yardımı esirgemeyen, araştırmalarımda ve tezimin yazımında büyük katkıları olan Sayın Esra Dinçer'e Teşekkürü bir borç bilirim.

Ali ÇAKIR
AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar

$\mathbb{Z}$: Tam Sayılar

$\mathbb{R}^{+}$: $(0,\infty)$ aralığı

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar

$\subset$: Kapsar

$=$: Eşittir

$\leq$: Küçük veya eşittir

$\geq$: Büyük veya eşittir

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\sum$: Toplam Sembolü

$\prod$: Çarpım Sembolü

log: Logaritma Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bu bölümde, fark denklemlerinin önemli çalışma alanlarından olan maksimum tipli fark denklemleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

1.1 Bazı maksimum ve minimum tipli fark denklemlerinin çözümleri üzerine yapılmış çalışmalar

Amleh (1998), G.Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A, B parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Mishev vd. (2002), $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin periyodikliği üzerine yaptığı çalışmada; A,B parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif sayı değerleri olarak kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada, A,B,C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere A+B+C > 0 için $x_n = \max\left\{\frac{A}{x_{n-1}}, \frac{B}{x_{n-3}}, \frac{C}{x_{n-5}}\right\}$ fark denkleminin bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise; A ile B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n-m}}\right\}$ maksimum tipli fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir. A, B, k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada; A_n , B_n pozitif terimli ve 3 periyotlu diziler olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar vd. (2005), yaptıkları çalışmada; A, $B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1} \cdots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \cdots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini de incelemişlerdir.

Şimsek vd. (2006), yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yan vd. (2006), yaptıkları çalışmada; $0 < \alpha < 1$, $A > 0, A \leq 1, A > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç şartları için $x_n = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}^{\alpha}}, \frac{A}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Yalçınkaya vd. (2007), yaptıkları çalışmada; A parametresi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\}$ maksimum tipli fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

2. FARK DENKLEMLERİ

Fark denklemi bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlerine fonksiyonel denklemler de denir.

Diferansiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20.yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada, işsizlik oranı hesabında, spektrum analizinde filtre dizaynı gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu bölümde fark denklemleri için literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, y(x) bağımlı değişkeninin değişimi $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 2.1 : n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), \dots, E^{(n)}(y), \dots$ gibi farklarını içine alan bağıntılara *Fark Denklemi* denir (Kulenović and Ladas 2001).

$$a_0\, y(n) + a_1\, y(n+1) = f(n)$$

denklemi birinci dereceden fark denklemidir.

$$a_0\ y(n-1)+a_1\,y(n)+a_2\,y(n+1)=g(n)$$

denklemi ikinci mertebeden fark denklemidir.

Denklem mertebesinin belirlenmesi için; ya y ’nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı bulunur, ya da denklemdeki en büyük mertebeli terimin mertebesi ile en küçük mertebeli terimin mertebesi arasındaki fark hesaplanır.

2.1 Lineer Fark Denklemi

Tanım 2.2 : Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci derecedense bu denkleme *lineer fark denklemi* denir (Elaydi 1996). Genel olarak lineer fark denklemleri:

$$a_n y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0 y(k)=f(k)$$

şeklinde gösterilir.

Lineer fark denklemleri, f(k) ve $a_i(i=0,1,\ldots,n)$ katsayılarının durumuna göre isimlendirilir.

i. f(k)=0 ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklemi* denir.

ii. $a_i(i=0,1,\ldots,n)$ katsayıları sabit iseler, denkleme *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

iii. $a_i(i=0,1,\ldots,n)$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler, denkleme *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir (Elaydi 1996).

2.2 Fark Denklemler için Genel Tanım ve Teoremler

Teorem 2.1 : I reel sayıların bir alt aralığı olmak üzere ;

f: I*I→ I sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall\ x_{-1}, x_0 \in$ I için

$$x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1})\ ,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.3 : Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x},\bar{x})=\bar{x}$ ise $\bar{x}$’e f’nin denge noktası denir. Eğer $\forall$ n ≥ 0 için $x_n=\bar{x}$ ise $\bar{x}$’e f’nin *sabit noktası* denir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.4 : $\bar{x}$, $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ n = 0,1,… denkleminin denge noktası olmak üzere:

a. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa ve her $n \geq -1$ $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa denklemin $\bar{x}$ denge noktası *kararlıdır* denir.

b. $\bar{x}$ denge noktası kararlı olsun. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sayısı varsa ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ oluyorsa $\bar{x}$ denge noktası *lokal olarak asimptotik kararlıdır* denir.

c. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası *global çekicidir* denir.

d. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekici ise $\bar{x}$ ’e *global asimptotik kararlıdır* denir.

e. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise $\bar{x}$ denge noktasına *kararsızdır* denir.

f. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ olacak şekilde bir r >0 sayısı varsa ve $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir N ≥ -1 sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına *repeller (itici)* denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.5 : Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.6 : Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine *er geç p periyotludur* denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.7 : Herhangi bir fark denkleminin karakterini inceleyebilmek için o denklemin denge noktasındaki kısmi türevleri ile oluşturduğumuz yeni denkleme *karakteristik denklem* denir (Kulenović and Ladas 2001).

(2.1) denklemi için: $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ = f(u,v) olmak üzere oluşturduğumuz

$$z_{n+1} - \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial u} z_n - \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial v} z_{n-1} = 0$$

denklemi (2.1) denkleminin karakteristik denklemidir.

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial u} \text{ ve } s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{2.3}$$

dır.

Teorem 2.2 (Lineer Kararlılık Teoremi):

a. Eğer (2.3) denklemininin her iki kökü de mutlak değerce 1' den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b. Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, , $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

c. (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

d. (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şart $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

e. (2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şart $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

f. (2.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'e eşit olması için gerek ve yeter şart $|r| = |1 - s|$ veya $s=-1$ ve $|r| \leq 2$ olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktasına hiperbolik olmayan nokta denir (Kulenović and Ladas 2001).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.2 aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}),\ \ n=0, 1, \dots \tag{2.4}$$

fark denklemini ele alalım.

(2.4) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu f(u,v,w) şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial u},\ s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial v},\ t = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere;

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \tag{2.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.5) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{2.6}$$

dır. Teorem 2.2'yi (2.6) denkleminden yararlanarak tekrar yazalım.

Teorem 2.3 (Lineer Kararlılık Teoremi):

a. Eğer (2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1' den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b. Eğer (2.6) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1' den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

c. (2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r+1| < 1-s$, $|r-3t| < 3+s$ ve $t^2 - s - rt < 1$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.8 : $\bar{x}$ $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ $n = 0,1,\dots$ denkleminin bir denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün *pozitif yarı döngüsü* $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\bar{x}$' dan büyük ya da eşit, $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki;

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} < \bar{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \bar{x}$$

dır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.9 : $\bar{x}$ $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ n = 0,1,… denkleminin bir denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün *negatif yarı döngüsü* $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\bar{x}$' dan küçük, $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki,

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} \geq \bar{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \bar{x}$$

dır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.10 : $\bar{x}$ $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ n = 0,1,… denkleminin bir denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün pozitif ya da negatif yarı döngüye sahip olduğunu varsayalım. Eğer bu döngüyü ters yöne çeviren yani denklemin denge noktasından küçük ya da denklemin denge noktasından büyük veya eşit değere sahip en az bir tane x_N $(N \geq -1)$ çözümü varsa $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ n = 0,1,… denklemine *salınımlıdır* denir (Kulenović and Ladas 2001).

Tanım 2.11 : $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif nede negatif ise, bu çözümlere sıfır civarında *salınımlıdır* denir. Aksi halde *salınımlı değildir* denir (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.12 : $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ *denge noktası civarında salınımlıdır* denir (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.13 : $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine *sınırlıdır* denir (Kulenović and Ladas 2001).

Teorem 2.4 (Clark Teoremi) : $p, q \in \mathbb{R}$ ve $k, n \in \{1,2, \dots\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır (D.Clark and Kulenović 2002).

Teorem 2.5 : Varsayalım ki $b > 0$ ve k çift olsun. O zaman

$$x_{n+1} - px_n - px_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,\ldots$$

fark denkleminin asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şart

$$p < \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{k+2}\right)}$$

olmasıdır (Kocić and Ladas 1993).

Tanım 2.14 : Eğer $\bar{x}$ noktası için $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ n=0,1,… denkleminde $|f'(\bar{x}, \bar{x})| \neq 1$ şartı sağlanıyor ise $\bar{x}$ denge noktasına $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ n=0,1,… denkleminin *hiperbolik noktası* denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.15 (Schwarzian Türevi) : $x_{n+1} = f(x_n)$ denkleminde tanımlanan bir f fonksiyonunun schwarzian türevi şu şekilde tanımlanır:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$$

(Elaydi 1996).

Teorem 2.6 : $\bar{x}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ denkleminin denge noktası olsun. $x_{n+1} = f(x_n)$ ' de tanımlanan f fonksiyonu sürekli ve diferensiyellenebilir olmak üzere (i) ve (ii) ifadeleri doğrudur.

i. Eğer $|f'(\bar{x})| < 1$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer $|f'(\bar{x})| > 1$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Elaydi 1996).

Teorem 2.7 : $\bar{x}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ denkleminin denge noktası ve $f'(x) = 1$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. Eğer $f''(\bar{x}) \neq 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

ii. Eğer $f''(\bar{x}) = 0$ ve $f'''(\bar{x}) > 0$ ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii. Eğer $f''(\bar{x}) = 0$ ve $f'''(\bar{x}) < 0$ ise, $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Burada $f'''(\bar{x}) = 0$ olması halinde teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.8 : $\bar{x}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ denkleminin denge noktası ve $f'(\bar{x}) = -1$ olsun. O halde

i. Eğer $sf(\bar{x}) < 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.
ii. Eğer $sf(\bar{x}) > 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

durumları doğrudur. Burada $sf(\bar{x}) = 0$ olması durumunda teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

3. $\mathbf{x_{n+1} = A + \frac{(x_n)^p}{(x_{n-1})^p}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde, 2006 yılında Stevo Stević tarafından $x_{n+1} = A + \frac{x_n{}^p}{x_{n-1}{}^p}$ $n \in \mathbb{N}$, fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı, global çekiciliği ve periyodikliği üzerine yapılmış olan çalışmayı inceleyeceğiz.

Burada

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n{}^p}{x_{n-1}{}^p} \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

denkleminin A ve p pozitif tamsayılar olmak üzere pozitif çözümlerini araştıracağız.

(3.1) denkleminin lineerleştirilmiş denklemi

$$(A+1)y_{n+1} - py_n + py_{n-1} = 0 \tag{3.2}$$

ve (3.2) denkleminin karakteristik kökleri;

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4p(A+1)}}{2(A+1)} \tag{3.3}$$

olur. Kolayca görülebilir ki her iki kökün mutlak değerinin 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $p < A + 1$ olmasıdır.

Bu gerçeğe dayanarak, $p < A + 1$ olduğunda (3.1) denkleminin global kararlı olduğu düşünülebilir ancak, p'nin öyle değerleri vardır ki $p < A + 1$ olması durumunda (3.1) denkleminin sınırsız pozitif çözümlere sahip olduğunu kanıtlayarak bunun doğru olmadığını göstereceğiz.

Amacımız (3.1) denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterine tam bir bakış atmaktır. Ayrıca $p \in (0, 1]$ için bir global kararlılık sonucu ve (3.1) denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği ile ilgili bir sonucu daha vereceğiz.

3.1 (3.1) Denkleminin Sınırlılığı

Bu bölümde (3.1) denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı incelenecektir.

Durum 3.1 $(\mathbf{p \geq 4})$: Burada $p \geq 4$ olması durumunda (3.1) denklemini inceleyeceğiz.

Teorem 3.1 : $p \geq 4$ olsun. Bu durumda (3.1) denklemi sınırsız pozitif çözümlere sahiptir.

İspat : İlk olarak şunu söyleyelim ki (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$x_{n+1} > \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^p \quad , n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.4}$$

$y_n = \ln x_n$ olsun. Şimdi (3.4) eşitsizliğinde her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\ln x_{n+1} > \ln\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^p$$

$$\ln x_{n+1} > p\ \ln\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)$$

$$\ln x_{n+1} > p\ (\ln x_n - \ln x_{n-1})$$

$$\ln x_{n+1} > p\ \ln x_n - p\ \ln x_{n-1}$$

$$\underbrace{\ln x_{n+1}}_{y_{n+1}} - p\underbrace{\ln x_n}_{y_n} + p\ \underbrace{\ln x_{n-1}}_{y_{n-1}} > 0$$

$$y_{n+1} - p\, y_n + p\, y_{n-1} > 0 \ , n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.5}$$

olur. Bu denklemin karakteristik polinomu;

$$p(\lambda) = \lambda^2 - p\,\lambda + p \tag{3.6}$$

olur ve kökler;

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4p}}{2} \tag{3.7}$$

olur. Burada açıkça görülebilir ki;

$$\lambda_1 = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2-4p}}{2}$$

denirse $p \geq 4$ için $\lambda_1 \geq 2$ olur. Diğer taraftan

$$\lambda_2 = \frac{2p}{p+\sqrt{p^2-4p}} > 1$$

olur. Böylece $p \geq 4$ için (3.6)' nın her iki kökünün de 1'den büyük olduğu görülür.

$p(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + p$ denkleminde kökler çarpımı $\lambda_1.\lambda_2 = p$ ve kökler toplamı $\lambda_1 + \lambda_2 = p$ dir. (3.5) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$y_{n+1} - (\lambda_1 + \lambda_2)y_n + (\lambda_1.\lambda_2)y_{n-1} > 0$$

olur. Şimdi bu eşitsizliği şu şekilde düzenleyelim;

$$y_{n+1} - \lambda_1 y_n - \lambda_2(y_n - \lambda_1 y_{n-1}) > 0 \ , n \in \mathbb{N}_0 \qquad (3.8)$$

x_n dizisine geri dönersek

$$x_{n+1} > \frac{{x_n}^p}{{x_{n-1}}^p}$$

$$x_{n+1} > \frac{{x_n}^{(\lambda_1+\lambda_2)}}{{x_{n-1}}^{(\lambda_1.\lambda_2)}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^{\lambda_1}} > \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2} \quad n \in \mathbb{N}_0 \qquad (3.9)$$

elde edilir ve buradan tümevarım kullanılarak;

$$\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}} > \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2^n} \qquad (3.10)$$

elde edilir.

x_{-1} ve x_0 başlangıç şartlarını $x_0 > 1$, $x_0 > {x_{-1}}^{\lambda_1}$ şeklinde seçelim. (3.10)' den ve seçilen başlangıç şartlarından;

$$x_n > \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2{}^n} . x_{n-1}^{\lambda_1} > x_{n-1}^{\lambda_1} > \cdots > x_0^{\lambda_1^n} \tag{3.11}$$

olur ve sonuç olarak

$$x_n > x_0^{\lambda_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.12}$$

$n \to \infty$ için (3.12)' da limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Durum (3.2) $[\mathbf{p} \in (\mathbf{0},\mathbf{4})]$ **:** Burada $p \in (0,4)$ olması durumunda (3.1) denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı araştırılacaktır.

Teorem (3.2) : $p \in (0,4)$ olsun. Bu durumda (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

İspat: Denklem (3.1)' den aşağıdaki bilgilere ulaşırız.

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n{}^p}{x_{n-1}{}^p} = A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}^{p-1}}{x_{n-2}^p}\right)^p \tag{3.13}$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}^{p/(p-1)}}\right)^{p-1}\right)^p$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{p/(p-1)}} + \frac{x_{n-2}^{p-(p/p-1)}}{x_{n-3}^p}\right)^{p-1}\right)^p$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{p/(p-1)}} + \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}^{p/(p-(p/p-1))}}\right)^{p-(p/p-1)}\right)^{p-1}\right)^p = \ldots$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{p/(p-1)}} + \left(\ldots + \left(\frac{A}{x_{n-k}^{p_k}} + \frac{x_{n-k}^{p-p_k}}{x_{n-k-1}^p}\right)^{p-p_k-1} \ldots\right)^{p-(p/p-1)}\right)^{p-1}\right)^p \tag{3.14}$$

Şimdi $\forall n \geq k$ için p_k dizisini şu şekilde tanımlayalım.

$$p_{k+1} = \frac{p}{p-p_k}\,,\ p_0 = 0 \tag{3.15}$$

Bazı $k_1 \in \mathbb{N}$ için $p = p_{k_1}$ ise (3.15) bağıntısında yalnız $p_0, p_1, \ldots, p_{k_1}$ şeklinde $k_1 + 1$ tane terim tanımlanır. Bu durumda yukarıda sürdürülen prosedür (3.13)' da ya da (3.14)' de k_1 adım sonra biter. (Örneğin; eğer $p = p_1 = 1$ ise prosedür (3.13)' te son bulur.)

Eğer $p \leq p_1 = 1$ ise bu durumda (3.13)' dan şu sonuca ulaşırız.

$$x_{n+1} \leq A + \frac{(A+1)^p}{A^p} \tag{3.16}$$

Şimdi kabul edelim ki $p > 1$ olsun. Bu durumda en azından bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $p_{k_0-1} < p$ ve $p_{k_0} \geq p$ ' dir Böyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ olmadığını düşünelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k < p$ olduğundan $0 = p_0 < p_1 = 1$ ve $f(x) = {}^{p}\!/_{(p-x)}$ fonksiyonu (0,p) aralığında tam olarak artan olduğundan p_k dizisi artandır. p_k sınırlı olduğundan bir p^* sayısına yakınsar ve bu sayı

$$x^2 - px + p = 0 \tag{3.17}$$

denkleminin bir çözümüdür.

Ancak $p \in (0,4)$ olduğu zaman bu denklemin reel çözümü yoktur. Buna göre en azından bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $p_{k_0-1} < p$ ve $p_{k_0} \geq p$ olur. Buradan ve (3.14)' de $k = k_0$ alınarak $\forall n \geq k_0$ için;

$$x_{n+1} =$$

$$A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{p/(p-1)}} + \left(\ldots + \left(\frac{A}{x_{n-k_0}^{p_{k_0}}} + \frac{1}{x_{n-k_0}^{p_{k_0}} x_{n-k-1}^{p}}\right)^{p-p_{k_0}-1} \ldots\right)^{p-(p/p-1)}\right)^{p-1}\right)^{p}$$

$$\leq A + \left(1 + \left(\frac{1}{A^{p/(p-1)-1}} + \left(\ldots + \left(\frac{1}{A^{p_{k_0}-1}} + \frac{1}{A^{p_{k_0}}}\right)^{p-p_{k_0}-1} \ldots\right)^{p-(p/p-1)}\right)^{p-1}\right)^{p}$$

elde edilir ki bu ifade x_n dizisi için bir üst sınırdır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Durum (3.3) $\mathbf{p \in (0,1]}$: Bu bölümde $p \in (0,1]$ olması durumunda (3.1) denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığı incelenecektir.

Teorem (3.3) : $p \in (0,1]$ olsun. Bu durumda (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x} = A + 1$ global asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki yardımcı sonucu bilmeliyiz.

Lemma (3.1) : Kabul edelim ki (x_n) (3.1) denkleminin aşikar olmayan (denge noktası olmayan) bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) (x_n) dizisi $\bar{x} = A + 1$ civarında iki veya üç boylu yarı-döngülerle salınımlıdır ve ilk veya ikinci terimde uç bir yarı-döngü oluşur.

b) $n > 2$ için

$$A < x_n < A + \frac{(A+1)^p}{A^p}$$

olur.

İspat (a) : İlk olarak ilk yarı-döngü hariç diğer bütün yarı-döngülerin iki veya üç terimli olduğunu gösterelim. Bunun için kabul edelim ki x_N bir pozitif yarı-döngünün ilk terimi olsun. Yani $x_N \geq \bar{x}$ ve $x_{N-1} < \bar{x}$ olur. Buna göre;

$$x_{N+1} = A + \frac{x_N^p}{x_{N-1}^p} > A + 1 = \bar{x} \tag{3.18}$$

olur. Şimdi eğer $x_{N+1} > x_N$ ise

$$x_{N+2} = A + \frac{x_{N+1}^p}{x_N^p} > A + 1 = \bar{x} \tag{3.19}$$

Diğer taraftan $p \in (0,1]$ olduğundan

$$x_{N+2} = A + \frac{x_{N+1}^p}{x_N^p} \leq A + \frac{x_{N+1}^p}{\bar{x}^p} \leq A + \frac{x_{N+1}}{A+1} < x_{N+1} \tag{3.20}$$

bu nedenle $\bar{x} < x_{N+2} < x_{N+1}$ ve buradan

$$x_{N+3} = A + \frac{x_{N+2}^p}{x_{N+1}^p} < A + 1 = \bar{x} \tag{3.21}$$

olur ki bu da x_{N+3}'ün bu pozitif yarı-döngünün bir terimi olmadığını gösterir ve yarı-döngü sadece x_N, x_{N+1}, x_{N+2} terimlerinden oluşur ve (a) şartı sağlanmış olur.

Eğer $x_{N+1} < x_N$ ise bu durumda;

$$x_{N+2} = A + \frac{x_{N+1}^p}{x_N^p} < A + 1 = \bar{x} \tag{3.22}$$

olur. Bu durumda ise yarı-döngü sadece x_N ve x_{N+1} terimlerinden oluşur. Bu durumda (a) şartı yine sağlanmış olur.

İspat (b) : Teorem (3.2)'den ve $p \in (0, 1]$ olduğundan

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p} = A + \left(\frac{A}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1}^{1-p} x_{n-2}^p}\right)^p < A + \frac{(A+1)^p}{A^p}$$

elde edilir. Şimdi teorem (3.3)'ü ispatlayabiliriz.

İspat (Teorem (3.3)) : Lineer kararlılık teoreminden eğer $p \in (0,1)$ ise $\bar{x} = A + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Şimdi aşağıdaki dizileri tanımlayalım;

$$L_1 = A\,,\ U_1 = A + \frac{(A+1)^p}{A^p} \text{ ve } L_{n+1} = A + \frac{(A+1)^p}{U_n^p}\,,\ U_{n+1} = A + \frac{(A+1)^p}{L_{n+1}^p}$$

Lemma (3.1)'den gösterilebilir ki U_n ve L_n dizileri (3.1) denkleminin (x_n) çözümlerinin yarı-döngüleri için alt ve üst sınırdır. Diğer taraftan kolayca görülür ki $L_1 < L_2 < \cdots < \bar{x} < \cdots < U_{n+1} < U_n < \cdots < U_2 < U_1$ olur ve bunlar;

$$w_{n+1} = A + \left[\frac{A+1}{A + \left(\frac{A+1}{w_n}\right)^p}\right]^p \tag{3.23}$$

denkleminin çözümleridir.

Şimdi (3.23) denkleminin bütün yakınsak çözümlerinin $\bar{x} = A + 1$'e yakınsadığını göstereceğiz. Bunun için;

$$f(x) = \frac{1}{p}\ln(x - A) + \ln(Ax^p + (A+1)^p) - p\ln x - \ln(A+1) \qquad (3.24)$$

denkleminin $(A, +\infty)$ aralığında bir tek $\bar{x} = A + 1$ çözümüne sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

$p \in (0,1]$ iken

$$f'(x) = \frac{Ax^{p+1} + (A+1)^p x(1-p^2) + p^2 A(A+1)^p}{px(x-A)(Ax^p + (A+1)^p} > 0$$

olduğundan

$$\lim_{x \to A+0} f(x) = -\infty$$

,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

olur ki gerçekten $\bar{x} = A + 1$ çözümü $(A, +\infty)$ aralığında (3.24) denkleminin tek çözümüdür. Bu da ispatı tamamlar.

Yorum (3.1) : g(x) , $f'(x)$' in payı olsun.

$$g(x) = Ax^{p+1} - (A+1)^p(p^2 - 1)x + p^2 A(A+1)^p \qquad (3.25)$$

ve $p > 1$ olsun.

$$g'(x) = (p+1)((Ax^p - (p-1)(A+1)^p) \qquad (3.26)$$

olur ki g(x) fonksiyonu minimum değerini $m = \left((p-1)(A+1)^p/A\right)^{\frac{1}{p}}$ noktasında alır ve

$$g(m) = p(A+1)^p\left(Ap - m(p-1)\right) = p(A+1)^p\left(Ap - \left(\frac{(p-1)(A+1)^p}{A}\right)^{\frac{1}{p}}(p-1)\right)$$

şimdi bu minimum değerin negatif olmaması halinde

$$A^{p+1}p^p \geq (p-1)^{p+1}(A+1)^p \qquad (3.27)$$

eşitsizliği üzerine çalışalım. Dikkat ediniz ki $p = A + 1$ olması durumunda yukarıda ki eşitsizlik eşitlik halini alır. Şimdi;

$$h(x) = (p+1)\ln x + p\ln p - (p+1)\ln(p-1) - p\ln(x+1) \qquad (3.28)$$

olsun bu durumda;

$$h(p-1) = 0\ ,\ h(+\infty) = +\infty \qquad (3.29)$$

olur. Diğer taraftan $x > 0$ olduğu zaman;

$$h'(x) = \frac{(p+1)(x+1)-px}{x(x+1)} > 0 \qquad (3.30)$$

olur ki bu da h fonksiyonunun (0,+∞) aralığında artan olduğunu gösterir. Buradan ve (3.29)'dan $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq p-1$ elde edilir. Sonuç olarak (3.27) eşitsizliği $A \geq p-1$ için sağlanır. Buradan $A \geq p-1$ için $g(x) \geq 0$ olur ki bu da f(x)'in tek bir sıfıra sahip olduğunu gösterir.

Bu düşünce ve Teorem (3.1.2) bizi aşağıdaki tahminin doğru olduğuna götürür.

Tahmin (3.1) : Eğer $1 < p < \min\{4, A+1\}$, ise bu durumda (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x} = A+1$ $(0,\infty)^2$ komşuluğunda global çekicidir.

3.2 (3.1) Denkleminin Asal İki-Periyodik Çözümleri

Bu bölümde (3.1) denkleminin asal iki-periyodik çözümlerinin varlığını araştıracağız.

Teorem (3.4) : (3.1) denkleminin asal iki-periyodik çözümleri yoktur.

İspat : Kabul edelim ki $x, y \in (A,\infty)$ olmak üzere;

$$\ldots, x, y, x, y, \ldots \qquad (3.31)$$

denklem (3.1)'in asal iki periyodik bir çözümü olsun. Bu durumda

$$x = A + \left(\frac{y}{x}\right)^p\ ,\ y = A + \left(\frac{x}{y}\right)^p \qquad (3.32)$$

olmalıdır ki;

$$y = A + \frac{1}{x-A} \qquad (3.33)$$

eşitliği sağlansın. Şimdi (3.33)'ü (3.32)'de yerine yazarsak;

$$A+\frac{1}{x-A}=A+\left(\frac{x}{A+\frac{1}{x-A}}\right)^{p}$$

$$\frac{1}{x-A}=\left(\frac{x}{\frac{A(x-A)+1}{x-A}}\right)^{p}$$

$$\frac{1}{x-A}=\frac{(x(x-A))^{p}}{(A(x-A)+1)^{p}}$$

$$(x-A)^{p+1}x^{p}=(A(x-A)+1)^{p} \tag{3.34}$$

bulunur. Burada her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$f(x)=(p+1)\ln(x-A)+p\ln x-p\ln[A(x-A)+1]=0 \tag{3.35}$$

elde edilir ki $\bar{x}=A+1$ (3.35)'in bir çözümüdür. Şimdi bunun denklemin tek çözümü olduğunu gösterelim.

$$f'(x)=\frac{(x-A)[Ax+p(A(x-A))+1]+(p+1)x}{x(x-A)(A(x-A)+1)} \tag{3.36}$$

olduğundan; $x\in(A,\infty)$ için $f'(x)>0$ 'dır ki bu f fonksiyonunun (A,∞) aralığında monoton artan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece $\bar{x}=A+1$ (3.36)'nın tek çözümüdür ve sonuç olarak $(A+1\,,A+1)$ (3.32)'nin tek çözümüdür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

4. $\mathbf{x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}}$ TEKRARLI DİZİSİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde, 2006 yılında Stevo Stević tarafından

$$x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\} \quad n \in \mathbb{N} \ \text{ve} \ p, c \in (0, \infty) \tag{4.1}$$

fark denkleminin sınırlılığı ve global çekiciliği üzerine yapılmış olan çalışmayı inceleyeceğiz. Burada;

a) $p \geq 4$ olduğunda sınırsız çözümlerin varlığını,

b) $p \in (0,4)$ olduğunda bütün pozitif çözümlerin sınırlı olduğunu,

c) $p \in (0,4)$ ve $c \geq 1$ için tüm pozitif çözümlerin nihayi 1'e eşit olduğunu,

d) $p, c \in (0,1)$ olduğunda tüm pozitif çözümlerin 1'e yakınsadığını

göstereceğiz.

4.1. (4.1) Denkleminin Sınırlılığı

Burada denklem (4.1)'in sınırlılık karakteri incelenecektir.

Durum 4.1 $(\mathbf{p \geq 4})$ **:**

Teorem 4.1 : $p \geq 4$ olsun. Bu durumda (4.1) denklemi sınırsız pozitif çözümlere sahiptir.

İspat : İlk olarak denklem (4.1)'in çözümlerinin hepsi aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$x_{n+1} > \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^p \ , n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2}$$

$y_n = \ln x_n$ olsun. Şimdi (4.2) eşitsizliğinde her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\ln x_{n+1} - p \ln x_n + p \ln x_{n-1} \geq 0$$

$$y_{n+1} - p\, y_n + p\, y_{n-1} \geq 0 \ , n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.3}$$

olur. Bu denklemin karakteristik polinomu;

$$p(\lambda) = \lambda^2 - p\,\lambda + p$$

ve bu polinomun kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2-4p}}{2}$$

dir. Açıkça görülebilir ki $p \geq 4$ için $\lambda_1 \geq 2$ ve diğer taraftan

$$\lambda_2 = \frac{2p}{p+\sqrt{p^2-4p}} > 1$$

dir. Bu durumda (4.3) eşitsizliğini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_{n+1} - \lambda_1 y_n - \lambda_2 (y_n - \lambda_1 y_{n-1}) \geq 0 \ , n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.4}$$

Şimdi x_n dizisine geri dönersek

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^{\lambda_1}} > \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2} \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.5}$$

(4.5)'de $n = 0, n = 1, \dots, n = n$ için iterasyon yapılırsa yani $n = 0$ için

$$\frac{x_1}{x_0^{\lambda_1}} \geq \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2} \tag{a}$$

dersek $n = 1$ için

$$\frac{x_2}{x_1^{\lambda_1}} \geq \left(\frac{x_1}{x_0^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2}$$

olur.

$$\frac{x_2}{x_1^{\lambda_1}} \geq \left[\left(\frac{x_1}{x_0^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2}\right]^{\lambda_2}$$

şeklinde devam ettirilirse

$$\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}} \geq \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2^n} , n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.6}$$

elde edilir.

Şimdi x_{-1} ve x_0 başlangıç şartlarını $x_0 > 1$ ve $x_0 > x_{-1}^{\lambda_1}$ olacak şekilde seçelim. (4.6) eşitsizliğinden ve seçilen başlangıç şartlarından

$$x_n \geq \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{{\lambda_2}^n} . x_{n-1}^{\lambda_1} > x_{n-1}^{\lambda_1} > \cdots > x_0^{\lambda_1^n}$$

ve sonuç olarak

$$x_n > x_0^{\lambda_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.7}$$

Burada a götürülür $n \to \infty$ ‘a götürülürse

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Durum (4.2) $[\mathbf{p} \in (\mathbf{0}, \mathbf{4})]$ **:** Burada denklem (4.1)'in sınırlılığını $p \in (0,4)$ için inceleyeceğiz.

Teorem (4.2) : $p \in (0,4)$ olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

İspat: Denklem (4.1)' den

$$x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\} = \max\left\{c, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-1}}, \frac{x_{n-1}^{p-1}}{x_{n-2}^p}\right\}\right)^p\right\}$$

$$= \max\left\{c, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-1}}, \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}^{p/p-1}}\right)^{p-1}\right\}\right)^p\right\}$$

$$= \max\left\{c, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-1}}, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-2}^{p/p-1}}, \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}^{p/\left(p-{}^{p}/_{p-1}\right)}}\right)^{p-\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{p-1}\right\}\right)^p\right\}$$

$$= \cdots$$

$$= \max\left\{c, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-1}}, \left(\dots\left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-k}^{p_k}}, \frac{x_{n-k}^{p-p_k}}{x_{n-k-1}^{p}}\right\}\right)^{p-p_{k-1}} \dots\right)^{p-1}\right\}\right)^{p}\right\} \tag{4.8}$$

$\forall\, k \in N$ ve $n \geq k$ için p_k dizisi şu şekilde tanımlıdır.

$$p_{k+1} = \frac{p}{p - p_k} \quad , \quad p_0 = 0$$

Eğer bazı s'ler için $(s \in N)$ $p = p_s$ oluyor ise, bu fark denklemi yalnızca $s + 1$ terim için tanımlanır ve yukarıdaki prosedür s adımda sona erer. Eğer $p \leq p_1 = 1$ ise (4.8)' nin ilk satırı gösterir ki $\forall\, n \geq 3$ için $x_{n+1} \leq \max\{c, c^{-p}\}$ ' dır. Şimdi kabul edelim kip > 1 olsun. Bu durumda öyle bir $k_0 \in N$ vardır ki $p_{k_0-1} < p$ ve $p_{k_0} \geq p$ ' dir. Şimdi k_0 olmadığını kabul edelim. $0 = p_0 < p_1 = 1$ olduğundan ve $f(x) = \frac{p}{p-x}$ fonksiyonu $(0, p)$ aralığında artan olduğundan $k \in \mathbb{N}$ için $p_k < p$ ise p_k dizisi de artandır. Eğer p_k dizisi negatif olmayan ve sınırlı bir dizi ise bu durumda bir $p^* \leq p$ sayısına yakınsadığı söylenebilir ve bu nokta $x^2 - px + p = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Ancak, $p \in (0,4)$ olduğundan bu denklem reel bir çözüme sahip değildir. Buna göre öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $p_{k_0-1} < p$ ve $p_{k_0} \geq p$ ' dir. Buradan ve (4.8)' de $k = k_0$ alınarak elde edilebilir ki,

$$x_{n+1} = \max\left\{c, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-1}}, \left(\dots, \left(\max\left\{\frac{c}{x_{n-k_0}^{p_{k_0}}}, \frac{1}{x_{n-k_0}^{p_{k_0}-p}\, x_{n-k_0-1}^{p}}\right\}\right)^{p-p_{k_0-1}} \dots\right)^{p-1}\right\}\right)^{p}\right\}$$

$$\leq \max\left\{c, \left(\max\left\{1, \left(\dots\left(\max\left\{\frac{1}{c^{p_{k_0-1}}}, \frac{1}{c^{p_{k_0}}}\right\}\right)^{p-p_{k_0-1}} \dots\right)^{p-1}\right\}\right)^{p}\right\} \tag{4.9}$$

$n > k_0 + 1$ için, (4.9) ifadesi x_n dizisi için bir üst sınırdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç (4.1) : Kabul edelim ki $p \in (0,4)$ ve $c \geq 1$ olsun. Bu durumda denklem (4.1) in bütün pozitif çözümleri nihai olarak c' ye eşittir.

İspat : (4.9)' den $c \leq x_n \leq \max\left\{c, \frac{1}{c^{p^{k_0}} \prod_{j=0}^{k_0-1}(p-p_j)}\right\}$ dir. Buradan $c \geq 1$ olduğundan yeterince büyük n'ler için $x_n = c$' dir.

4.2 $p \in (0,1)$ İçin (4.1) Denkleminin Global Kararlılığı

Bu bölümde (4.1) denkleminin pozitif çözümlerinin $p \in (0,1)$ olması durumunda global kararlılığı araştırılacaktır.

Teorem (4.3) : $p, c \in (0,1)$ olsun. Bu durumda denklem (4.1)' in denge noktası $\bar{x} = 1$ global kararlıdır.

İspat : Teorem (4.2)' den biliyoruz ki

$$x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\} \tag{4.10}$$

$$= \max\left\{c, \frac{c^p}{x_{n-1}^{1-p}}, \frac{1}{\left(x_{n-1}^{1-p} x_{n-2}^p\right)^p}\right\} \tag{4.11}$$

(4.11)' den ve $x_n \geq c$ $(n \geq 1$ için) olduğundan $n \geq 3$ için

$$c \leq x_{n+1} \leq \max\left\{c, 1, \frac{1}{c^p}\right\} \tag{4.12}$$

yazabiliriz. Şimdi denklem (4.1)' i aşağıdaki formda yazalım.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \max\left\{\frac{c}{x_n}, \frac{1}{x_n^{1-p} x_{n-1}^p}\right\} \tag{4.13}$$

(4.12) ve (4.13)' den

$$c^p \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{c} \quad , \quad n \geq 5 \tag{4.14}$$

(4.10) ve (4.14)' den

$$c^{p^2} \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{c^p} \ , \quad n \geq 6 \tag{4.15}$$

(4.15)’ yı (4.13)’ te kullanırsak

$$c^{p} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{c^{p^2}}\ , \quad n \geq 8 \tag{4.16}$$

daha sonra (4.16)’ yi (4.10)’ te kullanırsak

$$c^{p^2} \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{c^{p^3}}\ , \quad n \geq 9 \tag{4.17}$$

bu prosedür bu şekilde tekrarlanarak tümevarımdan

$$c^{p^{2k}} \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{c^{p^{2k+1}}}\ , \qquad n \geq 6k+3 \tag{4.18}$$

ve

$$c^{p^{2k+2}} \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{c^{p^{2k+1}}}\ , \qquad n \geq 6k+6 \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.18) ve (4.19)’ den ve $k \to \infty$ iken $p^k \to \infty$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

5. $\boldsymbol{x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde Stevo Stević tarafından $x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$ $n \in \mathbb{N}_0$ $k \geq 2$ $A, p \in \mathbb{R}^+$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri ile ilgili yapılmış olan çalışmaya tam bir bakış atacağız. Özel olarak $p^{k-1} \in (0, k^k/(k-1)^{k-1})$ durumu için denklemin bütün çözümlerinin sınırlı olduğunu göstereceğiz.

5.1 $\boldsymbol{x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}}$ Denkleminin Sınırlılık Karakteri

Bu bölümde

$$x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad k \geq 2 \;\; A, p \in \mathbb{R}^+ \tag{5.1}$$

denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini inceleyeceğiz.

$p^{k-1} \geq k^k/(k-1)^{k-1}$ ve $p^{k-1} < k^k/(k-1)^{k-1}$ şeklinde iki farklı durumu ayrı ayrı ele alacağız.

Durum 5.1 : $\boldsymbol{\left(p^{k-1} \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\right)}$

Burada denklem (5.1) için başlıkta verilen durumu inceleyeceğiz. Bu durum altından denklem (5.1)' in sabit katsayılı bir lineer fark ile ilişkisi kullanılarak göstereceğiz ki denklem (5.1) sınırsız çözümlere sahiptir.

Teorem 5.1 : Kabul edelim ki

$$p^{k-1} \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \tag{5.2}$$

olsun. Bu durumda denklem (5.1.1) sınırsız çözüme sahiptir.

İspat : İlk olarak şunu yazalım ki denklem (5.1.1)' in tüm çözümleri

$$x_n \geq \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-k}}\right)^p \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.3}$$

eşitsizliğini sağlar yanı sıra A ile de alttan sınırlı olur $n \in \mathbb{N}_0$ için, şimdi (5.3)' de her iki tarafın logaritması alınır ve $y_n = \ln x_n$ dönüşümü yapılırsa

$$y_n - py_{n-1} + py_{n-k} \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.4}$$

elde edilir. Buradan yukarıdaki eşitsizliğin karakteristik denklemi yazılırsa $p(\lambda) = \lambda^k + p\lambda^{k-1} + p$ yazılır burada $p(\lambda)$'nın türevi alınırsa

$p'(\lambda) = k\lambda^{k-1} + (k-1)\lambda^{k-2}p$ olur ki buradan $p(\lambda)$ polinomunun $\lambda_k = \frac{(k-1)p}{k}$ noktasında bir yerel minimumu olduğu görülür.

$$p(\lambda_k) = \frac{(k-1)^{k-1}p}{k^k}\left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} - p^{k-1}\right) \leq 0$$

(5.2) eşitsizliğinden yazılabilir ki $\frac{(k-1)p}{k} > 1$ 'dir. Buradan

$p(1) = 1$ ve $\lim_{\lambda\to\infty} p(\lambda) = +\infty$ olduğundan eğer $p^{k-1} \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$ ise $p(\lambda)$ polinomu 1'den büyük iki tane gerçek köke sahiptir. $p^{k-1} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$ durumunda ise 0 ve $\frac{(k-1)p}{k}$ çift katlı köklerdir. Şimdi (5.4) eşitsizliğini aşağıdaki formda yazarsak

$$p_1\big(p_2(y_n)\big) \geq 0 \tag{5.5}$$

$$y_n = \ln x_n$$

$$p_1(u_n) = u_n - (\lambda_1 + \lambda_2)u_{n-1} + \lambda_1\lambda_2 u_{n-2}$$

Burada λ_1, λ_2 1' den büyük gerçek kökler ve $u_n = p_2(y_n)$' dir. Burada p_2 , $p_2 = \frac{p}{p_1}$ şeklinde elde edilen bir lineer operatördür. Eğer

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) = [(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)](\lambda^{k-2} + c_{k-3}\lambda^{k-3} + \cdots + c_1\lambda + c_0)$$

ise bu durumda

$$u_n = p_2(y_n) = y_n + c_{k-3}y_{n-1} + \cdots + c_1 y_{n-k+3} + c_0 y_{n-k+2}$$

olur. Bunu görebilmek için, aşağıdaki k' ıncı mertebeden lineer fark denklemlerinin karakteristik polinomuna bakınız.

$p_1\big(p_2(y_n)\big) = 0$ ve $y_n - p y_{n-1} + p y_{n-k} = 0$ denklemleri için her ikisi de aynıdır.

$$p_2(y_{-1}) > 0 \quad \text{ve} \quad p_2(y_{-1}) > \lambda_1 p_2(y_{-2}) \tag{5.6}$$

buradan

$$p_2(y_{-1}) = y_{-1} + c_{k-3}y_{-2} + \cdots + c_1 y_{-k+2} + c_0 y_{-k+1} > 0$$

ve

$$p_2(y_{-1}) > \lambda_1(y_{-2} + c_{k-2}y_{-3} + \cdots + c_1 y_{-k+1} + c_0 y_{-k})$$

olur. Gerçekten açıkça görülebilir ki y_{-1} çok büyük seçildiğinde (5.6)' ın ilk şartı sağlanır. Diğer taraftan y_{-1} $p_2(y_{-1})$' de ve y_{-k} $p_2(y_{-1})$' de olmadığından (5.6)' ın ikinci şartını sağlayan başlangıç koşulları seçebiliriz.

$$u_n - \lambda_1 u_{n-1} - \lambda_2(u_{n-1} - \lambda_1 u_{n-2}) \geq 0 \tag{5.7}$$

(5.6)' dan ve (5.7)' in iterasyonunundan

$$u_n - \lambda_1 u_{n-1} \geq \lambda_1 u_{n-1}$$

olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$u_n \geq \lambda_1 u_{n-1} + \lambda_1 u_{n-1} \tag{5.8}$$

Şimdi ilk olarak kabul edelim ki λ_1 ve λ_2 $1 < \lambda_1 < \lambda_2$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun.(5.8) eşitsizliğini $n = i, i = 0,1,\ldots,n$ olmak üzere λ_1^{n-i} ile çarparsak ve elde ettiğimiz eşitsizlikleri toplarsak

$$u_n \geq \lambda_1^{n+1}u_1 + (u_{-1} - \lambda_1 u_{-2})\sum_{i=0}^{n} \lambda_2^{n-i+1}\lambda_1^{i}$$

$$= \lambda_1^{n+1} p_2(y_{-1}) + \lambda_2 \frac{\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big(p_2(y_{-1}) - \lambda_1 \big(p_2(y_{-2}) \big) \Big) \qquad (5.9)$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ için son eşitsizlikten ve (5.6)' dan $u_n \to \infty$ elde edilir, öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} (y_n + c_{k-3} y_{n-1} + \cdots + c_1 y_{n-k+3} + c_0 y_{n-k+2}) = +\infty$$

Buradan ve y_n dizisi $\ln A$ ile alttan sınırlı olduğundan öyle bir y_{n_k} alt dizisi vardır ki $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = +\infty$' dur. Eğer öyle olmasaydı y_n üstten de sınırlı olacak ve bu da u_n dizisinin sınırlı olduğu anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. Onun için

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ bu nedenle x_n sınırsızdır. $\lambda_1 = \lambda_2$ olması durumunda (5.9) eşitsizliği

$$u_n \geq \lambda_1^{n+1} p_2(y_{-1}) + (n+1) \lambda_1^{n+1} \big(p_2(y_{-1}) - \lambda_1 p_2(y_{-2}) \big)$$

halini alır. Buradan ve (5.6)' dan $n \to \infty$ için $u_n \to \infty$ olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ durumu içinde ispat benzer şekilde yapılabilir.

Yorum 5.1 : Dikkat ediniz ki teorem (5.1)' in ispatında biz aslında (5.3) eşitsizliğini kullandık. Bu teorem (5.3) eşitsizliğini sağlayan ve alttan sınırlı fark denklemleri içinde sağlanır sonucuna ulaşabiliriz.

Durum 5.2 : $\boldsymbol{p^{k-1} \in \big(0, k^k/(k-1)^{k-1}\big)}$

Burada denklem (5.1)' in pozitif çözümlerinin $p^{k-1} \in (0, k^k/(k-1)^{k-1})$ olması durumunda sınırlılık karakterini inceleyeceğiz. Aşağıdaki sonuç denklem (5.1)' in pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini tam olarak ortaya koyar ve durum bu çalışmadaki asıl sonuçtur.

Teorem 5.2 : Kabul edelim ki $p^{k-1} \in (0, k^k/(k-1)^{k-1})$ olsun. Bu durumda denklem (5.1)' in bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

İspat : Denklem (5.1)' in tekrarından aşağıdaki eşitlik zincirini elde ederiz.

$x_n = max\left\{A, \frac{x_{n-1}^p}{x_{n-k}^p}\right\}$

$$= max\left\{A, max\left\{\frac{A}{x_{n-k}}, \frac{x_{n-2}^{p}}{x_{n-k}x_{n-k-1}^{p}}\right\}^{p}\right\} = max\left\{A, \frac{A^{p}}{x_{n-k}^{p}}, \left\{\frac{x_{n-2}}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}\right\}$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^{p}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{x_{n-3}^{p}}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}x_{n-k-2}^{p}}\right\}^{p^2}\right\}$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^{p}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{x_{n-3}}{x_{n-k}^{1/p^2}x_{n-k-1}^{1/p}x_{n-k-2}}\right\}^{p^3}\right\}$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^{p}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2}x_{n-k-1}^{1/p}x_{n-k-2}}\right\}^{p^3},\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^3}x_{n-k-1}^{1/p^2}x_{n-k-2}^{1/p}x_{n-k-3}}\right\}^{p^4}\right\}$$

$$= \cdots$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^{p}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2}x_{n-k-1}^{1/p}x_{n-k-2}}\right\}^{p^3}, \ldots,\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^{k-2}}x_{n-k-1}^{1/p^{k-3}}\ldots x_{n-(2k-2)}}\right\}^{p^{k-1}}, \left\{\frac{x_{n-k}^{p}}{x_{n-k}^{1/p^{k-2}}x_{n-k-1}^{1/p^{k-3}}\ldots x_{n-(2k-2)}x_{n-(2k-1)}^{p}}\right\}^{p^{k-1}}\right\}$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^{p}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2}x_{n-k-1}^{1/p}x_{n-k-2}}\right\}^{p^3}, \ldots,\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^{k-2}}x_{n-k-1}^{1/p^{k-3}}\ldots x_{n-(2k-2)}}\right\}^{p^{k-1}}, \left\{\frac{x_{n-k}^{p-\frac{1}{p^{k-2}}}}{x_{n-k-1}^{1/p^{k-3}}\ldots x_{n-(2k-2)}x_{n-(2k-1)}^{p}}\right\}^{p^{k-1}}\right\} \quad (5.10)$$

İlk olarak $p \leq 1$ olduğunu kabul edelim buna göre $p - \frac{1}{p^{k-2}} \leq 0$' dır. Böylece (5.10) eşitliğinde $x_n \geq A$ olduğundan $n \geq 2k-1$ için x_n yerine A yazarsak (5.10) ifadesi büyümüş olur ve $n_0 \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_n \leq max\left\{A, 1, \frac{1}{A^p}, \frac{1}{A^{p+p^2}}, \dots, \frac{1}{A^{\sum_{j=1}^{k-2} p^j}}, \frac{1}{A^{\sum_{j=1}^{k-1} p^j}}\right\} < \infty$$

elde edilir ki bu da $p \in (0,1]$ için (x_n)' in sınırlı olduğunu gösterir. Şimdi $p > 1$ olsun; bu durumda

$p - \frac{1}{p^{k-2}} =: p - a_0^{(0)} > 0$ olur. (5.10)' dan devam edersek

$$x_n = max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^p, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p} x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2} x_{n-k-1}^{1/p} x_{n-k-2}}\right\}^{p^3}, \dots,\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{\prod_{j=0}^{k-2} x_{n-k-j}^{a_0^{(j)}}}\right\}^{p^{k-1}}, \left\{\frac{x_{n-k}^{p-a_0^{(0)}}}{\left(\prod_{j=1}^{k-2} x_{n-k-j}^{a_0^{(j)}}\right) x_{n-(2k-1)}^p}\right\}^{p^{k-1}}\right\}$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^p, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p} x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2} x_{n-k-1}^{1/p} x_{n-k-2}}\right\}^{p^3}, \dots,\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{\prod_{j=0}^{k-2} x_{n-k-j}^{a_0^{(j)}}}\right\}^{p^{k-1}}, \left\{\frac{x_{n-k}}{\left(\prod_{j=1}^{k-2} x_{n-k-j}^{x_0^{(j)}/(p-a_0^{(0)})}\right) x_{n-(2k-1)}^{p/(p-a_0^{(0)})}}\right\}^{p^{k-1(p-a_0^{(0)})}}\right\}$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^p, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p} x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \dots, \left\{\frac{A}{\prod_{j=0}^{k-2} x_{n-k-j}^{a_0^{(j)}}}\right\}^{p^{k-1}},\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{\prod_{j=0}^{k-2} x_{n-k-1-j}^{a_1^{(j)}}}\right\}^{p^{k-1(p-a_0^{(0)})}}, \left\{\frac{x_{n-k-1}^{p-a_1^{(0)}}}{\prod_{j=1}^{k-2} x_{n-k-1-j}^{a_1^{(j)}} x_{n-2k}^p}\right\}^{p^{k-1(p-a_0^{(0)})}}\right\} = \cdots$$

$$= max\left\{A, \left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^{p}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2}, \left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2}x_{n-k-1}^{1/p}x_{n-k-2}}\right\}^{p^3}, \dots,\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{\prod_{j=0}^{k-2} x_{n-k-m-j}^{a_m^{(j)}}}\right\}^{p^{k-1}\prod_{i=0}^{m-1}\left(p-a_i^{(0)}\right)}, \left\{\frac{x_{n-k-m}^{p-a_m^{(0)}}}{\left(\prod_{j=1}^{k-2} x_{n-k-m-j}^{a_m^{(j)}}\right)x_{n-2k+1-m}^{p}}\right\}^{p^{k-1}\prod_{i=0}^{m-1}\left(p-a_i^{(0)}\right)}\right\} \qquad (5.11)$$

olur. Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ve $\forall n \geq 2k+m-1$ için $a_m^{(j)}, j \in \{0,1,\dots,k-2\}$ dizilerini

$$a_{m+1}^{(0)} = \frac{a_m^{(1)}}{p-a_m^{(0)}}\ ,\ a_{m+1}^{(1)} = \frac{a_m^{(2)}}{p-a_m^{(0)}}, \dots, a_{m+1}^{(k-3)} = \frac{a_m^{(k-2)}}{p-a_m^{(0)}}\ ,\ a_{m+1}^{(k-2)} = \frac{p}{p-a_m^{(0)}}, \qquad (5.12)$$

ve $a_0^{(j)} = \frac{1}{p^{k-2-j}}$, $j \in \{0,1,\dots,k-2\}$ şeklinde tanımlayalım. $p > 1$ ve $a_0^{(0)} < p$ olduğunu hatırlayalım. Buna göre $\forall m \in \mathbb{N}$ için $a_m^{(0)} < p$' dir. (5.12)' den

$$a_0^{(j)} = \frac{1}{p^{k-2-j}} < \frac{1}{p^{k-2-j}-p^{-j-1}} = a_1^{(j)}$$

elde edilir ve buradan $a_m^{(j)}, j \in \{0,1,\dots,k-2\}$ dizisinin artan olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca (5.12)' den

$$a_{m+1}^{(0)} = \frac{1}{\left(p-a_m^{(0)}\right)\left(p-a_{m-1}^{(0)}\right)\cdots\left(p-a_{m-k+2}^{(0)}\right)} \quad , m \in \mathbb{N}.$$

yazabiliriz. Böylece $a_m^{(0)} < p\ \ \forall m \in \mathbb{N}$ olduğundan $\lim_{m\to\infty} a_m^{(0)} = x^* \in (0,p]$ sonlu limiti vardır ve x^* ,

$$f(x) = x(p-x)^{k-1} - p = 0$$

denkleminin bir çözümüdür.

$$f'(x) = (p-x)^{k-2}(p-kx)$$

olduğundan görülebilir ki f fonksiyonu $[0,p]$ aralığında maximum değerini $x=\frac{p}{k}$ noktasından alır. Aksi halde;

$$f\left(\frac{p}{k}\right)=\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}p^k-p=p\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}\left(p^{k-1}-\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\right)$$

olurdu ki $p^{k-1}<\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$ olduğundan $f(x)=0$ denkleminin $(0,p]$ aralığında bir çözümü yoktur ki bu bir çelişkidir. Böylece öyle bir $k_0\in\mathbb{N}$ vardır ki

$a_{k_0-1}^{(0)}<p$ ve $a_{k_0}^{(0)}\geq p$ olur. Buradan ve (5.11)' de $m=k_0$ alınırsa

$$x_n=max\left\{A,\left\{\frac{A}{x_{n-k}}\right\}^p,\left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p}x_{n-k-1}}\right\}^{p^2},\left\{\frac{A}{x_{n-k}^{1/p^2}x_{n-k-1}^{1/p}x_{n-k-2}}\right\}^{p^3},\dots,\right.$$

$$\left.\left\{\frac{A}{\prod_{j=0}^{k-2}x_{n-k-k_0-j}^{a_{k_0}^{(j)}}}\right\}^{p^{k-1}\prod_{i=0}^{k_0-1}\left(p-a_i^{(0)}\right)},\left\{\frac{x_{n-k-k_0}^{p-a_{k_0}^{(0)}}}{\left(\prod_{j=1}^{k-2}x_{n-k-k_0-j}^{a_{k_0}^{(j)}}\right)x_{n-2k+1-k_0}^{p}}\right\}^{p^{k-1}\prod_{i=0}^{m-1}\left(p-a_i^{(0)}\right)}\right\}$$

$$\leq max\left\{A,1,\frac{1}{A^p},\frac{1}{A^{p^2+p}},\dots,\frac{1}{A^{p^{k-1}\prod_{i=0}^{k_0-1}(p-a_i^{(0)})\left(\sum_{j=0}^{k-2}a_{k_0}^{(j)}-1\right)}},\right.$$

$$\left.\frac{1}{A^{p^{k-1}\prod_{i=0}^{k_0-1}(p-a_i^{(0)})\left(\sum_{j=0}^{k-2}a_{k_0}^{(j)}\right)}}\right\}<\infty$$

$\forall n\geq 2k+k_0-1$ elde ederiz. Son ifade x_n dizisi için bir üst sınırdır ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 5.1 : $I\in N$, $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ olmak üzere

$$x_n=max\left\{A,\frac{x_{n-I}^p}{x_{n-Ik}^p}\right\},\ \ n\in\mathbb{N}_0 \tag{5.13}$$

denkleminin bütün pozitif çözümlerinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $p^{k-1}\in(0,k^k/(k-1)^{k-1})$ olmasıdır.

İspat : $y_m^{(i)} = x_{mI+i}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{0,1,\dots,I-1\}$ dönüşümü yapılarak (5.13)' deki denklemi (5.1) denkleminin I bağımsız değişkenli haline indirgenmiş olur. Denklem (5.1) için teorem (5.1) ve (5.2) ile ispat sonlandırılır.

KAYNAKLAR

Amleh, A. M., Georgiou, D. A., Grove, E. A. and Ladas, G., 1999, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, *The journal of mathematica analysis and applications*., **233**: 790-798.

Amleh, A. M., Hoag. J. and Ladas, G., 1998, A difference equation with eventually periodic solutions, *Computers and Mathematic Applic*ations. **36**: 401-404.

Berenhaut, K., Foley, J., Stevic, S., 2006, Boundedness Character positive solutions of a max difference equation, *Journal Difference Equation and Application*. **12**(12): 1193-1199.

Berenhaut, K., Stevic, S., 2006, The behavior of the positive solutions of the difference equation $x_n = A + \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\right)^p$, *Journal Difference Equation and Application.* **12**(9): 909-918.

Clark, D. and Kulenovic, M. R. S., 2002, A Coupled System of Rational Difference Equations, *Computers & Mathematicks with Applications*, **43**: 849-867.

Çinar, C.,Stevic, S. And Yalçınkaya, İ.,2005**,** On positive solution of reciprocal difference equation with minimum *The journal of mathematica analysis & Computing*. **17**(1-2): 307-314.

Devault, R., Ladas, G. And Schultz, S. W., 1998, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$, *Proceeding American Mathematical Society*. **126**: 3257-3261.

Elaydi, S., 1996**,** An Introduction to Difference Equations, Spinger-Verlag, New York.

Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, ‘‘Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications,’’ *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.

Kulenevic, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, *Boca Raton, London.*

Mishev, D. P., Patula, W. T. And Voulov, H. D., 2002, A reciprocal difference equation with maximum, *Computers & Mathematicks with Applications*, **43**: 1021-1026.

Stevic, S., 2008, On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$ *Applied Mathematics Letters,* (in press)., **21**: 791-796.

Stevic, S., 2009, Boundedness Character of a Class of difference equations, *Nonlinear Analysis,* **70**: 839-848.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ali ÇAKIR
Doğum Yeri ve Tarihi	: UŞAK / 12.04.1987
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: alicakir19@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: İzmir Büyük Çiğli Lisesi
Lisans	: Uşak Üniversitesi
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi