ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE RIESZ ORTALAMASI

DOKTORA TEZİ

Medine YEŞİLKAYAGİL

DANIŞMAN

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN, 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE RIESZ ORTALAMASI

Medine YEŞİLKAYAGİL

DANIŞMAN
Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Medine YEŞİLKAYAGİL tarafından hazırlanan "Çift Dizi Uzayları ve Riesz Ortalaması" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 03/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Başkan : Prof. Dr. Allaberen ASHRALYEV
Fatih Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Fatih Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Prof. Dr. Metin BAŞARIR
Sakarya Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Prof. Dr. Bilal ALTAY
İnönü Üniv. Eğitim Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Ed. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2015 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları, bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tamamını kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03/06/2015

Medine YEŞİLKAYAGİL

ÖZET

Doktora Tezi

ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE RIESZ ORTALAMASI

Medine YEŞİLKAYAGİL
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Bu tez çalışması, altı bölümden ibarettir. Birinci bölüm, giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, mevcut literatürde yer alan ve çalışmamızda kullanacağımız konu ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çift dizilerin $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ Riesz uzayları tanımlanıp, bu uzayların topolojik özellikleri verilmiştir. Tanımladığımız Riesz çift dizi uzayları ile mevcut çift dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, $0 < s < \infty$ değerleri için $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı tanımlanmıştır. Uzayın sırası ile $0 < s \leq 1$ değerleri için tam $s-$normlu uzay olduğu fakat barelled uzay olmadığı, $1 < s < \infty$ için Banach uzay ve barelled uzay olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, tanımladığımız Riesz uzaylarının $\alpha-$, $\gamma-$ ve $\beta(\vartheta)$-dualleri verilmiştir.

Altıncı bölüm ise, $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere $(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ ve $(R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta) : \mathcal{C}_f)$, $0 < s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$, $(\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$, $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$, $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{C}_{bp})$ ve $1 \leq s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{M}_u : \mathcal{L}_s)$ dört boyutlu matris sınıfları karakterize edilmiştir.

2015, vi+68 sayfa

Anahtar Kelimeler : Çift diziler, çift seriler, alpha-, beta- ve gamma-dualler, dört-boyutlu matrislerin etki alanı, matris dönüşümleri.

ABSTRACT

PhD Thesis

DOUBLE SEQUENCE SPACES AND RIESZ MEAN

Medine YEŞİLKAYAGİL
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

The present thesis consists of six chapters and is organized as follows: In Chapter 1, we summarize the main results of this study.

In the second Chapter, we give definitions and theorems about our subject are available in present literature.

In Chapter 3, as the domain of four dimensional Riesz mean R^{qt} in the spaces $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$ and $\mathcal{C}_r$, we define the double sequence spaces $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ and $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$, and also examine some properties of those sequence spaces.

In Chapter 4, we introduce the double sequence space $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ as the domain of four dimensional Riesz mean R^{qt} in the space $\mathcal{L}_s$ of absolutely s-summable double sequences and give some topological properties.

In Chapter 5, we determine the α-dual, γ-dual and $\beta(\vartheta)-$dual of the spaces $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$, $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ and $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ for $0 < s < \infty$ and $\mathcal{L}_s$ for $0 < s \leq 1$.

Finally, in Chapter 6, we give the necessary and sufficient conditions on the four dimensional matrix mappings in order to be in the classes $(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ and $(R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta) : \mathcal{C}_f)$ as $\vartheta \in \{p, bp, r\}$, $(\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$, $(\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$, $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$, $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{C}_{bp})$ as $0 < s < \infty$ and $(\mathcal{M}_u : \mathcal{L}_s)$ as $1 \leq s < \infty$.

2015, vi+68 pages

Key Words : Double sequences, double series, alpha-, beta- and gamma-duals, matrix domain of four-dimensional matrices, matrix transformations.

TEŞEKKÜR

Allah(C.C)'ın iki cihanda aziz ve muhterem eylemesini dilediğim, aynı nefesi dahi solumanın bir lütuf olduğunu düşündüğüm hocam ile yollarımızı kesiştirdiği için Rabbime sonsuz şükürler olsun. Zorlu bir süreç olacağını düşünmesine rağmen danışmanlığımı üstlendiği ve şahsıma kazandırdığı ahlakî ve ilmî değerler için hocam sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR'a minnettarım.

$\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere $R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta)$ ve $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayları ile ilgili kısımları titizlikle okuyarak rapor hazırlayan ve gerekli bazı dokümanları temin etmemde yardımcı olan İnönü Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı öğretim üyesi Prof. Dr. Bilal ALTAY'a, $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı ile ilgili esas sonuçları inceledikten sonra övgüleriyle beni cesaretlendiren Aligarh Muslim Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Mohammad MURSALEEN'e ve doktora öğrenimim esnasındaki resmi işlemlerde yardımlarını esirgemeyen Üniversitelerarası Kurul Genel Sekreter V. Prof. Dr. Fatih NURAY'a ve Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya, yine ihtiyaç duyduğum bazı dokümanları benimle paylaşan Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER'e, Teorem 3.4 ve Teorem 5.6'nın ispatlarının ilk hâllerindeki hataları tespit ederek bildiren Fatih Üniversitesi doktora öğrencisi sevgili Hüsamettin ÇAPAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Medine YEŞİLKAYAGİL

AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
c	Yakınsak dizilerin uzayı
Ω	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün çift dizilerin uzayı
$\mathcal{M}_u$	Sınırlı çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_p$	Pringsheim manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_r$	Regüler yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{bp}$	Sınırlı ve Pringsheim manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{p0}$	Pringsheim manada sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{bp0}$	Sınırlı ve Pringsheim manada sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_e$	$e-$yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{be}$	$be-$yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_c$	$c-$yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_f$	Hemen hemen yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{L}_u$	Mutlak yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı
$\mathcal{L}_s$	Mutlak $s-$toplanabilir çift dizilerin uzayı, $(0 < s < \infty)$
$\mathcal{BS}$	Kısmî toplamları sınırlı olan çift serilerin uzayı
$\mathcal{CS}_p$	Kısmî toplamları Pringsheim manada yakınsak olan çift serilerin uzayı
$\mathcal{CS}_r$	Kısmî toplamları regüler yakınsak olan çift serilerin uzayı
$\mathcal{CS}_{bp}$	$\mathcal{CS}_p \cap \mathcal{BS}$
$\mathcal{BV}$	Sınırlı salınımlı çift dizilerin uzayı
φ	Sonlu sayıda terimi sıfırdan farklı olan tek dizilerin uzayı
Φ	Sonlu sayıda terimi sıfırdan farklı olan çift dizilerin uzayı
${}_2\ell_F^p$	Çift fuzzy sayı dizilerinin uzayı
$\widetilde{\lambda}$	$1 \leq q < \infty$ ve $\lambda \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{p0}, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q\}$ olmak üzere birinci mertebeden Cesàro ortalaması λ uzayında olan çift dizilerin uzayı
$R^{qt}(\lambda)$	$0 < s < \infty$ ve $\lambda \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r, \mathcal{L}_s\}$ olmak üzere Riesz ortalaması λ uzayında olan çift dizilerin uzayı

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\vartheta - \lim$	Çift dizinin $\vartheta-$yakınsaklığa göre limiti
$\vartheta-$yakınsak	ϑ manada yakınsaklık
λ^{α}	λ çift dizi uzayının $\alpha-$duali
$\lambda^{\beta(\vartheta)}$	λ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)-$duali
λ^{γ}	λ çift dizi uzayının $\gamma-$duali
$(\lambda : \mu)$	λ uzayını μ uzayına taşıyan matrislerin sınıfı
$(\lambda : \mu; P)$, $(\lambda : \mu)_{reg}$	λ uzayını μ uzayına taşıyan $RH-$regüler matrislerin sınıfı
$\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$	Terimleri 0 ve 1 sayılarından oluşan dizilerin cümlesi
$\sum_{k,l} x_{kl}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} x_{kl}$
$\Delta_{10}a_{kl}$	$a_{kl} - a_{k+1,l}$
$\Delta_{01}a_{kl}$	$a_{kl} - a_{k,l+1}$
$\Delta_{11}a_{kl}$	$\Delta_{01}(\Delta_{10}a_{kl})$
$\Delta_{10}^{kl}a_{mnkl}$	$a_{mnkl} - a_{mn,k+1,l}$
$\Delta_{01}^{kl}a_{mnkl}$	$a_{mnkl} - a_{mnk,l+1}$
$\Delta_{11}^{kl}a_{mnkl}$	$\Delta_{01}^{kl}(\Delta_{10}^{kl}a_{mnkl}) = \Delta_{10}^{kl}(\Delta_{01}^{kl}a_{mnkl})$

1. GİRİŞ

Çift dizilerde, tek dizilerin aksine birden fazla yakınsaklık çeşidi tanımlanmıştır. Çift diziler için Pringsheim manada yakınsaklık Pringsheim (1900) tarafından verildi. Bir çift dizinin Pringsheim manada yakınsaklığı bu dizinin sınırlılığını gerektirmemektedir. Hardy (1916-1919) regüler yakınsaklık tanımını vererek bu eksikliği giderdi. Kojima (1922), Robison (1926) ve Hamilton (1936) gibi yazarlar, çift diziler için verilen bu iki yakınsaklık türü ile ilgili çalışmalar yaptılar. Hill (1940) fonksiyonel analiz metodunu çift dizilere uygulayarak regüler çift diziler uzayının topolojik dualini ve regüler yakınsaklığa bağlı olarak matrislerin mükemmelliğini (perfectness) tanımladı. Ayrıca, Kull (1958) fonksiyonel analiz metodlarını çift dizilerin matris dönüşümlerinde kullandı.

Móricz ve Rhoades (1988), hemen hemen yakınsaklık kavramını çift diziler için tanımlayıp hemen hemen yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_f$ uzayını inşa ettiler. Jardas ve Sarapa (1991), iki tek dizinin koordinatsal çarpımı ile ifade edilebilen çift dizilerin toplanabilirliğini incelediler. Móricz (1991), c ve c_0 tek dizi uzaylarına karşılık gelen Pringsheim manada yakınsak, sıfıra Pringsheim manada yakınsak ve regüler manada yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Boos, Leiger ve Zeller (1997), çift dizilerde $e-$, $be-$ ve $c-$yakınsaklığı tanımladılar ve $SM-$metodunu kullanarak bu yakınsaklık çeşitlerinin bazı topolojik özelliklerini verdiler. Patterson (1999) çift diziler için çekirdek tanımını verdi. Türkmenoğlu (Gökhan) (1999) $(\mathcal{C}_{bp}(t) : \mathcal{C}_p(t))_{reg}$ dört boyutlu matris sınıfını karakterize etti.

Zeltser (2000) gliding hump metodunu kullanarak $\lambda, \mu \in \{\mathcal{C}_e, \mathcal{C}_{be}\}$ olmak üzere λ uzayından μ uzayına dört boyutlu matris sınıflarını karakterize etti ve (2001a) çalışmasında yine gliding hump metodunu kullanarak üç boyutlu bir matrisin hangi gerek ve yeter şartlar altında yakınsak veya sınırlı $x = (x_k)$ dizisini $\mathcal{C}_e$ veya $\mathcal{C}_{be}$ uzayına taşıdığını gösterdi. Ayrıca Zeltser, doktora tezinde (2001b), Boos vd. (1997) tarafından verilen $e-$, $be-$ ve $c-$yakınsak çift dizi uzaylarının taşıdığı bazı özellikleri inceledi ve çift dizilerde bir A metodunun $e-$, $be-$ ve $c-$ etki alanlarının yapısını verdi. Mursaleen ve Edely (2003) tarafından çift diziler için Cauchy ve istatistiksel yakınsaklık kavramları verildi. Ayrıca, aynı çalışmada istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilir çift diziler arasındaki ilişki incelendi. Mursaleen ve Savaş (2003), çift diziler için hemen hemen regüler matrislerin sınıfını karakterize ettiler. Daha sonra Mursaleen (2004), Mursaleen ve Edely (2004) tarafından çift diziler için matrislerin hemen hemen kuvvetli regülerliği tanımlandı ve bu matrisler yardımı ile çekirdek teoremi oluşturularak çift diziler için $M-$çekirdek kavramı verildi. Gökhan ve Çolak (2004) çalışmalarında $t = (t_{kl})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere $\mathcal{C}_p(t)$ ve $\mathcal{C}_{bp}(t)$ uzaylarını, (2005) çalışmalarında $\mathcal{M}_u(t)$ uzayını ve (2006) çalışmalarında $\mathcal{C}_{p0}(t)$, $\mathcal{C}_{bp0}(t)$ ve $\mathcal{L}_u(t)$ uzaylarını tanımlayarak, bu uzayların bazı topolojik özelliklerini incelediler ve dual uzaylarını verdiler. Altay ve Başar (2005), kısmi toplamları sırası ile $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_u$ uzaylarında olan $\mathcal{BS}$, $\mathcal{BS}(t)$, $\mathcal{CS}_p$, $\mathcal{CS}_{bp}$, $\mathcal{CS}_r$ ve $\mathcal{BV}$ çift seri uzaylarını inşa ederek bu uzaylar ile ilgili bazı özellikleri incelediler. Tripathy ve Dutta (2007) çift fuzzy sayı dizilerinin ${}_2\ell_F^p$ uzayını tanımladılar ve uzayın tamlık, solid olma, simetri gibi birçok özelliklerini incelediler. Gökhan, Çolak ve Mursaleen (2009) $(\mathcal{C}_{bp0}(t) : \mathcal{C}_{p0}(t))$, $(\mathcal{C}_{bp0}(t) : \mathcal{C}_{bp0}(t))$, $(\mathcal{C}_{bp}(t) : \mathcal{C}_{p0}(t))$, $(\mathcal{M}_u(t) : \mathcal{C}_{p0}(t))$ ve $(\mathcal{M}_u(t) : \mathcal{C}_{bp0}(t))$ matris sınıflarını karakterize ettiler. Tripathy ve Sarma (2009) Orlicz fonksiyonu yardımı ile bazı vektör değerli çift dizi uzaylarını tanımladılar ve tanımladıkları uzayların bazı özelliklerini ve birbirleri ile ilişkilerini verdiler. Başar ve Sever (2009) $1 \leq s < \infty$ değerleri için mutlak $s-$toplanabilir çift dizilerin $\mathcal{L}_s$ Banach uzayını tanımlayarak bazı özelliklerini incelediler.

Karaev ve Zeltser (2010), çift diziler için Abel toplanabilirlik kavramını verdiler. Subramanian ve Misra (2010), asal manada çift analitik fark dizilerinin ve asal manada çift gai fark dizilerinin uzaylarını tanımladılar ve uzayların birbirleri ile ilişkilerini verdiler. Savaş ve Patterson (2011) modülüs fonksiyonu yardımı ile yeni çift dizi uzayları inşa ettiler ve uzayların birbirleri ile ilişkilerini incelediler. Alotaibi ve Çakan (2012) çift dizilerin Riesz yakınsak ve Riesz çekirdek kavramlarını tanımlayarak $\forall x \in \mathcal{M}_u$ için $P_R - core\{Ax\} \subseteq P - core\{x\}$ ve $P_R - core\{Ax\} \subseteq st_2 - core\{x\}$ kapsamlarının geçerli olması için dört boyutlu A matrisi üzerindeki gerek ve yeter şartları verdiler. Mursaleen ve Başar (2014), birinci mertebeden Cesàro ortalamaları sırası ile $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_s$ uzaylarında olan $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{p0}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzaylarını tanımlayarak incelediler.

Tek dizi ve seri uzaylarına hasredilen çok geniş bir literatür bulunmakla beraber çift dizi ve serilerle çalışmanın büyük zorlukları olması sebebiyle bu konuda fazla araştırma yapılmamış olup, bakir bir alan olarak araştırmacıları beklemektedir. Tek dizilerin klâsik uzaylarının çeşitli üçgen matrisler altındaki etki alanları incelenerek pek çok yeni dizi uzayı literatüre kazandırıldığı halde benzer çalışmalar çift dizi uzayları bakımından neredeyse yapılmamıştır diyebiliriz. Bu sebeple; Riesz ortalaması sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, Pringsheim manada yakınsak ve sınırlı, regüler manada yakınsak ve mutlak $s-$toplanabilir çift dizilerin

$$\begin{aligned}
R^{qt}(\mathcal{M}_u) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : R^{qt}x\in\mathcal{M}_u\right\},\\
R^{qt}(\mathcal{C}_p) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : R^{qt}x\in\mathcal{C}_p\right\},\\
R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : R^{qt}x\in\mathcal{C}_{bp}\right\},\\
R^{qt}(\mathcal{C}_r) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : R^{qt}x\in\mathcal{C}_r\right\},\\
R^{qt}(\mathcal{L}_s) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : R^{qt}x\in\mathcal{L}_s\right\}, (0<s<\infty),
\end{aligned}$$

uzaylarını tanımlayarak bu uzayların cebirsel ve topolojik özelliklerini araştıracağız.

Çalışmamız boyunca; çift dizilerle ilgili uygun terminoloji için, Başar (2012) ile Mursaleen ve Mohiuddine (2014) çalışmalarına bağlı kalacağız.

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilecektir.

2.1 Çift Dizilerde Yakınsaklık Çeşitleri ve Bazı Çift Dizi Uzayları

Tanım 2.1. *X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to X \\ (k,l) &\to f(k,l)=x_{kl} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna X-değerli bir çift dizi denir.

Ω ile kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin cümlesi gösterilir. Bu cümle, her $\alpha\in\mathbb{C}$ ve her $x=(x_{kl}), y=(y_{kl})\in\Omega$ için $\alpha x=(\alpha x_{kl})$ ve $x+y=(x_{kl}+y_{kl})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır ve herhangi bir alt uzayı *çift dizi uzayı* olarak adlandırılır.

$x=(x_{kl})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere $\sup\limits_{k,l\in\mathbb{N}}|x_{kl}|<\infty$ ise x dizisine *sınırlıdır* denir (Móricz ve Rhoades 1988). Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesi, $\mathcal{M}_u$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\mathcal{M}_u:=\left\{x=(x_{kl})\in\Omega:\|x\|_\infty=\sup_{k,l\in\mathbb{N}}|x_{kl}|<\infty\right\}$$

olup, uzayın $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzay olduğunu Móricz'in 1991 yılına ait çalışmasından biliyoruz.

Tek dizilerdeki durumun aksine, çift dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı mevcuttur. En çok çalışılan yakınsaklık türleri Pringsheim manada ve regüler manada yakınsaklıktır.

Verilen her $\varepsilon>0$ için $k,l>n_0$ olduğunda $|x_{kl}-a|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcut ise, reel ya da kompleks terimli $x=(x_{kl})$ çift dizisine, $a\in\mathbb{C}$ sayısına *Pringsheim manada yakınsak* ve a değerine de x dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim manada yakınsak bir $x=(x_{kl})$ dizisine kısaca $p-$*yakınsak* dizi denir ve limiti $p-\lim\limits_{k,l\to\infty}x_{kl}=a$ ile gösterilir (Pringsheim 1900). Pringsheim manada yakınsak dizilerin cümlesi $\mathcal{C}_p$ ile gösterilir, yani

$$\mathcal{C}_p:=\{x=(x_{kl})\in\Omega:\exists a\in\mathbb{C}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall k,l\geq n_0\ ,|x_{kl}-a|<\varepsilon\}$$

şeklinde ifade edilir. $\mathcal{C}_p$ cümlesi, çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında lineer uzay olup,

$$\|x\|_P = \lim_{N\to\infty}\left[\sup_{k,l\geq N}|x_{kl}|\right]$$

yarınomu ile bir tam yarınomlu uzay teşkil ettiği, Móricz (1991) tarafından gösterildi.

Pringsheim manada yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmak zorunda değildir. Boos (2000)'de verilen $x = (x_{kl})$ dizisini

$$x_{kl} := \begin{cases} l & , \quad k = 0,\ l \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \quad k \geq 1,\ l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Açıkça x dizisi sınırlı değildir. Fakat $p-$limiti mevcut ve sıfırdır.

$\mathcal{C}_{bp}$ cümlesi ile Pringsheim manada yakınsak ve sınırlı çift dizilerin uzayı gösterilir. Yani,

$$\mathcal{C}_{bp} := \left\{x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_p : \|x\|_\infty = \sup_{k,l\in\mathbb{N}}|x_{kl}| < \infty\right\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$$

ile tanımlanır.

Pringsheim manada a noktasına yakınsak olmasına ek olarak her $l \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{k\to\infty} x_{kl}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{l\to\infty} x_{kl}$ limitleri mevcut olan $x = (x_{kl})$ dizisine, a noktasına regüler yakınsak denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{kl})$ dizisi için $\lim\limits_{l\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} x_{kl}$ ve $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{l\to\infty} x_{kl}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittir. Regüler yakınsak dizilerin cümlesi $\mathcal{C}_r$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{C}_r := \{x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_p : \forall k, l \in \mathbb{N} \text{ için } (x_{kl})_k, (x_{kl})_l \in c\}$$

ile tanımlanır. Burada c ile yakınsak tek dizilerin uzayı ve $(x_{kl})_l \in c$ ile dizinin l indisine göre yakınsaklığı gösterilmektedir.

Móricz (1991) tarafından, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_{r0}$ (sıfıra $r-$yakınsak dizilerin uzayı) cümlelerinin $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzay teşkil ettiği gösterildi.

Tek diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramı Lorentz (1948) tarafından verildi. Çift diziler için ise Móricz ve Rhoades (1988) tarafından "Bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi,

$$p - \lim_{q,r\to\infty}\left|\frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+r} x_{kl} - L\right| = 0,$$

m, n'ye göre düzgün, eşitliğini sağlayan bir L değeri mevcut ise L değerine hemen hemen yakınsaktır." şeklinde verildi. Bu durumda; L değerine, x dizisinin f_2-limiti denir. Hemen

hemen yakınsak çift dizilerin uzayı, $\mathcal{C}_f$ ile gösterilir. Yakınsak bir çift dizi, hemen hemen yakınsak olmak zorunda değildir. Ancak sınırlı yakınsak her çift dizi hemen hemen yakınsaktır ve hemen hemen yakınsak her çift dizi sınırlıdır. Yani $\mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{C}_f \subset \mathcal{M}_u$ kesin kapsamaları mevcuttur (Mursaleen 2004).

Benzer şekilde, tek diziler için kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı Maddox (1978) tarafından, çift diziler için ise Başarır (1995) tarafından "Bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi,

$$p - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)} \sum_{k=m}^{m+q} \sum_{l=n}^{n+r} |x_{kl} - L| = 0,$$

m, n'ye göre düzgün, eşitliğini sağlayan bir L değeri mevcut olması halinde L limit değerine kuvvetli hemen hemen yakınsaktır" şeklinde verildi. Kuvvetli hemen hemen yakınsak çift dizilerin uzayı, $[\mathcal{C}_f]$ ile gösterilir. $[\mathcal{C}_f] \subset \mathcal{C}_f$ kesin kapsaması mevcuttur.

Boos vd. (1997) Pringsheim manada yakınsaklıktan daha zayıf olan çift dizilerin a noktasına $e-$yakınsaklığını,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists l_0 \in \mathbb{N} \ \forall l \geq l_0 \ \exists k_l \in \mathbb{N} : \ k \geq k_l \Rightarrow \ |x_{kl} - a| \leq \varepsilon$$

şeklinde tanımladılar. Her $l \in \mathbb{N}$ için $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{kl}|$ değeri sonlu olmak üzere $e-$yakınsak bir $x = (x_{kl})$ dizisine *be−yakınsak* ve her $l \in \mathbb{N}$ için $\lim_{k\to\infty} x_{kl}$ limiti mevcut olmak üzere $e-$yakınsak bir $x = (x_{kl})$ dizisine *c−yakınsak* denir. Bu durumda; $e-$yakınsak dizilerin cümlesi

$$\mathcal{C}_e \ := \ \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \exists a \in \mathbb{C} \text{ için} \lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}} |x_{kl} - a| = 0 \right\},$$

$be-$yakınsak dizilerin cümlesi

$$\mathcal{C}_{be} := \left\{ x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_e : \forall l \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{kl}| < \infty \right\}$$

ve $c-$yakınsak dizilerin cümlesi

$$\mathcal{C}_c := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \exists \alpha \in \mathbb{C} \text{ öyle ki } \mathcal{C}_c - \lim x = \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} x_{kl} = \alpha \right\}$$

biçimindedir. Boos vd. (1997) çalışmasında, $c-$yakınsaklığın $SM-$metod teorisinin asıl aracı olduğunu görebiliriz.

Başarır ve Sonalcan (1999), tek diziler için Das ve Sahoo (1992) tarafından tanımlanan uzayların çift diziler bakımından karşılıklarını verdiler.

Herhangi bir ϑ yakınsaklık kavramı için, $\vartheta-$yakınsak çift dizilerin uzayı $\mathcal{C}_\vartheta$ ile ve $\vartheta-$yakınsak x çift dizisinin limiti $\vartheta-\lim\limits_{k,l\to\infty} x_{kl}$ ile gösterilir. $\mathcal{C}_{\vartheta 0}$ ile de sıfıra $\vartheta-$yakınsak çift dizilerin uzayı gösterilir.

$p-$yakınsaklığa benzer olarak $e-$, $be-$ ve $c-$yakınsak bir çift dizi de sınırlı olmak zorunda değildir. Bu durum; $\vartheta \in \{p, e, be, c\}$ olmak üzere, $\vartheta-$yakınsak bir dizinin kendine özgü sınırlılığı olması düşüncesini doğurmuştur. Genel olarak, bir $x = (x_{kl})$ çift dizinin sınırlılığı düzgün sınırlılık, yani x dizisinin $\mathcal{M}_u$ uzayına ait olması anlamındadır. Bu durum, $bp-$ ve $r-$yakınsaklık için tabii bir sınırlılık tanımıdır.

Yukarıda tanımlanan yakınsaklık çeşitlerinin kendilerine özgü sınırlılık tanımları Zeltser (2001b) tarafından doktora tezinde;

Tanım 2.2. $x = (x_{kl})$ *çift dizisine;*

(1) eğer $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sup\limits_{k,l\geq n} |x_{kl}| < \infty$ *ise* $p-$*sınırlıdır denir.*

(2) eğer $\overline{\lim\limits_{l\to\infty}}\ \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |x_{kl}| < \infty$ *ise* $e-$*sınırlıdır denir.*

(3) eğer $\sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \overline{\lim\limits_{k}} |x_{kl}| < \infty$ *ise* $be-$*sınırlıdır denir.*

(4) eğer $\sup\limits_{l\in\mathbb{N}} |\lim\limits_{k\to\infty} x_{kl}| < \infty$ *ise* $c-$*sınırlıdır denir.*

olarak verildi.

Móricz (2003), Mursaleen ve Edely (2004) çift diziler için istatiksel yakınsaklık tanımını "$x = (x_{kl})$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$p-\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} |\{k \leq m, l \leq n : |x_{kl} - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise; *x dizisi, l değerine istatiksel yakınsaktır* denir ve $st_2 - \lim x_{kl} = l$ yazılır." şeklinde verdiler. Bir çift dizi Pringsheim manada yakınsak ise istatiksel yakınsaktır. Ayrıca x dizisi l değerine istatistiksel yakınsak ise bu l değeri tektir ve dizi Pringsheim manada yakınsak ya da sınırlı olmak zorunda değildir (Edely ve Mursaleen 2006).

Tripathy ve Tripathy (2005) çift diziler için $\mathcal{I}-$yakınsaklık kavramını "$\mathcal{I}_2$, $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$'nin bir ideali olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |x_{kl} - \ell| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$ ise $x = (x_{kl})$ dizisine l değerine Pringsheim manada $\mathcal{I}-$yakınsaktır denir." şeklinde verdiler.

$\mathbf{e^{kl}}$ çift dizisi

$$e_{ij}^{kl} := \begin{cases} 1 & , \quad (k,l) = (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.1}$$

olmak üzere Φ uzayı

$$\Phi = span\{\mathbf{e^{kl}} : k, l \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde tanımlanır. Genel olarak gözönüne alınan çift dizi uzayları, Φ uzayını kapsarlar.

$m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir $x = (x_{kl})$ çift dizisinin $x^{[m,n]}$ $m.$, $n.$kısımları,

$$x^{[m,n]} := \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} x_{kl} e^{kl}$$

olarak tanımlanır ve Φ'nin elemanıdırlar.

Türkmenoğlu (1993), Gökhan ve Çolak (2004, 2005, 2006), $t = (t_{kl})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_u(t) &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sup_{k,l \geq 0} |x_{kl}|^{t_{kl}} < \infty \right\}, \\
\mathcal{C}_p(t) &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \exists L \in \mathbb{C} \ni p - \lim_{m,n \to \infty} |x_{kl} - L|^{t_{kl}} = 0 \right\}, \\
\mathcal{C}_{p0}(t) &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : p - \lim_{k,l \to \infty} |x_{kl}|^{t_{kl}} = 0 \right\}, \\
\mathcal{L}_u(t) &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l=0}^{\infty} |x_{kl}|^{t_{kl}} < \infty \right\}, \\
\mathcal{C}_{bp}(t) &:= \mathcal{C}_p(t) \cap \mathcal{M}_u(t) \text{ ve } \mathcal{C}_{bp0}(t) := \mathcal{C}_{p0}(t) \cap \mathcal{M}_u(t).
\end{aligned}$$

uzaylarını tanımladılar ve bazı şartlar altında bu cümlelerin tam paranormlu uzay olduklarını gösterdiler. Ayrıca, bu uzayların duallerini tanımlayıp uzayların birbirleri ile kapsama bağıntılarını incelediler. Özel olarak, bütün $k, l \in \mathbb{N}$'ler için $t_{kl} = 1$ alınırsa $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_p(t)$, $\mathcal{C}_{p0}(t)$, $\mathcal{L}_u(t)$, $\mathcal{C}_{bp}(t)$ ve $\mathcal{C}_{bp0}(t)$ uzayları, sırası ile, $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$, $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_{bp0}$ uzaylarına indirgenir. Burada; $\mathcal{L}_u$ ile mutlak yakınsak çift serilerin uzayı gösterilmektedir.

Başar ve Sever (2009) tarafından $1 \leq s < \infty$ için mutlak $s-$toplanabilir çift dizilerin $\mathcal{L}_s$ uzayı,

$$\mathcal{L}_s := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l} |x_{kl}|^s < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlandı. Ayrıca, $\mathcal{L}_s$ uzayının $\|x\|_s = \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|^s\right)^{1/s}$ normu ile bir Banach uzay olduğu ifade edilerek bazı topolojik özellikleri incelendi.

Karaev ve Zeltser (2010): "Bir $a = (a_{mn})$ çift dizisi verilsin. Eğer bütün $x, y \in (0,1)$ değerleri için $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ serisi yakınsak ve

$$\lim_{(x,y)\to(1^-,1^-)} (1-x)(1-y)\sum_{m,n} a_{mn}x^m y^n = l$$

ise a dizisine l değerine *Abel toplanabilirdir.*" tanımı ile birlikte klâsik Abel teoremini çift diziler için verdiler.

Mursaleen ve Mohiuddine (2012), $\mathcal{M}_u$ uzayı üzerindeki *Banach limiti* kavramını verdiler ve Das ve Sahoo (1992) tarafından ortaya konan bazı sonuçların çift diziler bakımından karşılıklarını verdiler. Başarır ve Konca (2012), çift-lakunary dizi uzaylarını tanımladılar.

Bir $x = (x_{kl})$ çift dizisinin birinci mertebeden Cesàro toplanabilirliği,

$$p - \lim_{m,n\to\infty} (C_1 x)_{mn} = p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k,l=0}^{m,n} x_{kl}$$

limitinin varlığı ile tanımlanır. Burada $C_1 = (c_{mnkl})$ matrisi, bütün $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$c_{mnkl} := \begin{cases} \frac{1}{(m+1)(n+1)} & , \quad 0 \le k \le m, \ 0 \le l \le n, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. Doğrudan bir hesaplama ile birinci mertebeden Cesàro ortalamasının C_1 matrisinin $C_1^{-1} = (d_{mnkl})$ tersinin bütün $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$d_{mnkl} := \begin{cases} (-1)^{m+n-(k+l)}(k+1)(l+1) & , \quad m-1 \le k \le m, n-1 \le l \le n, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğu görülür.

Sever (2012) birinci mertebeden Cesàro regüler yakınsak çift dizilerin Ces_r cümlesini

$$Ces_r := \{x = (x_{kl}) \in \Omega : C_1 x \in \mathcal{C}_r\}$$

olarak tanımladı, uzayın bazı özelliklerini ortaya koydu ve $\beta(r)-$dualini tayin etti.

Negatif olmayan reel sayıların $q = (q_k)$ ve $t = (t_l)$ dizileri yardımıyla $q_0, t_0 > 0$ olmak üzere, $Q_m = \sum_{k=0}^{m} q_k$ ve $T_n = \sum_{l=0}^{n} t_l$ tanımlayalım. Bu durumda; $q = (q_k)$ ve $t = (t_l)$

dizilerine bağlı olarak R^{qt} Riesz ortalaması, $R^{qt}=(r^{qt}_{mnkl})$ matrisi ile tanımlanır. Burada; $R^{qt}=(r^{qt}_{mnkl})$ matrisi, bütün $m,n,k,l\in\mathbb{N}$'ler için

$$r^{qt}_{mnkl}:=\begin{cases}\frac{q_k t_l}{Q_m T_n} & , \ 0\le k\le m,\ 0\le l\le n,\\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{2.2}$$

eşitliği ile verilmektedir. Hesaplamalar sonucunda R^{qt} matrisinin $(R^{qt})^{-1}=D^{qt}=(d^{qt}_{mnkl})$ tersi, bütün $m,n,k,l\in\mathbb{N}$ değerleri için

$$d^{qt}_{mnkl}:=\begin{cases}(-1)^{m+n-(k+l)}\frac{Q_k T_l}{q_m t_n} & , \ m-1\le k\le m,\ n-1\le l\le n,\\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak bulunur.

Alotaibi ve Çakan (2012): "Bir $x=(x_{kl})$ çift dizisinin R^{qt}-Riesz dönüşümü, her $m,n\in\mathbb{N}$ için

$$y_{mn}:=(R^{qt}x)_{mn}=\frac{1}{Q_m T_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $p-\lim(R^{qt}x)_{mn}=\alpha$ ise $x=(x_{kl})$ dizisine *α değerine Riesz yakınsaktır* denir." tanımını verdiler. Bütün $k,l\in\mathbb{N}$ değerleri için $q_k=t_l=1$ alınırsa R^{qt} Riesz ortalaması, dört boyutlu birinci mertebeden C_1 Cesàro ortalamasına indirgenir.

Mursaleen ve Başar (2014) birinci mertebeden Cesàro ortalaması, sırası ile $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_s$ uzayında olan dizilerin $\widetilde{\mathcal{M}_u}$, $\widetilde{\mathcal{C}_p}$, $\widetilde{\mathcal{C}_{p0}}$, $\widetilde{\mathcal{C}_{bp}}$, $\widetilde{\mathcal{C}_r}$ ve $\widetilde{\mathcal{L}_s}$ uzaylarını tanımlayarak bu uzayların, Banach uzay olduklarını gösterdiler. $\widetilde{\mathcal{M}_u}$ uzayının $\alpha-$dualini, $\widetilde{\mathcal{C}_r}$ uzayının $\beta(bp)-$dualini ve $\vartheta,\eta\in\{p,bp,r\}$ olmak üzere $\widetilde{\mathcal{C}_\eta}$ uzayının $\beta(\vartheta)-$dualini elde ettiler. Ayrıca, $\vartheta\in\{p,bp,r\}$ ve μ herhangi bir çift dizi uzayı olmak üzere $(\widetilde{\mathcal{C}_{bp}},\mathcal{C}_\vartheta)$ ve $(\mu,\widetilde{\mathcal{C}_\vartheta})$ matris sınıflarını karakterize eden teoremleri verdiler.

λ herhangi bir çift dizi uzayı olsun. Uzayın λ^α *alfa-duali*, λ^γ *gama-duali* ve $\lambda^{\beta(\vartheta)}$ ϑ-yakınsaklığa bağlı olan *beta(vartheta)-duali*, sırası ile

$$\lambda^\alpha:=\left\{(a_{kl})\in\Omega:\ \text{her } (x_{kl})\in\lambda \text{ için } \sum_{k,l}|a_{kl}x_{kl}|<\infty\right\},$$

$$\lambda^\gamma:=\left\{(a_{kl})\in\Omega:\ \text{her } (x_{kl})\in\lambda \text{ için } \sup_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k,l=0}^{m,n}a_{kl}x_{kl}\right|<\infty\right\},$$

$$\lambda^{\beta(\vartheta)}:=\left\{(a_{kl})\in\Omega:\ \text{her } (x_{kl})\in\lambda \text{ için } \vartheta-\sum_{k,l}a_{kl}x_{kl} \text{ mevcut}\right\}$$

olarak tanımlanır. λ ve μ çift dizi uzayları için $\lambda \subset \mu$ olduğunda $\mu^\alpha \subset \lambda^\alpha$ ve $\lambda^\alpha \subset \lambda^\gamma$ kapsamaları mevcut ve ayrıca, $\lambda^\alpha \subset \lambda^{\beta(\vartheta)}$ kapsaması geçerlidir. Pozitif reel terimli olmayan yakınsak bir çift serinin kısmî toplamlar dizisi sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten genel terimi,

$$x_{kl} := \begin{cases} 1 & , \ k = 0, \ l \in \mathbb{N}, \\ -1 & , \ k = 1, \ l \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \ k \geq 2, \ l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ile verilen $\sum_{k,l} x_{kl}$ serisi yakınsak fakat kısmî toplamlar dizisi sınırlı değildir Robison (1926). Dolayısıyla, bir çift serinin kısmî toplamlar dizisinin $\vartheta-$yakınsaklığı sınırlılığını gerektirmemektedir. O hâlde, $\lambda^{\beta(\vartheta)} \subset \lambda^\gamma$ kapsaması daima geçerli değildir.

Tanım 2.3. *λ_1 ve λ_2, $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki iki lineer uzay olsunlar. Her $(x, y) \in \lambda_1 \times \lambda_2$ çifti için tanımlı*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \lambda_1 \times \lambda_2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyoneli;

(1) Bilineerdir, yani; bütün $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ skalarları $x, x_1, x_2 \in \lambda_1$ ve $y, y_1, y_2 \in \lambda_2$ vektörleri için

$$\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x, y_2 \rangle$$
$$\langle \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, y \rangle = \beta_1 \langle x_1, y \rangle + \beta_2 \langle x_2, y \rangle.$$

(2) (i) Bütün $y \in \lambda_2$'ler için $\langle x, y \rangle = 0$ ise $x = \theta$

(ii) Bütün $x \in \lambda_1$'ler için $\langle x, y \rangle = 0$ ise $y = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, λ_1 ve λ_2 uzayları dualdir denir.

(1) şartı, bir $y \in \lambda_2$ elemanının, λ_1 uzayının λ_1^* cebirsel dualinde bir fonksiyonel tanımladığını ifade eder. Farklı y elemanlarının farklı fonksiyoneller belirteceği açıktır.

(2) (ii) şartı, λ_2 uzayının λ_1^* cebirsel dualinin bir alt uzayı olduğunu gösterir.

λ çift dizi uzayı Φ alt uzayını kapsıyorsa, $\beta(\vartheta)-$duali olan $\lambda^{\beta(\vartheta)}$ uzayı ile

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \lambda \times \lambda^{\beta(\vartheta)} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, a) &\rightarrow \vartheta - \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl} \end{aligned}$$

bilineer formu altında $\langle \lambda, \lambda^{\beta(\vartheta)} \rangle$ dual çiftini teşkil ederler (Zeltser 2001c).

Tanım 2.4. *$A = (a_{mnkl})$ kompleks ya da reel değerli dört boyutlu bir sonsuz matris ve ϑ herhangi bir yakınsaklık türü olsun. Şimdi,*

$$\Omega_A^{(\vartheta)} := \left\{ x \in \Omega : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } [Ax]_{mn} = \vartheta - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \quad \text{mevcut} \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. Bu durumda;

$$A : \Omega_A^{(\vartheta)} \to \Omega, \ x \mapsto Ax := ([Ax]_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$$

dönüşümüne, $\vartheta-$tipi bir matris dönüşümü denir.

$A = (a_{mnkl})$ kompleks ya da reel değerli dört boyutlu bir sonsuz matris, λ bir çift dizi uzayı ve ϑ bir yakınsaklık türü olsun. Bu durumda; ϑ yakınsaklık türüne göre $A-$dönüşümü λ uzayında yatan x dizilerinin cümlesi, *A matrisinin λ uzayındaki ϑ yakınsaklığa göre etki alanı* olarak bilinir ve $\lambda_A^{(\vartheta)}$ ile gösterilir. Yani,

$$\lambda_A^{(\vartheta)} := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega_A^{(\vartheta)} : Ax \in \lambda \right\}.$$

2.2 Çift Serilerin Yakınsaklığı ve Çift Seri Uzayları

Bu kısımda; çift serilerle ilgili lüzumlu kavramlardan bahsedecek ve kullanacağımız çift seri uzaylarını tanıtacağız.

Tanım 2.5. *$x = (x_{kl})$ dizisi verilmiş olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $s = (s_{mn})$ dizisini,*

$$s_{mn} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} x_{kl}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda; (x, s) ikilisine bir çift seri denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin kısmî toplamlar dizisi denir. Eğer (s_{mn}) kısmî toplamlar dizisi bir a sayısına $\vartheta-$yakınsak, yani $\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} s_{mn} = a$ ise o zaman, (x, s) serisi $\vartheta-$yakınsaktır ve serinin $\vartheta-$toplamı a sayısıdır denir. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir.

Genel terimi x_{mn} olan yakınsak serinin toplamı α ise o zaman, $\sum_k \sum_l x_{kl} = \alpha$ yazılır. İster yakınsak ister ıraksak olsun, x_{mn} genel terimli seri, $\sum_{k,l} x_{kl}$ ile gösterilir.

$\sum_k \sum_l x_{kl}$ ve $\sum_l \sum_k x_{kl}$ serilerine, *sıralı seriler* denir. Sıralı seriler, aynı toplama sahip olmak zorunda değildir. Meselâ $x = (x_{kl})$ çift dizisini

$$x_{kl} := \begin{cases} 1 & , \quad k = l + 1, l \in \mathbb{N}, \\ -1 & , \quad k = l - 1, l \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak aldığımız zaman $\sum\limits_{k}\sum\limits_{l}x_{kl} = -1$ ve $\sum\limits_{l}\sum\limits_{k}x_{kl} = 1$ olduğunu görürüz (Apostol 1974).

Tanım 2.6. $\sum\limits_{k,l}|x_{kl}|$ *serisi yakınsak ise,* $\sum\limits_{k,l}x_{kl}$ *kompleks terimli serisine mutlak yakınsaktır denir.*

Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı, $\mathcal{L}_u$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{L}_u := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \|x\|_1 = \sum_{k,l} |x_{kl}| < \infty \right\}.$$

Iyer (1985), çift seriler için aşağıdaki teoremi vermiştir:

Teorem 2.7. *Aşağıdaki önermeler geçerlidir:*

(i) Mutlak yakınsak bir çift seri yakınsaktır.

(ii) Pozitif reel terimli bir çift serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart, kısmî toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır.

(iii) Reel terimli (a_{kl}) ve (b_{kl}) dizilerini gözönüne alalım. Bütün $k, l \in \mathbb{N}$ değerleri için $0 \leq a_{kl} \leq b_{kl}$ ve $\sum\limits_{k,l}b_{kl}$ serisi yakınsak ise bu durumda $\sum\limits_{k,l}a_{kl}$ serisi de yakınsaktır ve $\sum_{k,l} a_{kl} \leq \sum_{k,l} b_{kl}$ eşitsizliği geçerlidir.

Altay ve Başar (2005) çalışmalarında; $t = (t_{mn})$ pozitif terimli bir dizi ve $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{BS} &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |s_{mn}| < \infty \right\}, \\
\mathcal{BS}(t) &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |s_{mn}|^{t_{mn}} < \infty \right\}, \\
\mathcal{CS}_\vartheta &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : (s_{mn}) \in \mathcal{C}_\vartheta \right\}, \\
\mathcal{BV} &:= \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l} |x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1}| < \infty \right\}
\end{aligned}$$

seri uzaylarını tanımlayıp, uzayların bazı özelliklerini incelediler ve söz konusu uzayların $\alpha-$ ve $\beta(\vartheta)-$duallerini verdiler. Ayrıca $(\mathcal{CS}_{bp} : \mathcal{C}_p)$, $(\mathcal{CS}_r : \mathcal{C}_p)$, $(\mathcal{CS}_r : \mathcal{C}_r)$ ve $(\mathcal{CS}_p : \mathcal{C}_p; p)$ matris sınıflarını karakterize ettiler.

$s = (s_{mn})$ dizisi, $\sum_{k,l} x_{kl}$ çift serisinin kısmî toplamlar dizisi olsun. Limaye ve Zeltser (2009) referans alınarak bir $\sum_{k,l} x_{kl}$ çift serisinin birinci mertebeden Cesàro toplanabilirliği

$$p - \lim_{m,n\to\infty} (C_1 s)_{mn} = p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k,l=0}^{m,n} s_{kl}$$

limitinin varlığı ile tanımlanır. Benzer şekilde bir $\sum_{k,l} x_{kl}$ çift serisinin Riesz toplanabilirliği de Alotaibi ve Çakan (2012) takip edilerek

$$p - \lim_{m,n\to\infty} (R^{qt} s)_{mn} = p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k t_l s_{kl}$$

limitinin varlığı ile tanımlanır.

Şimdi, çalışmamız boyunca kullanacağımız tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 2.8. *$x = (x_{kl})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n, k, l > n_0$ olduğunda $|x_{mn} - x_{kl}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa o zaman x dizisi, bir Cauchy dizisidir denir (Burkill ve Burkill 1980).*

Tanım 2.9. *X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere*

$$\begin{array}{cccll} f & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ & & (k,l) & \longrightarrow & f(k,l) = x_{kl} \end{array}$$

dizisi verilmiş olsun. Bu durumda;

$$\begin{array}{cccll} k & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & i & \longrightarrow & k(i) = k_i \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{cccll} l & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & j & \longrightarrow & l(j) = l_j \end{array}$$

kesin artan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{array}{cccll} h & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & & (k,l) & \longrightarrow & h(k,l) = (k_i, l_j) \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda;

$$\begin{array}{rcccl} f \circ h & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ & & (k,l) & \longrightarrow & (f \circ h)(k,l) = x_{k_i l_j} \end{array}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{kl}) *dizisinin bir alt dizisi denir (Altay 2002).*

Bu çalışmada, Altay (2002) tarafından Tanım 2.9 ile verilen alt dizi tanımı esas alınacaktır.

Tanım 2.10. *Her* $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ *için* $k > m$ *veya* $l > n$ *veya her iki durum söz konusu olduğunda* $a_{mnkl} = 0$ *ise dört boyutlu* $A = (a_{mnkl})$ *matrisine üçgenvari matris denir (Adam 1933).*

Tanım 2.11. *Her* $m, n \in \mathbb{N}$ *için* $a_{mnmn} \neq 0$ *olan dört boyutlu* $A = (a_{mnkl})$ *üçgenvari matrisine üçgen matris denir. Cooke (1950)'ye dayanarak dört boyutlu bir üçgen matrisin birtek terse sahip olduğu ve tersinin de üçgen olduğunu söyleyebiliriz (Yeşilkayagil ve Başar).*

Tanım 2.12. λ *bir çift dizi uzayı olsun. Eğer*

$$\widetilde{\lambda} := \{(u_{kl}) \in \Omega : \text{ her } k, l \in \mathbb{N} \text{ için } |u_{kl}| \leq |x_{kl}| \text{ olacak şekilde } \exists (x_{kl}) \in \lambda\} \subset \lambda$$

kapsaması mevcut ise, λ *uzayına solid denir (Başar ve Sever 2009).*

Tanım 2.13. *Her* $x \in \lambda$ *ve* $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ *dizileri için* $xy = (x_{kl} y_{kl}) \in \lambda$ *ise,* λ *çift dizi uzayına monotondur denir (Zeltser 2001c).*

$\vartheta \in \{p, bp, r, e, be, c\}$ olmak üzere monoton bir çift dizi uzayının $\alpha-$ ve $\beta(\vartheta)-$dualleri çakışıktır ve λ çift dizi uzayı solid ise monotondur (Zeltser 2001c).

Tanım 2.14. *Bir topolojik vektör uzayında sıfırın her komşuluğu sıfırın bir konveks komşuluğunu içeriyorsa uzaya lokal konveks uzay denir (Wilansky 1978).*

Tanım 2.15. λ, $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde bir lineer uzay ve* $A \subset \lambda$ *olsun. Bu durumda; A cümlesinin*

(i) mutlak konveks olması için gerek ve yeter şart; $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ *olan bütün* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *skalarları için* $\alpha A + \beta A \subset A$ *olmasıdır.*

(ii) absorbing olması için gerek ve yeter şart; bütün $\alpha \in \mathbb{C}$ skalarları için $|\alpha| \geq \beta$ olan en az bir $\beta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $x \in \lambda$ vektörü için $x \in \alpha A$ olmasıdır (Boos 2000).

Tanım 2.16. *λ bir lokal konveks uzay olsun. Eğer λ uzayının bir alt cümlesi uzayda mutlak konveks, absorbing ve kapalı ise barrel olarak adlandırılır. Uzaydaki her barrel sıfırın bir komşuluğu ise λ uzayına barrelled uzay denir (Boos 2000).*

Yardımcı Teorem 2.17. *Her Banach uzay ve her Fréchet uzay bir barrelled uzaydır (Schaefer 1986).*

Tanım 2.18. *λ bir lokal konveks dizi uzayı olsun. Eğer her $k, l \in \mathbb{N}$ için $r_{kl} : \lambda \to \mathbb{R}$, $x = (x_{kl}) \mapsto |x_{kl}|$ yarınormları sürekli iseler λ uzayına bir DK-uzay denir. Fréchet topolojisine sahip DK-uzaya FDK-uzay ve normlu bir FDK-uzaya da BDK-uzay denir (Zeltser 2001b).*

$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}_r \to \mathbb{R}$, $x = (x_{kl}) \mapsto \sup_{k,l\in\mathbb{N}} |x_{kl}|$ normu ile donatılan $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{M}_u$ uzayları birer BDK-uzaydırlar.

$$q_n(y) := \sup_{m\in\mathbb{N}} |y_{mn}| \ (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{ve} \qquad q(y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\overline{\lim_{m\to\infty}} y_{mn}|,$$

yarınormlarının $\{q\} \cup \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi, $\mathcal{C}_c$ ve $\mathcal{C}_{be}$ uzaylarının FDK-topolojisini tanımlar (Boos vd. 1997). Ayrıca, $\mathcal{C}_c$ ve $\mathcal{C}_r$ FDK-uzayları ayrılabilir uzaylardır (Zeltser 2001b).

$\mathbf{e^{kl}}$ dizisi, (2.1) bağıntısındaki gibi tanımlı olsun ve bütün $k, l, m, n \in \mathbb{N}$'ler için $\mathbf{e^{l}} := \sum_k \mathbf{e^{kl}} (l \in \mathbb{N})$, $\mathbf{e_k} := \sum_l \mathbf{e^{kl}} (k \in \mathbb{N})$ ve $\mathbf{e} := \sum_{k,l} \mathbf{e^{kl}}$ (koordinatsal yakınsak) olmak üzere $\{\mathbf{e^{kl}}, \mathbf{e_k}, \mathbf{e^{l}}, \mathbf{e}\}$ ve $\{\mathbf{e^{kl}}, \mathbf{e^{l}}, \mathbf{e}\}$ cümleleri, sırası ile, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_c$ uzaylarının temel cümleleridirler (Zeltser 2002).

Yardımcı Teorem 2.19. *(X, p) bir yarınormlu uzay ve q da X üzerinde bir yarınorm olsun. O hâlde, aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) q süreklidir.

(b) q sıfır noktasında süreklidir.

(c) Her $x \in X$ için $q(x) \leq Mp(x)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $M > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.20. *$A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olsun. $\mathcal{C}_\vartheta \subset (\mathcal{C}_\vartheta)_A$ kapsaması mevcut ise, A bir $\mathcal{C}_\vartheta-$yapıyı koruyan matristir denir. A matrisi, $\mathcal{C}_\vartheta-$yapıyı koruyan bir matris olmasına ilâve olarak limiti de koruyorsa A bir $\mathcal{C}_\vartheta-$regüler matristir denir (Boos 2000).*

Yardımcı Teorem 2.21. *Bir $FK-$uzayının ℓ_∞ uzayını kapsaması için gerek ve yeter şart 0 ve 1'lerden oluşan dizilerin χ cümlesini kapsamasıdır (Bennett and Kalton 1973).*

Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ alınacaktır.

$\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_p$ uzaylarından $\mathcal{C}_\vartheta$ uzayına dört boyutlu matrislerin karakterizasyonu için Kojima (1922), Hamilton (1936) ve Zeltser vd. (2009) çalışmalarını dikkate alacağız.

Yardımcı Teorem 2.22. *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(\mathcal{C}_p : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında olması için*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty, \tag{2.4}$$

$$\exists a_{kl} \in \mathbb{C} \text{ vardır öyle ki her } k,l \in \mathbb{N} \text{ için } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = a_{kl}, \tag{2.5}$$

$$\exists v \in \mathbb{C} \text{ vardır öyle ki } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = v, \tag{2.6}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists l_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } l > l_0 \text{ ve } \forall m,n \in \mathbb{N} : a_{mnkl} = 0, \tag{2.7}$$

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } k > k_0 \text{ ve } \forall m,n \in \mathbb{N} : a_{mnkl} = 0 \tag{2.8}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

φ ile sonlu sayıda terimi sıfır olmayan tek dizilerin uzayını gösterelim. (2.8) durumunda, $\exists k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ ve $(a_{kl_0})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{k_0l})_{l\in\mathbb{N}} \in \varphi$ ve

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} [Ax]_{m,n} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \sum_{k} \left(v - \sum_{k,l} a_{kl} \right) p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

eşitliği, $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_p$ için mevcuttur.

Yardımcı Teorem 2.23. *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında olması için Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4)-(2.6) şartlarıyla birlikte*

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} a_{mnkl_0} = u_{l_0}, \tag{2.9}$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} a_{mnk_0l} = v_{k_0} \tag{2.10}$$

şartlarının sağlanması, gerek ve yeterdir. (2.10) durumunda, $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ *ve* (u_l), $(v_k) \in \ell_1$ *ve*

$$\begin{aligned}\vartheta - \lim_{m,n\to\infty}[Ax]_{m,n} &= \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \sum_k \left(v_k - \sum_l a_{kl}\right) x_k + \sum_l \left(u_l - \sum_k a_{kl}\right) x^l \\ &+ \left(v + \sum_{k,l} a_{kl} - \sum_k v_k - \sum_l u_l\right) r - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}\end{aligned}$$

eşitliği, $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_r$ *için mevcuttur.*

Yardımcı Teorem 2.24. $A = (a_{mnkl})$ *matrisinin* $(\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ *sınıfında olması için Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4)-(2.6) şartlarıyla birlikte*

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_k |a_{mnkl_0} - a_{kl_0}| = 0, \tag{2.11}$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_l |a_{mnk_0l} - a_{k_0l}| = 0 \tag{2.12}$$

şartlarının sağlanması, gerek ve yeterdir. (2.10) durumunda $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ *ve*

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty}[Ax]_{m,n} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(v - \sum_{k,l} a_{kl}\right) bp - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

eşitliği, $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_{bp}$ *için mevcuttur.*

Yardımcı Teorem 2.25. λ *çift dizi uzayı solid ise* $\lambda^\alpha = \lambda^{\beta(\vartheta)} = \lambda^\gamma$ *eşitliği geçerlidir (Başar ve Sever 2009).*

Tek dizilere uygulanan matrislerin hemen hemen konservatifliği ve hemen hemen regülerliği tanımları, King (1966) tarafından verildi. Zeltser vd. (2009), hemen hemen C_ϑ-yapıyı koruyan ve hemen hemen C_ϑ-regüler matris kavramlarını tanımlayarak dört boyutlu hemen hemen C_ϑ-yapıyı koruyan matrislerin ve hemen hemen C_ϑ-regüler matrislerin sınıflarını karakterize ettiler.

Tanım 2.26. ϑ*-yakınsak her* $x = (x_{mn})$ *çift dizisini hemen hemen yakınsak bir çift diziye dönüştüren dört boyutlu* $A = (a_{mnkl})$ *matrisine hemen hemen* C_ϑ*-yapıyı koruyan matris denir.*

Tanım 2.27. *Eğer hemen hemen* C_ϑ*-yapıyı koruyan olmasına ilâve olarak her* $x \in \mathcal{C}_\vartheta$ *için* $f_2 - \lim Ax = \vartheta - \lim x$ *eşitliğini sağlayan dört boyutlu* $A = (a_{mnkl})$ *matrisine hemen hemen* C_ϑ*-regüler matris denir.*

Yardımcı Teorem 2.28. *Aşağıdaki şartlar mevcuttur:*

(a) Dört boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisinin hemen hemen C_{bp}-yapıyı koruyan matris olması için Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4) şartı ve

$\exists a_{kl} \in \mathbb{C}$ mevcut öyle ki her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \alpha(k,l,q,r,s,t) = a_{kl} \tag{2.13}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists u \in \mathbb{C}$ mevcut öyle ki

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \sum_{k,l} \alpha(k,l,q,r,s,t) = u \tag{2.14}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists a_{kl} \in \mathbb{C}$ mevcut öyle ki her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \sum_{l} |\alpha(k,l,q,r,s,t) - a_{kl}| = 0 \tag{2.15}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists a_{kl} \in \mathbb{C}$ mevcut öyle ki her bir $l \in \mathbb{N}$ için

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \sum_{k} |\alpha(k,l,q,r,s,t) - a_{kl}| = 0 \tag{2.16}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür.

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir. Burada,

$$\alpha(k,l,q,r,s,t) = \frac{1}{(q+1)(r+1)} \sum_{m=s}^{s+q} \sum_{n=t}^{t+r} a_{mnkl}$$

şeklindedir. Bu durumda; $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ ve

$$f_2 - \lim Ax = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(u - \sum_{k,l} a_{kl}\right) bp - \lim_{i,l\to\infty} x_{il},$$

yani,

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \sum_{k,l} \alpha(k,l,q,r,s,t)x_{kl} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(u - \sum_{k,l} a_{kl}\right) bp - \lim_{i,l\to\infty} x_{il}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür.

(b) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin hemen hemen C_{bp}-regüler olması için gerek ve yeter şart; Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4) şartının ve (2.13)-(2.16) şartlarının her $k, l \in \mathbb{N}$ için $a_{kl} = 0$ ve $u = 1$ ile sağlanmasıdır (Zeltser et al. 2009).

Yardımcı Teorem 2.29. *Aşağıdaki şartlar mevcuttur:*

(a) *Dört boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisinin hemen hemen C_r-yapıyı koruyan matris olması için Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4) şartı ve Yardımcı Teorem 2.28'in (2.13)-(2.14) şartları ve*

$\exists l_0 \in \mathbb{N}$ mevcut öyle ki

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \sum_k \alpha(k, l_0, q, r, s, t) = u_{l_0} \tag{2.17}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists k_0 \in \mathbb{N}$ mevcut öyle ki

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \sum_l \alpha(k_0, l, q, r, s, t) = v_{k_0} \tag{2.18}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür.

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir. Bu durumda; $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$, $(u_l), (v_k) \in \ell_1$ ve

$$\begin{aligned} f_2 - \lim Ax &= \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \sum_k \left(\nu_k - \sum_l a_{kl}\right) x_k + \sum_l \left(u_l - \sum_k a_{kl}\right) x_l \\ &+ \left(u + \sum_{k,l} a_{kl} - \sum_k v_k - \sum_l u_l\right) r - \lim x. \end{aligned}$$

(b) *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin hemen hemen C_r-regüler olması için gerek ve yeter şart; Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4) şartının, Yardımcı Teorem 2.28'in (2.13)-(2.14) şartlarının ve (2.17)-(2.18) şartlarının her $k, l \in \mathbb{N}$ için $a_{kl} = u_l = v_k = 0$ ve $u = 1$ ile sağlanmasıdır (Zeltser et al. 2009).*

Yardımcı Teorem 2.30. *Aşağıdaki şartlar mevcuttur:*

(a) *Dört boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisinin hemen hemen C_p-yapıyı koruyan matris olması için gerek ve yeter şart: Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4) şartının ve Yardımcı Teorem 2.28'in (2.13)-(2.14) şartlarının sağlanmasıdır.*

Bu durumda; φ, Yardımcı Teorem 2.22'deki gibi tanımlı olmak üzere $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$, $(a_{kl_0})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{k_0l})_{l\in\mathbb{N}} \in \varphi$ ve $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ için

$$f_2 - \lim Ax = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(u - \sum_{k,l} a_{kl}\right) p - \lim_{i,l\to\infty} x_{il}$$

eşitliği mevcuttur.

(b) $A = (a_{mnkl})$ *matrisinin hemen hemen* C_p*-regüler olması için gerek ve yeter şart: Yardımcı Teorem 2.22'nin (2.4) şartının ve Yardımcı Teorem 2.28'in (2.13)-(2.14) şartlarının her* $k, l \in \mathbb{N}$ *için* $a_{kl} = 0$ *ve* $u = 1$ *ile sağlanmasıdır (Zeltser et al. 2009).*

3. ÇİFT DİZİLERİN RIESZ UZAYLARI

$\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_r$ çift dizi uzaylarının, sırası ile, dört boyutlu R^{qt} Riesz matrisi altındaki $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ etki alanları,

$$R^{qt}(\mathcal{M}_u) := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right| < \infty \right\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_p) := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \exists L \in \mathbb{C} \ni p - \lim_{m,n\to\infty} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} - L \right| = 0 \right\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \left(\frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right) \in \mathcal{C}_{bp} \right\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_r) := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \left(\frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right) \in \mathcal{C}_r \right\}$$

cümleleri ile verilir.

Bu bölümde, henüz tanımladığımız $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzaylarının bazı topolojik özelliklerini ve mevcut çift dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını inceleyeceğiz. Ayrıca, R^{qt} Riesz ortalamasının RH-regüler olduğunu göstereceğiz.

3.1 $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ Uzaylarının İnşaası

Teorem 3.1. *$R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ cümleleri, çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında lineer uzay olup*

$$\widetilde{\|x\|}_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \left(R^{qt} x \right)_{mn} \right| \tag{3.1}$$

normu ile birer Banach uzaydırlar. Ayrıca; $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzayları, sırası ile, $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarına lineer olarak norm izomorfturlar.

İspat. Benzer ifadeleri tekrarlamaktan sakınmak için ispatı, yalnız $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayı için vereceğiz.

$x, y \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda;

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \left(R^{qt} x \right)_{mn} \right| \leq K_1 \quad \text{ve} \quad \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \left(R^{qt} y \right)_{mn} \right| \leq K_2$$

eşitsizliklerini sağlayan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ sabitleri vardır.

$$\begin{aligned}
\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\left\{R^{qt}(\alpha x+y)\right\}_{mn}\right| &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_l(\alpha x_{kl}+y_{kl})\right| \\
&= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{\alpha}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_lx_{kl}+\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_ly_{kl}\right| \\
&\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left\{\left|\frac{\alpha}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_lx_{kl}\right|+\left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_ly_{kl}\right|\right\} \\
&\leq |\alpha| \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_lx_{kl}\right| + \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_ly_{kl}\right| \\
&\leq |\alpha|K_1+K_2
\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha x + y \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ bulunur. O hâlde, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayı bir lineer uzaydır.

Şimdi, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayının (3.1) bağıntısında verilen $\widetilde{\|\cdot\|}_\infty$ fonksiyonu ile normlu uzay teşkil ettiğini gösterelim.

(i) Mutlak değer özelliğinden $\widetilde{\|x\|}_\infty > 0$ ve bütün k, l doğal sayıları için (q_k) ve (t_l) dizileri pozitif terimli olduklarından

$$\begin{aligned}
\widetilde{\|x\|}_\infty = 0 &\Leftrightarrow \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_lx_{kl}\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall m,n\in\mathbb{N} \text{ için } \left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_lx_{kl}\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall m,n\in\mathbb{N} \text{ için } \frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_kt_lx_{kl} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k,l\in\mathbb{N} \text{ için } x_{kl} = 0
\end{aligned}$$

bağıntısını elde ederiz.

(ii) Herhangi bir $x \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\widetilde{\|\alpha x\|}_\infty = |\alpha|\widetilde{\|x\|}_\infty$ olduğu kolaylıkla görülür.

(iii) $x, y \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\|x+y\|}_\infty &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l (x_{kl} + y_{kl}) \right| \\
&= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} + \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l y_{kl} \right| \\
&\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left\{ \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right| + \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l y_{kl} \right| \right\} \\
&\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right| + \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l y_{kl} \right| \\
&= \widetilde{\|x\|}_\infty + \widetilde{\|y\|}_\infty .
\end{aligned}$$

Böylece, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayı üzerinde tanımlı $\widetilde{\|\cdot\|}_\infty$ fonksiyonunun norm aksiyomlarını sağladığı görülür. Dolayısıyla $(R^{qt}(\mathcal{M}_u), \widetilde{\|\cdot\|}_\infty)$ ikilisi, bir normlu uzaydır.

Şimdi, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayının bir Banach uzay olduğunu gösterelim. Her sabit l doğal sayısı için $x^{(l)} = \left\{x_{mn}^{(l)}\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $(x^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olsun. O hâlde, her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur öyle ki her $l, r > n_0$ için

$$\widetilde{\|x^{(l)} - x^{(r)}\|}_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| (R^{qt}x^{(l)})_{mn} - (R^{qt}x^{(r)})_{mn} \right| < \varepsilon \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2) bağıntısından her sabit $m, n \in \mathbb{N}$ için $\left\{(R^{qt}x^{(l)})_{mn}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{M}_u$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varırız. $\mathcal{M}_u$ bir Banach uzayı olduğundan dizi, bu uzayda yakınsaktır. $l \to \infty$ iken $(R^{qt}x^{(l)})_{mn} \to (R^{qt}x)_{mn}$ diyelim. Söz konusu limit noktalarını kullanarak $\{(R^{qt}x)_{mn}\}$ dizisini tanımlayalım. Böylece, (3.2) bağıntısında $r \to \infty$ için limit aldığımızda her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| (R^{qt}x^{(l)})_{mn} - (R^{qt}x)_{mn} \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her sabit l doğal sayısı için $\left\{(R^{qt}x^{(l)})_{mn}\right\} \in \mathcal{M}_u$ olduğundan $\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|(R^{qt}x^{(l)})_{mn}\right| \leq k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}^+$ sayısı mevcuttur. Böylece,

$$\left|(R^{qt}x)_{mn}\right| \leq \left| (R^{qt}x^{(l)})_{mn} - (R^{qt}x)_{mn} \right| + \left|(R^{qt}x^{(l)})_{mn}\right| < \varepsilon + k \tag{3.3}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.3) bağıntısında $m, n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum aldığımızda $\{(R^{qt}x)_{mn}\} \in \mathcal{M}_u$ olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla x dizisi, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayına aittir. $(x^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ dizisi, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayı tamdır.

Son olarak, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayının $\mathcal{M}_u$ uzayına lineer olarak norm izomorf olduğunu göstereli̇m. Bunun için uzaylar arasında lineer, birebir ve örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz. Bu düşünce ile T dönüşümünü

$$\begin{aligned} T : R^{qt}(\mathcal{M}_u) &\rightarrow \mathcal{M}_u \\ x &\mapsto y = Tx = \{(R^{qt}x)_{mn}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $x, y \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ vektörü ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ skaları için

$$T(\alpha x + y) = \{(R^{qt}(\alpha x + y)_{mn}\} = \alpha\{(R^{qt}x)_{mn}\} + \{(R^{qt}y)_{mn}\} = \alpha Tx + Ty$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir.

$x \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ için $Tx = \theta$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$Tx = \begin{bmatrix} x_{00} & \frac{t_0x_{00}+t_1x_{01}}{T_1} & \frac{t_0x_{00}+t_1x_{01}+t_2x_{02}}{T_2} & \cdots \\ \frac{q_0x_{00}+q_1x_{10}}{Q_1} & \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1})}{Q_1T_1} & \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1}+t_2x_{k2})}{Q_1T_2} & \cdots \\ \frac{q_0x_{00}+q_1x_{10}+q_2x_{20}}{Q_2} & \sum\limits_{k=0}^{2} \frac{q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1})}{Q_2T_1} & \sum\limits_{k=0}^{2} \frac{q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1}++t_2x_{k2})}{Q_2T_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{q_kx_{k0}}{Q_m} & \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1})}{Q_mT_1} & \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1}++t_2x_{k2})}{Q_mT_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = \theta$$

eşitliği, $x = \theta$ eşitliğini verir. Yani; T dönüşümünün sıfır uzayı, sıfır vektöründen ibarettir. O hâlde, T dönüşümü birebirdir.

Herhangi bir $y = (y_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ dizisini alalım. y dizisine bağlı olarak $x = (x_{kl})$ dizisini $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$x_{kl} = \frac{1}{q_kt_l}(Q_kT_ly_{kl} - Q_{k-1}T_ly_{k-1,l} - Q_kT_{l-1}y_{k,l-1} + Q_{k-1}T_{l-1}y_{k-1,l-1}) \tag{3.4}$$

ile tanımlayalım. Böylece,

$$\left|(R^{qt}x)_{mn}\right| = \left|\frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k,l=0}^{m,n}\sum_{i=k-1}^{k}\sum_{j=l-1}^{l}(-1)^{k+l-(i+j)}Q_iT_jy_{ij}\right| = |y_{mn}| \tag{3.5}$$

eşitliğini elde ederiz. y dizisinin $\mathcal{M}_u$ uzayına ait olduğunu hesaba katarak (3.5) eşitliğinde $m, n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum aldığımızda $\|R^{qt}x\|_\infty = \|y\|_\infty$, yani $x \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ olduğunu görürüz. O hâlde, T dönüşümü örtendir. Böylece, ispatımızı tamamlamış oluruz.

Teorem 3.2. *(3.1) ifadesinde verilen* $\widetilde{\|\cdot\|}_\infty$ *normu ile* $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ *uzayı bir BDK-uzaydır.*

İspat. Her norm (normlu uzay), bir yarınorm (yarınormlu uzay) olduğundan $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzayına (3.1) bağıntısındaki yarınorm ile bir yarınormlu uzay gözü ile bakabiliriz. Ayrıca, $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzayında her bir $k,l \in \mathbb{N}$ için $r_{kl} : R^{qt}(\mathcal{C}_r) \to \mathbb{R}$, $x = (x_{kl}) \mapsto |x_{kl}|$ ile r_{kl} yarınormlarını tanımlayalım. Şimdi, herbir r_{kl} yarınormunun sürekli olduğunu, Yardımcı Teorem 2.19'u kullanarak göstereceğiz. Supremum özelliğinden, her $x \in R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ ve her bir $k,l \in \mathbb{N}$ için $r_{kl}(x) = |x_{kl}| \leq M\widetilde{\|x\|}_\infty$ eşitsizliği geçerli olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti bulabiliriz. Böylece, r_{kl} yarınormları süreklidir. Yani; $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzayı bir DK-uzaydır. Ayrıca, Teorem 3.1'den $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzayının bir Banach uzay olduğunu biliyoruz. Bu durumda; Fréchet topolojisine sahiptir. Sonuç olarak, $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzayı, (3.1) normu ile bir BDK-uzaydır.

Bütün $k,l,m,n \in \mathbb{N}$ değerleri için $\mathbf{b^{(kl)}} = \left(b_{mn}^{(kl)}\right)$, $\mathbf{b^{(l)}} = \left(b_{mn}^{(l)}\right)$ ve $\mathbf{b_{(k)}} = \left(b_{mn}^{(k)}\right)$ çift dizilerini

$$b_{mn}^{(kl)} := \begin{cases} \frac{Q_kT_l}{q_kt_l} & , \ m=k, \ n=l, \\ -\frac{Q_kT_l}{q_kt_{l+1}} & , \ m=k, \ n=l+1 \\ -\frac{Q_kT_l}{q_{k+1}t_l} & , \ m=k+1, \ n=l, \\ \frac{Q_kT_l}{q_{k+1}t_{l+1}} & , \ m=k+1, \ n=l+1, \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$b_{mn}^{(l)} := \begin{cases} \frac{(-Q_{m-1}+Q_m)T_n}{q_mt_n} & , \ m\geq 0, \ n=l, \\ \frac{(Q_{m-1}-Q_m)T_n}{q_mt_{n+1}} & , \ m\geq 0, \ n=l+1, \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$b_{mn}^{(k)} := \begin{cases} \frac{(-T_{n-1}+T_n)Q_m}{t_nq_m} & , \ m=k, \ n\geq 0, \\ \frac{(T_{n-1}-T_n)Q_{m-1}}{t_nq_m} & , \ m=k+1, \ n\geq 0, \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.8}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. R^{qt} dört boyutlu üçgen bir matris olduğundan aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $\{\mathbf{e}, \mathbf{b^{(kl)}}, \mathbf{b^{(l)}}, \mathbf{b_{(k)}}\}$ cümlesi $R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta)$ uzayının temel cümlesidir.

(ii) $\{\mathbf{b^{(kl)}}, \mathbf{b^{(l)}}, \mathbf{b_{(k)}}\}$ cümlesi $R^{qt}(\mathcal{C}_{\vartheta 0})$ uzayının temel cümlesidir.

Artık, Riesz çift dizi uzaylarına dair kapsama bağıntılarını verebiliriz.

Teorem 3.3. *$m \to \infty$ iken $Q_m \to \infty$ ise $\mathcal{M}_u \subset R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ kesin kapsaması geçerlidir.*

İspat. Herhangi bir $x = (x_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ dizisini alalım. O hâlde, $\sup_{k,l\in\mathbb{N}} |x_{kl}| \leq K$ eşitsizliğini geçerli kılan bir $K \in \mathbb{R}^+$ sabiti vardır. Bu durumda;

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|(R^{qt}x)_{mn}\right| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right| \leq K$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Böylece, $x \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ olur. Demek ki, $\mathcal{M}_u \subset R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ kapsaması sağlanır.

Kapsamanın kesinliğini görmek için $x = (x_{kl})$ dizisini,

$$x_{kl} := \begin{cases} (-1)^k \frac{Q_k}{q_k} & , \quad l = 0 \text{ ve } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak alalım. Böylece, m çift olduğunda

$$\begin{aligned} \left|(R^{qt}x)_{mn}\right| &= \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right| = \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k=0}^{m} q_k t_0 x_{k0} \right| \\ &= \left| \frac{t_0}{Q_m T_n} \left[q_0 \frac{Q_0}{q_0} - q_1 \frac{Q_1}{q_1} + \cdots - q_{m-1} \frac{Q_{m-1}}{q_{m-1}} + q_m \frac{Q_m}{q_m} \right] \right| \\ &= \left| \frac{t_0}{Q_m T_n} \left[Q_0 - Q_1 + Q_2 - \cdots + Q_{m-2} - Q_{m-1} + Q_m \right] \right| \\ &= \left| \frac{t_0}{Q_m T_n} \left[(-q_1 - q_3 - \cdots - q_{m-1}) + Q_m \right] \right| \\ &= \frac{t_0}{Q_m T_n} \left[q_0 + q_2 + \cdots + q_{m-2} + q_m \right] \\ &< 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca aynı sonucu, m'nin tek olması durumunda da elde ederiz. (3.9) bağıntısında $m, n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum aldığımızda

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} |(R^{qt}x)_{mn}| < 1$$

olduğunu görürüz. Böylece, $x \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ diyebiliriz. Hipotezden

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{Q_m}{q_m} = \infty$$

elde ederiz. Yani, $x \notin \mathcal{M}_u$. Şu hâlde, $\mathcal{M}_u \subset R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ kesin kapsaması geçerlidir.

Teorem 3.4. *$R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayı monoton değildir.*

İspat. $x = (x_{kl})$ çift dizisini; bütün $k, l \in \mathbb{N}$ değerleri için, $x_{kl} = (-1)^{k+l}\frac{Q_k T_l}{q_k t_l}$ ile tanımlayalım. Böylece, m ve n çift doğal sayıları için

$$\begin{aligned}
\left|(R^{qt}x)_{mn}\right| &= \left|\frac{1}{Q_m T_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl}\right| = \left|\frac{1}{Q_m T_n}\sum_{k,l=0}^{m,n}(-1)^{k+l} Q_k T_l\right| \\
&= \left|\frac{1}{Q_m T_n}\left(Q_0 - Q_1 + \cdots - Q_{m-1} + Q_m\right)\left(T_0 - T_1 + \cdots - T_{m-1} + T_m\right)\right| \\
&= \frac{1}{Q_m T_n}\left(q_0 + q_2 + \cdots + q_{m-2} + q_m\right)\left(t_0 + t_2 + \cdots + t_{m-2} + t_m\right) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yani, x dizisi $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayına aittir. Şimdi, $u = (u_{kl}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ çift dizisini

$$u_{kl} := \begin{cases} (-1)^{k+l} & , \quad k+l \text{ çift },\\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve z dizisini, $z = (z_{kl}) = (x_{kl}u_{kl})$ olarak alalım. Böylece, m ve n çift olduğunda

$$\begin{aligned}
\left|(R^{qt}z)_{mn}\right| &= \left|\frac{1}{Q_m T_n}\sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l z_{kl}\right| \\
&= \left|\frac{1}{Q_m T_n}\sum_{k,l=0}^{m,n}(-1)^{k+l} Q_k T_l u_{kl}\right| \\
&= \frac{(Q_0 + Q_2 + \cdots + Q_m)(T_0 + T_2 + \cdots + T_n)}{Q_m T_n} \\
&+ \frac{(Q_1 + Q_3 + \cdots + Q_{m-1})(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-1})}{Q_m T_n}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitliğini elde ederiz ki bütün m ve n çift doğal sayıları için (3.10) bağıntısının son kısmında paydaki değer paydadaki değerden büyüktür. Dolayısıyla, $\sup_{m,n\in\mathbb{N}} |(R^{qt}z)_{mn}| < M$ eşitsizliğini geçerli kılan bir M pozitif tam sayısı bulamayız. Sonuç olarak; z dizisi, $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayında değildir. Ayrıca, aynı sonucu m ve n doğal sayılarının diğer durumları için de elde ederiz. Böylece, ispatımız tamamlanır.

Teorem 3.5. *$R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ cümlesi, dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında lineer olup*

$$\|x\|_P = \lim_{k\to\infty}\left[\sup_{m,n\geq k}\left|(R^{qt}x)_{mn}\right|\right]$$

yarınormu ile bir tam yarınormlu uzaydır. Ayrıca $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ uzayı, $\mathcal{C}_p$ uzayına lineer olarak izomorftur.

İspat. Teorem 3.1'in ispatına benzediğinden teoremin teferruatlı ispatını vermeyeceğiz.

Robison (1926) ve Hamilton (1936) tarafından dört boyutlu matrislerin regülerliği tanımı ve Silverman-Toeplitz teoremine karşılık gelen teorem sırası ile aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.6. *[Robison (1926), Hamilton (1936)] Eğer dört boyutlu A matrisi her sınırlı p-yakınsak diziyi p-limiti koruyarak p-yakınsak bir diziye dönüştürüyorsa, A matrisi RH-regülerdir denir.*

Teorem 3.7. *[Robison (1926), Hamilton (1936)] $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu matrisinin RH-regüler olması için*

$$
\begin{aligned}
RH_1 &: \text{ her bir } \; k,l \in \mathbb{N} \; \text{ için } p - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = 0, \\
RH_2 &: \; p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = 1, \\
RH_3 &: \text{ her bir } l \in \mathbb{N} \; \text{ için } p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} |a_{mnkl}| = 0, \\
RH_4 &: \text{ her bir } k \in \mathbb{N} \; \text{ için } p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} |a_{mnkl}| = 0, \\
RH_5 &: \; \sum_{k,l} |a_{mnkl}| \text{ serisi p-yakınsaktır}, \\
RH_6 &: \text{ sonlu } A \text{ ve } B \text{ pozitif tam sayıları vardır öyle ki } \sum_{k,l>B} |a_{mnkl}| < A.
\end{aligned}
$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Artık, dört boyutlu R^{qt} Riesz ortalamasının RH-regülerliğini karakterize eden teoremi, ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.8. *(2.2) ile verilen Riesz matrisinin RH-regülerliği için gerek ve yeter şart; $m \to \infty$ iken $Q_m \to \infty$ ve $n \to \infty$ iken $T_n \to \infty$ olmasıdır.*

İspat. $m \to \infty$ iken $Q_m \to \infty$ ve $n \to \infty$ iken $T_n \to \infty$ olsun. O hâlde, $R^{qt} = (r^{qt}_{mnkl})$ Riesz matrisi $RH_1 - RH_6$ şartlarını sağlar. Yani, R^{qt} metodu RH-regülerdir.

Tersine, R^{qt} metodu RH-regüler olsun. O zaman, (2.2) bağıntısından

$$
\sum_k \left| r^{qt}_{mnkl} \right| = \sum_k \frac{q_k t_l}{Q_m T_n} = \frac{t_l}{T_n} \sum_{k=0}^{m} \frac{q_k}{Q_m} = \frac{t_l}{T_n} \tag{3.11}
$$

eşitliğini elde ederiz. RH_3 şartı sağlandığından (3.11) eşitliğinde $m,n\to\infty$ iken p-limit aldığımızda

$$0=p-\lim_{m,n\to\infty}\sum_k\left|r^{qt}_{mnkl}\right|=p-\lim_{m,n\to\infty}\frac{t_l}{T_n}$$

eşitliğine sahip oluruz. Bu ise, $n\to\infty$ iken $T_n\to\infty$ olmasını gerektirir. Bunun gibi,

$$\sum_l\left|r^{qt}_{mnkl}\right|=\sum_l\frac{q_kt_l}{Q_mT_n}=\frac{q_k}{Q_m}\sum_{l=0}^{n}\frac{t_l}{T_n}=\frac{q_k}{Q_m}\qquad(3.12)$$

eşitliğinin geçerliliği aşikârdır. Benzer şekilde, RH_4 şartı sağlandığından (3.12) eşitliğinde $m,n\to\infty$ iken p-limit aldığımızda

$$0=p-\lim_{m,n\to\infty}\sum_l\left|r^{qt}_{mnkl}\right|=p-\lim_{m,n\to\infty}\frac{q_k}{Q_m}$$

eşitliğine ulaşırız. Bu da, $m\to\infty$ iken $Q_m\to\infty$ olmasını gerektirir. Böylece, teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.9. *$\mathcal{C}_{bp}\subset R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ kesin kapsaması geçerlidir.*

İspat. Herhangi bir $x=(x_{kl})\in\mathcal{C}_{bp}$ dizisini alalım. O hâlde, $bp-\lim_{m,n\to\infty}x_{mn}=l$ eşitliği sağlanacak şekilde bir $l\in\mathbb{C}$ sayısı mevcuttur. R^{qt} Riesz matrisi RH-regüler olduğundan $p-\lim_{m,n\to\infty}(R^{qt}x)_{mn}=l$ eşitliğini yazabiliriz. Yani, $x\in R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ olur. Şu hâlde, $\mathcal{C}_{bp}\subset R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ kapsaması geçerlidir.

Şimdi, $x=(x_{kl})$ dizisini

$$x_{kl}:=\begin{cases}1 & ,\ k \text{ çift ve } l\in\mathbb{N},\\ 0 & ,\ \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda; m çift iken

$$\begin{aligned}(R^{qt}x)_{mn} &= \frac{1}{Q_mT_n}\sum_{k=0}^{m}q_k(t_0x_{k0}+t_1x_{k1}+\cdots+t_nx_{kn})\\ &= \frac{1}{Q_mT_n}\left[q_0(t_0+\cdots+t_n)+q_1\times 0+\cdots+q_{m-1}\times 0+q_m(t_0+\cdots+t_n)\right]\\ &= \frac{q_0+q_2+\cdots+q_m}{Q_m}\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece, $p-\lim_{m,n\to\infty}(R^{qt}x)_{mn}$ limiti mevcuttur. Aynı sonucu, m'nin tek olması hâlinde de elde ederiz. Bu durumda, $x\in R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ fakat $x\notin\mathcal{C}_p$ olduğu açıktır. O hâlde, $x\notin\mathcal{C}_{bp}$. Demek ki, $\mathcal{C}_{bp}\subset R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ kapsaması kesindir.

4. ÇİFT DİZİLERİN $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ UZAYI

Bu bölümde; $0 < s < \infty$ olmak üzere, s-mutlak toplanabilen çift dizilerin $\mathcal{L}_s$ uzayının dört boyutlu R^{qt} ortalaması altındaki $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ etki alanını ele alacağız.

$0 < s < \infty$ olsun. $s-$mutlak toplanabilen çift dizilerin $\mathcal{L}_s$ uzayının dört boyutlu R^{qt} Riesz matrisi altındaki $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ etki alanı,

$$R^{qt}(\mathcal{L}_s) := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sum_{m,n} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right|^s < \infty \right\}$$

cümlesi ile verilir.

Bu bölümde, henüz tanımladığımız $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının sırası ile $0 < s < 1$ değerleri için tam $s-$normlu uzay ve $1 \leq s < \infty$ değerleri için Banach uzay olduğu ifade edilecektir. Ayrıca, $0 < s < 1$ değerleri için uzayın barelled uzay olmadığı fakat $1 \leq s < \infty$ değerleri için uzayın barelled uzay olduğu gösterilecektir. Son olarak, hem $0 < s < 1$ hâlinde ve hem de $1 \leq s < \infty$ hâlinde $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının monoton olmadığı ispatlanacaktır.

Çalışmamızda s' ile s sayısının eşleniğini, yani, $1 < s < \infty$ iken $s' = s/(s-1)$, $s = 1$ iken $s' = \infty$ ve $s = \infty$ iken $s' = 1$ olan sayıyı göstereceğiz.

4.1 $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ Uzayının İnşaası

Teorem 4.1. *$R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ cümlesi, çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında bir lineer uzaydır ve aşağıdaki önermeler geçerlidir:*

(i) $0 < s < 1$ *iken* $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ *uzayı,*

$$\widetilde{\|x\|}_s = \sum_{m,n} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right|^s$$

s-normu ile bir tam s-normlu uzay olup $\mathcal{L}_s$ uzayı ile s-norm izomorfiktir.

(ii) $1 \leq s < \infty$ *iken* $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ *uzayı,*

$$\widehat{\|x\|}_s = \left(\sum_{m,n} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right|^s \right)^{1/s} \tag{4.1}$$

normu ile bir Banach uzay olup $\mathcal{L}_s$ uzayı ile norm izomorfiktir.

İspat. (i) kısmının ispatı, (ii) kısmının ispatına benzer olarak yapılabileceğinden onu ihmal ediyoruz. Şimdi, (ii) kısmının ispatını verelim.

$1 \leq s < \infty$ olsun. $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının bir lineer uzay olduğu ve (4.1) normu ile bir normlu uzay ve $\mathcal{L}_s$ uzayına norm izomorfik bulunduğu Teorem 3.1'in ispatına benzer yolla gösterilebileceğinden söz konusu ispatları vermeyeceğiz.

Şimdi $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının (4.1) normu ile bir Banach uzay olduğunu gösterelim. Bunun için, Boos (2000) çalışmasında Sonuç 6.3.41'in (b) kısmını dikkate alacağız. Şöyle ki, "*(X,p) ve (Y,q) yarınormlu uzaylar ve $T:(X,p)\to(Y,q)$ dönüşümü de bir izometrik izomorfizm olsun. O hâlde, (X,p) uzayının tam olması için gerek ve yeter şart; (Y,q) uzayının tam olmasıdır. Özel olarak, (X,p) uzayının bir Banach uzay olması için gerek ve yeter şart; (Y,q) uzayının bir Banach uzay olmasıdır.*" $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayından $\mathcal{L}_s$ uzayına $Tx = \{(R^{qt}x)_{mn}\}$ ile tanımlı T dönüşümü, bir izometrik izomorfizm olduğundan ve Başar ve Sever (2009) çalışmasının Teorem 2.1'i gereğince $\mathcal{L}_s$ uzayı Banach uzay olduğundan $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı Banach uzaydır.

Bütün $k,l,m,n \in \mathbb{N}$ değerleri için, sırasıyla (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri ile tanımlanan $\mathbf{b^{(kl)}} = \left(b_{mn}^{(kl)}\right)$, $\mathbf{b^{(l)}} = \left(b_{mn}^{(l)}\right)$ ve $\mathbf{b_{(k)}} = \left(b_{mn}^{(k)}\right)$ çift dizilerini göz önüne alalım. R^{qt}, dört boyutlu bir üçgen bir matris olduğundan $\left\{\mathbf{b^{(kl)}}, \mathbf{b^{(l)}}, \mathbf{b_{(k)}}\right\}$ cümlesi, $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı için bir temel cümledir.

Teorem 4.2. *$(\frac{1}{Q_mT_n}) \notin \mathcal{L}_s$ ise $\mathcal{L}_s \not\subset R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ olur.*

İspat.$(\frac{1}{Q_mT_n}) \notin \mathcal{L}_s$ olsun. (2.1)'de verilen $e^{\mathbf{kl}}$ dizisinin $k = l = 0$ olduğu durumunu alalım. Açıkça, $e^{\mathbf{00}} \in \mathcal{L}_s$. Bütün m ve n doğal sayıları için

$$(R^{qt}e^{\mathbf{00}})_{mn} = \frac{1}{Q_mT_n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} q_i t_j e_{ij}^{\mathbf{00}} = \frac{q_0t_0}{Q_mT_n}$$

eşitliğini elde ederiz. $(\frac{1}{Q_mT_n}) \notin \mathcal{L}_s$ olduğundan, $R^{qt}e^{\mathbf{00}}$ dizisi $\mathcal{L}_s$ uzayına ait değildir. Yani, $e^{\mathbf{00}}$ dizisi $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayına ait değildir. Dolayısı ile $(\frac{1}{Q_mT_n}) \notin \mathcal{L}_s$ olduğunda $\mathcal{L}_s \subset R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ kapsaması mevcut olamaz.

Teorem 4.3. *$1 < s < r < \infty$ olsun. Bu durumda; $R^{qt}(\mathcal{L}_s) \subset R^{qt}(\mathcal{L}_r)$ kesin kapsaması geçerlidir.*

İspat. $1 < s < r < \infty$ ve $x = (x_{kl}) \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ olsun. Jensen eşitsizliğine dayanarak

$$\left(\sum_{m,n=0}^{i,j} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right|^r \right)^{1/r} < \left(\sum_{m,n=0}^{i,j} \left| \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_k t_l x_{kl} \right|^s \right)^{1/s} \tag{4.2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece, (4.2) eşitsizliğinde $i, j \to \infty$ için p-limit aldığımızda $\|\widehat{x}\|_r < \|\widehat{x}\|_s < \infty$ olduğunu görürüz. Yani; x dizisi, $R^{qt}(\mathcal{L}_r)$ uzayına aittir.

Şimdi, bütün $k, l \in \mathbb{N}$ değerleri için $x = (x_{kl})$ dizisini

$$x_{kl} := \frac{1}{q_k t_l} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)} \frac{Q_k T_l}{[(k+2)(l+2)]^{1/s}} \tag{4.3}$$

ile tanımlayalım. Böylece, (4.3) ile verilen $x = (x_{kl})$ dizisini kullanarak

$$|(R^{qt}x)_{mn}| = \frac{1}{[(m+2)(n+2)]^{1/s}}$$

bağıntısını ve dolayısı ile

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |(R^{qt}x)_{mn}|^s &= \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{[(m+2)(n+2)]^{1/s}} \right\}^s \\ &= \sum_{m,n} \frac{1}{(m+2)(n+2)} = \infty \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. O hâlde, $x \notin R^{qt}(\mathcal{L}_s)$. $1 < s < r < \infty$ olduğundan $1 < r/s$'dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |(R^{qt}x)_{mn}|^r &= \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{[(m+2)(n+2)]^{1/s}} \right\}^r \\ &= \sum_{m,n} \frac{1}{[(m+2)(n+2)]^{r/s}} \end{aligned}$$

serisinin yakınsak olduğu sonucunu elde ederiz. Yani; x dizisi, $R^{qt}(\mathcal{L}_r)$ uzayına aittir. Şu hâlde, $R^{qt}(\mathcal{L}_s) \subset R^{qt}(\mathcal{L}_r)$ kesin kapsaması geçerlidir.

Teorem 4.4. *Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $1 \leq s < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ *uzayı, bir barrelled uzaydır.*

(ii) $0 < s < 1$ *olsun. Bu durumda;* $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ *uzayı, bir barrelled uzay değildir.*

İspat. (i) Yardımcı Teorem 2.17'nin ve Teorem 4.1'in (ii) kısmının sonucu olarak $1 \leq s < \infty$ değerleri için $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı, bir barrelled uzaydır.

(ii) $0 < s < 1$ değerleri için $\mathcal{L}_s$ uzayının lokal konveks uzay olmadığını göstereceğiz. $\mathcal{U}$ cümlesini $\mathcal{U} := \{x : \|x\|_s \leq 1\}$ olarak tanımlayalım. $\mathcal{U}$ cümlesinin sıfırın bir konveks komşuluğunu ihtiva etmediğini göstereceğiz. Sıfırın bir konveks komşuluğunu $\mathcal{V}$ ile gösterelim. O zaman, bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için $\mathcal{V} \supset \{x : \|x\|_s \leq \varepsilon\}$ kapsaması mevcuttur, diyelim. Özel olarak bütün $k, l \in \mathbb{N}$ ve $0 < s < 1$ değerleri için $\varepsilon^{1/s} e^{\mathbf{kl}}$ dizisi $\mathcal{V}$ cümlesine aittir. m ve n doğal sayılarını $m, n > \frac{1}{\varepsilon^{1/2(1-s)}}$ olacak şekilde seçelim ve $x = (x_{kl})$ dizisini

$$x_{kl} := \begin{cases} \frac{\varepsilon^{1/s}}{(m+1)(n+1)} & , \quad 0 \leq k \leq m \text{ ve } 0 \leq l \leq n, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $0 < s < 1$ olduğundan, $1 < 1/s$ olur. Böylece, $\frac{\varepsilon^{1/s}}{(m+1)(n+1)} \leq \varepsilon$ eşitsizliği söz konusudur, yani dizinin bütün terimleri sıfırın ε komşuluğundadır. O hâlde, $x \in \mathcal{V}$ ve

$$\|x\|_s = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \left| \frac{\varepsilon^{1/s}}{(m+1)(n+1)} \right|^s = \varepsilon[(m+1)(n+1)]^{1-s} > 1$$

olduğundan $\mathcal{V} \not\subset \mathcal{U}$ olur. Dolayısı ile $\mathcal{L}_s$ uzayı lokal konveks uzay değildir. Bunun sonucu olarak $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı da lokal konveks uzay değildir. O hâlde, $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayı barrelled uzay değildir.

Teorem 4.5. $0 < s < \infty$ *olsun. Bu durumda;* $(\frac{1}{Q_m T_n}) \notin \mathcal{L}_s$ *ise* $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ *uzayı monoton değildir.*

İspat. $0 < s < \infty$ ve $(\frac{1}{Q_m T_n}) \notin \mathcal{L}_s$ olsun. $x = (x_{kl}) \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ dizisini $x_{00} \neq 0$ olacak şekilde seçelim ve $u = (u_{kl}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ dizisini $e^{\mathbf{00}}$ dizisi alalım. Bu durumda, $z = ux = e^{\mathbf{00}} x$ çarpım dizisi için

$$(R^{qt} z)_{mn} = \frac{1}{Q_m T_n} q_0 t_0 x_{00}$$

olacağından $R^{qt} z \notin \mathcal{L}_s$, yani $z \notin R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6. $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ *uzayı monoton olmadığından solid değildir.*

5. DUAL UZAYLAR

Bu bölümde; $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ uzayının α- ve $\beta(\vartheta)$-dualleri, $R^{qt}(\mathcal{C}_\eta)$ uzayının $\beta(\vartheta)$-duali, $0 < s \leq 1$ için $\mathcal{L}_s$ uzayının ve $0 < s < \infty$ için $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının α-, γ- ve $\beta(\vartheta)$-dualleri hesaplanacaktır. Burada, $\vartheta, \eta \in \{p, bp, r\}$ alınmaktadır.

5.1 Riesz Çift Dizi Uzaylarının Dualleri

Teorem 5.1. $\{R^{qt}(\mathcal{M}_u)\}^\alpha \subset \mathcal{L}_u$ *kapsaması geçerlidir.*

İspat. $\{R^{qt}(\mathcal{M}_u)\}^\alpha \subset \mathcal{L}_u$ kapsamasının doğruluğunu göstermek için, herhangi bir $z \in \{R^{qt}(\mathcal{M}_u)\}^\alpha$ dizisini alalım. Böylece, her $x = (x_{kl}) \in R^{qt}(\mathcal{M}_u)$ dizisi için $\sum_{k,l} |x_{kl} z_{kl}| < \infty$ gerçeğine sahip oluruz. $z \notin \mathcal{L}_u$ ise o zaman, bütün $i, j \in \mathbb{N}$'ler için $\left|z_{k_i, l_j}\right| > [(i+1)(j+1)]^3$ eşitsizliği sağlanacak şekilde doğal sayıların kesin artan (k_i) ve (l_j) dizileri mevcuttur. $y = (y_{mn})$ dizisini, $i, j, m, n \in \mathbb{N}$'ler için

$$y_{mn} := \begin{cases} [(i+1)(j+1)]^{-2} & , \quad m = k_i \text{ ve } n = l_j, \\ 0 & , \quad m \neq k_i \text{ ve } n \neq l_j \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça, y dizisi $\mathcal{M}_u$ uzayına aittir. Böylece, (3.4) bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l} |x_{kl} z_{kl}| &> \sum_{i,j} |x_{k_i l_j} z_{k_i l_j}| > \sum_{i,j} |x_{k_i l_j} [(i+1)(j+1)]^3| \\
&= \sum_{i,j} \left| \frac{1}{q_{k_i} t_{l_j}} \sum_{k=k_i-1}^{k_i} \sum_{l=l_j-1}^{l_j} (-1)^{k_i+l_j-(k+l)} Q_k T_l y_{kl} [(i+1)(j+1)]^3 \right| \\
&= \sum_{i,j} \left| \frac{Q_{k_i} T_{l_j}}{q_{k_i} t_{l_j}} y_{k_i l_j} [(i+1)(j+1)]^3 \right| \\
&= \sum_{i,j} \frac{Q_{k_i} T_{l_j}}{q_{k_i} t_{l_j}} (i+1)(j+1) \\
&> \sum_{i,j} (i+1)(j+1) = \infty
\end{aligned}$$

olduğu sonucuna varırız. Bu durumda; $z \notin \{R^{qt}(\mathcal{M}_u)\}^\alpha$ olduğu görülür ki bir çelişkidir. O hâlde, z dizisi $\mathcal{L}_u$ uzayında olmalıdır. Yani,

$$\{R^{qt}(\mathcal{M}_u)\}^\alpha \subset \mathcal{L}_u \tag{5.1}$$

kapsaması sağlanır.

Artık, tek diziler için Başar ve Altay (2002) ile Başar ve Altay (2003) çalışmalarında verilen teknikleri kullanarak henüz inşa ettiğimiz Riesz çift dizi uzaylarının $\beta(\vartheta)$-duallerini tayin edebiliriz.

Teorem 5.2. *d_1, d_2 ve d_3 cümlelerini,*

$$d_1 := \left\{ a = (a_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l} Q_k T_l \left| \Delta_{11} \left(\frac{a_{kl}}{q_k t_l} \right) \right| < \infty \right\},$$

$$d_2 := \left\{ a = (a_{kl}) \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k} Q_k T_n \left| \Delta_{10} \left(\frac{a_{kn}}{q_k t_n} \right) \right| < \infty \right\},$$

$$d_3 := \left\{ \begin{array}{c} a = (a_{kl}) \in \Omega : \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{l} Q_m T_l \left| \Delta_{01} \left(\frac{a_{ml}}{q_m t_l} \right) \right| < \infty \ ve \\ \left(Q_m T_n \frac{a_{mn}}{q_m t_n} \right) \in \mathcal{M}_u \end{array} \right\}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. Bu durumda; $\{R^{qt}(\mathcal{C}_p)\}^{\beta(r)} = d_1 \cap d_2 \cap d_3 \cap \mathcal{CS}_r$.

İspat. $x = (x_{mn}) \in R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ olsun. Bu durumda; Teorem 3.5 gereğince bir $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_p$ çift dizisi mevcuttur. Ayrıca, (3.4) bağıntısından her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} s_{mn} &= \sum_{k,l=0}^{m,n} x_{kl} \\ &= \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{1}{q_k t_l} \left[\sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)} Q_i T_j y_{ij} \right] \end{aligned}$$

bağıntısıyla tanımlanan $s = (s_{mn})$ dizisine sahip oluruz. Çift diziler için genelleştirilmiş Abel dönüşümünden her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} z_{mn} &= \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl} x_{kl} \\ &= \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1} s_{kl} \Delta_{11} a_{kl} + \sum_{k=0}^{m-1} s_{kn} \Delta_{10} a_{kn} + \sum_{l=0}^{n-1} s_{ml} \Delta_{01} a_{ml} + s_{mn} a_{mn} \end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitliğini elde ederiz. Yapılan işlemlerle (5.2) bağıntısını, her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} z_{mn} &= \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl} x_{kl} \\ &= \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1} Q_k T_l \Delta_{11} \left(\frac{a_{kl}}{q_k t_l} \right) y_{kl} + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k T_n \Delta_{10} \left(\frac{a_{kn}}{q_k t_n} \right) y_{kn} \\ &+ \sum_{l=0}^{n-1} Q_m T_l \Delta_{01} \left(\frac{a_{ml}}{q_m t_l} \right) y_{ml} + Q_m T_n \frac{a_{mn}}{q_m t_n} y_{mn} \\ &= (By)_{mn} \end{aligned}$$

şeklinde yeniden ifade edebiliriz. Burada $B = (b_{mnkl})$ dört boyutlu matrisi, her $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için

$$b_{mnkl} := \begin{cases} Q_k T_l \Delta_{11}\left(\frac{a_{kl}}{q_k t_l}\right) & , \ 0 \leq k \leq m-1 \ \text{ ve } 0 \leq l \leq n-1 \\ Q_k T_n \Delta_{10}\left(\frac{a_{kn}}{q_k t_n}\right) & , \ 0 \leq k \leq m-1 \ \text{ ve } l = n \\ Q_m T_l \Delta_{01}\left(\frac{a_{ml}}{q_m t_l}\right) & , \ k = m \ \text{ ve } 0 \leq l \leq n-1 \\ Q_m T_n \frac{a_{mn}}{q_m t_n} & , \ k = m \text{ ve } l = n \\ 0 & , \ \text{diğer durumda} \end{cases} \tag{5.3}$$

olarak tarif edilmektedir. Böylece, "$x = (x_{mn}) \in R^{qt}(\mathcal{C}_p)$ olduğunda $ax = (a_{mn}x_{mn}) \in \mathcal{CS}_r$ olması için gerek ve yeter şart; $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_p$ olduğunda $z = (z_{mn}) \in \mathcal{C}_r$ olmasıdır" çift gerektirmesine ulaşırız. Bu durumda; $B \in (\mathcal{C}_p : \mathcal{C}_r)$ olacağından Yardımcı Teorem 2.22'den

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |b_{mnkl}| < \infty,$$

$$\text{her } k, l \in \mathbb{N} \text{ için } r - \lim_{m,n\to\infty} b_{mnkl} = Q_k T_l \Delta_{11}\left(\frac{a_{kl}}{q_k t_l}\right),$$

$$\exists v \in \mathbb{C} \text{ vardır öyle ki } r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} b_{mnkl} = r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} a_{kl} = v$$

şartlarını elde ederiz. Böylece,

$$\sum_{k,l} Q_k T_l \left|\Delta_{11}\left(\frac{a_{kl}}{q_k t_l}\right)\right| < \infty,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k} Q_k T_n \left|\Delta_{10}\left(\frac{a_{kn}}{q_k t_n}\right)\right| < \infty,$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{l} Q_m T_l \left|\Delta_{01}\left(\frac{a_{ml}}{q_m t_l}\right)\right| < \infty,$$

$$\left(Q_m T_n \frac{a_{mn}}{q_m t_n}\right) \in \mathcal{M}_u \text{ ve } \ a = (a_{mn}) \in \mathcal{CS}_r.$$

O hâlde, $\{R^{qt}(\mathcal{C}_p)\}^{\beta(r)} = d_1 \cap d_2 \cap d_3 \cap \mathcal{CS}_r$.

Şimdi, benzer ifadelerin tekrarından sakınmak için $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ ve $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ uzaylarının $\beta(\vartheta)$-duallerini ispatsız vereceğiz.

Teorem 5.3. *$\eta \in \{bp, r\}$ ve $B = (b_{mnkl})$ matrisi, (5.3) bağıntısıyla tanımlanmak üzere; $R^{qt}(\mathcal{C}_\eta)$ uzayının $\beta(\vartheta)$-duali, $\{a = (a_{mn}) \in \Omega : B = (b_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_\eta : \mathcal{C}_\vartheta)\}$ cümlesidir.*

Teorem 5.4. *$0 < s \leq 1$ olsun. Bu durumda; $\mathcal{L}_s$ uzayının α-, $\beta(\vartheta)$- ve γ-duali, $\mathcal{M}_u$ uzayıdır.*

İspat. Teoremin ispatını sadece α-dual için vereceğiz. $0 < s \leq 1$, $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_s$ ve $z = (z_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ olsun. Bu durumda; $\sum_{k,l} |x_{kl}|^s < \infty$ yazabiliriz ve böylece

$$\left(\sum_{k,l} |z_{kl}x_{kl}|\right)^s \leq (\|z\|_\infty)^s \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|\right)^s \leq (\|z\|_\infty)^s \sum_{k,l} |x_{kl}|^s$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik de bize

$$\sum_{k,l} |z_{kl}x_{kl}| \leq \|z\|_\infty \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|^s\right)^{1/s} < \infty$$

olduğunu gösterir. O hâlde, $xz \in \mathcal{L}_u$, yani $z \in \mathcal{L}_s^\alpha$. Böylece, $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{L}_s^\alpha$ kapsaması geçerlidir.

Tersine, $z = (z_{kl}) \in \mathcal{L}_s^\alpha$ olsun. Bu durumda; her $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_s$ için $\sum_{k,l} |z_{kl}x_{kl}| < \infty$ gerçeğine sahip oluruz. $z \notin \mathcal{M}_u$ ise o zaman, bütün $i, j \in \mathbb{N}$'ler için $|z_{m_i,n_j}| > [(i+1)(j+1)]^{3/s}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde doğal sayıların kesin artan (m_i) ve (n_j) dizileri mevcuttur. Şimdi, $x = (x_{kl})$ dizisini

$$x_{kl} := \begin{cases} 1/[(i+1)(j+1)]^{2/s} & , \quad k = m_i \text{ ve } l = n_j, \\ 0 & , \quad k \neq m_i \text{ ve } l \neq n_j \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda; x dizisi, $\mathcal{L}_s$ uzayına aittir. Fakat $1 \leq 1/s$ olduğundan

$$\sum_{k,l} |z_{kl}x_{kl}| > \sum_{i,j} [(i+1)(j+1)]^{1/s} \geq \sum_{i,j} (i+1)(j+1) = \infty$$

gerçeğine sahip oluruz. Böylece, $z \notin \mathcal{L}_s^\alpha$ olduğu görülür ki bir çelişkidir. Şu hâlde, $\mathcal{L}_s^\alpha \subset \mathcal{M}_u$ kapsaması sağlanır.

$\mathcal{M}_u \subset \mathcal{L}_s^\alpha$ ve $\mathcal{L}_s^\alpha \subset \mathcal{M}_u$ kapsama bağıntılarını birleştirerek $\mathcal{L}_s^\alpha = \mathcal{M}_u$ istenen sonucunu elde ederiz.

Teorem 5.5. *$0 < s \leq 1$ olsun. Bu durumda; $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının α-duali, $\mathcal{M}_u$ uzayıdır.*

İspat. $x = (x_{kl}) \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ ve $z = (z_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ olsun. O hâlde, Teorem 4.1'in (i) kısmı gereğince $\sum_{k,l} |y_{kl}|^s < \infty$ olan bir $y = (y_{kl}) \in \mathcal{L}_s$ çift dizisi mevcuttur. Böylece, $p-\lim_{k,l\to\infty} |y_{kl}| = 0$. Yani her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $k, l > n_0$ için $|y_{kl}| < \varepsilon$. Böylece,

$$K_1 = \sum_{k,l=0}^{n_0} \left| \frac{1}{q_k t_l} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)} Q_i T_j y_{ij} \right|$$

olmak üzere (3.4) bağıntısından

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,l} |z_{kl}x_{kl}| &= \sum_{k,l} \left| z_{kl} \frac{1}{q_k t_l} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)} Q_i T_j y_{ij} \right| \\
&\leq \|z\|_\infty \left[K_1 + \sum_{k,l=n_0+1}^{\infty,\infty} \left| \frac{1}{q_k t_l} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)} Q_i T_j y_{ij} \right| \right] \\
&\leq \|z\|_\infty \left[K_1 + \sum_{k,l=n_0+1}^{\infty,\infty} \frac{1}{q_k t_l} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} Q_i T_j |y_{ij}| \right] \\
&< \|z\|_\infty \left[K_1 + \varepsilon \sum_{k,l=n_0+1}^{\infty,\infty} \frac{1}{q_k t_l} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} Q_i T_j \right] = \infty
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşırız. O hâlde, $z \in \{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^\alpha$. Bu durumda;

$$
\mathcal{M}_u \subset \{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^\alpha \tag{5.4}
$$

kapsaması sağlanır.

$\{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^\alpha \subset \mathcal{M}_u$ kapsamasının varlığını göstermek için bir $z = (z_{kl}) \in \{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^\alpha$ dizisini alalım. Böylece, her $x = (x_{kl}) \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ için $\sum_{k,l} |x_{kl}z_{kl}| < \infty$ gerçeğine sahip oluruz. $z \notin \mathcal{M}_u$ ise o zaman, bütün $i, j \in \mathbb{N}$'ler için $\left|z_{k_i,l_j}\right| > [(i+1)(j+1)]^{3/s}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde kesin artan (k_i) ve (l_j) dizileri mevcuttur. $y = (y_{mn})$ dizisini, $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$
y_{mn} := \begin{cases} [(i+1)(j+1)]^{-3/s} & , \quad m = k_i \text{ ve } n = l_j, \\ 0 & , \quad m \neq k_i \text{ ve } n \neq l_j \end{cases}
$$

olarak tanımlayalım. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m,n} |y_{mn}|^s &= \sum_{i,j} |y_{k_i l_j}|^s = \sum_{i,j} \left| \frac{1}{[(i+1)(j+1)]^{3/s}} \right|^s \\
&= \sum_{i,j} \frac{1}{[(i+1)(j+1)]^3}
\end{aligned}
$$

serisinin yakınsaklığı sonucuna sahip oluruz. Bu durumda; $y \in \mathcal{L}_s$. Böylece, (3.4) bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l}|x_{kl}z_{kl}| &> \sum_{i,j}|x_{k_il_j}z_{k_il_j}| > \sum_{i,j}\left|x_{k_il_j}[(i+1)(j+1)]^{3/s}\right| \\
&= \sum_{i,j}\left|\frac{1}{q_{k_i}t_{l_j}}\sum_{k=k_i-1}^{k_i}\sum_{l=l_j-1}^{l_j}(-1)^{k_i+l_j-(k+l)}Q_kT_ly_{kl}[(i+1)(j+1)]^{3/s}\right| \\
&= \sum_{i,j}\left|\frac{Q_{k_i}T_{l_j}}{q_{k_i}t_{l_j}}y_{k_il_j}[(i+1)(j+1)]^{3/s}\right| = \sum_{i,j}\frac{Q_{k_i}T_{l_j}}{q_{k_i}t_{l_j}} \\
&> \sum_{i,j}1 = \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece, $z \notin \{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^{\alpha}$ olduğu görülür ki bir çelişkidir. O hâlde, z dizisi $\mathcal{M}_u$ uzayında olmalıdır. Bu durumda;

$$\{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^{\alpha} \subset \mathcal{M}_u \tag{5.5}$$

kapsaması sağlanır.

Böylece, (5.4) ve (5.5) bağıntılarını birleştirerek $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ uzayının $\alpha-$dualinin $\mathcal{M}_u$ uzayı olduğu sonucunu elde ederiz.

Teorem 5.6. *$1 < s < \infty$ olsun. e_1, e_2 ve e_3 cümlelerini*

$$e_1 := \left\{a = (a_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l}\left|Q_kT_l\Delta_{11}\left(\frac{a_{kl}}{q_kt_l}\right)\right|^{s'} < \infty\right\},$$

$$e_2 := \left\{a = (a_{kl}) \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}\left|Q_kT_n\Delta_{10}\left(\frac{a_{kn}}{q_kt_n}\right)\right|^{s'} < \infty\right\},$$

$$e_3 := \left\{\begin{array}{c} a = (a_{kl}) \in \Omega : \sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_l\left|Q_mT_l\Delta_{01}\left(\frac{a_{ml}}{q_mt_l}\right)\right|^{s'} < \infty \text{ ve} \\ \left(Q_mT_n\frac{|a_{mn}|}{q_mt_n}\right)^{s'} \in \mathcal{M}_u \end{array}\right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\{R^{qt}(\mathcal{L}_s)\}^{\beta(\vartheta)} = e_1 \cap e_2 \cap e_3$.

İspat. Teorem, Teorem 5.2'nin ispatına benzer şekilde ispat edilebileceğinden tekrara düşmemek için teferruatlı ispat vermeyeceğiz.

6. BAZI MATRİS SINIFLARININ KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde; dört boyutlu matrislerin $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere $(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ ve $(R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta) : \mathcal{C}_f)$, $\vartheta \in \{bp, r\}$ ve $1 \leq s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{C}_\vartheta : \mathcal{L}_s)$ ve $(R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta) : \mathcal{L}_s)$, $0 < s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$, $(\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$, $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ ve $1 \leq s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{L}_s : \mathcal{L}_u)$ sınıfları karakterize edilecektir.

6.1 Matris Dönüşümleri

Teorem 6.1. *$A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu herhangi bir matris olsun. O hâlde,*

(i) $0 < s \leq 1$ olsun. Bu durumda; $A \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$ olması için

$$N = \sup_{m,n,k,l \in \mathbb{N}} |a_{mnkl}| < \infty \tag{6.1}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) $1 < s < \infty$ olsun. Bu durumda; $A \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$ olması için

$$M_1 = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}|^{s'} < \infty \tag{6.2}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

durumları söz konusudur.

İspat. (i) $0 < s \leq 1$ ve $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$ olsun. Bu durumda; her $x \in \mathcal{L}_s$ için Ax mevcut ve $\mathcal{M}_u$ uzayına aittir. Bu sebeple; her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için, Teorem 5.4 gereğince $A_{mn} \in \mathcal{M}_u$. Böylece, her bir sabit $k, l \in \mathbb{N}$ ve $\mathbf{e^{kl}} \in \mathcal{L}_s$ için,

$$\|A\mathbf{e^{kl}}\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |a_{mnkl}| < \infty$$

sonucunu elde ederiz. Yani, (6.1) şartı gerektir.

Tersine, (6.1) şartı sağlansın ve $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_s$ olsun. O hâlde, her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için Teorem 5.4 gereğince $A_{mn} \in \mathcal{M}_u$, yani Ax mevcuttur. Böylece, her bir sabit m ve n doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl}\right|^s &\leq \left(\sum_{k,l} |a_{mnkl}||x_{kl}|\right)^s \\ &\leq \left(\sup_{k,l \in \mathbb{N}} |a_{mnkl}|\right)^s \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|\right)^s \\ &\leq \left(\sup_{k,l \in \mathbb{N}} |a_{mnkl}|\right)^s \sum_{k,l} |x_{kl}|^s \end{aligned} \tag{6.3}$$

sonucunu elde ederiz. O zaman, (6.3) eşitsizliğinde $m,n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum aldığımızda

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| \leq N\left(\|x\|_s\right)^{1/s}$$

olduğunu görürüz. Dolayısı ile (6.1) şartı, yeterdir.

(ii) $1 < s < \infty$ ve $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$ olsun. O hâlde, her $x \in \mathcal{L}_s$ için Ax mevcut ve $\mathcal{M}_u$ uzayına aittir. $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_s$ dizisini her $k,l \in \mathbb{N}$ için

$$x_{kl} := \begin{cases} (sgn\ a_{mnkl})|a_{mnkl}|^{s'-1} & , \quad 0 \leq k \leq k_0 \text{ ve } 0 \leq l \leq l_0, \\ 0 & , \quad k > k_0 \text{ ve } l > l_0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Böylece, her $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| \\ &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k,l=0}^{k_0,l_0} a_{mnkl}(sgn\ a_{mnkl})|a_{mnkl}|^{s'-1}\right| \\ &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l=0}^{k_0,l_0} |a_{mnkl}|^{s'} < \infty \end{aligned}$$

bağıntısını elde ederiz. Dolayısı ile (6.2) şartı, gerektir.

Tersine, (6.2) bağıntısı sağlansın. Herhangi bir $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_s$ dizisini alalım. Başar ve Sever (2009) çalışmasındaki Teorem 2.7 gereğince her bir $m,n \in \mathbb{N}$ için $A_{mn} \in \mathcal{L}_{s'}$ olduğundan Ax mevcuttur. Böylece, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| \\ &\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k,l} |a_{mnkl}|^{s'}\right)^{1/s'} \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|^s\right)^{1/s} \\ &< M_1\|x\|_s \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bu adım, ispatı tamamlar.

Teorem 6.2. *$0 < s \leq 1$ ve $1 \leq s_1 < \infty$ olsun. Bu durumda, dört boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(\mathcal{L}_s : \mathcal{L}_{s_1})$ sınıfında bulunması için*

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{m,n} |a_{mnkl}|^{s_1} < \infty \tag{6.4}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. $0 < s \leq 1$, $1 \leq s_1 < \infty$ ve $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{L}_{s_1})$ olsun. Bu durumda; her $x \in \mathcal{L}_s$ için Ax mevcut ve $\mathcal{L}_{s_1}$ uzayına aittir. Ayrıca, her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için Teorem 5.4 gereğince $A_{mn} \in \mathcal{M}_u$. Böylece, her bir sabit $k, l \in \mathbb{N}$ ve $\mathbf{e^{kl}} \in \mathcal{L}_s$ dizisi için

$$\|A\mathbf{e^{kl}}\|_{s_1} = \left(\sum_{m,n} |a_{mnkl}|^{s_1} \right)^{1/s_1} < \infty$$

olduğu görülür. O hâlde, (6.4) şartı gerektir.

Aksine, (6.4) şartı sağlansın ve $x = (x_{kl})$ dizisi, $\mathcal{L}_s$ uzayına ait herhangi bir dizi olsun. Bu durumda; her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için, Teorem 5.4 gereğince $A_{mn} \in \mathcal{M}_u$, yani Ax mevcuttur. O hâlde,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m,n=0}^{i,j} |(Ax)_{mn}|^{s_1} \right)^{1/s_1} &= \left(\sum_{m,n=0}^{i,j} \left| \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \right|^{s_1} \right)^{1/s_1} \\
&\leq \sum_{k,l} \left(\sum_{m,n=0}^{i,j} |a_{mnkl} x_{kl}|^{s_1} \right)^{1/s_1} \\
&= \sum_{k,l} \left[|x_{kl}| \left(\sum_{m,n=0}^{i,j} |a_{mnkl}|^{s_1} \right)^{1/s_1} \right] \\
&\leq \sup_{k,l \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m,n=0}^{i,j} |a_{mnkl}|^{s_1} \right)^{1/s_1} \cdot \sum_{k,l} |x_{kl}| < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. $i, j \in \mathbb{N}$ keyfi olduğundan $\|Ax\|_{s_1} < \infty$ sonucunu elde ederiz.

Teorem 6.3. *$A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu herhangi bir matris olsun. Bu durumda; aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $0 < s \leq 1$ olsun. Bu durumda; A matrisinin $(\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında bulunması için, (6.1) şartının sağlanması ve

$$bp - \lim_{m,n \to \infty} a_{mnkl} = \alpha_{kl} \tag{6.5}$$

şartı sağlanacak şekilde bir $(\alpha_{kl}) \in \Omega$ dizisinin mevcut bulunması gerek ve yeterdir.

(ii) $1 < s < \infty$ olsun. Bu durumda; A matrisinin $(\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında bulunması için, (6.2) ve (6.5) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. (i) $0 < s \leq 1$ ve $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$ olsun. $\mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{M}_u$ kapsaması mevcut olduğundan (6.1) şartının gerekliliğini Teorem 6.1'in (i) kısmından elde ederiz. Hipotezden dolayı her $x \in \mathcal{L}_s$ için Ax mevcut ve $\mathcal{C}_{bp}$ uzayına ait olduğundan bu durum, $\mathbf{e^{kl}} \in \mathcal{L}_s$

dizisi için de geçerlidir. Dolayısı ile her bir sabit $k, l \in \mathbb{N}$ için, $A\mathbf{e^{kl}} = (a_{mnkl})_{m,n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{bp}$. O hâlde, (6.5) şartı gerektir.

Aksine, (6.1) ve (6.5) şartları sağlansın ve $x = (x_{kl})$, $\mathcal{L}_s$ uzayındaki herhangi bir dizi olsun. Her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için $A_{mn} \in \mathcal{L}_s^{\beta(\vartheta)}$ olduğundan Ax mevcuttur. Bu durumda, (6.1) bağıntısını dikkate alarak (6.5) bağıntısından her bir sabit $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$|\alpha_{kl}| = bp - \lim_{m,n\to\infty} |a_{mnkl}| \leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{mnkl}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece, $(\alpha_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ olduğu sonucuna varırız. O hâlde, her $x \in \mathcal{L}_s$ için, $\sum_{k,l} \alpha_{kl}x_{kl}$ serisi yakınsaktır.

Ayrıca, (6.5) bağıntısı gereğince her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $|a_{mnkl} - \alpha_{kl}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcuttur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl} - \sum_{k,l} \alpha_{kl}x_{kl}\right|^s &= \left|\sum_{k,l}(a_{mnkl} - \alpha_{kl})x_{kl}\right|^s \\
&\leq \left[\sum_{k,l} |(a_{mnkl} - \alpha_{kl})x_{kl}|\right]^s \\
&< \varepsilon^s \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|\right)^s \\
&< \varepsilon^s \sum_{k,l} |x_{kl}|^s
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Dolayısıyla, $bp - \lim_{m,n\to\infty}(Ax)_{mn} = \sum_{k,l} \alpha_{kl}x_{kl}$ eşitliği sağlanır.

(ii) $s > 1$ olsun. Şartların gerekliliği (i) kısmının ispatına benzer olarak gösterilebileceğinden yalnız yeterlilik kısmının ispatını vereceğiz.

(6.2) bağıntısını kullanarak her $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k,l=0}^{i,j} |\alpha_{kl}|^{s'} = bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{i,j} |a_{mnkl}|^{s'} \leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l=0}^{i,j} |a_{mnkl}|^{s'} < \infty$$

elde ederiz. Yani, $(\alpha_{kl}) \in \mathcal{L}_{s'}$. O hâlde, her $x \in \mathcal{L}_s$ için $\sum_{k,l} \alpha_{kl}x_{kl}$ serisi yakınsaktır.

Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ sabitlerini

$$\sum_{k,l=k_0+1,l_0+1}^{\infty} |x_{kl}|^s < \left(\frac{\varepsilon}{4M_1^{1/s'}}\right)^s$$

olacak şekilde seçelim. Bu durumda; (6.5) bağıntısı gereğince $m, n > n_0$ olan bütün $m, n \in \mathbb{N}$'ler için

$$\left|\sum_{k,l=0}^{k_0,l_0}(a_{mnkl} - \alpha_{kl})x_{kl}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Böylece, Hölder eşitsizliğini kullanarak yeterince büyük bütün m ve n değerleri için

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl} - \sum_{k,l}\alpha_{kl}x_{kl}\right| &= \left|\sum_{k,l}(a_{mnkl} - \alpha_{kl})x_{kl}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k,l=0}^{k_0,l_0}(a_{mnkl} - \alpha_{kl})x_{kl}\right| + \left|\sum_{k,l=k_0+1,l_0+1}^{\infty}(a_{mnkl} - \alpha_{kl})x_{kl}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left[\sum_{k,l=k_0+1,l_0+1}^{\infty}(|a_{mnkl}| + |\alpha_{kl}|)^{s'}\right]^{1/s'} \\
&\times \left(\sum_{k,l=k_0+1,l_0+1}^{\infty}|x_{kl}|^s\right)^{1/s} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. O hâlde, $Ax \in \mathcal{C}_{bp}$.

Teorem 6.4. *$1 \leq s < \infty$ ve $\mathcal{K}_*$, $\mathbb{N}$ cümlesinin bir altcümlesi olsun. Bu durumda, dört boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(\mathcal{M}_u : \mathcal{L}_s)$ sınıfında olması için*

$$\sum_{m,n}\left|\sum_{k,l\in\mathcal{K}_*} a_{mnkl}\right|^s < \infty \tag{6.6}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{M}_u : \mathcal{L}_s)$ olsun. Bu durumda; her $x \in \mathcal{M}_u$ için Ax mevcut ve $\mathcal{L}_s$ uzayına aittir. Böylece, $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_u$ dizisi için

$$\sum_{m,n}|(A\mathbf{e})_{mn}|^s = \sum_{m,n}\left|\sum_{k,l} a_{mnkl}\right|^s < \infty \tag{6.7}$$

elde ederiz. $\mathcal{K}_*$, $\mathbb{N}$ cümlesinin bir kısmı olduğundan (6.7) bağıntısından

$$\sum_{m,n}\left|\sum_{k,l\in\mathcal{K}_*} a_{mnkl}\right|^s < \sum_{m,n}\left|\sum_{k,l} a_{mnkl}\right|^s < \infty$$

sonucunu çıkartırız. Yani, (6.6) şartı gerektir.

Aksine, (6.6) şartının sağlandığını kabul edelim ve herhangi bir $x = (x_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ dizisini alalım. $x = (x_{kl}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_u$ alırsak (6.6) şartının sağlanmasının $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \subset (\mathcal{L}_s)_A$ olmasına denk olduğunu görürüz. Böylece, Yardımcı Teorem 2.21'i dikkate alarak $\mathcal{M}_u \subset (\mathcal{L}_s)_A$ olduğu sonucunu elde ederiz.

Teorem 6.5. *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında olması için*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} Q_k T_l \left| \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) \right| < \infty, \tag{6.8}$$

$$\textit{her bir } l \in \mathbb{N} \textit{ için } \lim_{k\to\infty} Q_k T_l \Delta_{01}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) = 0, \tag{6.9}$$

$$\textit{her bir } k \in \mathbb{N} \textit{ için } \lim_{l\to\infty} Q_k T_l \Delta_{10}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) = 0, \tag{6.10}$$

$$\exists a_{kl} \in \mathbb{C} \ni \forall k,l \in \mathbb{N} : \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) = a_{kl}, \tag{6.11}$$

$$\exists v \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) = v \tag{6.12}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. $x = (x_{mn}) \in R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ olsun. Bu durumda; bir $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_r$ dizisi mevcuttur. $s_{mn} = \sum_{i,j=0}^{m,n} x_{ij}$ olmak üzere her $m,n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl}$ serisinin (i,j)ninci dikdörtgen kısmî toplamına genelleştirilmiş Abel dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} (Ax)_{mn}^{[i,j]} &= \sum_{k,l=0}^{i,j} a_{mnkl} x_{kl} \\ &= \sum_{k,l=0}^{i-1,j-1} s_{kl} \Delta_{11}^{kl} a_{mnkl} + \sum_{k=0}^{i-1} s_{kj} \Delta_{10}^{kj} a_{mnkj} + \sum_{l=0}^{j-1} s_{il} \Delta_{01}^{il} a_{mnil} + s_{ij} a_{mnij} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Her $m,n,i,j \in \mathbb{N}$ için (3.4) bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned} (Ax)_{mn}^{[i,j]} &= \sum_{k,l=0}^{i,j} a_{mnkl} x_{kl} \\ &= \sum_{k,l=0}^{i-1,j-1} Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) y_{kl} + \sum_{k=0}^{i-1} Q_k T_j \Delta_{10}^{kj} \left(\frac{a_{mnkj}}{q_k t_j} \right) y_{kj} \\ &+ \sum_{l=0}^{j-1} Q_i T_l \Delta_{01}^{il} \left(\frac{a_{mnil}}{q_i t_l} \right) y_{il} + Q_i T_j \frac{a_{mnij}}{q_i t_j} y_{ij} \end{aligned} \tag{6.13}$$

eşitliğine sahip oluruz. $B_{mn} = \left(b_{ijkl}^{mn}\right)$ matrisini, her $i, j, k, l, m, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{ijkl}^{mn} = \begin{cases} Q_k T_l \Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l}\right) & , \ 0 \le k \le i-1 \ \text{ ve } 0 \le l \le j-1 \\ Q_k T_j \Delta_{10}^{kj}\left(\frac{a_{mnkj}}{q_k t_j}\right) & , \ 0 \le k \le i-1 \ \text{ ve } \ l = j \\ Q_i T_l \Delta_{01}^{il}\left(\frac{a_{mnil}}{q_i t_l}\right) & , \ k = i \ \text{ ve } \ 0 \le l \le j-1 \\ Q_i T_j \frac{a_{mnij}}{q_i t_j} & , \ k = i \ \text{ ve } \ l = j \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{6.14}$$

olarak tanımlayalım. Böylece, (6.13) bağıntısını $(Ax)_{mn}^{[i,j]} = (B_{mn}y)_{[i,j]}$ olarak ifade edebiliriz. Bu durumda; her $m, n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ için $(Ax)_{mn}^{[i,j]}$ dikdörtgen kısmî toplamlarının r-yakınsaklığı $B_{mn} \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_r)$ olmasına ve her sabit $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k,l} \left| Q_k T_l \Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l}\right)\right| < \infty, \tag{6.15}$$

$$\text{her bir } \ l \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{k\to\infty} Q_k T_l \Delta_{01}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l}\right) = 0, \tag{6.16}$$

$$\text{her bir } \ k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{l\to\infty} Q_k T_l \Delta_{10}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l}\right) = 0 \tag{6.17}$$

şartlarının sağlanmasına denk olur.

Eğer (6.14) bağıntısında $i, j \to \infty$ için ϑ-limit alırsak

$$\vartheta - \lim_{i,j\to\infty} b_{ijkl}^{mn} = Q_k T_l \Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l}\right) \tag{6.18}$$

eşitliğini elde ederiz. (6.18) bağıntısını kullanarak dört boyutlu bir $B = (b_{mnkl})$ matrisini bütün $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$b_{mnkl} = Q_k T_l \Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l}\right) \tag{6.19}$$

ile tanımlayalım. Böylece, (6.13), (6.16), (6.17) ve (6.18) bağıntılarından

$$\vartheta - \lim_{i,j\to\infty} (Ax)_{mn}^{[i,j]} = \vartheta - \lim (By)_{mn}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda, Yardımcı Teorem 2.23'ü kullanarak "$A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ olması için gerek ve yeter şart, $B \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_\vartheta)$ olmasıdır." çift gerektirmesinden B matrisinin taşıyacağı şartları

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}\left|Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)\right|<\infty, \tag{6.20}$$

$$\exists a_{kl}\in\mathbb{C}\ni\forall k,l\in\mathbb{N}:\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)=a_{kl}, \tag{6.21}$$

$$\exists v\in\mathbb{C}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)=v, \tag{6.22}$$

$$\exists l_0\in\mathbb{C}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}T_{l_0}\sum_{k}\Delta_{01}^{kl_0}\left(\frac{a_{mnkl_0}}{t_{l_0}}\right)=u_{l_0}, \tag{6.23}$$

$$\exists k_0\in\mathbb{C}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}Q_{k_0}\sum_{l}\Delta_{10}^{k_0l}\left(\frac{a_{mnk_0l}}{q_{k_0}}\right)=v_{k_0} \tag{6.24}$$

şeklinde buluruz. Bunlara ilâve olarak

$$\begin{aligned}\sum_k b_{mnkl_0} &= T_{l_0}\sum_k Q_k\Delta_{11}^{kl_0}\left(\frac{a_{mnkl_0}}{q_kt_{l_0}}\right)\\ &< \sum_{k,l}Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)\\ &= \sum_{k,l}b_{mnkl}\end{aligned} \tag{6.25}$$

elde ederiz. Böylece, (6.22) bağıntısını dikkate alarak (6.25) ifadesinde $m,n\to\infty$ için ϑ-limit aldığımız zaman

$$\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_k b_{mnkl_0}<\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}b_{mnkl}=v$$

olduğunu görürüz. Böylece, (6.23) şartına sahip oluruz. Benzer şekilde, (6.22) şartını kullanarak (6.24) şartına sahip oluruz. Bu suretle, (6.15)-(6.24) şartlarından A matrisinin $(R^{qt}(\mathcal{C}_r):\mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında bulunması için (6.8)-(6.12) şartlarını sağlamasının gerek ve yeter olduğu sonucunu çıkartırız.

Teorem 6.6. *$A=(a_{mnkl})$ dört boyutlu herhangi bir matris olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $0<s\leq 1$ olsun. Bu durumda; $A\in(R^{qt}(\mathcal{L}_s):\mathcal{M}_u)$ sınıfında bulunması için (6.8)-(6.10) şartlarıyla birlikte

$$\sup_{m,n,k,l\in\mathbb{N}}\left|Q_kT_l\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right|<\infty \tag{6.26}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) $1 < s < \infty$ olsun. Bu durumda; $A \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ sınıfında bulunması için (6.9)-(6.10) şartlarıyla birlikte

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) \right|^{s'} < \infty \tag{6.27}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. İspatı, Teorem 6.5'nın ispatına benzer şekilde vereceğiz.

(i) $0 < s \leq 1$ ve $x = (x_{mn}) \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ olsun. Bu durumda; bir $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_s$ dizisi mevcuttur. O hâlde, (6.13) bağıntısını $(Ax)_{mn}^{[i,j]} = (B_{mn}y)_{[i,j]}$ biçiminde yazabileceğimizi aklımızda tutarak her $m, n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ için, $(Ax)_{mn}^{[i,j]}$ dikdörtgen kısmî toplamlarının bp-yakınsaklığı $B_{mn} \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$ olmasına ve her sabit $m, n \in \mathbb{N}$ için (6.15)-(6.17) şartlarının ve

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| Q_k T_l \frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right| < \infty \tag{6.28}$$

şartının sağlanmasına denk olur.

(6.14) bağıntısında $i, j \to \infty$ iken ϑ-limit alarak (6.19) bağıntısında elde ettiğimiz dört boyutlu $B = (b_{mnkl})$ matrisini ve Teorem 6.1'in (i) kısmını dikkate alarak "$A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ olması için gerek ve yeter şart, $B \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$ olmasıdır." çift gerektirmesinden B matrisinin taşıyacağı şartı

$$\sup_{m,n,k,l\in\mathbb{N}} \left| Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) \right| < \infty \tag{6.29}$$

şeklinde buluruz. Böylece, (6.15)-(6.17), (6.28) ve (6.29) şartlarından A matrisinin $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ sınıfında bulunması için, (6.8)-(6.10) şartlarını ve (6.26) şartını sağlamasının gerek ve yeter olduğu sonucuna varırız.

(ii) $1 < s < \infty$ olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ için, $(Ax)_{mn}^{[i,j]}$ dikdörtgen kısmî toplamlarının bp-yakınsaklığı, $B_{mn} \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$ olmasına ve her sabit $m, n \in \mathbb{N}$ için (6.8)-(6.10) şartlarıyla birlikte

$$\sum_{k,l} \left| Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) \right|^{s'} < \infty \tag{6.30}$$

şartının sağlanmasına denk olur. Ayrıca, $B_{mn} = \left(b_{ijkl}^{mn}\right)$ matrisinin tanımından (6.19) bağıntısına sahip oluruz.

Böylece, Teorem 6.1'in (ii) kısmını dikkate alarak "$A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ olması için gerek ve yeter şart, $B \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$ olmasıdır." çift gerektirmesinden B matrisinin taşıyacağı şartı

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) \right|^{s'} < \infty \tag{6.31}$$

olarak buluruz.

Ayrıca, (6.31) bağıntısı, (6.8) ve (6.30) bağıntılarını ihtiva etmektedir. Böylece, A matrisinin $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ sınıfında bulunması için, (6.9)-(6.10) şartlarını ve (6.27) şartını sağlamasının gerek ve yeter olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 6.7 ve 6.8'un ispatları Teorem 6.5 ve Teorem 6.6'nin ispatına benzer olarak yapılabileceğinden vermeyeceğiz.

Teorem 6.7. $A = (a_{mnkl})$ *dört boyutlu herhangi bir matris olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $0 < s \leq 1$ *olsun. Bu durumda; A matrisinin* $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{C}_{bp})$ *sınıfında bulunması için, (6.8)-(6.10), (6.26) şartlarıyla birlikte*

$$\exists (a_{kl}) \in \Omega \ni \textit{her } k,l \in \mathbb{N} \textit{ için } bp - \lim_{m,n\to\infty} Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) = a_{kl} \tag{6.32}$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) $1 < s < \infty$ *olsun. Bu durumda; A matrisinin* $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{C}_{bp})$ *sınıfında bulunması için, (6.9)-(6.10), (6.27) ve (6.32) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.*

Teorem 6.8. $0 < s < 1$ *ve* $1 < s_1 < \infty$ *olsun. Bu durumda,* $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{L}_{s_1})$ *sınıfında bulunması için Teorem 6.5'nın (6.8)-(6.10) şartlarıyla birlikte*

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| Q_k T_l \frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right| < \infty,$$

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{m,n} \left| Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) \right|^{s_1} < \infty$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Teorem 6.9. $A = (a_{mnkl})$ *matrisinin* $(R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{C}_f)$ *sınıfında olması için (6.8)-(6.10) şartlarının ve* $a_{kl} \in \mathbb{C}$ *sabiti ile birlikte,*
her bir k,l *doğal sayısı için*

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)} \sum_{m=s}^{s+q} \sum_{n=t}^{t+r} Q_k T_l \Delta_{11}^{kl} \left(\frac{a_{mnkl}}{q_k t_l} \right) = a_{kl} \tag{6.33}$$

yakınsaması $s,t\in\mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists u\in\mathbb{C}$ vardır öyle ki

$$bp-\lim_{q,r\to\infty}\frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{k,l}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)=u \tag{6.34}$$

yakınsaması $s,t\in\mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

her bir k doğal sayısı için

$$bp-\lim_{q,r\to\infty}\frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{l}\left|\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)-a_{kl}\right|=0$$

yakınsaması $s,t\in\mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

her bir l doğal sayısı için

$$bp-\lim_{q,r\to\infty}\frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{k}|\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)-a_{kl}|=0$$

yakınsaması $s,t\in\mathbb{N}$'ye göre düzgündür.

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. Teoremin ispatını, Teorem 6.5'nın ispatına benzer olarak vereceğiz. $x=(x_{mn})\in R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ olsun. Bu durumda; bir $y=(y_{mn})\in\mathcal{C}_{bp}$ dizisi mevcuttur. $(Ax)_{mn}^{[i,j]}=(B_{mn}y)_{[i,j]}$ olduğundan her $m,n\in\mathbb{N}$ ve her $x\in R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$ için, $(Ax)_{mn}^{[i,j]}$ dikdörtgen kısmî toplamlarının $bp-$yakınsaklığı $B_{mn}\in(\mathcal{C}_{bp}:\mathcal{C}_{bp})$ olmasına ve her $m,n\in\mathbb{N}$ sabiti için, (6.15)-(6.17) şartlarının sağlanmasına denktir. Burada B_{mn} matrisi, (6.14)'daki gibi tanımlıdır. Ayrıca, (3.4) bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}(Ax)_{mn}^{[i,j]} &= \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}\left(\sum_{k,l=0}^{i,j}a_{mnkl}x_{kl}\right)\\
&= \sum_{k,l=0}^{i-1,j-1}\left[\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}\frac{Q_kT_l}{(q+1)(r+1)}\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)\right]y_{kl}\\
&+ \sum_{k=0}^{i-1}\left[\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}\frac{Q_kT_j}{(q+1)(r+1)}\Delta_{10}^{kj}\left(\frac{a_{mnkj}}{q_kt_j}\right)\right]y_{kj}\\
&+ \sum_{l=0}^{j-1}\left[\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}\frac{Q_iT_l}{(q+1)(r+1)}\Delta_{01}^{il}\left(\frac{a_{mnil}}{q_it_l}\right)\right]y_{il}\\
&+ \sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r}\frac{Q_iT_j}{(q+1)(r+1)}\frac{a_{mnij}}{q_it_j}y_{ij}\\
&= (C^{st}y)_{[i,j]},
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $C^{st} = \{c^{st}(k,l,q,r,i,j)\}$ matrisi; her $k,l,q,r,i,j,s,t \in \mathbb{N}$ için,

$$c^{st}(k,l,q,r,i,j) := \begin{cases} \sum\limits_{m=s}^{s+q}\sum\limits_{n=t}^{t+r} \frac{Q_kT_l}{(q+1)(r+1)}\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right) & , \quad 0 \leq k \leq i-1 \text{ ve } 0 \leq l \leq j-1 \\ \sum\limits_{m=s}^{s+q}\sum\limits_{n=t}^{t+r} \frac{Q_kT_j}{(q+1)(r+1)}\Delta_{10}^{kj}\left(\frac{a_{mnkj}}{q_kt_j}\right) & , \quad 0 \leq k \leq i-1 \text{ ve } l = j \\ \sum\limits_{m=s}^{s+q}\sum\limits_{n=t}^{t+r} \frac{Q_iT_l}{(q+1)(r+1)}\Delta_{01}^{il}\left(\frac{a_{mnil}}{q_it_l}\right) & , \quad k = i \text{ ve } 0 \leq l \leq j-1 \\ \sum\limits_{m=s}^{s+q}\sum\limits_{n=t}^{t+r} \frac{Q_iT_j}{(q+1)(r+1)}\frac{a_{mnij}}{q_it_j} & , \quad k = i \text{ ve } l = j \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda .} \end{cases} \tag{6.35}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca, $C^{st} = \{c^{st}(k,l,q,r,i,j)\}$ matrisinin (6.35) ile verilen tanımından

$$bp - \lim_{i,j\to\infty} c^{st}(k,l,q,r,i,j) = \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r} Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right) \tag{6.36}$$

eşitliğini elde ederiz. (6.36) bağıntısını kullanarak bütün $m,n,k,l \in \mathbb{N}$'ler için, (6.19) ifadesinde verilen $B = (b_{mnkl})$ matrisini tanımlayalım. Böylece,

$$b(k,l,q,r,s,t) := \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r} Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right)$$

yazabiliriz. Böylece, "$A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{C}_f)$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_f)$ olmasıdır." çift gerektirmesine sahip oluruz. Bu durumda; Yardımcı Teorem 2.28'i kullanarak,

her bir k,l doğal sayısı için

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r} Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right) = a_{kl} \tag{6.37}$$

yakınsaması $s,t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists u \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{k,l}\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r} Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right) = u \tag{6.38}$$

yakınsaması $s,t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

her bir k doğal sayısı için

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{l}\left|\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r} Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right) - a_{kl}\right| = 0 \tag{6.39}$$

yakınsaması $s,t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

her bir l doğal sayısı için

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)}\sum_{k}\left|\sum_{m=s}^{s+q}\sum_{n=t}^{t+r} Q_kT_l\Delta_{11}^{kl}\left(\frac{a_{mnkl}}{q_kt_l}\right) - a_{kl}\right| = 0 \tag{6.40}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür.

şartlarını ve (6.8) şartını elde ederiz. Böylece, "$A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{C}_f)$ olması için gerek ve yeter şart; (6.8)-(6.10), (6.37)-(6.40) şartlarının en az bir $a_{kl} \in \mathbb{C}$ için sağlamasıdır" sonucunu elde ederiz.

$(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_f)$ ve $(R^{qt}(\mathcal{C}_p) : \mathcal{C}_f)$ matris sınıflarının karakterizasyonunu ispatsız vereceğiz.

Teorem 6.10. *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için (6.8)-(6.10), (6.33)-(6.34) şartlarının ve*

"$\exists l_0 \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)} \sum_k \sum_{m=s}^{s+q} \sum_{n=t}^{t+r} Q_k T_{l_0} \Delta_{11}^{kl_0} \left(\frac{a_{mnkl_0}}{q_k t_{l_0}} \right) = u_{l_0}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür,

$\exists k_0 \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki

$$bp - \lim_{q,r\to\infty} \frac{1}{(q+1)(r+1)} \sum_l \sum_{m=s}^{s+q} \sum_{n=t}^{t+r} Q_{k_0} T_l \Delta_{11}^{k_0 l} \left(\frac{a_{mnk_0 l}}{q_{k_0} t_l} \right) = \nu_{k_0}$$

yakınsaması $s, t \in \mathbb{N}$'ye göre düzgündür."

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Teorem 6.11. *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(R^{qt}(\mathcal{C}_p) : \mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için (6.8)-(6.10), (6.33) ve (6.34) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.*

Teorem 6.12. *Dört boyutlu $E = (e_{mnkl})$ ve $F = (f_{mnkl})$ matrislerinin elemanları arasında; her $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için,*

$$f_{mnkl} = \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{i,j=0}^{m,n} q_i t_j e_{ijkl} \tag{6.41}$$

ilişkisi olsun ve μ, herhangi bir çift dizi uzayını göstersin. Bu durumda; E matrisinin $(\mu : R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta))$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart, F matrisinin $(\mu : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında bulunmasıdır.

İspat. Dört boyutlu $E = (e_{mnkl})$ ve $F = (f_{mnkl})$ matrislerinin elemanları arasında (6.41) bağıntısı mevcut ve μ, verilen herhangi bir çift dizi uzayı olsun. $x = (x_{mn}) \in \mu$ alalım. Şimdi, her $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ için geçerli olan

$$\frac{1}{Q_m T_n} \sum_{i,j=0}^{m,n} \sum_{k,l=0}^{r,s} q_i t_j e_{ijkl} x_{kl} = \sum_{k,l=0}^{r,s} f_{mnkl} x_{kl} \tag{6.42}$$

eşitliğini dikkate alalım. O zaman, (6.42) bağıntısında $r, s \to \infty$ için limit aldığımız zaman bütün $m, n \in \mathbb{N}$'ler için

$$\frac{1}{Q_m T_n} \sum_{i,j=0}^{m,n} q_i t_j (Ex)_{ij} = (Fx)_{mn} \tag{6.43}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece, (6.43) ifadesinden "$x \in \mu$ olduğunda $Ex \in R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta)$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \mu$ olduğunda $Fx \in \mathcal{C}_\vartheta$ olmasıdır" çift gerektirmesine ulaşırız.

Teorem 6.12 ve Yardımcı Teoremler 2.22-2.24'e dayanarak aşağıdaki sonuca sahip oluruz:

Sonuç 6.13. *Dört boyutlu $E = (e_{mnkl})$ ve $F = (f_{mnkl})$ matrislerinin elemanları arasında (6.41) bağıntısı bulunsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) *$E = (e_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_p : R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta))$ olması için gerek ve yeter şart (2.4)-(2.8) bağıntılarının a_{mnkl} yerine f_{mnkl} alınarak sağlanmasıdır.*

(ii) *$E = (e_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_r : R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta))$ olması için gerek ve yeter şart (2.4)-(2.6), (2.9) ve (2.10) bağıntılarının a_{mnkl} yerine f_{mnkl} alınarak sağlanmasıdır.*

(iii) *$E = (e_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_{bp} : R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta))$ olması için gerek ve yeter şart (2.4)-(2.6), (2.11) ve (2.12) bağıntılarının a_{mnkl} yerine f_{mnkl} alınarak sağlanmasıdır.*

Teorem 6.14. *λ ve μ iki çift dizi uzayı, $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu herhangi bir matris ve $B = (b_{mnij})$ her $m, n, i, j \in \mathbb{N}$ için $i > m$ ve $j > n$ olduğunda $b_{mnij} = 0$, ve $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olduğunda $b_{mnij} \neq 0$ olacak şekilde bir dört boyutlu matris olsun. Bu durumda; A matrisinin $(\lambda : \mu_B)$ sınıfında bulunması için gerek ve yeter şart, BA çarpım matrisinin $(\lambda : \mu)$ sınıfında bulunmasıdır.*

İspat. λ ve μ iki çift dizi uzayı, $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu herhangi bir matris ve $B = (b_{mnij})$ her $m, n, i, j \in \mathbb{N}$ için $i > m$ ve $j > n$ olduğunda $b_{mnij} = 0$, ve $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olduğunda $b_{mnij} \neq 0$ olacak şekilde bir dört boyutlu matris olsun. Ayrıca, $x = (x_{kl}) \in \lambda$ olsun. Bu durumda; her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij} \sum_{k,l=0}^{i,j} a_{ijkl} x_{kl} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \left(\sum_{i,j=k,l}^{m,n} b_{mnij} a_{ijkl} \right) x_{kl}$$

olduğundan $m, n \to \infty$ iken limit aldığımızda $B(Ax) = (BA)x$ eşitliğini elde ederiz. Böylece, "$x \in \lambda$ olduğunda $Ax \in \mu_B$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \lambda$ olduğunda $(BA)x \in \mu$ olmasıdır" çift gerektirmesine sahip oluruz.

$C = (c_{mnkl})$, $D = (d_{mnkl})$ ve $E = (e_{mnkl})$ dört boyutlu matrislerini bütün $m, n, k, l \in \mathbb{N}$'ler için, sırası ile

$$c_{mnkl} := \sum_{i,j=k,l}^{m,n} a_{ijkl} \,, \qquad d_{mnkl} := \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=k,l}^{m,n} a_{ijkl} \quad \text{ve}$$
$$e_{mnkl} := \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{i,j=k,l}^{m,n} q_i t_j a_{ijkl}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım.

Artık, 6.1, 6.3, 6.6 ve 6.7 numaralı teoremlerin birçok yeni sonucunu verebiliriz.

Sonuç 6.15. $0 < s \leq 1$ *olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{BS})$ *olması için (6.1) şartının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(ii) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{M}_u})$ *olması için (6.1) şartının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iii) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : R^{qt}(\mathcal{M}_u))$ *olması için (6.1) şartının* a_{mnkl} *yerine* e_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iv) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{CS}_{bp})$ *olması için (6.1) ve (6.5) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(v) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{C}_{bp}})$ *olması için (6.1) ve (6.5) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeter şartdir.*

(vi) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}))$ *olması için (6.1) ve (6.5) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* e_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

Sonuç 6.16. $1 < s < \infty$ *olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{BS})$ *olması için (6.2) şartının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(ii) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{M}_u})$ *olması için (6.2) şartının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iii) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : R^{qt}(\mathcal{M}_u))$ *olması için (6.2) şartının* a_{mnkl} *yerine* e_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iv) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \mathcal{CS}_{bp})$ *olması için (6.2) ve (6.5) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(v) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : \widetilde{\mathcal{C}}_{bp})$ *olması için (6.2) ve (6.5) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(vi) $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_s : R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}))$ *olması için (6.2) ve (6.5) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* e_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

Sonuç 6.17. $0 < s \leq 1$ *olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{BS})$ *olması için, (6.8)-(6.10) ve (6.26) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(ii) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{CS}_{bp})$ *olması için (6.8)-(6.10), (6.26) ve (6.32) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iii) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \widetilde{\mathcal{M}}_u)$ *olması için (6.8)-(6.10) ve (6.26) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iv) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \widetilde{\mathcal{C}}_{bp})$ *olması için (6.8)-(6.10), (6.26) ve (6.32) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(v) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : R^{qt}(\mathcal{M}_u))$ *olması için (6.8)-(6.10) ve (6.26) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* e_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(vi) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}))$ *olması için (6.8)-(6.10), (6.26) ve (6.32) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* e_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

Sonuç 6.18. $1 < s < \infty$ *olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{BS})$ *olması için (6.9), (6.10) ve (6.27) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(ii) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{CS}_{bp})$ *olması için (6.9), (6.10), (6.27) ve (6.32) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* c_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iii) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \widetilde{\mathcal{M}}_u)$ *olması için (6.9), (6.10) ve (6.27) şartlarının* a_{mnkl} *yerine* d_{mnkl} *alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(iv) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \widetilde{\mathcal{C}}_{bp})$ *olması için (6.9), (6.10), (6.27) ve (6.32) şartlarının a_{mnkl} yerine d_{mnkl} alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(v) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : R^{qt}(\mathcal{M}_u))$ *olması için (6.9), (6.10) ve (6.27) şartlarının a_{mnkl} yerine e_{mnkl} alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

(vi) $A = (a_{mnkl}) \in (R^{qt}(\mathcal{L}_s) : R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}))$ *olması için (6.9), (6.10), (6.27) ve (6.32) şartlarının a_{mnkl} yerine e_{mnkl} alınarak sağlanması, gerek ve yeterdir.*

7. SONUÇ

Tek dizilerin normlu ve paranormlu uzaylarında bilinen üçgen matrislerin etki alanları birçok araştırmacı tarafından çalışılmasına rağmen, bu durum çift dizi uzayları ve dört boyutlu matrisler için bir açık problem olma vasfını korumaktadır.

Altay ve Başar (2005); kîsmi toplamları, sırası ile, $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_u$ uzaylarında olan serilerin $\mathcal{BS}$, $\mathcal{BS}(t)$, $\mathcal{CS}_p$, $\mathcal{CS}_{bp}$, $\mathcal{CS}_r$ ve $\mathcal{BV}$ uzaylarını inşa ettiler. Dört boyutlu $S = (s_{mnkl})$ matrisi, her $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için

$$s_{mnkl} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq k \leq m,\ 0 \leq l \leq n, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tarif edildiğinde $\mathcal{BS}$, $\mathcal{BS}(t)$, $\mathcal{CS}_p$, $\mathcal{CS}_{bp}$, $\mathcal{CS}_r$ ve $\mathcal{BV}$ uzaylarının, sırası ile, S matrisinin $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_u$ uzaylarındaki etki alanları olduğu görülür. Bu çalışmanın tabii bir devamı olarak Mursaleen ve Başar (2014), birinci mertebeden dört boyutlu Cesàro ortalamasının $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ and $\mathcal{L}_s$ $(1 \leq s < \infty)$ uzaylarındaki etki alanlarını incelediler.

Dört boyutlu bir matrisin bir çift dizi uzayındaki etki alanına dair incelemelerin bir başlangıcı olarak Mursaleen ve Başar (2014) çalışmasının esas sonuçları, çift dizi uzayları ile ilgilenen araştırmacılar için oldukça önemlidir. Altay ve Başar (2005), Mursaleen ve Başar (2014) çalışmalarını takip ederek bu çalışmada; dört boyutlu R^{qt} Riesz ortalamasının $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $0 < s < \infty$ için $\mathcal{L}_s$ uzaylarındaki etki alanları incelenmiştir. Tanımlanan yeni uzayların topolojik özellikleri ve mevcut çift dizi uzayları ile kapsama bağıntıları verilmiştir. Ayrıca, uzayların $\alpha-$, $\beta(\vartheta)-$ ve $\gamma-$dualleri tayin edilmiştir. Daha sonra $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere, dört boyutlu matrislerin $(R^{qt}(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ ve $(R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta) : \mathcal{C}_f)$, $\vartheta \in \{bp, r\}$ ve $1 \leq s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{C}_\vartheta : \mathcal{L}_s)$, $(R^{qt}(\mathcal{C}_\vartheta) : \mathcal{L}_s)$ ve $(\mathcal{L}_s : \mathcal{L}_u)$, $0 < s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{L}_s : \mathcal{M}_u)$, $(\mathcal{L}_s : \mathcal{C}_{bp})$, $(R^{qt}(\mathcal{L}_s) : \mathcal{M}_u)$ ve $1 \leq s < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{L}_s : \mathcal{L}_u)$ sınıfları karakterize edilmiştir. Teorem 4.1 (i), Teorem 5.4, Teorem 6.1 ve Teorem 6.3 ile; $\mathcal{L}_s$ uzayına dair Başar ve Sever (2009) çalışması için, tamamlayıcı sonuçlar ortaya konulmaktadır.

$q = t = (1, 1, 1, \ldots)$ alındığında R^{qt} Riesz ortalaması, dört boyutlu birinci mertebeden C_1 Cesàro ortalamasına indirgenir. Bu sebeple; elde ettiğimiz esas sonuçlar, Mursaleen ve Başar (2014) çalışmasının sonuçlarından çok daha genel ve şumullüdür.

Bilinen dört boyutlu matrislerin, meselâ; dört boyutlu ileri veya geri fark matrislerinin, dört boyutlu Nörlund matrisinin, r, s.ninci mertebeden dört boyutlu Euler matrisinin ve diğer dört boyutlu üçgen matrislerin, topolojik özellikleri bilinen çift dizi uzaylarındaki etki alanları çalışılabilecek ilk akla gelen açık problemlerdir.

8. KAYNAKLAR

Adams, R.C. (1933). On non-factorable transformations of double sequences. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **19(5):** 564-567.

Alotaibi, A.M. and Çakan, C. (2012). The Riesz convergence and Riesz core of double sequences. *Journal of Inequalities and Applications*, **2012(56):** 1-8.

Altay, B. (2002). Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları. Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

Altay, B. and Başar, F. (2005). Some new spaces of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **309(1):** 70-90.

Apostol, T.M. (1974). Mathematical analysis. Addison-Wesley Publishing Corpany, 3. edition, London.

Başar, F. (2012). Summability Theory and Its Applications. Bentham Science Publishers, e-books, Monograph, Istanbul.

Başar, F. and Altay, B. (2002). Matrix mappings on the space $bs(p)$ and its α-, β-, and γ-duals. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, **21(1):** 79-91.

Başar, F. and Altay, B. (2003). On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, **55(1):** 136-147.

Başar, F. and Sever, Y. (2009). The space $\mathcal{L}_q$ of double sequences. *Mathematical Journal of Okayama University*, **51:** 149-157.

Başarır, M. (1995). On the strong almost convergence of double sequences. *Periodica Mathematica Hungarica*, **30(3):** 177-181.

Başarır, M. and Konca, Ş. (2012). On some lacunary almost convergent double sequence spaces and Banach limits. *Abstract and Applied Analysis*, **2012:**, 1-17.

Başarır, M. and Sonalcan, O. (1999). On some double sequence spaces. *Indian Academy of Mathematics*, **21(2):** 193-200.

Bennett, G. and Kalton, N. J. (1973). Inclusion theorems for $K-$spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, **25:** 511-524.

Boos, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford.

Boos, J., Leiger, T. and Zeller, K. (1997). Consistency theory for $SM-$methods. *Acta Mathematica Hungarica*, **76(1-2):** 109-142.

Burkill, J.C and Burkill, H. (1970). A Second Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, Cambridge-New York.

Cooke, R.C. (1950). Infinite Matrices and Sequence Spaces. *Macmillan and Company Limited, London.*

Das, G. and Sahoo, S.K. (1992). On some sequence spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **164(2):** 381-398.

Edely, O.H.H. and Mursaleen, M. (2006). Tauberian theorems for statistically convergent double sequences. *Information Sciences. An International Journal*, **176(7):** 875-886.

Gökhan, A. and Çolak, R. (2004). The double sequence spaces $c_2^P(p)$ and $c_2^{PB}(p)$. *Applied Mathematics and Computation*, **157(2):** 491–501.

Gökhan, A. and Çolak, R. (2005). Double sequence spaces $\ell_\infty^2(p)$. *Applied Mathematics* *and Computation*, **160(1):** 147-153.

Gökhan, A. and Çolak, R. (2006). On Double sequence spaces ${}_0c_2^P(p)$, ${}_0c_2^{PB}(p)$ and $\ell_2(p)$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **30(3):** 309-321.

Gökhan, A., Çolak, R. and Mursaleen, M. (2009). Some matrix transformations and generalized core of double sequences. *Mathematical and Computer Modelling*, **49(7-8):** 1721-1731.

Hamilton, H. J. (1936). Transformations of multiple sequences. *Duke Mathematical Journal*, **2(1):** 29-60.

Hardy, G. H. $(1916 - 1919)$. On the convergence of certain multiple series. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **19:** 86-95.

Hill, J. D. (1940). On perfect summability of double sequences. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **46:** 327-331.

Iyer, V. G. (1985). Mathematical Analysis. *Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi.*

Jardas, C. and Sarapa, N. (1991). On the summability of pairs of sequences, *Glasnik Matematicki. Serija III*, **26(46):** 67-78.

Karaev, M.T. and Zeltser, M. (2010). On Abel convergence of double sequences. *Numerical Functional Analysis and Optimization. An International Journal*, **31(10):** 1185-1189.

King, J.P. (1966). Almost summable sequences. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **17:** 1219-1225.

Kojima, T. (1922). On the theory of double sequence, *Tôhoku Mathematical Journal*,

21: 3-14.

Kull, I. G. (1958). Multiplication of summable double series. *Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Uchenye Zapiski Tartuskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis*, **62:** 3-59 (in Russian).

Limaye, B.V. and Zeltser, M. (2009). On the Pringsheim convergence of double series. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, **58(2):** 108-121.

Lorentz, G.G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences *Acta Mathematica*, **80:** 167-190.

Maddox, I.J. (1978). A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83(1):** 61-64.

Móricz, F. (1991). Extensions of the spaces c and c_0 from single to double sequences. *Acta Mathematica Hungarica*, **57(1-2):** 129-136.

Móricz, F. (2003). Statistical convergence of multiple sequences. *Archiv der Mathematik*, **81(1):** 82-89.

Móricz, F. and Rhoades, B.E. (1988). Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **104(2):** 283-294.

Mursaleen, M. (2004). Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **293(2):** 523-531.

Mursaleen, M. and Başar, F. (2014). Domain of Cesàro mean of order one in some spaces of double sequences. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. A Quarterly of the Hungarian Academy of Sciences*, **51(3):** 335-356.

Mursaleen, M and Edely, O.H.H. (2003). Statistical convergence of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **288(1):** 223-231.

Mursaleen, M and Edely, O.H.H. (2004). Almost convergence and a core theorem for double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **293(2):** 532-532-540.

Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A. (2012). Banach limit and some new spaces of double sequences. *Turkish Journal of Mathematics*, **36(1):** 121-130.

Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A. (2014). Convergence methods for double sequences and applications. Springer, New Delhi.

Mursaleen, M and Savaş, E. (2003). Almost regular matrices for double sequences. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. A Quarterly of the Hungarican Academy of Sciences*, **40(1-2):** 205-212.

Patterson, R. F. (1999). Double sequence core theorems. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **22(4):** 785-793.

Pringsheim, A. (1900). Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, *Mathematische Annalen*, **53(3):** 289-321.

Robison, G. M. (1926). Divergent double sequences and series. *Transactions of the American Mathematical Society*, **28(1):** 50-73.

Savaş, E. and Patterson, R.F. (2011). Double sequence spaces defined by a modulus. *Mathematica Slovaca*, **61(2):** 245-256.

Schaefer, H.H. (1986). Topological Vector Spaces. Graduate Texts in Mathematics, **3:** 5th printing.

Sever, Y. (2012). On Regular Cesàro Double Sequence Spaces. *General Mathematics Notes*, **13(1):** 21-31.

Subramanian, N. and Misra, U. (2010). The generalized double difference of gai sequence spaces. *Polytechnica Posnaniensis. Institutum Mathematicum. Fasciculi Mathematici*, **43:**, 155-164.

Tripathy, B.C. and Dutta, A.J. (2007). On fuzzy real-valued double sequence space ${}_2\ell_F^p$ convergent double sequences. *Mathematical and Computer Modelling*, **46(9-10):** 1294-1299.

Tripathy, B.C. and Sarma, B. (2009). Vector valued double sequence spaces defined by Orlicz function. *Mathematica Slovaca*, **59(6):** 767-776.

Tripathy, B. and Tripathy, B.C. (2005). On $\mathcal{I}-$convergent double sequences. *Soochow Journal of Mathematics*, **31(4):** 549-560.

Türkmenoğlu (Gökhan), A. (1993). Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları. Doktora tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

Wilansky, A. (1978). Modern Methods in Topological Vector Spaces. McGraw-Hill, New York.

Yeşilkayagil, M. and Başar, F. Mercerian theorem for four dimensional matrices. Yazışma safhasında.

Zeltser, M. (2000). Matrix transformations of double sequences. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, **4:** 39-51.

Zeltser, M. (2001a). On conservative and coercive $SM-$methods. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics and Mathematics*, **50(2):** 76-85.

Zeltser, M. (2001b). Investigation of Double Sequence Spaces By Soft and Hard Analitical Methods. Dissertationes Mathematicae Universtaties Tartuensis, Tartu University Press, Faculty of Mathematics and Computer Science, Tartu.

Zeltser, M. (2001c). Weak sequential completeness of $\beta-$duals of double sequence spaces. *Analysis Mathematica*, **27(3):** 223-238.

Zeltser, M. (2002). On conservative matrix methods for double sequence spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **95(3):** 225-242.

Zeltser, M., Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A. (2009). On almost conservative matrix methods for double sequence spaces. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **75(3-4):** 387-399.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Medine YEŞİLKAYAGİL
Doğum Yeri ve Tarihi	: Gaziantep, 1987
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 507 450 20 03/ medine.yesilkayagil@usak.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Gaziantep, 19 Mayıs Lisesi, 2005
Lisans	: Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Matematik Böl., 2009
Yüksek Lisans	: Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Uşak Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010-...

Yayınları (SCI ve Diğer)

Yeşilkayagil, M., Başar F. (2012) On the fine spectrum of the lambda operator defined by a lambda matrix over the sequence spaces c_0 and c. *AIP Conference Proceeding* **1470:** 199-202. (AIP)

Yeşilkayagil, M., Başar F. (2013). Composited dual summability methods of the new sort,*Communications. Faculty of Sciences. University of Ankara. SeriesA1*, **62(1):** 1-12.

Yeşilkayagil, M., Başar F. (2013). On the fine spectrum of the lambda operator defined by a lambda matrix over the sequence spaces of Null and Convergent Sequences. *Abstract and Applied Analysis*, **2013:** 1-13. (SCI)

Yeşilkayagil, M., Başar F. (2014). On the paranormed Nörlund sequence space of non-absolute type. *Abstract and Applied Analysis*, **2014:** 1-18. (SCI)

Yeşilkayagil, M., Başar F. (2015). Spaces of A_λ-almost null and A_λ-almost convergent

sequences. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **23(1):** 119-126.

Yeşilkayagil, M., Başar F. (2015) Four dimensional dual and dual of the new sort summability methods. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, **3(1):** 13-29.