KÜME DİZİLERİNİN $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI

DOKTORA TEZİ

Ömer KİŞİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KÜME DİZİLERİNİN $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI

Ömer KİŞİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Ömer KİŞİ tarafından hazırlanan "Küme Dizilerinin $\mathcal{I}$-Yakınsaklığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 30/05/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan : Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ
İstanbul Ticaret Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Doç. Dr. Bünyamin AYDIN
Necmettin ERBAKAN Üniv. Eğitim Fak.

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER
Afyon Kocatepe Üniv. Eğitim Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Ed. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2014 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02/06/2014

Ömer KİŞİ

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DİZİLERİNİN $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI

Ömer KİŞİ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verildi. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edildi. Üçüncü bölümde, küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları tanımlandı ve bu kavramlar arasında bazı kapsam bağıntıları elde edildi. Aynı zamanda, küme dizilerinin Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümeleri ve Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümeleri tanımlandı ve aralarındaki ilişkileri veren teoremler ispat edildi. Dördüncü bölümde, küme dizilerinin $S_\lambda^L(\mathcal{I})$-istatistiksel denkliği kavramı verildi ve bu kavramın $\mathcal{I}$-asimptotik istatistiksel denklik, kuvvetli $\lambda_{\mathcal{I}}$-asimptotik denklik ve kuvvetli Cesàro $\mathcal{I}$-asimptotik denklik kavramları ile ilişkisi verildi. Beşinci bölümde, küme dizilerinin L katlı Wijsman $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği kavramı verildi.

2014, v+58 sayfa

Anahtar Kelimeler : $\mathcal{I}$-yakınsaklık, küme dizileri, Wijsman yakınsaklık, asimptotik denklik.

ABSTRACT

Ph.D.

$\mathcal{I}$-CONVERGENCE OF SEQUENCES OF SETS

Ömer KİŞİ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, Wijsman $\mathcal{I}$-convergence and Wijsman $\mathcal{I}^*$-convergence of set sequences were defined and some inclusion relations between them were established. Also, Wijsman $\mathcal{I}$-limit sets and Wijsman $\mathcal{I}$-cluster sets of set sequences were defined and the theorems which give relation between them were proved. In the fourth chapter, the notion of $S_\lambda^L(\mathcal{I})$- asymptotically statistical equivalence for sequences of sets was given and its relation with $\mathcal{I}$-asymptotically statistical equivalence, strong $\lambda_{\mathcal{I}}$-asymptotically equivalence and strong Cesàro $\mathcal{I}$-asymptotically equivalence for sequences of sets were given. In the fifth chapter, the concept of Wijsman $\mathcal{I}$-asymptotical lacunary statistical equivalence of multiple L for the set sequences was given.

2014, v+58 pages

Key Words : $\mathcal{I}$-convergence, set sequence, Wijsman convergence, asymptotic equivalence.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam

Sayın Prof. Dr. Fatih NURAY'a,

engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, ufkumu genişleten sayın Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ'a, konu üzerinde çeşitli noktalara dikkatimi çeken ve fikirlerini paylaşmaktan çekinmeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya, aynı zamanda bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a ve Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER'e, hayatımın her anında olduğu gibi doktora eğitimim boyunca da manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ömer KİŞİ

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

S	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$c_{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}$-yakınsak diziler uzayı
$(c_0)_{\mathcal{I}}$	Sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak diziler uzayı
$\mathcal{I}_W$	Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsak küme dizilerin uzayı
$d(A)$	A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$\delta(A)$	A kümesinin logaritmik yoğunluğu
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	$\mathcal{I}$ ideali tarafından üretilen süzgeç
$\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$	$\{A_k\}$ küme dizisinin tüm Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümelerinin kümesi
$\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$	$\{A_k\}$ küme dizisinin tüm Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümelerinin kümesi
WS_λ	Wijsman λ-istatistiksel yakınsak küme dizilerin uzayı
$S(\mathcal{I}_W)$	Wijsman $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak küme dizilerin uzayı
$S_\theta(\mathcal{I}_W)$	Wijsman $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak küme dizilerin uzayı
$N_\theta(\mathcal{I}_W)$	Kuvvetli Wijsman $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak küme dizilerin uzayı
$\mathcal{I}_K$	Kuratowski $\mathcal{I}$-yakınsak küme dizilerin uzayı
$\mathcal{I}_H$	Hausdorff $\mathcal{I}$-yakınsak küme dizilerin uzayı

1 GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, Analiz ve Fonksiyonel Analiz alanının temelini oluşturmaktadır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı Fonksiyonel Analizde büyük öneme sahiptir. İstatistiksel yakınsaklık konusu sayılar teorisi, trigonometrik seriler, toplanabilme ve son yıllarda lokal konveks uzaylar ve kuvvetli integral toplanabilme gibi birçok alanda farklı adlar altında çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 de Fast tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Schoenberg ve Buck tarafından da bağımsız olarak çalışılmıştır (Schoenberg 1959 ve Buck 1953). Schoenberg, istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini vermiş ve bu kavramı yakınsaklığın bir toplanabilme metodu olarak incelemiştir.

İstatistiksel yakınsaklık yerel konveks uzaylar (Maddox, 1988), Banach uzayları (Kolk, 1991), 2-normlu uzaylar (Gürdal and Pehlivan, 2009) gibi daha genel uzaylarda da çalışılmıştır. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın Fourier serileri (Móricz, 2004), fonksiyonel analiz (Connor vd., 2000), sayılar teorisi (Niven and Zuckerman, 1980; Erdös and Tenenbaum, 1989), ölçü teorisi (Miller, 1995), topoloji (Connor and Swardson, 1993; Di Maio and Koμcinac, 2008) ve yaklaşım teorisi (Gadjiev and Orhan, 2002) gibi matematiğin temel alanlarıyla da ilişkisi vardır. Son zamanlarda Di Maio vd. (2009) ve Djurcic vd. (2009) tarafından yapılan çalışmalarda istatistiksel yakınsaklığın asimptotik analiz, seçme prensipleri ve oyun teorileri gibi farklı alanlarda da uygulandığı görülmektedir. İstatistiksel yakınsaklılığın benzer özelliklerinin incelenmesine Šalát (1980), Fridy (1985), Fridy and Miller, Fridy and Orhan (1993), Kostyrko vd. (2000/2001), Nuray and Ruckle (2000), Nuray and Rhoades (2012) ve daha pek çok araştırmacılar tarafından günümüze kadar devam edilmiştir.

Bir çok yakınsama teorisinde arzu edilen, limit kavramı kullanılmaksızın yakınsaklığı göstermek için bir kriter vermektir. Bu amaçla Fridy (1985) istatistiksel Cauchy dizilerini tanımlayarak bu kavram ile istatistiksel yakınsaklık kavramının denk olduğunu göstermiştir.

Fridy (1993), klasik limit noktası kavramını baz alarak, bir reel dizinin istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarını, Fridy and Orhan (1997) ise bir dizinin istatistiksel üst ve alt limiti ve istatistiksel çekirdeği kavramlarını tanıtmışlardır. Bu kavramlarla ilgili diğer çalışmalardan bazıları, Connor and Kline'a (1996), Demirci'ye (2000, 2001) ve Kostyrko vd.'ne (2000, 2005) aittir. Ayrıca Pehlivan and Mamedov (2000) istatistiksel yığılma noktası kavramının optimizasyon teorisindeki uygulamalarına yer vermişlerdir.

$\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin $\mathcal{I}$ ideali kavramına dayanır. $\mathcal{I}$-yakınsaklık çalışılırken istatistiksel yakınsaklığın bir çok özelliğinden yararlanılmıştır. Kostyrko vd. (2000) reel sayı dizileri için $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır (Kostyrko vd., 2000). Ayrıca $\mathcal{I}$-yakınsaklığın Connor tarafından tanımlanan μ-istatistiksel yakınsaklık ile bir bakıma denk olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Kostyrko vd. (2000) bu kavramı herhangi bir metrik uzayda tanımlayarak bazı özelliklerini vermişlerdir (Kostyrko vd., 2000). Nuray ve Savaş, fuzzy sayılarının $\mathcal{I}$-yakınsaklığı üzerine çalışmalar yapmışlardır (Nuray and Savaş, 1993).

Dems(2004), Fridy(1985)'in tanımladığı istatistiksel Cauchy dizisi kavramını ideallere genişleterek ideal Cauchy ($\mathcal{I}$-Cauchy) dizisi tanımlamış ve tam metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}$-Cauchy dizilerinin denk olduğunu vermiştir. Balcerzak vd.(2007) her p ideali için $\mathcal{I}$-yoğun alt dizisinin klasik Cauchy dizisi olması ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi arasındaki denkliği vermiştir. Nabiyev vd. (2007) $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisini tanımlayarak $\mathcal{I}$-Cauchy dizileri ile $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizileri arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Küme dizileri için yakınsaklık kavramı ise daha çok 1960 lı yıllarda araştırmalara konu olmaya başlamış ve başta Beer, G. olmak üzere; Effros(1965), Wijsman(1966), Mosco (1969), Salinetti(1979), De Blasi vd.(1985), Naimpally(1988) ve diğer bir çok araştırmacıtarafından incelenmiştir. Araştırmacılar tarafından yapılan bu çalışmalarda küme dizileri için verilen yakınsaklık kavramlarından en yaygın olarak kullanılanlar ve bizim araştırmamız için temel oluşturacak olan birkaç tanesi; "Hausdorff yakınsaklık(H)", "Kuratowski yakınsaklık(K)", "Wijsman yakınsaklık(W)" tır. Bu yakınsaklık tiplerinden (K) ve (H) uzun zaman önce araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. (W) yakınsaklık ise Holmes(1966), Lechicki and Levi(1985) ve Wijsman(1966) da bazı çalışmalar yapmışlardır. (W) ve (K) yakınsaklık arasındaki ilişki Beer(1985) tarafından incelenmiştir. Baronti and Papini(1986)'da yaptıkları bir çalışma ile küme dizileri için (K), (H), (W) yakınsaklık arasındaki ilişkileri göstermişlerdir.

Son olarak Nuray and Rhoades(2012) tarafından yapılan bir çalışmada küme dizileri için Wijsman istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiştir.

Bu tez çalışmasındaki temel amacımız, daha önce sayı dizileri için verilmiş olan $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını küme dizilerine aktarmaktır. Bu bağlamda, küme dizileri için daha önce verilmiş olan yakınsaklık tanımları (Hausdorff, Kuratowski, Wijsman), bu yakınsaklıkların kendilerine özgü özellikleri ve bunlar arasındaki ilişkiler yeniden ele alınarak $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olmak üzere küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı tanımlandı ve bu kavrama dayanarak yeni teoremler ispatlandı. Bu sebeple tez çalışmasında öncelikle;

İkinci bölümde (temel kavramlar kısmında); istatistiksel yakınsaklık kavramının doğmasına sebep olan doğal yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olmak üzere reel sayı diziler için $\mathcal{I}$- yakınsaklık, $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy dizileri ile $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizileri kavramları, $\mathcal{I}$-limit noktaları ile $\mathcal{I}$-yığılma noktaları kavramları, küme dizisi, küme dizileri için daha önceden verilen bazı yakınsaklık kavramları ve küme dizileri için yakın zamanda Nuray and Rhoades (2012) tarafından verilen istatistiksel yakınsaklık kavramları verildi.

Tez çalışmasının üçüncü bölümü olan "Küme Dizilerinin $\mathcal{I}$-yakınsaklığı" bölümünde, yukarıda bahsedildiği gibi küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık, Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy ve Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy kavramları tanımlandı ve bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri ve diğer bazı ilişkiler teoremlerle verilerek bu teoremler ispat edildi. Aynı zaman da (3.1) "Küme Dizileri İcin $\mathcal{I}$-limit Kümeleri ve $\mathcal{I}$-yığılma Kümeleri" alt bölümünde, metrik uzayda küme dizilerinin Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümeleri ve Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümeleri tanımları, bazı özellikleri ve bunlar arasındaki ilişkiler teoremlerle verilerek bu teoremler ispat edildi.

Tez çalışmasının dördüncü bölümü olan “Küme dizilerinin asimptotik $S_{\lambda}^{L}(\mathcal{I})$-istatistiksel denkliği” bölümünde, küme dizileri için yeni yakınsaklık tanımları ve özgün kavramlar verildi ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerde bazı teoremlerle verilmeye çalışıldı.

Tez çalışmasının beşinci bölümü olan “Küme dizilerinin $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği” bölümünde, yeni tanımlar ve kavramlar verilmeye devam edildi ve tez çalışmamızda teoremlerin ispatında kullanılmak üzere küme dizisi örnekleri verilmeye çalışıldı.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız boyunca geçecek olan tanım, notasyon ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme olsun.

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için,

(*i*) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(*ii*) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(*iii*) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

şartları sağlanıyorsa, ρ ya X üzerinde bir *metrik* ve ρ ile birlikte X e *metrik uzay* denir ve genellikle (X, ρ) ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.2 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin K alt kümesinin eleman sayısını $|K|$ ile gösterelim. Yani,

$$|K| = \text{card}K$$

olsun. $K, \mathbb{N}$ nin bir altkümesi ve

$$K_n = \{k \leq n : k \in K\}$$

olsun. Buna göre K kümesinin sırasıyla *alt* ve *üst yoğunluğu*,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}, \quad \overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

dir. $\dfrac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda, yani

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

eşitliğinin sağlanması halinde bu limite $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani,

$$\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dir (Niven vd., 1991).

Tanım 2.3 $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için

$$K = K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \xi| \geqslant \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi ξ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim x = \xi$$

biçiminde gösterilir (Fast, 1951).

Adi anlamda yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu ifade etmek gerekir. Çünkü x dizisi ξ ye yakınsak ise her bir $\varepsilon > 0$ için $K = \{k : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu sayıda elaman içerdiğinden yoğunluğu sıfırdır $(\delta(K) = 0)$.

Yakınsak dizi sınırlı olmasına rağmen, istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmayabilir.

Tanım 2.4 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{I}$ ailesi için

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$

(iii) Her $A \in \mathcal{I}$ ve her $B \subseteq A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{I}$ ailesine ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.5 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{F}$ ailesi için

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) Her $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supseteq A$ için $B \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine süzgeç denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.6 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir $\mathcal{I}$ ideali için $\mathcal{I} \neq 2^{\mathbb{N}}$ oluyorsa $\mathcal{I}$'ya gerçek ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.7 $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin her sonlu alt kümesini kapsıyorsa $\mathcal{I}$'ya uygun ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Sonuç 2.8 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal olmak üzere,

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M = \mathbb{N} \setminus A,\ A \in \mathcal{I}\}$$

kümesi $\mathbb{N}$ de bir süzgeçtir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.9 $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise x dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}-\lim x = \xi$ ile gösterilir (Kostyrko vd., 2000).

$\mathcal{I}$-yakınsak tüm dizilerinin kümesi $c_{\mathcal{I}}$, sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak tüm dizilerinin kümesi ise $(c_0)_{\mathcal{I}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.10 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri için

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$$

ise x ve y dizileri için $\mathcal{I}$'ya göre hemen hemen her n için eşittir denir ve "$\mathcal{I} - h.h.n$ için $x_n = y_n$" şeklinde gösterilir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.11 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. $K := \{n\,(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $K \in \mathcal{I}$ ise $\{x\}_K$ alt dizisine $\mathcal{I}$-seyrek alt dizisi denir. Eğer $K \notin \mathcal{I}$ ise $\{x\}_K$ alt dizisine $\mathcal{I}$-seyrek olmayan alt dizisi denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.12 $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\xi \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} x_{m_n} = \xi$$

olacak şekilde bir $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}$ kümesi varsa ξ sayısı (x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limit noktasıdır denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.13 $x = (x_n)$ reel dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

oluyorsa bu durumda ξ sayısına (x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-yığılma noktası denir (Kostyrko vd., 2000).

$\mathcal{I}(\Lambda_x)$ ile x dizisinin tüm $\mathcal{I}$-limit noktaları kümesi, $\mathcal{I}(\Gamma_x)$ ile x dizisinin tüm $\mathcal{I}$-yığılma noktaları kümesi ve L_x ile tüm adi limit noktaları kümesi gösterilir. Herhangi bir x dizisi için $\mathcal{I}(\Lambda_x) \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Çünkü $\xi \in \mathcal{I}(\Lambda_x)$ olması $\lim_{n\to\infty} x_{m_n} = \xi$ anlamına gelir. Bu da $\xi \in L_x$ olduğunu gösterir. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Herhangi bir $x = (x_n) \in X$ dizisi için $\mathcal{I}\ (\Lambda_x) \subseteq L_x$ ve $\mathcal{I}\ (\Lambda_x) \subset \mathcal{I}\ (\Gamma_x)$'dir.

$\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ olmak üzere (Kostyrko vd., 2000) tarafından tanımlanan bazı gerçek uygun ideal örnekleri verelim.

(a) $\mathcal{I}_f = \{M \subset \mathbb{N} : M \text{ sonlu}\}$,

(b) $\mathcal{I}_\delta = \{M \subset \mathbb{N} : \delta(M) = 0\}$,

(c) $\mathcal{I}_{\delta_A} = \{M \subset \mathbb{N} : \delta_A(M) = 0\}$.

K kümesini $K = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım. $\mathcal{I}$ ideali olarak;

(a) daki $\mathcal{I}_f$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık ile adi anlamda yakınsaklık,

(b) deki $\mathcal{I}_\delta$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_\delta$-yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık,

(c) deki $\mathcal{I}_{\delta_A}$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_{\delta_A}$-yakınsaklık ile A-istatistiksel yakınsaklık kavramları çakışır.

Burada $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_\delta \subset \mathcal{I}_{\delta_A} \subset \mathcal{I}$ dir.

Tanım 2.14 $x = (x_n) \in X$ bir reel sayı dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$$

olacak şekilde bir alt dizisinin indeks kümesi $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ , i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, $M \in F(\mathcal{I})$ yani $\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}$ kümesi mevcut ise $(x_n) \subset X$ dizisi ξ'ye $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}^* - \lim x_n = \xi$ olarak gösterilir (Kostyrko vd., 2000).

Teorem 2.15 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$'dir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.16 Eğer $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j \quad i,j = 1,2,...)$ ve $A_i \in \mathcal{I}$ ise her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ $(i = 1,2,...)$ sonlu küme ve $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$ olacak şekilde B_i kümeleri mevcut ise $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideali (AP) koşulunu sağlar denir (Kostyrko vd., 2000).

$\mathcal{I}$-yakınsaklık konusunda kullanacağımız en önemli kavramlardan birisi de $\mathcal{I}^*$-yakınsaklıktır. Kostyrko vd. (2000) bu kavramı tanımlamışlar ve (AP) özelliğinden de yararlanarak $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Buna göre, x dizisi $\mathcal{I}^*$-yakınsak ise $\mathcal{I}$-yakınsaktır fakat tersi doğru değildir. Tersinin doğru olması için $\mathcal{I}$ idealinin (AP) özelliğini sağlaması gerekir (Kostyrko vd., 2000).

Kostyrko vd. (2000), (AP) özelliğini sağlayan uygun idealler için $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramlarının denk olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.17 (X,ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A\left(\varepsilon\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : \rho\left(x_n, x_N\right) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $N = N\left(\varepsilon\right)$ mevcut ise $(x_n) \in X$ dizisine $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir (Nabiyev vd., 2007).

Her $\varepsilon > 0$ ve $N = N\left(\varepsilon\right)$ indeksi için $K\left(\varepsilon\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : \rho\left(x_n, x_N\right)\right\}$ kümesi tanımlansın.

(a) daki $\mathcal{I}_f$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_f$-Cauchy ile adi anlamda Cauchy,

(b) deki $\mathcal{I}_\delta$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_\delta$- Cauchy ile istatistiksel Cauchy,

(c) deki $\mathcal{I}_{\delta_A}$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_{\delta_A}$-Cauchy ile A-istatistiksel Cauchy kavramları çakışır.

Tanım 2.18 (X,ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Eğer $x_M = \{x_{m_k}\}$ alt dizisi X'de Cauchy dizisi yani

$$\lim_{k,p\to\infty} \rho\left(x_{m_k}, x_{m_p}\right) = 0$$

olacak şekilde $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}\left(\mathcal{I}\right)$ kümesi mevcut ise (x_n) $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir (Nabiyev vd., 2007).

Teorem 2.19 (X,ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Eğer (x_n) $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise (x_n) dizisi $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir (Nabiyev vd., 2007).

Teorem 2.20 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal ve $\mathcal{I}^* - \lim x_n = \xi$ olsun. Bu durumda, $x = (x_n) \in X$ $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir (Nabiyev vd., 2007).

Sonuç 2.21 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğini sağlayan uygun ideal ve $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ olsun. Bu durumda, $x = (x_n) \in X$ $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir (Nabiyev vd., 2007).

$\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğinine sahip olmadığı durumda da Sonuç 2.21 gerçekleşir (Nabiyev vd., 2007).
Bir sonraki teoremde tam metrik uzaylarda uygun $\mathcal{I}$ idealleri için $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}$-Cauchy kriterinin denk olduğu verilecektir.

Teorem 2.22

(i) (X, ρ) bir tam metrik uzay ise, X deki her uygun $\mathcal{I}$ ideali için X de her $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

(ii) X deki tüm uygun $\mathcal{I}$ idealleri için, her $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi $\mathcal{I}$-yakınsak ise X tamdır (Dems, 2004).

Lemma 2.23 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ keyfi bir uygun ideal olsun. Bu durumda $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ ise $x = (x_n) \in X$ $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir (Nabiyev vd., 2007).

Teorem 2.24 Eğer $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğini sağlayan uygun ideal ise $\mathcal{I}^*$-Cauchy ile $\mathcal{I}$-Cauchy dizileri çakışıktır (Nabiyev vd., 2007).

Tanım 2.25 $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak biçimde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine *lacunary dizisi* denir. Ayrıca, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olarak belirtilir (Freedman vd., 1978).

Tanım 2.26 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer, $x = (x_k)$ dizisi için $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\theta - \lim x = L \ \text{ veya } \ x_k \to L(S_\theta)$$

ile gösterilir (Fridy and Orhan, 1993).

Tanım 2.27 $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ negatif olmayan iki reel sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

oluyorsa x ve y dizilerine asimptotik denktirler denir ve $x \sim y$ ile gösterilir (Pobyvanets, 1980).

Tanım 2.28 x ve y negatif olmayan iki reel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa x ve y dizilerine asimptotik istatistiksel denk diziler denir ve $x \overset{S}{\sim} y$ ile gösterilir (Patterson, 2003).

Tanım 2.29 x ve y dizileri negatif olmayan reel diziler ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{x_n}{y_n} - 1 \right| \right\}$$

kümesi ideale ait oluyorsa x ve y dizilerine asimptotik $\mathcal{I}$ denk diziler denir ve $x \overset{\mathcal{I}}{\sim} y$ ile gösterilir (Gümüs and Cannor, 2011).

Tanım 2.30 $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere,

$$f : \mathbb{N} \to P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(k) = A_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, ...$ kümelerinin oluşturduğu diziye *küme dizisi* denir.

Tanım 2.31 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve boş kümeden farklı herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

ile tanımlanır (Wijsman, 1964).

Tanım 2.32 (X,ρ) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$ bu metrik uzayda bir küme dizisi olsun.

$$\text{Liminf} A_k = \{x \in X : \ \exists (a_k) \subset \{A_k\}, \ a_k \to x\}$$

ve

$$\text{Limsup} A_k = \{x \in X : \ \exists (k_i), \ \exists (a_{k_i}) \subset \{A_{k_i}\}, \ a_{k_i} \to x\}$$

olmak üzere eğer,

$$A = \text{Liminf} A_k = \text{Limsup} A_k = \text{Lim} A_k$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *yakınsaktır* veya $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Kuratowski yakınsaktır* denir ve

$$A_k \to A \ \text{ veya } \ A_k \xrightarrow{K} A \ \text{ ya da sadece } \ K - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Wijsman, 1964).

Yukarıdaki tanımda, X in boş kümeden farklı A_k alt kümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için,

$$\text{Liminf} A_k = \left\{ x \in X : \ \limsup_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in X : \ \lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

ve

$$\text{Limsup} A_k = \left\{ x \in X : \ \liminf_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

olarak da verilebilir.

Tanım 2.33 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman yakınsaktır* denir ve $A_k \xrightarrow{W} A$ veya $W - \lim A_k = A$ ile gösterilir (Wijsman, 1964).

Tanım 2.34 (X, ρ) bir metrik uzay, A kümesi X in kapalı bir alt kümesi ve $\{A_k\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Hausdorff yakınsaktır* denir ve $A_k \xrightarrow{H} A$ veya $H - \lim A_k = A$ ile gösterilir (Wijsman, 1964).

Kuratowski yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık ve Hausdorff yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.35 Bir $\{A_k\}$ dizisi için,

$$\text{Hausdorff yakınsak} \Longrightarrow \text{Wijsman Yakınsak} \Longrightarrow \text{Kuratowski yakınsak}$$

ilişkisi vardır (Wijsman, 1964).

Tanım 2.36 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun.

$$st - \text{Liminf} A_k = \left\{ x \in X : \ st - \limsup_{k\to\infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

$$st - \text{Limsup} A_k = \left\{ x \in X : \ st - \liminf_{k\to\infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

olmak üzere eğer,

$$st - \text{Liminf} A_k = st - \text{Limsup} A_k = A$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Kuratowski istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \text{Lim} A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray and Rhoades, 2012).

Tanım 2.37 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya hemen hemen her k için,

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim{}_W A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray and Rhoades, 2012).

Wijsman istatistiksel yakınsak küme dizilerinin uzayı;

$$WS = \{\{A_k\} : st - \lim{}_W A_k = A\}$$

şeklindedir.

(X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$\sup_k d(x, A_k) < \infty$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi *sınırlıdır* denir.

Tanım 2.38 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

veya hemen hemen her k için,

$$\sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Hausdorff istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st_H - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray and Rhoades, 2012).

Kuratowski istatistiksel yakınsaklık, Wijsman istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.39 Bir $\{A_k\}$ dizisi için,

Hausdorff ist. yakınsak $\Longrightarrow$ Wijsman ist. yakınsak $\Longrightarrow$ Kuratowski ist. yakınsak

ilişkisi vardır (Nuray and Rhoades, 2012).

Tanım 2.40 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı bir A altkümesi varsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray and Rhoades, 2012).

Tanım 2.41 (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı bir A altkümesi varsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray and Rhoades, 2012).

$|W\sigma_1|$, Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayını göstermek üzere

$$|W\sigma_1| = \left\{ \{A_k\} : \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.42 (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, B_k her $x \in X$ için, $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ eşitsizliklerini sağlayan X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} = 1$$

oluyorsa $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında asimptotik denktirler denir ve $A_k \sim B_k$ ile gösterilir (Ulusu and Nuray, 2012).

Tanım 2.43 (X,ρ) bir metrik uzay ve A_k, B_k her $x \in X$ için, $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ eşitsizliklerini sağlayan X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı asimptotik istatistiksel denktirler denir ve $A_k \overset{WS_L}{\sim} B_k$ ile gösterilir (Ulusu and Nuray, 2012).

Tanım 2.44 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A_k ve A, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve her bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r}|\,\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\,| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim_W = A$ ya da $A_k \to A(WS_\theta)$ ile gösterilir (Ulusu and Nuray, 2012).

Tanım 2.45 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A_k, B_k her $x \in X$ için, $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ eşitsizliklerini sağlayan X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\forall x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} = L$$

oluyorsa $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı asimptotik lacunary denktirler denir ve $\{A_k\} \overset{WN_\theta^L}{\sim} \{B_k\}$ ile gösterilir. Eğer $L = 1$ ise kolayca Wijsman anlamında asimptotik lacunary denktirler denir (Ulusu and Nuray, 2012).

Tanım 2.46 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A_k, B_k her $x \in X$ için, $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ eşitsizliklerini sağlayan X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\forall x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı kuvvetli asimptotik lacunary denktirler denir ve $\{A_k\} \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} \{B_k\}$ ile gösterilir. Eğer $L = 1$ ise kolayca Wijsman anlamında kuvvetli asimptotik lacunary denktirler denir (Ulusu and Nuray, 2012).

Tanım 2.47 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A_k, B_k her $x \in X$ için, $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ eşitsizliklerini sağlayan X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve her bir $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denktirler denir ve $\{A_k\} \overset{WS_\theta^L}{\sim} \{B_k\}$ ile gösterilir. Eğer $L = 1$ ise kolayca Wijsman anlamında asimptotik lacunary istatistiksel denktirler denir (Ulusu and Nuray, 2012).

Tanım 2.48 Sonlu küme veya doğal sayı kümesi ile eş güçlü olan kümeye sayılabilir küme denir.

Tanım 2.49 Bir X metrik uzayının bir M alt kümesi verildiğinde, eğer

$$\overline{M} = X$$

ise, M kümesi X'de yoğundur denir. Eğer, X kümesi, X'de yoğun sayılabilir bir alt kümeye sahip ise X'e ayrılabilir metrik uzay denir (Pavel Uryson, 1924).

3 KÜME DİZİLERİN $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde daha önce reel sayı dizileri için çalışılmış olan $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları küme dizileri için tanımlanacaktır. Bu bağlamda küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları tanımlanacak ve bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri ve diğer bazı ilişkiler teoremlerle verilerek bu teoremler ispatlanacaktır. Nuray and Rhoades (2012) in küme dizileri için tanımladığı Wijsman istatistiksel Cauchy dizisi kavramı ideallere genişletilerek küme dizileri için Wijsman ideal Cauchy ($\mathcal{I}$-Cauchy) dizisi tanımlanacaktır. Bununla birlikte Nabiyev vd. (2007) in reel sayı dizileri için tanımladığı $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi kavramı küme dizileri için tanımlanacak ve küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizileri ile Wijsman $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 3.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$A(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_W - \lim A_k = A$ ile gösterilir.

Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsak dizilerin kümesini $\mathcal{I}_W$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{I}_W = \{\{A_k\} \subset X : \mathcal{I}_W - \lim A_k = A\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve

$$\begin{aligned} \mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} \inf A_k &= \{x \in X : \mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} \sup d(x, A_k) = 0\} \\ \mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} \sup A_k &= \{x \in X : \mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} \inf d(x, A_k) = 0\} \end{aligned}$$

olmak üzere eğer

$$\mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} \inf A_k = \mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} \sup A_k = \mathcal{I} - \lim_{k\to\infty} A_k = A$$

oluyorsa $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Kuratowski $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_K - \lim A_k = A$ ile gösterilir.

Tanım 3.3 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$A(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \sup |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Hausdorff $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_H - \lim A_k = A$ ile gösterilir.

Örnek 3.4 $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$A_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2ky = 0\} & , \text{ eğer } k \neq n^2 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -1\} & , \text{ eğer } k = n^2 \end{cases}$$

şeklinde $\{A_k\}$ küme dizisi tanımlayalım.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$$

olmak üzere, $k = n^2$ için

$$d((x, y), A_{n^2}) = |y + 1| \neq d((x, y), A) = |y|$$

dir. $k \neq n^2$ için

$$d((x^*, y^*), A_k) \to d((x^*, y^*), A) = |y^*|$$

olur. Gerçekten $x^2 + y^2 - 2ky = 0$ çemberinin dışında herhangi bir (x^*, y^*) noktasını alalım. Çemberinin merkez noktası olan $(0, k)$ ile çemberinin dışındaki (x^*, y^*) noktasından geçen doğru denklemi

$$\frac{x - 0}{x^*} = \frac{y - k}{y^* - k}$$

olduğundan, $y = k + \dfrac{y^* - k}{x^*} \cdot x$ dir. Bu değeri $x^2 + y^2 - 2ky = 0$ çember denklemimizde yerine yazarsak;

$$x = \frac{|k| . x^*}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^* - k)^2}}$$

elde edilir. $k \to \infty$ iken limite geçilirse, $x \to x^*$olur. Bulduğumuz

$$x = \frac{|k| .x^*}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^* - k)^2}}$$

eşitliğini $y = k + \dfrac{y^* - k}{x^*} \cdot x$ denkleminde yerine yazarsak $y \to 0$ $(k \to \infty)$ dir. Böylece $k \neq n^2$ için

$$d((x^*, y^*), A_k) = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} \to |y^*|$$

olur. $k \neq n^2$ için

$$d((x^*, y^*), A_k) \to d((x^*, y^*), A) = |y^*|$$

elde edilir. $k = n^2$ ve $k \neq n^2$ için $\{A_k\}$ küme dizisi iki farklı limite sahiptir. Böylece $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman yakınsak değildir. Fakat,

$$\{k \in \mathbb{N} : |d((x, y), A_k) - d((x, y), A)| \geq \varepsilon\} = \left\{k \in \mathbb{N} : k = n^2\right\} \subset \mathcal{I}_d$$

dir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ ve her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$A(x, y, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d((x, y), A_k) - d((x, y), A)| \geq \varepsilon\}$$

olsun. $k \neq n^2$ için

$$\lim_{k \to \infty} [|d((x, y), A_k) - d((x, y), A)|] = 0$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k > k_\varepsilon$ için

$$|d((x, y), A_k) - d((x, y), A)| < \varepsilon$$

olur. Yani $k \neq n^2$ için sadece k_ε kadar k lar için

$$|d((x, y), A_k) - d((x, y), A)| > \varepsilon$$

olur. Bu kümeyi $A_{k_\varepsilon}(x, y)$ ile tanımlayalım:

$$A_{k_\varepsilon}(x, y) := \{k \in \mathbb{N} : |d((x, y), A_k) - d((x, y), A)| > \varepsilon\}.$$

Böylece

$A(x, y, \varepsilon) = A_{k_\varepsilon}(x, y) \cup \left\{k \in \mathbb{N} : k = n^2\right\}$, $A_{k_\varepsilon}(x, y) \in I_d$ ve $\left\{k \in \mathbb{N} : k = n^2\right\} \in \mathcal{I}_d$

olduğundan

$$A(x, y, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d((x, y), A_k) - d((x, y), A)| \geq \varepsilon\} \in I_d,$$

olur (Burada $I_d = \{A : \delta(A) = 0\}$). Böylece $\{A_k\}$ küme dizisi, A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

Örnek 3.5 $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$A_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq k \ , \ 0 \leq y \leq \frac{1}{k}.x\} & , \ \text{eğer } k \neq n^2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ , \ y = 1\} & , \ \text{eğer } k = n^2 \end{cases}$$

şeklinde $\{A_k\}$ küme dizisi tanımlayalım.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ , \ y = 0\}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d((x,y)\,, A_k) - d((x,y)\,, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olduğundan $\{A_k\}$ küme dizisi, A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır. Yani $st - \lim_W A_k = A$ olur. Fakat bu dizi Wijsman yakınsak değildir. Çünkü $k \neq n^2$ için

$$\lim_{k\to\infty} d\left((x,y)\,, A_k\right) = d((x,y)\,, A)$$

fakat

$$k = n^2 \text{ için } \lim_{k\to\infty} d\left((x,y)\,, A_k\right) \neq d((x,y)\,, A)$$

dır. K kümesini

$$K = K\left(x, y, \varepsilon\right) = \{k \in \mathbb{N} : |d((x,y)\,, A_k) - d((x,y)\,, A)| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlayalım. $\mathcal{I}$ ideali olarak $\mathcal{I}_d$ ideali alınırsa, $\mathcal{I}_d$ yakınsaklık ile Wijsman istatistiksel yakınsaklık çakışmaktadır. Gerçekten

$$\{k \in \mathbb{N} : |d((x,y)\,, A_k) - d((x,y)\,, A)| \geq \varepsilon\} = \left\{k \in \mathbb{N} : k = n^2\right\} \subset \mathcal{I}_d$$

sağlanır. Böylelikle $\mathcal{I}_d - \lim_W A_k = A$ dır.

Örnek 3.6 $X = \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$A_k = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq k\} & , \ \text{eğer } k \geq 2, k = n^2 \\ \{1\} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde $\{A_k\}$ küme dizisi tanımlayalım. Bu dizi Wijsman yakınsak değildir. Fakat $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ alındığında ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olduğundan $\{A_k\}$ küme dizisi, $A = \{1\}$ kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

Wijsman topolojisi genelde birinci sayılabilir olmadığından, eğer $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman anlamında yakınsak ise, $\{A_k\}$ küme dizisinin her alt dizisi A kümesine Wijsman anlamında yakınsak olmayabilir. Ama X ayrılabilir ise $\{A_k\}$ küme dizisinin her alt dizisi aynı limite yakınsaktır.

Tanım 3.7 (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için $\{A_k\}$ küme dizisinin,

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x, A_{m_k}\right) = d\left(x, A\right)$$

olacak şekilde bir alt dizisinin indeks kümesi $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ yani $\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}$ kümesi mevcut ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_W^* - \lim A_k = A$ ile gösterilir.

Tanım 3.8 (X, ρ) bir ayrılabilir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümesi olsun. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$A\left(x, \varepsilon\right) = \{k \in \mathbb{N} : \left|d\left(x, A_k\right) - d\left(x, A_N\right)\right| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $N = N\left(\varepsilon\right)$ mevcut ise $\{A_k\}$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir denir.

Tanım 3.9 (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümesi ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $A_M = \{A_{m_k}\}$ alt küme dizisi X'de Wijsman Cauchy dizisi yani

$$\lim_{k,p\to\infty} \left|d\left(x, A_{m_k}\right) - d\left(x, A_{m_p}\right)\right| = 0$$

olacak şekilde $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut ise $\{A_k\} \subset X$ dizisine Wijsman $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.10 (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ keyfi uygun bir ideal olsun. Bu durumda, $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsak ise $\{A_k\}$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat. Kabul edelim ki $\mathcal{I}_W - \lim A_k = A$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$A(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olur. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ keyfi uygun bir ideal olduğundan $k_0 \notin A(x, \varepsilon)$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

$$B(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A_{k_0})| \geq 2\varepsilon\}$$

olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$|d(x, A_k) - d(x, A_{k_0})| \leq |d(x, A_k) - d(x, A)| + |d(x, A_{k_0}) - d(x, A)|$$

olup, eğer $k \in B(x, \varepsilon)$ ise

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| + |d(x, A_{k_0}) - d(x, A)| \geq 2\varepsilon \tag{3.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan $k_0 \notin A(x, \varepsilon)$ olduğundan

$$|d(x, A_{k_0}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

dir. Ayrıca (3.1) eşitsizliğinden

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon$$

olması açıktır, böylece $k \in A(x, \varepsilon)$ elde edilir. Buradan her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$B(x, \varepsilon) \subset A(x, \varepsilon) \in \mathcal{I}$$

olduğunu gözlemleriz. Bu ise $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{I}$ yani $\{A_k\}$ küme dizisinin Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. □

Teorem 3.11 (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $\{A_k\}$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise $\{A_k\}$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat. $\{A_k\}$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, tanımdan her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve $k, p > k_0 = k_0(\varepsilon)$ için

$$\left|d(x, A_{m_k}) - d\left(x, A_{m_p}\right)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcuttur. $N = N(\varepsilon) = m_{k_0+1}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve $k > k_0$ için

$$|d(x, A_{m_k}) - d(x, A_N)| < \varepsilon, \quad k > k_0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ mevcuttur. Şimdi $H = \mathbb{N} \setminus M$ ifadesi tanımlansın. Bu durumda $H \in \mathcal{I}$ olduğu açıktır. Her $\varepsilon > 0$ ve $m_{k_0} = N = N(\varepsilon)$ için

$$A(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A_N)| \geq \varepsilon\} \subset H \cup \{m_1 < m_2 < ... < m_{k_0}\}$$

olduğundan küme dizileri için ideal tanımına göre her $\varepsilon > 0$ için $A(x, \varepsilon) \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ bulunur. Bu ise $\{A_k\} \subset X$ küme dizisinin Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğunu verir. $\square$

Teorem 3.12 (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri, $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $\mathcal{I}_W^* - \lim A_k = A$ olsun. Bu durumda, $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat. Kabul edelim ki $\{A_k\}$ küme dizisisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsak olsun. Bu durumda

$$\lim_{k \to \infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$$

olacak şekilde $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcuttur. Bu ise her $\varepsilon > 0$, her $x \in X$, ve $k > k_0$ için

$$|d(x, A_{m_k}) - d(x, A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Her $\varepsilon > 0$, her $x \in X$ ve $k, p > k_0 = k_0(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \left|d(x, A_{m_k}) - d\left(x, A_{m_p}\right)\right| &< |d(x, A_{m_k}) - d(x, A)| + \left|d\left(x, A_{m_p}\right) - d(x, A)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{k,p \to \infty} \left|d(x, A_{m_k}) - d\left(x, A_{m_p}\right)\right| = 0$$

elde edilir, yani $\{A_k\}$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir. Teorem (3.11) i kullanarak $\{A_k\} \subset X$ küme dizisinin Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğu elde edilir. $\square$

Şimdi ise Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 3.13 (X,ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun.

(i) Eğer $\mathcal{I}$ uygun ideali (AP) özelliğine sahipse keyfi $\{A_k\}\subset X$ küme dizisi için $\mathcal{I}_W-\lim A_k=A$ olduğunda $\mathcal{I}^*_W-\lim A_k=A$ dir.

(ii) Keyfi $\{A_k\}\subset X$ küme dizisi için $\mathcal{I}_W-\lim A_k=A$ olduğunda aynı zamanda $\mathcal{I}^*_W-\lim A_k=A$ oluyorsa $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahiptir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip ve $\mathcal{I}_W-\lim A_k=A$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için

$$\mathcal{T}(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}$$

yazılabilir.

$$\mathcal{T}_1=\{k\in\mathbb{N}:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq 1\}$$

ve $k\geq 2$ için

$$\mathcal{T}_k=\left\{k\in\mathbb{N}:\frac{1}{k}\leq|d(x,A_k)-d(x,A)|<\frac{1}{k-1}\right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $i\neq j$ için $\mathcal{T}_i\cap\mathcal{T}_j=\emptyset$ dir. (AP) özelliğinden dolayı $j\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{T}_j\Delta\mathcal{V}_j$ sonlu ve $\mathcal{V}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\mathcal{V}_j\in\mathcal{I}$ olacak şekilde bir $\{\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,...\}$ sayılabilir ailesi vardır. $\mathcal{V}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\mathcal{V}_j\in\mathcal{I}$ olduğu düşünülürse

$$M=\mathbb{N}\backslash\mathcal{V}=\{m=(m_i):m_i<m_{i+1},\ i\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{N}$$

için

$$\lim_{k\to\infty}d(x,A_{m_k})=d(x,A)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\eta>0$ olsun. $k\in\mathbb{N}$ için $\frac{1}{k+1}<\eta$ seçelim. Bu durumda,

$$\{k\in\mathbb{N}:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\eta\}\subset\bigcup_{j=1}^{k+1}\mathcal{T}j$$

olur. $j=1,2,...,k+1$ için $\mathcal{T}_j\Delta\mathcal{V}_j$ sonlu olduğundan

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}\mathcal{V}_j\right)\cap\{k\in\mathbb{N}:k>k_0\}=\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}\mathcal{T}j\right)\cap\{k\in\mathbb{N}:k>k_0\}\tag{3.2}$$

ifadesini sağlayacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $k > k_0$ ve $k \notin \mathcal{V}$ ise $k \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} \mathcal{V}_j$ ve (3.2) den $k \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} \mathcal{T}j$ dir. Fakat

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| < \frac{1}{k+1} < \eta$$

olduğundan $\lim_{k\to\infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$ elde edilir.

(ii) $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsak olsun. O zaman $\mathcal{I}_W - \lim A_k = A$ olacak şekilde bir $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi vardır ve

$$\Big(|d(x, A_k) - d(x, A)| \Big)_{k=1}^{\infty}$$

dizisi sıfıra azalan bir dizidir. $k \in \mathbb{N}$ için

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| = \varepsilon_k$$

ve $\{A_j\}_{j=1}^{m}$ ailesi $\mathcal{I}$ nın boştan farklı ayrık kümeler ailesi olsun. $k \in A_j$ için

$$A(\delta) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_{m_k}) - d(x, A)| \geq \delta\} \subseteq A_1 \cup A_2 ... \cup A_m$$

olur. $A(\delta) \in \mathcal{I}$ ve

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$$

olduğundan $\mathcal{I}_W^* - \lim A_k = A$ elde edilir. Böylece

$$M = \mathbb{N} \backslash B = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1} \ , \ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N},$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$$

olacak şekilde $B \in \mathcal{I}$ kümesi vardır. $B_j = A_j \cap B$, $j \in \mathbb{N}$ olsun. Her k için $B_j \in \mathcal{I}$ dır. Ayrıca

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \subset B$$

olduğundan $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ dır.

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$$

olduğundan A_j kümesinin M ile sadece sonlu sayıda ortak elemanı vardır. Böylece $A_j \subset (A_j \cap B) \cup \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$A_j \Delta B_j = A_j \setminus B \subset \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$$

ve dolayısıyla $A_j \Delta B_j$ kümesi sonlu bir küme olur. $j \in \mathbb{N}$ keyfi olduğundan (AP) özelliği sağlanır. $\square$

$\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal için küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve Wijsman $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları çakıştığını göstermek için aşağıdaki lemmalar kullanılarak farklı bir ispat yapılacaktır.

Lemma 3.14 $(P_i)_{i=1}^{\infty}$, $\mathbb{N}$nin alt kümelerinin sayılabilir ailesi olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal olsun. Bu durumda her i için $P \setminus P_i$ sonlu bir küme ve $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak şekilde bir $P \subset \mathbb{N}$ vardır.

İspat. Burada

$$\begin{aligned}
A_1 &= \mathbb{N} \setminus P_1 \\
A_2 &= (\mathbb{N} \setminus P_2) \setminus A_1 \\
A_3 &= (\mathbb{N} \setminus P_3) \setminus (A_1 \cup A_2) \\
&. \\
&. \\
&. \\
A_m &= (\mathbb{N} \setminus P_m) \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{m-1}), \ m = 2, 3, ...
\end{aligned}$$

alınsın. Her $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğundan her i için $A_i \in \mathcal{I}$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olduğu açıktır. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip olduğundan her $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \Delta B_j$ $(j = 1, 2, ...)$ sonlu küme ve $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $\{B_1, B_2, B_3, ..., B_n, ...\}$ sayılabilir kümeler ailesi mevcuttur. $P = \mathbb{N} \setminus B$ olarak alınırsa $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ elde edilir.

Her i için $P \setminus P_i$ sonlu bir küme olduğu gösterilirse lemmanın ispatı tamamlanır. Tersini kabul edelim, yani $P \setminus P_{j_0}$'nin eleman sayısı sonsuz olacak şekilde $j_0 \in \mathbb{N}$'nin var olduğu kabul edelim. Her $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu kümeler olduğundan

$j=1,2,...,j_0$ içinde $A_j \Delta B_j$ sonludur. $A_j \Delta B_j$ sonlu ise bir $k_0 \in \mathbb{N}$'den sonra $\bigcup\limits_{j=1}^{j_0} B_j$ ile $\bigcup\limits_{j=1}^{j_0} A_j$'nin eleman sayısı çakışır. Yani

$$\bigcup_{j=1}^{j_0} B_j \cap \{k \in \mathbb{N} : k > k_0\} = \bigcup_{j=1}^{j_0} A_j \cap \{k \in \mathbb{N} : k > k_0\} \tag{3.3}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Eğer $k > k_0$ ve $k \notin B$ ise $k \notin \bigcup\limits_{j=1}^{j_0} B_j$ ve sonuç olarak (3.3) den $k \notin \bigcup\limits_{j=1}^{j_0} A_j$'dir.

$$A_{j_0} = (\mathbb{N} \setminus P_{j_0}) \setminus \bigcup_{j=1}^{j_0-1} A_j \quad \text{ve} \quad k \notin A_{j_0},\ k \notin \bigcup_{j=1}^{j_0-1} A_j$$

olduğundan $k > k_0$ için $k \in P_{j_0}$'dir. Diğer taraftan $P = \mathbb{N} \setminus B$ olduğundan $k > k_0$ için $k \in P$'dir. Bu ise $P \cap P_{j_0}$ da sonsuz eleman var demektir. Bu durumda $P \setminus P_{j_0}$'in ancak sonlu sayıda olabilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. Yani, $P \setminus P_{j_0}$ sonlu bir kümedir. □

Lemma 3.15 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal, (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I}_W - \lim\limits_{n\to\infty} A_k = A$ ise $\lim\limits_{k\to\infty} d(x, A_{p_k}) = d(x, A)$ olacak şekilde;

$$P = \{p = (p_i) : p_i < p_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\},\ P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

kümesi mevcuttur.

İspat. $\mathcal{I}_W - \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$A(x, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

yazılabilir. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$P_i = \left\{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| < \frac{1}{i}\right\}$$

olsun.

$$H_i = \mathbb{N} \setminus P_i = \left\{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \frac{1}{i}\right\} \in \mathcal{I}$$

olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dir. Lemma (3.14) den her i için $P \setminus P_i$ sonlu bir küme ve $P = \{p = (p_i) : p_i < p_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ nin mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi de

$$B_k = \begin{cases} A_k & , k \in P \\ A & , k \notin P \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir $\{B_k\} \subset X$ dizisini ele alalım. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} d(x, B_k) = d(x, A)$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A_{p_k}) = d(x, A)$$

dir. □

Eğer $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal ise Lemma 3.15 den $\mathcal{I}_W - \lim A_k = A$ ise $\mathcal{I}_W^* - \lim A_k = A$ elde edilir. Böylece Lemma 3.14 ve Lemma 3.15'den Teorem 3.13'ün diğer bir ispatı verilmiş olur. Sonuç olarak aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.16 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal, (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I}_W - \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{k\to\infty} d(x, A_{p_k}) = d(x, A)$ olacak şekilde $P = \{p = (p_i) : p_i < p_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$, $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesinin mevcut olmasıdır.

Teorem 3.12 ve Lemma 3.16 dan $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal, (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I}_W - \lim\limits_{n\to\infty} A_k = A$ olsun. Bu durumda, $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

$\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip olmadığı durumda da gerçekleştiği Teorem 3.10'da gösterilmiştir.

Teorem 3.17 Eğer $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal ise Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy ile Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizileri çakışıktır.

İspat. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ idealinin (AP) özelliğine sahip olmadığı durumda bir küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy ise Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.11'de gösterilmiştir. Şimdi ise $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ idealinin (AP) özelliğine sahip olduğu kabulü altında Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisinin Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda tanımdan

$$A(x,\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A_N)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ mevcuttur. Burada $i = 1, 2, ...$ için $m_i = N\left(\frac{1}{i}\right)$ olmak üzere

$$P_i = \left\{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A_{m_i})| < \frac{1}{i}\right\}$$

olsun. Her $i = 1, 2, ...$ için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$'dir. $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip olduğundan Lemma 3.14 den her i için $P \setminus P_i$ sonlu ve $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak şekilde $P \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur. Şimdi P kümesi üzerinden

$$\lim_{k,m\to\infty} |d(x, A_k) - d(x, A_m)| = 0$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\varepsilon > 0$ ve $j > \frac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ şeçelim. Eğer $k, m \in P$ ise $P \setminus P_j$ sonlu bir kümedir. Böylece her $k, m > k(j)$ için $m \in P_j$ ve $k \in P_j$ olacak şekilde $k = k(j)$ mevcuttur. P_j 'nin ifadesinden her $k, m > k(j)$, her $x \in X$ için

$$\left|d(x, A_k) - d\left(x, A_{m_j}\right)\right| < \frac{1}{j} \quad \text{ve} \quad \left|d(x, A_m) - d\left(x, A_{m_j}\right)\right| < \frac{1}{j}$$

olur. Bu durumda $k, m > k(j)$ için

$$|d(x, A_k) - d(x, A_m)| < \left|d(x, A_k) - d\left(x, A_{m_j}\right)\right| + \left|d(x, A_m) - d\left(x, A_{m_j}\right)\right| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve $k, m > k(\varepsilon)$ için $k, m \in P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve

$$|d(x, A_k) - d(x, A_m)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $k = k(\varepsilon)$ mevcuttur. Bu ise $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi Wijsman $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olduğunu verir. □

Teorem 3.18 (X, ρ) bir metrik uzay, $A_k \subset X$ boş kümeden farklı kapalı alt kümesi ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal olsun. Eğer $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Hausdorff $\mathcal{I}$-yakınsak ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat. $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Hausdorff $\mathcal{I}$-yakınsak olsun. Bu durumda, her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : \sup |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olur.

$$\{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\} \subset \{k \in \mathbb{N} : \sup |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}$$

olduğu dikkate alınırsa sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan sol taraftaki küme de $\mathcal{I}$ idealine aittir. Böylece, $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaktır. $\square$

3.1 Küme Dizilerinin $\mathcal{I}$-limit Kümeleri ve $\mathcal{I}$-yığılma Kümeleri

Bu bölümde, metrik uzayda küme dizilerinin Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümeleri ve Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümeleri kavramlarını vereceğiz. Aynı zamanda Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümeleri ve Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümeleri arasındaki kapsama bağıntılarını inceleyeceğiz.

Tanım 3.19 (X,ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal, $A_k, B_k \subset X$'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizileri için

$$\{k \in \mathbb{N} : A_k \neq B_k\} \in \mathcal{I}$$

ise $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ küme dizileri $\mathcal{I}$ ya göre hemen hemen her k için eşittir denir ve "$\mathcal{I} - h.h.k.$ için $A_k = B_k$" yazılır.

Tanım 3.20 (X,ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümesi olsun. $K := \{n(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $K \in \mathcal{I}$ ise $\{A_k\}_K$ alt küme dizisine $\mathcal{I}$-seyrek alt küme dizisi denir. Eğer $K \notin \mathcal{I}$ ise $\{A_k\}_K$ alt küme dizisine $\{A_k\}$ küme dizisinin $\mathcal{I}$-seyrek olmayan alt küme dizisi denir.

(a) $M \notin \mathcal{I}$ ve $\lim_{k\to\infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$ olacak şekilde bir

$$M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi varsa, A ya $\{A_k\}$ küme dizisinin Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümesidir denir ve $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$ ile $\{A_k\}$ küme dizisinin tüm Wijsman $\mathcal{I}$-limit kümelerinin kümesini göstereceğiz.

(b) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ ise, A ya $\{A_k\}$ küme dizisinin Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümesidir denir ve $\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$ ile $\{A_k\}$ küme dizisinin tüm Wijsman $\mathcal{I}$-yığılma kümelerinin kümesini göstereceğiz.

$L_{\{A_k\}}$ ile $\{A_k\}$ küme dizisinin tüm Wijsman limit kümelerinin kümesini göstereceğiz. Herhangi bir $\{A_k\}$ küme dizisi için $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) \subseteq L_{\{A_k\}}$ olduğu açıktır. Çünkü $A \in \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$ olması

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A_{m_k}) = d(x, A)$$

anlamına gelir. Bu da $A \in L_{\{A_k\}}$ olduğunu verir.

Teorem 3.21 (X,ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Herhangi bir $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi için $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) \subseteq \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$ olur.

İspat. $A \in \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x, A_{m_k}\right) = d\left(x, A\right) \quad \text{ve} \qquad M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $M = \{m = (m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır. Yakınsaklık tanımı gereğince $\forall \varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda $\left|d\left(x, A_{m_k}\right) - d\left(x, A\right)\right| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$\{k \in \mathbb{N} : \left|d\left(x, A_{m_k}\right) - d\left(x, A\right)\right| < \varepsilon\} \supseteq M \setminus \ \{m_1 < m_2 < ... < m_{k_o}\}$$

olacağından ve ifadenin sağ tarafı ideale ait olmadığından

$$\{k \in \mathbb{N} : \left|d\left(x, A_{m_k}\right) - d\left(x, A\right)\right| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

elde edilir ki, bu da $A \in \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$ olması demektir. Böylece $A \in \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) \subset A \in \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$ dir. □

Teorem 3.22 (X,ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal ve $A_k \subset X$'in boş kümeden farklı kapalı alt kümesi olsun. Herhangi bir $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi için $\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}}) \subseteq L_{\{A_k\}}$ olur.

İspat. $A \in \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : \left|d\left(x, A_k\right) - d\left(x, A\right)\right| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$\varphi_k := \left\{k \in \mathbb{N} : \left|d\left(x, A_k\right) - d\left(x, A\right)\ \right| < \frac{1}{k}\right\}$$

olarak tanımlansın. $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathbb{N}$'nin sonsuz alt kümesinin azalan dizisidir. Böylece,

$$\lim_{i\to\infty} d\left(x, A_{k_i}\right) = d\left(x, A\right)$$

olacak şekilde $K = \{k = (k_i) : k_i < k_{i+1}\} \notin \mathcal{I}$ kümesi mevcuttur. O halde $A \in L_{\{A_k\}}$ elde edilir. □

Teorem 3.23 (X,ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, $\mathcal{I}\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal ve A_k, B_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I}-h.h.k.$ için $A_k = B_k$ ise $\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}}) = \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{B_k\}})$ ve $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{B_k\}})$ 'dir.

İspat. $\mathcal{I}-h.h.k.$ için $A_k = B_k$ ve $K := \{k\in\mathbb{N} : A_k \neq B_k\}$ olsun. O halde $K\in\mathcal{I}$'dir. Eğer $A\in\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$ ise $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\{k\in\mathbb{N} : |d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

ifadesi elde edilir. $\mathcal{I}-h.h.k.$ için $A_k = B_k$ olduğundan

$$\{k\in\mathbb{N} : |d(x,B_k) - d(x,A)| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $A\in\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{B_k\}})$ ve sonuç olarak

$$\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}}) \subseteq \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{B_k\}})$$

dir. Benzer şekilde

$$\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{B_k\}}) \subseteq \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}})$$

olduğu da kolayca görülebilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{I}_W(\Gamma_{\{A_k\}}) = \mathcal{I}_W(\Gamma_{\{B_k\}})$$

elde edilir.

Şimdi ise $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{B_k\}})$ olduğu gösterilsin. Bunun için

$$\{k\in\mathbb{N} : A_k \neq B_k\} \in \mathcal{I} \quad \text{ve} \quad A\in\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$$

olsun. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} d(x,A_{m_k}) = d(x,A) \quad \text{ve} \quad M = \{m=(m_i) : m_i < m_{i+1}\ ,\ i\in\mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $M\subseteq\mathbb{N}$ kümesi vardır. O halde

$$M = \{k : k\in M \text{ ve } A_k \neq B_k\} \cup \{k : k\in M \text{ ve } A_k = B_k\}$$

dir. $M\notin\mathcal{I}$ ve $\{k : k\in M \text{ ve } A_k \neq B_k\}\in\mathcal{I}$ olduğundan $\{k : k\in M \text{ ve } A_k = B_k\} \notin \mathcal{I}$ elde edilir. Son kümeden

$$\lim_{k\to\infty} d(x,B_{p_k}) = d(x,A)$$

olacak şekilde $P = \{p_1 < p_2 < ... < p_k < ...\} \notin \mathcal{I}$ kümesinin mevcut olduğunu gösterir. Böylece $A \in \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{B_k\}})$ ve

$$\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) \subseteq \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{B_k\}})$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{B_k\}}) \subseteq \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{B_k\}})$$

gösterilmiş olur. $\square$

Teorem 3.24 $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahip uygun ideal, (X, ρ) ayrılabilir bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümesi olsun. Herhangi bir $\{A_k\} \subset X$ küme dizisi için $\mathcal{I}_W - \lim A_k = A$ ise $\mathcal{I}_W\left(\Gamma_{\{A_k\}}\right) = \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = A$ dir.

İspat. $\mathcal{I}_W - \lim A_k = A$ olsun. $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahip uygun ideal olduğundan $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = A$'dir. Ayrıca Teorem 3.21'den $A \in \mathcal{I}_W\left(\Gamma_{\{A_k\}}\right)$ elde edilir. $B \neq A$ olmak üzere $B \in \mathcal{I}_W\left(\Gamma_{\{A_k\}}\right)$ olduğunu kabul edelim.

$$N := \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, B)| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

kümesinde sonsuz sayıda eleman olduğundan

$$\lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = d(x, B)$$

dir. Bu durumda $B \in \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}})$ elde edilir. $\mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = A$ olduğundan $B = A$ olmalıdır. Bu ise $B \neq A$ kabulü ile çelişir. O halde $\mathcal{I}_W\left(\Gamma_{\{A_k\}}\right) = A$ olur. Böylece,

$$\mathcal{I}_W\left(\Gamma_{\{A_k\}}\right) = \mathcal{I}_W(\Lambda_{\{A_k\}}) = A$$

elde edilir. $\square$

4 KÜME DİZİLERİNİN ASİMPTOTİK $S_\lambda^L(\mathcal{I})$-İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ

Pobyvanets (1980) reel sayı dizilerin asimptotik denklik ve asimptotik regüler matris tanımlarını vermiştir. Negatif terimli olmayan diziden diziye bir A dönüşümünün asimptotik regular olması için gerek ve yeter şartları elde etmiştir. Marouf (1993) ve Li (1997) bu oranlar üzerinde çalışmışlardır. Patterson (2003) asimptotik istatistiksel denk dizileri tanımlamıştır. Gumus and Connor (2011) reel sayı dizileri için asimptotik $\mathcal{I}$-denkliği tanımlamış ve kavram ile ilgili özellikleri vermiştir.

Mursaleen (2000) λ dizileri kullanarak λ-istatistiksel yakınsaklığın tanımını vermiştir. Bu yeni kavramı S_λ olarak göstermiş ve bu yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık, $[C,1]$-toplanabilme ve $[V,\lambda]$-toplanabilme arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Bu bölümde küme dizileri için λ-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacak, daha önce küme dizileri için tanımladığımız $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ile bu yakınsaklık kavramı yardımıyla yeni yakınsaklık kavramları verilecek ve küme dizileri için L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik denklik ve küme dizileri için L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik λ-istatistiksel denklik (Wijsman anlamında) tanımları verilecek ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 4.1 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\lambda - \lim_W A_k = A, \quad \text{ya da} \quad \{A_k\} \to A\,(WS_\lambda)$$

ile gösterilir. Burada $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ dir. Tüm Wijsman $\lambda-$istatistiksel yakınsak küme dizilerinin kümesi

$$WS_\lambda := \{\{A_k\} : S_\lambda - \lim_W A_k = A\}$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $\lambda_n = n$ ise küme dizileri için Wijsman $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık ile Wijsman istatistiksel yakınsaklık çakışmaktadır.

Burada, $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi Λ sınıfına yani azalmayan, sonsuzluğa ıraksak ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1 \text{ ve } \lambda_1 = 1$$

koşullarını sağlayan, pozitif tamsayı dizilerinin sınıfına ait bir dizidir.

Tanım 4.2 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Herbir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı bir A altkümesi varsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli* (V, λ) *toplanabilirdir* denir ve $\{A_k\} \to A[V, \lambda]$ ile gösterilir.

Eğer $\lambda_n = n$ ise, küme dizileri için *Wijsman* $[V, \lambda]$-toplanabilirlik, küme dizileri için *Wijsman* $[C, 1]$-toplanabilirliğe indirgenir.

Teorem 4.3 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\lambda \in \Lambda$ olsun. A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Bu durumda,

(*i*) $\{A_k\} \to A[V, \lambda] \Longrightarrow \{A_k\} \to A(WS_\lambda)$ ve küme dizileri için $[V, \lambda] \subset (WS_\lambda)$ kapsamı geçerlidir.

(*ii*) Eğer $\{A_k\}$ sınırlı (yani, $\{A_k\} \in L_\infty$) ve $\{A_k\} \to A(WS_\lambda)$ ise bu durumda, $\{A_k\} \to A[V, \lambda]$ dir.

(*iii*) $WS_\lambda \cap L_\infty = [V, \lambda] \cap L_\infty$ dur.

Burada, L_∞ sınırlı küme dizilerinin kümesini göstermektedir.

İspat. (*i*) $\varepsilon > 0$ ve $\{A_k\} \to A[V, \lambda]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_n} |d(x, A_k) - d(x, A)| &\geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \\ &\geq \varepsilon . |\{k \in I_n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\} \to A[V,\lambda] \Longrightarrow \{A_k\} \to A(WS_\lambda)$ sağlanır.

Aşağıdaki örnek, küme dizileri için $(WS_\lambda) \subsetneqq [V,\lambda]$ olduğunu gösterir.

$$A_k = \begin{cases} \{k\}, & n - \left[\sqrt{\lambda_n}\right] + 1 \leq k \leq n \text{ için} \\ \{0\}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde bir A_k dizisi tanımlayalım. $\{A_k\} \notin L_\infty$ dur. $A = \{0\}$ olmak üzere ve her $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon \leq 1)$ için,

$$\frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{\left[\sqrt{\lambda_n}\right]}{\lambda_n} \to 0, \ \ n \to \infty,$$

sağlanır. Yani,

$$\{A_k\} \to \{0\} (WS_\lambda)$$

dir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\left[\sqrt{\lambda_n}\right] . \left(\left[\sqrt{\lambda_n}\right] + 1\right)}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

gerçekleşir. Böylece,

$$\{A_k\} \nrightarrow \{0\} [V,\lambda]$$

dır.

(ii) Kabul edelim ki, $\{A_k\}$ sınırlı ve $\{A_k\} \to A(WS_\lambda)$ olsun. Bu durumda, her k için

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| \leq M$$

sağlayan bir M vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |d(x, A_k) - d(x, A)| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \\ &+ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Yani,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x,A_k)-d(x,A)|\leq\frac{M}{\lambda_n}|\{k\in I_n:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|+\varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlikte limite geçilirse,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\textstyle\sum_{k\in I_n}|d(x,A_k)-d(x,A)|$$
$$\leq\lim_{n\to\infty}\left(M.\frac{1}{\lambda_n}|\{k\in I_n:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|+\varepsilon\right)$$

bulunur. $A_k\to A(WS_\lambda)$ olduğundan eşitsizliğinin sağ tarafındaki limit değeri ε'a eşittir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x,A_k)-d(x,A)|\leq\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x,A_k)-d(x,A)|=0$$

elde ederiz ki, bu

$$A_k\to A\,[V,\lambda]$$

olması demektir.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düşünülürse

$$WS_\lambda\cap L_\infty=[V,\lambda]\cap L_\infty$$

elde edilir. □

X'in boş kümeden farklı A_k, B_k alt kümeleri için $d\,(x;A_k,B_k)$ yi aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$d\,(x;A_k,B_k)=\begin{cases}\dfrac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} & ,\text{ eğer } x\notin A_k\cup B_k \text{ ise}\\ L & ,\text{ eğer } x\in A_k\cup B_k \text{ ise}\end{cases}$$

Tanım 4.4 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k, her $x\in X$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x\in X$ ve $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{k\in\mathbb{N}:|d\,(x;A_k,B_k)-L|\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}$$

oluyorsa $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik denktirler denir ve $A_k\overset{\mathcal{I}_W^L}{\sim}B_k$ ile gösterilir. Eğer $L=1$ ise kolayca Wijsman anlamında $\mathcal{I}$-asimptotik denktirler denir.

Örnek olarak (x, y)-düzleminde çemberler ailesinin oluşturduğu aşağısdaki dizileri dikkate alalım:

$$A_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2ky = 0\} & , \text{ eğer } \; k = n^2 \text{ ise} \\ \{1,1\} & , \text{ diğer durumda} \end{cases}$$

ve

$$B_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2ky = 0\} & , \text{ eğer } \; k = n^2 \text{ ise} \\ \{1,1\} & , \text{ diğer durumda} \end{cases}$$

küme dizileri düşünüldüğünde, eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ olarak alınırsa

$$\{k \in \mathbb{N} : |d(x; A_k, B_k) - 1| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_d$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizileri Wijsman anlamında asimptotik $\mathcal{I}$ denktir denir. Yani, $A_k \overset{\mathcal{I}_W^1}{\sim} B_k$ dır.

Tanım 4.5 (X, ρ) bir metrik uzay, A, A_k X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) - d(x, A) \right| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-Cesàro toplanabilirdir denir ve $\{A_k\} \to A\left(C_1\left(\mathcal{I}_W\right)\right)$ ile gösterilir.

Tanım 4.6 (X, ρ) bir metrik uzay, A, A_k X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri ve $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli $\mathcal{I}$-Cesàro toplanabilirdir denir ve $\{A_k\} \to A\left(C_1\left[\mathcal{I}_W\right]\right)$ ile gösterilir.

Tanım 4.7 (X, ρ) bir metrik uzay, A_k, B_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı kuvvetli Cesàro $\mathcal{I}$-asimptotik denktirler denir ve $A_k \overset{C_1^L[\mathcal{I}_W]}{\sim} B_k$ ile gösterilir. Eğer $L = 1$ ise kolayca Wijsman anlamında kuvvetli Cesàro $\mathcal{I}$-asimptotik denktirler denir.

Tanım 4.8 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k, B_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik istatistiksel denktirler denir ve $A_k \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ile gösterilir.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ için, Wijsman anlamında L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik istatistiksel denklikle Wijsman anlamında L katlı asimptotik istatistiksel denklik çakışmaktadır.

Tanım 4.9 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı kuvvetli $\lambda_{\mathcal{I}}$-asimptotik denktirler denir ve $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ile gösterilir.

Tanım 4.10 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k, B_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x \in X$ ve her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı $\mathcal{I}$-asymptotik λ-istatistiksel denktir denir ve $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ile gösterilir.

Teorem 4.11 $\lambda \in \Lambda$ ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olsun. Eğer $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ise $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ dir.

İspat. $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_n} |d(x; A_k, B_k) - L| &\geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon}} |d(x; A_k, B_k) - L| \\ &\geq \varepsilon \left| \{ k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece,

$$\frac{1}{\varepsilon\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n:|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

olur. Bu durumda, bazı $\delta>0$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n:|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$
$$\subseteq\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\varepsilon\delta\right\}$$

elde edilir. Sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan sol taraftaki küme de $\mathcal{I}$ idealine ait olur. Böylece ispat biter. □

Teorem 4.12 $\lambda\in\Lambda$ ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olsun. Eğer $d(x,A_k)=\mathcal{O}\big(d(x,B_k)\big)$ ve $A_k\overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim}B_k$ ise bu durumda, $A_k\overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim}B_k$ dir.

İspat. $d(x,A_k)=\mathcal{O}\big(d(x,B_k)\big)$ ve $A_k\overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim}B_k$ olsun. Bu durumda her k için

$$|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\leq M$$

sağlayan M pozitif sayısı vardır. Her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d\left(x;A_k,B_k\right)-L| &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n\\ |d(x;A_k,B_k)-L|\geq\varepsilon}}|d\left(x;A_k,B_k\right)-L| \\ &+ \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n\\ |d(x;A_k,B_k)-L|<\varepsilon}}|d\left(x;A_k,B_k\right)-L| \\ &\leq M\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n:|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, aşağıdaki gibi

$$D_1=\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\varepsilon\right\}$$

ve

$$D_2=\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n:|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eğer $n\notin D_2$ ise

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n:|d\left(x;A_k,B_k\right)-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

dir. Aynı zamanda

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x;A_k,B_k)-L| \leq M\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : |d(x;A_k,B_k)-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $n\notin D_1$ dir. Bu durumda,

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x;A_k,B_k)-L|\geq\varepsilon\right\}$$
$$\subseteq\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n:|d(x;A_k,B_k)-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}\in\mathcal{I}$$

olur. $\{A_k\},\{B_k\}$ küme dizileri için $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ olduğundan $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ elde edilir. □

Aşağıdaki örnek eğer $\{A_k\},\{B_k\}$ sınırlı değillerse teoremin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.13 $L=1$ olsun ve

$$A_k=\begin{cases}\{k\}, & k=k_{r-1}+1,k_{r-1}+2,...,k_{r-1}+\left[\sqrt{\lambda_n}\right]\\ \{1\}, & \text{diğer durumda,}\end{cases}$$

şeklinde bir A_k dizisi tanımlayalım. Burada $[\ \cdot\ ]$ en büyük tamsayı fonksiyonunu göstermektedir ve tüm k için $B_k=\{1\}$ olsun. Bu durumda $\{A_k\}$ sınırsızdır. $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I})}{\sim} B_k$ dir. Fakat $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I})}{\sim} B_k$ sağlanmaz.

Teorem 4.14 $\lambda\in\Lambda$ ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal olsun. Eğer $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ise $A_k \overset{C_1^L[\mathcal{I}_W]}{\sim} B_k$ dır.

İspat. Kabul edelim ki $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I})}{\sim} B_k$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x;A_k,B_k)-L| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}|d(x;A_k,B_k)-L|+\frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}|d(x;A_k,B_k)-L|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}|d(x;A_k,B_k)-L|+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x;A_k,B_k)-L|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|d(x;A_k,B_k)-L|$$

ve böylece,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \in I_n} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}$$

olur. $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ küme dizileri için $A_k \overset{V_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ olduğundan, $A_k \overset{C_1^L[\mathcal{I}_W]}{\sim} B_k$ elde edilir.

Tüm λ için $\frac{\lambda_n}{n}$ sınırlı olduğunda eğer $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ise $A_k \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ olduğu kolayca görülür, Şimdi eğer $A_k \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ iken $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ sağlandığını gösteren teoremi vereceğiz. □

Teorem 4.15 Eğer $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ ve $A_k \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ise $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olsun. Bu durumda yeterince büyük n değerleri için $\frac{\lambda_n}{n} \geq \delta$ sağlayan bir $\delta > 0$ mevcuttur. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n}\{k \leq n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\} \supseteq \frac{1}{n}\{k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{n}|\{k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \delta\frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}|\end{aligned}$$

sağlanır. Bu durumda bazı $\eta > 0$ için

$$\begin{aligned}&\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| \geq \eta\right\} \\ &\qquad \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| \geq \eta\delta\right\} \in \mathcal{I}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0 \quad \text{ve} \quad A_k \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$$

iken $A_k \overset{S_\lambda^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ olduğu açıktır. Böylece, ispat tamamlanır. □

5 KÜME DİZİLERİNİN $\mathcal{I}$-ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ

Bu bölümde, küme dizilerinin $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği incelenecektir.

Tanım 5.1 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I}\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon>0$, $\delta>0$ ve her bir $x\in X$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}|\{k\leq n:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}$$

ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak ya da $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine $S\left(\mathcal{I}_W\right)$-yakınsaktır denir ve $A_k\to A\left(S\left(\mathcal{I}_W\right)\right)$ ile gösterilir.

Tüm Wijsman $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak diziler kümesi $S\left(\mathcal{I}_W\right)$ ile gösterilir.

$\mathcal{I}=\mathcal{I}_f$ olduğunda küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ile Wijsman istatistiksel yakınsaklık çakışmaktadır.

Tanım 5.2 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I}\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon>0$, $\delta>0$ ve her bir $x\in X$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}|\left\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\right\}|\geq\delta\right\}\in\mathcal{I}$$

ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak ya da $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine $S_\theta\left(\mathcal{I}_W\right)$ yakınsaktır denir ve $A_k\to A\left(S_\theta\left(\mathcal{I}_W\right)\right)$ ile gösterilir.

Tüm Wijsman $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi $S_\theta\left(\mathcal{I}_W\right)$ ile gösterilir.

$\mathcal{I}=\mathcal{I}_f$ olduğunda küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık ile Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık çakışmaktadır.

Tanım 5.3 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

ise $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine Wijsman anlamında kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak yada $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine $N_\theta(\mathcal{I}_W)$-yakınsaktır denir ve $A_k \to A\,(N_\theta(\mathcal{I}_W))$ ile gösterilir.

Tüm Wijsman anlamında kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak diziler kümesi $N_\theta(\mathcal{I}_W)$ ile gösterilir.

Tanım 5.4 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A_k, B_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denktirler denir ve $A_k \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ile gösterilir ve eğer $L = 1$ ise kolayca Wijsman anlamında $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denktirler denir.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ için, Wijsman anlamında L katlı $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denklikle Wijsman anlamında L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denklik çakışmaktadır.

Tanım 5.5 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A_k, B_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olmak üzere $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ and $\{B_k\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında L katlı kuvvetli $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary denktirler denir ve $A_k \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} B_k$ ile gösterilir.

Teorem 5.6 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri, θ bir lacunary dizi ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun.

(i) (a) Eğer $\{A_k\} \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ ise bu durumda $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ dir.

(b) $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olması $\{A_k\} \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olmasını gerektirmez.

(ii) Eğer $d(x,A_k) = \mathcal{O}\big(d(x,B_k)\big)$ ve $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ ise bu durumda, $\{A_k\} \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ dir.

İspat. $(i)-(a)$. $\varepsilon > 0$ ve $\{A_k\} \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k \in I_r} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |d(x;A_k,B_k)-L| \geq \varepsilon}} |d(x; A_k, B_k) - L|$$

$$\geq \varepsilon . |\{k \in I_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}|$$

dır. Böylece,

$$\frac{1}{\varepsilon h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}|$$

olur. Aynı zamanda bazı $\delta > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta \right\}$$
$$\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon . \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ dir.

$(i)-(b)$ θ lacunary dizi olsun. $\{A_k\}$ küme dizisini,

$$A_k := \begin{cases} \{k\} & , \text{ eğer } k_{r-1} < k < k_{r-1} + [\sqrt{h_r}],\ r = 1, 2, ... \\ \{1\} & , \text{ diğer durumda.} \end{cases}$$

ve $\{B_k\}$ küme dizisini ise tüm k için, $\{B_k\} = \{1\}$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan iki küme dizisi için $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ sağlanır ama $\{A_k\} \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ sağlanmaz.

(ii) $\quad d(x, A_k) = \mathcal{O}\big(d(x, B_k)\big)$ ve $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olduğunu kabul edelim. $d(x, A_k) = \mathcal{O}\big(d(x, B_k)\big)$ olduğundan, herbir $x \in X$ ve her k için

$$|d\,(x; A_k, B_k) - L| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d\,(x; A_k, B_k) - L| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x;A_k,B_k)-L|\geq\varepsilon}} |d\,(x; A_k, B_k) - L| \\
&\quad + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x;A_k,B_k)-L|<\varepsilon}} |d\,(x; A_k, B_k) - L| \\
&\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

dir. Şimdi, aşağıdaki gibi

$$D_1 = \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$D_2 = \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eğer $r \notin D_2$ ise

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d\,(x; A_k, B_k) - L| &\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $r \notin D_1$ dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
&\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\right\} \\
&\qquad \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |d\,(x; A_k, B_k) - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \in \mathcal{I}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ iken $\{A_k\} \overset{N_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 5.7 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k, X'in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve θ bir lacunary dizi olsun. Her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için eğer $\liminf_r q_r > 1$ ise, bu durumda

$$\{A_k\} \overset{S^L(I_W)}{\sim} \{B_k\} \Longrightarrow \{A_k\} \overset{S^L_\theta(I_W)}{\sim} \{B_k\}$$

dır.

İspat. $\liminf_r q_r > 1$ olsun. O halde yeteri kadar büyük r için $q_r \geq 1+\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1+\alpha \Rightarrow \frac{k_{r-1}}{k_r} \leq \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow 1 - \frac{k_{r-1}}{k_r} \geq 1 - \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} \geq \frac{\alpha}{1+\alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} \geq \frac{\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

dir. Eğer $\{A_k\} \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ ise, bu durumda $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için ve yeteri kadar büyük r için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r}\left|\{k \leq k_r : |d(x;A_k,B_k) - L| \geq \varepsilon\}\right| &\geq \frac{1}{k_r}\left|\{k \in I_r : |d(x;A_k,B_k) - L| \geq \varepsilon\}\right| \\ &\geq \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |d(x;A_k,B_k) - L| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, bazı $\delta > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |d(x;A_k,B_k) - L| \geq \varepsilon\}\right| \geq \delta\right\}$$
$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r}\left|\{k \leq k_r : |d(x;A_k,B_k) - L| \geq \varepsilon\}\right| \geq \frac{\delta\alpha}{(\alpha+1)}\right\} \in \mathcal{I}$$

dır. $\{A_k\} \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olduğundan sağ taraftaki küme ideale ait olduğundan sol taraftaki küme de ideale ait olur. Böylece, $\{A_k\} \overset{S^L_\theta(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ dir. □

Şimdiki sonuç θ lacunary dizisinin bazı $C \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümeleri için

$$\bigcup \{n : k_{r-1} < n \leq k_r, r \in C\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

Teorem 5.8 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri ve θ bir lacunary dizi olsun. Her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için $\limsup_r q_r < \infty$ ise, bu durumda

$$\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\} \Longrightarrow \{A_k\} \overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$$

dır.

İspat. $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. O zaman, $\forall r \geq 1$ için $q_r < M$ olacak şekilde bir $0 < M < \infty$ sayısı vardır. $\{A_k\} \overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim} \{B_k\}$ olduğunu kabul edelim ve ε, δ, $\delta_1 > 0$ için

$$C = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \{ k \in I_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| < \delta \right\}$$

ve

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| < \delta_1 \right\}.$$

kümelerini tanımlayalım. Kabulümüzden $C \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dir. Bununla birlikte tüm $j \in C$ için

$$K_j = \frac{1}{h_j} \left| \{ k \in I_j : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| < \delta$$

incelensin. $n \in \mathbb{N}$, bazı $r \in C$ için $k_{r-1} < n \leq k_r$ şartını sağlayan herhangi bir tamsayı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{k_{r-1}} \left| \{ k \leq k_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \\
&\qquad = \frac{1}{k_{r-1}} \left| \{ k \in I_1 : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \\
&\qquad \quad + \frac{1}{k_{r-1}} \left| \{ k \in I_2 : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \\
&\qquad \quad + \ldots + \frac{1}{k_{r-1}} \left| \{ k \in I_r : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right| \\
&\qquad = \frac{k_1}{k_{r-1}} \frac{1}{h_1} \left| \{ k \in I_1 : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon \} \right|
\end{aligned}$$

$$+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}\frac{1}{h_2}\left|\left\{k\in I_2:\left|d\left(x;A_k,B_k\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|d\left(x;A_k,B_k\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{k_1}{k_{r-1}}K_1+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}K_2+\ldots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}K_r$$

$$\leq\left\{\sup\nolimits_{j\in C}K_j\right\}\frac{k_r}{k_{r-1}}<M\delta.$$

dir. $\delta_1=\dfrac{\delta}{M}$ olarak seçilsin ve $C\in\mathcal{F}\left(\mathcal{I}\right)$ iken

$$\bigcup\left\{n:k_{r-1}<n\leq k_r,\ r\in C\right\}\subset T$$

olduğundan, θ lacunary dizisi üzerindeki kabulden T kümesi $\mathcal{F}\left(\mathcal{I}\right)$ süzgecine aittir ve böylece ispat biter. $\square$

Yukarıdaki Teorem 5.7 ve Teorem 5.8 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.9 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k, B_k X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve θ bir lacunary dizi olsun.

$$\{A_k\}\overset{S_\theta^L(\mathcal{I}_W)}{\sim}\{B_k\}\iff\{A_k\}\overset{S^L(\mathcal{I}_W)}{\sim}\{B_k\}$$

olması için gerek ve yeter şart $1<\liminf_r q_r\leq\limsup_r q_r<\infty$ sağlanmasıdır.

6 KAYNAKLAR

Attouch, H., Lucchetti, R. and Wets, R. J.-B. (1991). The topology of the ρ-Hausdorff distance, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **160**: 303–320.

Aubin, J.-P. and Frankowska, H. (1990). Set-valued analysis. Birkhauser, Boston.

Baláž, V., Červeňanski, J., Kostyrko, P. and Šalát, T. (2002). $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-continutiy of real functions. *Acta Mathematica*, **5**, 56–62.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets. In: Micchelli, C.A., Pai, D.V., Methods of functional analysis in approximation theory, ISNM **76**, Birkhauser-Verlag, Basel, 133–155.

Beer, G. (1987). Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **35**: 81–96.

Beer, G. (2002). On the compactness theorem for sequences of closed sets. *Mathematica Balkanica*, **16**: 327–338.

Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **31**: 421–432.

Beer, G. (1989). Support and distance functionals for convex sets. *Numer. Func. Anal. Optim.*, **10**: 15–36.

Beer, G. (1993). Topologies on closed and closed convex sets. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Beer, G. (1994). Wijsman Convergence: A survey. *Set-Valued Var. Anal.*, **2**: 77–94.

Beer, G. (1994). Wijsman convergence of convex sets under renorming. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. App.*, **22**: 207–216.

Beer, G. and Diconcilio, A. (1991). Uniform continuity on bounded sets and the Attouch-Wets topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112**: 235–243.

Beer, G. and Lucchetti, R. (1993). Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335**: 805–822.

Boss, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press Inc., New York.

Buck, R. C. (1953). Generalized asymptotic density. *Amer. J. Math.*, **75**: 335–346.

Connor, J. S. (1988). The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, **8**: 47–63.

Connor J. and Kline J. (1996). On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. *J. Math, Anal. Appl.*, **197**: 392–399.

Das P., Savaş E. and Ghosal S. Kr. (2011). On generalizations of certain summability methods using ideals. *Appl. Math. Letter*, **36**: 1509–1514.

Das P., Savas E. and Ghosal S. Kr. A new approach to certain summability methods using ideal. (*basımda*).

Effros, E., (1965). Convergence of closed subsets in a topological spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol.**16**: pp.929–931.

Fast, H., (1951). Sur la convergence statistique. *Collog. Math.*, Vol. **2**: pp.241–244.

Freedman A. R., Sember, J. J. and Raphael, M. (1978). Some Cesàro type summability spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37**: 508–520.

Freedman, A. R. and Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pacific J. Math.*, **95**: 293–305.

Fridy, J. A. and Miller H. I. (1991). A matrix characterization of statistical convergence. *Analysis*, Vol. **11**: pp.55–66.

Fridy, J. A., Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. **125**: no.12, 3625–3631.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**: 301–313.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific J. Math.,* **160**: 43–51.

Gurdal. M. (2004). Bazı yakınsaklık tipleri, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Gumus, H. and Connor J. (2011). Asymptotic $\Delta\mathcal{I}$-equivalent eequences. *Istanbul Commerce University Journal of Science*, **10**:(19) pp. 37–50.

Gumus, H. and Savaş, E. (2012). On $S_{\lambda}^{L}(\mathcal{I})$-asymptotically statistical equivalent sequences. *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Icnaam Aıp Conf. Proc. 1479, pp.936–941.

Kostyrko, P., Mačaj, M. and Šalát, T. (2000). Statistical Convergence and $\mathcal{I}$-Convergence. *The international mathematical scientific conference*, 16th Summer School on Real Functions Theory.

Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilezyński, W. (2000). $\mathcal{I}$-convergence, *Real Analysis Exchange*, Vol. **26**:(2), 669–680.

Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T. and Sleziak, M. (2005). $\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points. *Math. Slovaca*, **55**: 443–464.

Kuratowski, K. (1966). Topology, Vol. I., Academic Pres, New York.

Li, J. (1997). Asymptotic equivalence and summability. Internat J. Math.-Math Sci., Vol. **20** no.4: 749–758.

Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math., Vol. **80**: 167–190.

Maddox, I. J. (1970). Elements of functional analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Maddox, I. J. (1967). Spaces of strongly summable sequences. *Q. J. Math.*, **18**: 345–355.

Marouf, M. (1993). Asymptotic equivalence and summability. *Internat. J. Math. Sci.*, **16**:(4)

Mursaleen, M. (2000). λ-statistical convergence. *Math. Slovaca*, **50**: no.1, 111–115.

Nabiev, A., Pehlivan, S. and Gürdal, M. (2007). On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11**: 569–576.

Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasc. Math.*, **49**: 87–99.

Patterson, R. F. (2003). On asymptotically statistically equivalent sequences. *Demostratio Math.*, **1**: 149–153.

Patterson, R. F. and Savaş, E. (2006). On asymptotically lacunary statistically equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, **4**: 267-272.

Patterson, R. F. and Savaş, E. (2008). An extension Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences. *Aligarh Bull. Math.*, **27**:(2) 109–113.

Pobyvanets I. P. (1980). Asymptotic equivalence of some linear transformations, defined by a nonnegative matrix and reduced to generalized equivalence in the sense of Cesàro and. *Abel. Mat. Fiz.*, **28**: 83–87, 123. MR 632482 (83h:40004).

Powel, R. E., Shah, S. E. (1972). Summability Theory and its Applications. Van Nostrand Rienhold, London.

Sahiner. A., Gurdal M., Saltan S. and Gunawan H. (2007). Ideal Convergence in 2-normed spaces. *Taiwanese J. Math.*, **11**:(5) 1477–1484.

Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, vol.**30**:(2) 139–150.

Šalát, T., Tripathy, B. C. and Ziman, M. (2004). On some properties of $\mathcal{I}$-convergence. *Tatra Mt. Math. Publ.*, **28**: 279–286.

Šalát, T., Tripathy, B. C. and Ziman, M. (2005). On $\mathcal{I}$-convergence field. *Italian J. of Pure and App. Math.*, **17**: 45–54.

Salinetti, G. and Wets, R. J.-B. (1979). On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions. *SIAM Rev.*, vol. **21**: 18–33.

Savaş, E. (2013) On Asymptotically Generalized Statistical Equivalent Set Sequences. *11th International Conference Of Numerical Analysis and Applied Mathematics*, AIP Conf. Proc. 1558, 764–769 doi: 10.1063/1.4825606

Savaş, E. (2013) On $\mathcal{I}$-Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences. *Advances in Difference Equations*, **2013**: 11 pages.

Savaş, E. (2000). On Strongly λ-summable sequences of Fuzzy numbers. *Information Sciences*, **125**: 181–186.

Savaş, E. (2007). On Asymptotitatly λ-statistical sequences of Fuzzy numbers. *Math. and Nat. Comutation*, vol. **3**: no.3, 301–306.

Savaş, E. and Das P. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Appl. Math. Lett.*, **24**: 826–830.

Savaş, E. (2010). On some new sequence spaces in 2-normed spaces using ideal convergence and an Orlicz function. *J. Ineq. Appl.*, Article Number:482392. DOI:10.1155 /2010/482– 392.

Savaş, E. (2011) A-sequence spaces in 2-normed spaces using Ideal convergence and an Orlicz function. *Abst. Appl. Analy.*, vol. **2011**, Article ID:741382.

Savaş, E. (2013). On asymptotically I_λ-statistical equivalent sequences in topological groups. *Algerian Turkish Internetional Days on Mathematics 2013.* 12-14 September 2013, Fatih University, Istanbul, Turkey.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, **66**: 361–375.

Sleziak, M., Toma, V., Cincura, J. and Šalát, T. (2004). Sets of statistical cluster points and $\mathcal{I}$-cluster points. *Real Anal.Exchange*, vol. **30**: no.2, 565–580.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1994). Convergences for sequences of sets and linear mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **188**: 616–640.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1993). Set convergences. An attempt of classification, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340**: 199–226.

Taylor, A. and Lay, D. (1980). Introduction to Functional Analysis. Wiley, New York.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). Lacunary Statistical Convergence of Sequences of Sets, *Progress in Applied Mathematics*, **4**:(2) 99–109.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). On Asymtotically Lacunary Statistical Equivalent Set Sequences, *Journal of Mathematics*, **2013** doi: 10.1155/2013/310438.

Wijsman, R. A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**: 186–188.

Wijsman, R. A. (1966). Convergence of Sequences of Convex Sets, Cones and Functions II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123**: 32–45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ömer KİŞİ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Çaycuma, 27/04/1983
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: okisi@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Çaycuma Oktay Olcay Yurtbay Anadolu Lisesi, 2001
Lisans	: Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2007
Yüksek Lisans	: Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, 2009-...

Yayınları (SCI ve Diğer)

Kişi, Ö. and Nuray, F. (2013). New convergence definitions for sequence of sets. *Abstract and Applied Analysis*, vol. **2013**, Article ID 852796, 6 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2013/852796

Kişi, Ö. and Nuray, F. (2013). On $S_{\lambda}^{L}(\mathcal{I})$-asymptotically statistical equivalent of sequence of sets, ISRN *Mathematical Analysis*, vol. **2013**, Article ID 602963, 6 pages. http://dx. doi.org/10.1155/2013/602963.

Kişi, Ö., Savaş E. and Nuray, F. On $\mathcal{I}$-asymptotically lacunary statistical equivalent of sequence of sets. (Yayına sunuldu.)

Kişi, Ö. and Nuray, F. $\mathcal{I}$-limit inferior and $\mathcal{I}$-limit superior of sequence of sets. (Yayına sunuldu.)