GENİŞLETİLMİŞ ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serhat TOKATÇI

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2014

Bu tez çalışması 13. FEN. BİL. 32 numaralı proje ile Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmektedir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENİŞLETİLMİŞ ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

Serhat TOKATÇI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2014

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.../06/2014

Serhat TOKATÇI

TEZ ONAY SAYFASI

Serhat TOKATÇI tarafından hazırlanan "Genişletilmiş Armendariz Halkalar Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca .... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Başak KARPUZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENİŞLETİLMİŞ ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

Serhat TOKATÇI
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümün birinci kısmında, α-skew Armendariz halkalar tanıtılarak bir halkanın α-skew Armendariz olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. İkinci kısmında, α-skew Armendariz halka sınıfının diğer halka sınıflarıyla olan ilişkileri incelenmiştir. Üçüncü kısımda, α-Armendariz halka sınıfı tanıtılarak bazı özellikleri incelenmiştir. Son olarak dördüncü kısımda α-Armendariz halkaların diğer halka sınıflarıyla arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

2014, v+80 sayfa

Anahtar Kelimeler : α-skew Armendariz halka, α-Armendariz halka, inmiş halka, aşikar genişleme, matris halkası, polinom halkası

ABSTRACT

M. Sc Thesis

ON EXTENDED ARMENDARIZ RINGS

Serhat TOKATÇI

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asistant Professor Doctor Fatma KAYNARCA

This thesis consists of three basic chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter introduces preliminaries, definitions and necessary theorems that will be required for later use. In the first part of the third chapter, by introducing α-skew Armendariz rings some characterizations are given for a ring to be an α-skew Armendariz ring. In the second part, relationships between α-skew Armendariz rings and other rings are investigated. In the third part, the properties of these rings are studied by presenting the class of α-Armendariz ring. Finally, the fourth section is devoted to showing the relationships between α-Armendariz and other rings.

2014, v+80 pages

Key Words : α-skew Armendariz ring, α-Armendariz ring, reduced ring, trivial extension, matrix ring, polynomial ring.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan, aralıksız sorduğum sorulara yılmadan cevap vererek yazdıklarımı usta ellerinde şekillendiren çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA'ya sonsuz teşekkürlerimi iletmeyi bir borç bilirim.

Bu tez çalışması, 13. FEN. BİL. 32 numaralı proje ile Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmektedir. Desteklerinden dolayı Bilimsel Araştırma Projeleri Kordinasyon Birimine teşekkürlerimi iletirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Serhat TOKATÇI

Afyonkarahisar, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

α	R'nin bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R'nin bir α endomorfizmasının genişletilmişi
E_{ij}	Matris birimleri
I_R	R'nin birim endomorfizması
$l_R(X)$	X'in sol sıfırlayanı
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
M_R	Sağ R modül
$r_R(X)$	X'in sağ sıfırlayanı
R	Herhangi bir halka
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x;\alpha]$	R'nin skew polinom halkası
$T(R, M) = R \oplus M$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar halkası olmak üzere
$\mathbb{Z}_n$	n modülüne göre tam sayıların kümesi

1 GİRİŞ

Armendariz halka kavramı; 1997'de tanımlanmasının ardından pek çok yazar tarafından günümüze kadar araştırılan, genişletilen popüler bir konu olmuştur. Rege and Chhawchharia (1997), bu kavramı ilk ortaya atan kişilerdir. R bir halka ve $R[x]$; R halkası üzerindeki polinomlar halkası olmak üzere $R[x]$'deki $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_ib_j = 0$ sağlanıyorsa R halkasını *Armendariz* olarak adlandırmışlardır. Bu ismi vermelerinin nedeni, 1974'de ilk olarak inmiş (sıfırdan farklı sıfırüslü eleman bulundurmayan) bir halkanın bu özelliği sağladığını E. P. Armendariz'in göstermiş olmasıdır. Bu anlamda Armendariz halkalar inmiş halkaların bir genelleştirilmişidir. Armendariz halka fikri; bir halkanın sıfır bölenleri ile polinom halkasının sıfır bölenleri arasındaki ilişkinin anlaşılması bakımından önemlidir. Armendariz halkaların değişik özelliklerinin ve karakterizasyonlarının incelendiği Rege and Chhawchharia (1997), Anderson and Camillo (1998), Kim and Lee (2000), Huh (2002), Lee and Wong (2003), Lee and Zhou (2004),... gibi pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda; Armendariz bir R halkasının $R[x]$ polinom halkası, $R[x; \alpha]$ skew polinom halkası, $M_n(R)$ matris halkası, $UTM_n(R)$ üst üçgensel matris halkası, R/I bölüm halkası, $T(R, R)$ aşikar genişlemesi, $Q(R)$ klasik kesirler halkası ve eRe geniş-lemesi, gibi bazı genişlemelerinin de Armendariz olup olmadığı ya da hangi koşullar altında Armendariz olduğu farklı yaklaşımlarla incelenmiştir.

Krempa (1996), $a \in R$ olmak üzere bir R halkasının bir α endomorfizmasını; $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ sağlanıyorsa *katı* olarak adlandırmıştır. Hong vd. (2000); R halkasının bir katı α endomorfizması varsa R'yi *α-katı* olarak adlandırmışlardır. Aynı zamanda bir halkanın herhangi katı endomorfizmasının bir monomorfizma ve α-katı halkaların inmiş olduğunu ifade etmişlerdir. α-katı halkaların özellikleri Krempa (1996) ve Hirano (1999) tarafından çalışılmıştır.

Bir $\alpha : R \to R$ endomorfizması ile birlikte bir R halkası için, R'nin bir $R[x; \alpha]$ *skew polinom halkası* (aynı zamanda *endomorfizma tipinin bir Ore genişlemesi*); her $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ biçiminde tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte R üzerindeki polinomların bir halkası olarak tanımlanır. Bir R halkasının Armendariz olma özelliği $R[x]$ polinom halkasına taşınırken $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasına taşınamamaktadır. Bundan dolayı Hong vd. (2003); α-katı ve Armendariz halkaların bir genellemesi olan α-skew Armendariz halka kavramını şöyle tanımlamışlardır: α, bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $R[x;\alpha]$'daki $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ polinomları için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ (her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için) oluyorsa R halkası α *endomorfizması ile birlikte bir skew-Armendariz halkadır* (basitçe, bir *α-skew Armendariz halkadır*). Tez çalışmasının ikinci bölümünde; bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramların tanımlarına ve bazı özelliklerine yer verilmesinin ardından üçüncü bölümün birinci kısmında α-skew Armendariz halka sınıfı tanıtılmış ve tezin hazırlanmasında kullanılan yayınların tarih sırası dikkate alınarak, α-skew Armendariz halkaların sağladığı bir takım özellikler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Daha açık bir ifadeyle α-skew Armendariz halkaların alt halkalarının ve direkt çarpımlarının da α-skew Armendariz olduğu, α-katı halkaların α-skew Armendariz olduğu (fakat bu ifadenin tersinin doğru olmadığı), α-skew Armendariz bir halkanın polinom halkasının hangi koşullar altında α-skew Armendariz olduğu, α-skew Armendariz bir halkanın her homomorfik görüntüsünün α-skew Armendariz olması gerekmediği (hangi koşullar altında α-skew Armendariz olduğu), α-katı bir halkanın aşikar genişlemesinin ve bazı özel tipteki matris halkalarının α-skew Armendariz olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmayan matris halkalarının (göreceli maksimal) $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olan bazı alt halkaları belirlenmiştir. Bundan başka R halkasının α-skew Armendariz olması koşulu ile R halkasının Baer ya da $p.p.$-halka olma özelliklerinin $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasına taşınabildiği açık olarak ifade edilerek bu halka sınıfının diğer halka sınıflarıyla aralarındaki ilişkiler de ortaya konmuştur.

Hong vd. (2006); $R[x]$ polinom halkasındaki polinomlar yerine $R[x;\alpha]$ skew polinomlar halkasındaki polinomlar üzerinde yeni bir Armendarizlik tanımı vermişlerdir: α, bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $R[x;\alpha]$'daki $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ polinomları için $a_i b_j = 0$ (her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için) ise R halkasını *α-Armendariz* olarak adlandırmışlardır(Hong at al. 2006). α-Armendariz halkalar α-skew Armendariz halkaların, α-katı halkalar da

α-Armendariz halkaların bir genellemesidir. Hong vd. (2006)'da; Hong vd. (2003)'te ifade ettikleri "R inmiş α-skew Armendariz bir halka ve α bir monomorfizma iken R halkası α-katı olur mu?" sorusuna "R'nin α-skew Armendariz" olması yerine "R'yi α-Armendariz" alarak olumlu cevap vermişlerdir. Ayrıca α-Armendariz halkaların ve genişlemelerinin özelliklerini incelemişlerdir. Buna ek olarak α-Armendariz bir R halkası için R ile $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının çeşitli özellikleri ve aralarındaki güçlü bağlantılar gösterilmiştir. Armendariz halkalarla ilgili daha önceden bilinen bazı sonuçlar α-Armendariz halkaların özelliklerinden yeniden ifade edilmiştir. Bundan başka "simetrik olma" "terslenebilir olma" "Baer olma" ve "*p.p.*-halka olma" gibi bazı özelliklerin α-Armendariz bir R halkasından $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasına taşındığı gösterilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması için gerekli olan temel kavramlar ve bazı özellikler verilecek ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır. Bu bölümde temel kaynak olarak Anderson and Fuller (1992) ve Hungerford (2000) kullanılacaktır. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe R birimli bir halkadır. Halkanın toplamaya göre etkisiz elemanı 0 ve çarpımsal birimi 1 ile gösterilecektir.

2.1 Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 Bir R halkasında sıfırdan farklı bir a elemanına; sırasıyla $ab = 0$ ($ba = 0$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir b elemanı varsa sırasıyla bir *sol* (*sağ*) *sıfır bölen* denir. R'nin bir elemanı hem sol hem de sağ sıfır bölen ise bir *sıfır bölen* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 $1_R \neq 0_R$ olmak üzere değişmeli ve birimli bir R halkasının sıfır böleni yoksa R halkası *tamlık bölgesi* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 R halkasının bir I ideali ve bir α endomorfizması için

- $r \in R$ olmak üzere $r^2 \in I$ iken $r \in I$ oluyorsa I; bir *yarıasal ideal*
- $\alpha(I) \subseteq I$ oluyorsa I; bir α-*ideal*,
- $\alpha^{-1}(I) = \{a \in R \ : \ \alpha(a) \in I\} = I$ oluyorsa I; bir α-*değişmez ideal*

olarak adlandırılır.

Uyarı 2.1.4 Her α-değişmez ideal bir α-idealdir. Gerçekten I bir α-değişmez ideal olsun. $b \in \alpha(I)$ alalım. Bu durumda $b = \alpha(a)$ olacak şekilde $a \in I$ vardır. I ideali α-değişmez olduğundan $I = \alpha^{-1}(I)$ ve buradan da $a \in \alpha^{-1}(I)$ olup $\alpha(a) = b \in I$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha(I) \subseteq I$ olduğundan I bir α-idealdir.

Tanım 2.1.5 Bir R halkasının bir I ideali için $R/I = \{r + I \ : \ r \in R\}$ kümesine *R'nin I'ya göre bölüm halkası* (ya da *R'nin homomorfik görüntüsü*) denir.
α bir R halkasının bir endomorfizması ve I; R'nin bir α-ideali ise her $a \in R$ için α endomorfizması; $\bar{\alpha}(a + I) = \alpha(a) + I$ ile tanımlanarak bir $\bar{\alpha} : R/I \to R/I$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.1.6 R bir halka ve P, R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. R'nin A, B idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P'ye R'nin *asal ideali* denir. R'nin tüm asal ideallerinin arakesitine R'nin *asal radikali* denir.

Tanım 2.1.7 Her bir $i \in I$ için R_i birer halka olmak üzere bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte

$$\{(a_i)_{i\in I} \ : \ a_i \in R_i\}$$

kümesine R_i'lerin direkt çarpımı denir ve $\prod_{i\in I} R_i$ ile gösterilir.
Her bir $i \in I$ için R_i'nin bir α_i endomorfizması yardımıyla, her $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i$ için $\bar{\alpha}((a_i)_{i\in I}) = (\alpha_i(a_i))_{i\in I}$ ile $\prod_{i\in I} R_i$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizması tanımlanabilir.

Tanım 2.1.8 R bir halka ve ${}_RM_R$ bir bimodül olsun. R'nin M ile *aşikar genişlemesi* (trivial extension) olarak adlandırılan $R \oplus M$ kümesi;

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$$

ile tanımlanan işlemlerle bir halkadır. Bu halka $T(R, M)$ ile gösterilir. Bu halka aynı zamanda $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin halkasına izomorftur. Yani

$$T(R, M) = R(+)M \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M \right\}$$

biçimindedir.
R'nin bir α endomorfizması, her $(a, b) \in T(R, R)$ için $\bar{\alpha}(a, b) = (\alpha(a), \alpha(b))$ biçimin-de tanımlanarak $T(R, R)$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

2.2 Polinom Halkaları

R bir halka olmak üzere R üzerindeki $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ biçimindeki tüm polinomların kümesi; polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır ve bu halka $R[x]$ ile gösterilir.
R'nin bir α endomorfizması; her $\sum_{i=0}^{m} a_ix^i \in R[x]$ için $\bar{\alpha}(\sum_{i=0}^{m} a_ix^i) = \sum_{i=0}^{m} \alpha(a_i)x^i$ biçiminde tanımlanarak $R[x]$'in bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.1 R bir halka olmak üzere

$$R[x;x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i : a_i \in R \text{ } (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir}) \right\}$$

kümesi polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır ve bu halka *Laurent polinomlar halkası* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 R bir halka ve $\alpha : R \longrightarrow R$ bir halka endomorfiması olsun. Bir $\delta : R \longrightarrow R$ toplamsal dönüşümü; her $a, b \in R$ için

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$$

özelliğini sağlarsa, bu durumda δ dönüşümüne R'nin bir *α-türevi* (α-derivation) denir.

Tanım 2.2.3 R bir halka; α, R'nin bir endomorfizması ve δ, R'nin bir α-türevi olsun. R halkasının $R[x;\alpha,\delta]$ *Ore genişlemesi*; polinomların bilinen toplaması ve herhangi bir $a \in R$ için

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Eğer δ, R'nin sıfır endomorfizması ise, bu durumda $R[x;\alpha,0]$ yerine $R[x;\alpha]$ yazılır ve bu halka *endomorfizma tipinin bir Ore genişlemesi* (ya da *skew polinom halkası*) olarak adlandırılır. Diğer bir ifadeyle $R[x;\alpha]$ kümesi polinomlardaki bilinen toplama işlemi ve

$$xa = \alpha(a)x$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır.

Özel olarak α, R'nin birim endomorfizması ve δ, R'nin sıfır endomorfizması olarak alınırsa $R[x;I_R,0] = R[x]$ olacağı açıktır.

2.3 Matris Halkaları

Bu bölümde bir R halkasından elde edilen bazı özel tipteki matris halkaları tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1 R bir halka olmak üzere R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi, matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre toplamsal birimi

$n \times n$ tipindeki sıfır matrisi, çarpımsal birimi ise $n \times n$ tipindeki birim matris olan bir halkadır. Burada sıfır matrisi O ile birim matrisi ise I_n ile gösterilecektir. R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası

$$M_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} \ : \ a_{ij} \in R\}$$

ile gösterilecektir. R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm üst üçgensel matrislerin halkası ise

$$UTM_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} \ : \ a_{ij} \in R \ \text{ ve } \ i > j \ \text{ iken } \ a_{ij} = 0\}$$

ile gösterilecektir.

R'nin bir α endomorfizması; her $[a_{ij}]_{n\times n} \in M_n(R)$ (ya da her $[a_{ij}]_{n\times n} \in UTM_n(R)$) için $\bar{\alpha}([a_{ij}]_{n\times n}) = [\alpha(a_{ij})]_{n\times n}$ biçiminde tanımlanarak $M_n(R)$'nin (ya da $UTM_n(R)$) bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.3.2 Herhangi bir R halkası üzerinde i. satır j. sütunundaki bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrislere *matris birimleri* (matrix units) denir ve E_{ij} ile gösterilir. Örneğin herhangi bir R halkası üzerindeki tüm 2×2 tipindeki matris birimleri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 2.3.3 Herhangi bir $A \in M_n(R)$ için, $RA = \{rA \ : \ r \in R\ \}$ olsun. $n \geq 2$ için $\{E_{i,j} : \ 1 \leq i, j \leq n\ \}$ matris birimleri kümesi olmak üzere, $V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ olsun.
$n = 2k \geq 2$ çift sayısı için,

$$A_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \qquad B_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

ve $n = 2k + 1 \geq 3$ tek sayısı için,

$$A_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \qquad B_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+2} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} n = 2k \ \text{ için} \qquad & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^e(R), \\ & B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^e(R), \\ n = 2k+1 \ \text{ için} \qquad & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^o(R), \\ & B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^o(R) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Örneğin, $n = 2k = 4$ $(k = 2)$için

$$A_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b \\ 0 & a_1 & a_2 & c \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a, b, c \in R \right\},$$

$$B_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a & b & c \\ 0 & a_1 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a, b, c, d, r, s \in R \right\}$$

ve $n = 2k + 1 = 5$ $(k = 2)$için;

$$A_5(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b & c \\ 0 & a_1 & a_2 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a, b, c, d, r, s \in R \right\},$$

$$B_5(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a & b & c & d \\ 0 & a_1 & r & s & t \\ 0 & 0 & a_1 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a, b, c, d, r, s, t, u, v, w \in R \right\}$$

şeklindedir (Lee and Zhou 2004).

Tanım 2.3.4 Herhangi bir R halkası için $n = 2k \geq 2$ pozitif bir çift tam sayı olmak üzere

$$V_n(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} RE_{i,j} + \sum_{j=1}^{k-1} RE_{j,k} + RI_n$$

ve $n \geq 2$ pozitif bir tam sayı ve $k = [n/2]$ (yani; $n = 2k$'daki k değeri ve $n = 2k+1$'deki k değeri) olmak üzere

$$U_n(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} RE_{i,j} + \sum_{j=k+2}^{n} RE_{k+1,j} + RI_n$$

matris halkaları tanımlıdır.

R'nin bir α endomorfizması; her $[a_{ij}]_{n\times n} \in V_n(R)$ (ya da her $[a_{ij}]_{n\times n} \in U_n(R)$) için

$$\bar{\alpha}([a_{ij}]_{n\times n}) = [\alpha(a_{ij})]_{n\times n}$$

biçiminde tanımlanarak $V_n(R)$'nin (ya da $U_n(R)$'nin) bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

2.4 Klasik Sağ Kesirler Halkası

Tanım 2.4.1 R bir halka olsun. $s \in R$ olmak üzere her $0 \neq r \in R$ için $rs \neq 0$ ve $sr \neq 0$ ise s'ye *düzenli (regular) eleman* denir. Başka bir ifadeyle bir $r \in R$ için $rs = 0$ veya $sr = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa s'ye *düzenli (regular) eleman* denir.

Bir halkanın birimi düzenli eleman iken sıfırı düzenli eleman değildir. Ayrıca bir R halkasının tersinir elemanları da düzenlidir. Gerçekten; $s \in R$ tersinir olsun. $r \in R$ olmak üzere $rs = 0$ olduğunu kabul edelim. s tersinir olduğundan $rss^{-1} = 0s^{-1}$ olur. Buradan $r = 0$ olup s düzenlidir. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasında 2 düzenli elemandır fakat tersinir değildir. Bundan başka, bir tamlık bölgesinde sıfırdan farklı her eleman düzenlidir.

Tanım 2.4.2 R bir halka olmak üzere S, R'nin çarpımsal alt monoidi (yani R'deki çarpma işlemine göre birimli ve birleşmeli olan bir alt kümesi) olmak üzere;

(i) $\nu : R \to Q$ homomorfizması her $s \in S$ için $\nu(s)$ tersinir olacak şekilde vardır.

(ii) Q'nun her elemanı $s \in S$ ve $r \in R$ için $[\nu(s)]^{-1}\nu(r)$ formundadır.

özellikleri sağlanırsa Q halkasına *R'nin S'ye göre kesirlerinin halkası* (quotient ring) denir.

Lemma 2.4.3 $S = \{r \in R \ : \ r \text{ düzenli eleman}\}$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı bir alt monoididir.

İspat $r_1, r_2 \in S$ alalım. $r_1r_2 \in S$ yani r_1r_2 düzenli olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $r(r_1r_2) = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $(rr_1)r_2 = 0$ olup r_2 düzenli eleman olduğundan $rr_1 = 0$'dır. r_1 düzenli eleman olduğundan $r = 0$ bulunur.

Benzer olarak $(r_1r_2)r = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $r_1(r_2r) = 0$ olup r_1 düzenli olduğundan $r_2r = 0$ olur. r_2 düzenli eleman olduğundan $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $r_1r_2 \in S$ bulunur. $1_R \in S$ ve S'de birleşme özelliği var olduğundan S, R'nin çarpımsal kapalı alt monoididir.

Tanım 2.4.4 $S = \{r \in R \ : \ r \text{ düzenli eleman}\}$ olmak üzere birebir olan $\varphi : R \to Q$ dönüşümü varsa Q'ya R'nin *klasik sağ kesirler halkası* (classical right quotient ring) denir.
α bir R halkasının bir endomorfizması; b düzenli olmak üzere $a, b \in R$ olacak şekildeki herhangi $ab^{-1} \in Q$ için $\bar{\alpha}(ab^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)^{-1}$ biçimde tanımlanarak Q'nun bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.4.5 S, R'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanı-yorsa S'ye bir *dominator* (ya da Ore) küme denir.

(i) Herhangi $s_1 \in S$ ve $r_1 \in R$ için $s_2r_1 = r_2s_1$ olacak şekilde $s_2 \in S$ ve $r_2 \in R$ vardır.

(ii) $r \in R$ ve $s \in S$ için $rs = 0$ ise $s'r = 0$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır.

Önerme 2.4.6 R, S'ye göre klasik sağ (sol) kesir halkasına sahipse S Ore kümedir.

2.5 Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda Armendariz halkalarla ilişkileri olan bazı halka sınıflarının tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 2.5.1 R bir halka, α; R'nin bir endomorfizması ve $a \in R$ olmak üzere $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa α bir *katı* (rigid) endomorfizma olarak adlandırılır (Krempa 1996). Bir R halkasının bir katı α endomorfizması varsa R halkası α-katı olarak adlandırılmıştır (Hong et al. 2000).

Tanım 2.5.2 Bir R halkasının bir a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa a elemanı *sıfırüslü* (nilpotent) olarak adlandırılır. Bu özelliği sağlayan en küçük n doğal sayısına da a elemanının *sıfırüslülük göstergesi* (nilpotency index) denir. Bir R halkasının her bir elemanı sıfırüslü olan bir N idealine *nil ideal* denir (Anderson and Fuller 1992).

Tanım 2.5.3 Bir R halkasının sıfırdan farklı sıfırüslü elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R'ye *inmiş* (reduced) halka denir. İnmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğu açıktır.

Uyarı 2.5.4 α bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R halkası α-katı ise R halkası inmiştir. Gerçekten; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(a^2) = 0$ olduğundan $0 = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(a)\alpha(a)\alpha(\alpha(a))) = a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a))$ bulunur. R halkası α-katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve tekrar kabulden $a = 0$ elde edilir.

Tanım 2.5.5 $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkasını *sıfır değişmeli* (zero commutative) olarak adlandırmıştır (Habeb 1990). Bu özelliği sağlayan halkaları *terslenebilir* (reversible) adı altında incelemiştir (Cohn 1999). Terslenebilir halkalar aynı zamanda Anderson and Camillo (1998) tarafından *sıfır çarpımlar değişir* (zero products commute) özelliğine sahip halkalar olarak ZC_2 adı altında çalışılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalara C_0 *halka* adını vermişlerdir (Krempa and Niewieczerzal 1977). Bu tezde terslenebilir ifadesi kullanılacaktır.

Uyarı 2.5.6 R halkası inmiş ise terslenebilirdir. Gerçekten; R'nin inmiş olduğunu kabul edelim. R'nin terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = 0$ olup R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Dolayısıyla R terslenebilirdir.

Tanım 2.5.7 $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *simetrik* (symmetric) olarak adlandırılır (Lambek 1971). Simetrik halkalar için ZC_3 notasyonunu kullanarak bu halka sınıfının özelliklerini incelemiştir(Anderson and Camillo 1999).

Uyarı 2.5.8 Her inmiş halka simetriktir (Shin 1973). Şimdi bunu gösterelim; $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu eşitlik sağdan b ile çarpılırsa $abcb = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bcba = 0$ bulunur. Son eşitlik sağdan c ile çarpılırsa $bcbac = 0$ elde edilir. R terslenebilir olduğundan $cbacb = 0$ olur. Bu durumda $(cba)^2 = cbacba = 0$ ve R inmiş olduğundan $cba = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $acb = 0$ bulunur. Böylece R simetriktir. Fakat simetrik olup da, inmiş olmayan halka sınıfları da vardır (Anderson and Camillo 1999).

Uyarı 2.5.9 Değişmeli halkaların simetrik olduğu açıktır. Simetrik halkaların terslenebilir olduğu da kolayca gösterilebilir: $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $1ab = 0$

olup R simetrik olduğundan $1ba = ba = 0$ elde edilir. Fakat bu gerektirmenin tersi doğru olmayabilir (Anderson and Camillo 1999).

Tanım 2.5.10 $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkası *yarıdeğişmeli* (semicommutative) olarak adlandırılır (Shin 1973). Bir R halkasının yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ sağ sıfırlayan (ya da $l_R(a)$ sol sıfırlayan) kümesinin R'nin bir ideali olmasıdır. Shin yarıdeğişmeli halkalar için *SI özelliğine* sahip halkalar adını da kullanmıştır. Yarıdeğişmeli halkalar aynı zamanda Habep tarafından *zero insertive* adı altında 1990 yılında çalışılmıştır.

Uyarı 2.5.11 Her terslenebilir halka yarıdeğişmelidir. Gerçekten; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R ters- lenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Bu eşitlik sağdan herhangi bir $r \in R$ ile çarpılırsa $bar = 0$ olur. Buradan R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ elde edilir. Böylece $aRb = 0$, yani R halkası yarıdeğişmelidir.

Tanım 2.5.12 Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *özüslü* (idempotent) denir. Birimli bir halka her zaman 0 ve 1 özüslü elemanlarına sahiptir. R halkasının bir e özüslü elemanı R'nin merkezinde ise, yani her $a \in R$ için $ae = ea$ oluyorsa e özüslü elemanı *merkezi özüslü* (central idempotent) olarak adlandırılır (Anderson and Fuller 1992).

Tanım 2.5.13 Bir R halkasının tüm özüslü elemanları merkezi ise R halkası *abelyan* olarak adlandırılır.

Uyarı 2.5.14 Her yarıdeğişmeli halka abelyan halkadır. Gerçekten: $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1-e) = 0$'dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $eR(1-e) = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ bulunur. Buradan $ere = er$ elde edilir. Diğer taraftan $(1-e)e = 0$'dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $(1-e)Re = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $(1-e)re = 0$ bulunur. Buradan $ere = re$ elde edilir. Sonuç olarak herhangi bir $r \in R$ için $er = re$ olduğundan e özüslü elemanı merkezidir, yani R halkası abelyandır.

Uyarı 2.5.15 Böylece yukarıda tanımları verilen halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Fakat genel olarak bu gerektirmelerin herbirinin tersi doğru değildir.

R α-katı$\Rightarrow$ R inmiş$\Rightarrow$ R simetrik$\Rightarrow$ R terslenebilir$\Rightarrow$ R yarıdeğişmeli$\Rightarrow$ R abelyan

Tanım 2.5.16 $a \in R$ için $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkası *yarıasal* (semiprime) olarak adlandırılır. Yarıasal halkaların sınıfının, inmiş halkaların sınıfı tarafından kapsandığı çok açıktır.

Tanım 2.5.17 R bir halka olmak üzere R'nin boştan farklı her alt kümesinin sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $\emptyset \neq X \subseteq R$ alt kümesi için $r_R(X) = eR$ (ya da $l_R(X) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *Baer* olarak adlandırılır (Kaplansky 1968).

Tanım 2.5.18 R bir halka olmak üzere R'nin her bir sağ (ya da sol) ideali bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $\emptyset \neq I \trianglelefteq R$ ideali için $r_R(I) = eR$ (ya da $l_R(X) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *quasi-Baer* olarak adlandırılır (Clark 1967).

Tanım 2.5.19 R bir halka olmak üzere R'nin her bir temel sağ ideali projektif ya da denk olarak R'nin her bir elemanının sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $a \in R$ elemanı için $r_R(a) = eR$ (ya da $l_R(a) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *sağ p.p* (ya da *sol p.p*) olarak adlandırılır. R halkası hem sağ *p.p* hem de sol *p.p* ise kısaca *p.p-halka* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.20 R bir halka olmak üzere R'nin her bir temel sağ (ya da sol) idealinin sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani $\emptyset \neq I \lhd R$ temel sağ (ya da sol) ideali için $r_R(I) = eR$ (ya da $l_R(I) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası bir *sağ principally quasi-Baer* (ya da kısaca *sağ (ya da sol) p.q.-Baer*) olarak adlandırılır. R halkası hem sağ *p.q*-Baer hem de sol *p.q*-Baer ise kısaca *p.q-Baer halka* olarak adlandırılır (Birkenmeier et al. 2001).

Uyarı 2.5.21 Baer halkaların *p.p*-halka olduğu açıktır. Bundan başka abelyan sağ (sol) *p.p*-halkalar inmiş halkalardır.

3 GENİŞLETİLMİŞ ARMENDARİZ HALKALAR

Bu bölümde ilk olarak Armendariz halka sınıfı tanıtılarak, α-skew Armendariz halka tanımının yapılmasına neden ihtiyaç duyulduğu açıklanacaktır. Daha sonra α-skew Armendariz halkaların bazı özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenecektir.
Armendariz halka kavramı ilk olarak Rege and Chhawchharia (1997) tarafından tanıtılmıştır. Bu halka sınıfına bu ismi vermelerinin nedeni 1974 yılında E. P. Armendariz'in inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını göstermiş olmasıdır. Dolayısıyla her inmiş halkanın Armendariz olduğu açıktır. Şimdi Armendariz halka tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.0.1 $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır (Rege and Chhawchharia 1997).

Armendariz halka sınıfının özellikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Bir halkanın Armendariz olma özelliği o halkanın bazı genişlemelerine (örneğin polinom halkasına) taşınırken Anderson and Camillo (1998) bazı genişlemelerine (örneğin skew polinom halkasına) taşınamamaktadır (Hong et al. 2003). Aşağıda skew polinom halkası Armendariz olmayan bir halka örneği verilmiştir.

Örnek 3.0.2 Bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını gözönüne alalım. $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ diyelim. R'nin değişmeli ve inmiş olduğu açıktır. Bundan dolayı R Armendariz'dir.
R'nin $\alpha((\bar{a}, \bar{b})) = (\bar{b}, \bar{a})$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. α'nın bir otomorfizma olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $R[x; \alpha]$'nın Armendariz olmadığını gösterelim. Bunun için $f(y) = (\bar{1}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0})x]y, g(y) = (\bar{0}, \bar{1}) + [(\bar{1}, \bar{0})x]y \in R[x; \alpha][y]$ olsun. $f(y)g(y) = 0$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
f(y)g(y) =& (\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0})[(\bar{1}, \bar{0})x]y + [(\bar{1}, \bar{0})x]y(\bar{0}, \bar{1}) + [(\bar{1}, \bar{0})x]y[(\bar{1}, \bar{0})x]y \\
=& (\bar{0}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0})x + (\bar{1}, \bar{0})\alpha(\bar{0}, \bar{1})x]y + [(\bar{1}, \bar{0})\alpha(\bar{1}, \bar{0})x^2]y^2 \\
=& (\bar{0}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0})x + (\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0})x]y + [(\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0})x^2]y^2 \\
=& (\bar{0}, \bar{0}) + (\bar{0}, \bar{0})xy + (\bar{0}, \bar{0})x^2y^2 = 0
\end{aligned}$$

dır. Fakat $(\bar{1}, \bar{0})[(\bar{1}, \bar{0})x] = (\bar{1}, \bar{0})x \neq 0$'dır. Bundan dolayı $R[x; \alpha]$ Armendariz değildir.
$\square$

Bu nedenle Armendarizlik özelliğinin sağlanmadığı skew polinom halkasında, yeni bir tanımın yapılması doğal olarak ortaya çıkmıştır.

3.1 α-Skew Armendariz Halkalar

Bu bölümde ifade edilen bilgilerin çoğu (Hong et al. 2003)'de yer alan sonuçlardır. Şimdi α-skew Armendariz halka tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.1.1 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun. $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa R'ye *α-skew Armendariz halka* denir.

Önerme 3.1.2 α bir R halkasının bir endomorfizması ve S; R'nin $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde bir alt halkası olmak üzere R halkası α-skew Armendariz ise S'de α-skew Armendariz'dir.

İspat S; R'nin $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekildeki bir alt halkası ve R α-skew Armendariz olsun. $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in S[x;\alpha]$ alalım. $S \leq R$ olduğundan aynı zamanda $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ olup R halkası α-skew Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ bulunur. Böylece S, α-skew Armendariz'dir. □

Önerme 3.1.3 Her bir $i \in I$ için α_i; R_i'nin bir endomorfizması olmak üzere, R_i bir α_i-skew Armendariz bir halka ise $\prod_{i\in I} R_i$ direkt çarpımı da $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

İspat Her bir $i \in I$ için α_i; R_i'nin bir endomorfizması olmak üzere R_i bir α_i-skew Armendariz bir halka olsun. $pq = 0$ olacak şekilde $p = \sum_{k=0}^{m} (a_i)_k x^k, q = \sum_{l=0}^{n} (b_i)_l x^l \in (\prod_{i\in I} R_i)[x;\bar{\alpha}]$ alalım. Bu durumda her bir i için $(a_k \alpha^k(b_l))_{i\in I} = (0)_{i\in I}$ olur. Böylece her $0 \leq k \leq m$ ve $0 \leq l \leq n$ için $(a_i)_k \alpha^k((b_i)_l) = 0$ olduğundan $\prod_{i\in I} R_i$ direkt çarpımı da $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir. □

R halkası α-katı iken R'nin inmiş olduğu ikinci bölümde gösterilmişti. Özel olarak α; R'nin birim endomorfizması olarak alınırsa R'nin I_R-katı olması R'nin inmiş olmasına denk olur. Bu açıdan I_R-katı (yani inmiş) bir R halkası Armendariz olup R'nin I_R-skew Armendariz olduğu açıktır. Fakat bu ifadenin (R I_R-katı$\Rightarrow$ R I_R-skew Armendarizdir) karşıtı genelde doğru değildir. Örneğin: $n \geq 2$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$

için $R = \mathbb{Z}_{n^2}$ olsun. $\bar{0} \neq \bar{n} \in \mathbb{Z}_{n^2}$ için $\bar{n}\bar{n} = (\bar{n})^2 = (\bar{n^2}) = \bar{0}$ olduğundan $R = \mathbb{Z}_{n^2}$ inmiş değildir. Dolayısıyla R halkası I_R-katı değildir. Fakat $R = \mathbb{Z}_{n^2}$ bir değişmeli Armendariz halkadır. Sonuç olarak R halkası I_R-skew Armendariz'dir.

Önerme 3.1.4 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun. R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$'nın inmiş olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R α-katı olsun. Bu durumda R'nin inmiş olduğu açıktır. $p^2 = 0$ olacak şekilde $p = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m \in R[x;\alpha]$ alalım. Buradan $a_0^2 = 0$ olup R inmiş olduğundan $a_0 = 0$ bulunur. Bu ifade x^2'li terimin katsayısında yerine yazılırsa $a_1\alpha(a_1) = 0$ olur. R α-katı olduğundan $a_1 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ yani $p = 0$ bulunur. Sonuç olarak $R[x;\alpha]$ inmiş'tir. Diğer taraftan $R[x;\alpha]$'nın inmiş olduğunu kabul edelim. R'nin α-katı olduğunu göstermek için Hong vd. (2000) α'nın monomorfizma olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Kabul edelim ki α monomorfizma olmasın. Bu duurumda $\alpha(r) = 0$ fakat $0 \neq r \in R$ vardır. O halde $(rx)^2 = (rx)(rx) = r\alpha(r)x^2 = 0$ olup $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $rx = 0$ yani $r = 0$ bulunur. Bu durum kabul ile çelişir. O halde kabul yanlış olup α monomorfizmadır. Sonuç olarak R α-katı'dır. □

Sonuç 3.1.5 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. R α-katı ise, bu durumda R α-skew Armendariz'dir.

İspat R α-katı olsun. Önerme 3.1.4'ten $R[x;\alpha]$ inmiştir. Bu durumda $R[x;\alpha]$ Armendariz'dir. Bundan dolayı $f(x)g(x) = 0$ özelliğini sağlayan $R[x;\alpha]$'daki $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ ve $g(x) = \sum_{j}^{n} = 0 = b_jx^j$ polinomları için $R[x;\alpha]$ Armendariz olduğundan $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olup R α-skew Armendarizdir. □

Aşağıdaki örnek α-skew Armendariz olup ta α-katı olmayan bir R halkasının var olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.6 $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sırasıyla tam sayılar kümesi ve rasyonel sayılar kümesi olmak üzere $R = T(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Q} \right\}$ olsun. $\alpha : R \to R$ endomorfizması

$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & \frac{t}{2} \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ile tanımlansın. Her $\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & s \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & s \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & as+tb \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & bt+sa \\ 0 & ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & s \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

olduğundan R değişmelidir.

R, α-katı değildir. Gerçekten;

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

fakat $t \neq 0$ iken $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ dır.

Diğer yandan R, α-skew Armendarizdir. Gerçekten; $A_i = \begin{pmatrix} a_i & t_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ ve $B_j = \begin{pmatrix} b_j & s_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix}$ olmak üzere $p = A_0+A_1x+...+A_mx^m, q = B_0+B_1x+...+B_nx^n \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. Her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ olduğunu üç farklı durumda gösterelim.

1. durum: $0 \leq k \leq m$ olmak üzere $A_0 = A_1 = ... = A_{k-1} = 0$ ve $a_k \neq 0$ olacak şekilde $0 \neq A_k = \begin{pmatrix} a_k & t_k \\ 0 & a_k \end{pmatrix}$ var olsun. Eğer $a_k = 0$ olsaydı $\begin{pmatrix} 0 & t_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_j & s_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_kb_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olup buradan $\mathbb{Q}$ tamlık bölgesi olduğundan $t_k = 0$ veya $b_j = 0$ bulunurdu ki bu durumda $t_k = 0$ olursa $A_k = 0$ olması ile çelişirdi. Bundan dolayı ispat yapılırken çelişki halinin ortaya çıkmaması için $a_k \neq 0$ olarak kabul edilecektir.

$pq = 0$ olduğundan

$$A_0B_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$A_0B_1 + A_1\alpha(B_0) = 0 \quad (3.2)$$

$$A_0B_1 + A_1\alpha(B_1) + A_2\alpha^2(B_0) = 0 \quad (3.3)$$

$$\vdots$$

$$A_0B_k + A_1\alpha(B_{k-1}) + ... + A_{k-1}\alpha^{k-1}(B_1) + A_k\alpha^k(B_0) = 0 \quad (3.4)$$

$$A_0B_{k+1} + A_1\alpha(B_k) + ... + A_{k-1}\alpha^{k-1}(B_2) + A_k\alpha^k(B_1) + A_{k+1}\alpha^{k+1}(B_0) = 0 \quad (3.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Hipotez gereğince (3.4) eşitliğinden $A_k\alpha^k(B_0) = 0$ bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_k & t_k \\ 0 & a_k \end{pmatrix} \alpha^k\left(\begin{pmatrix} b_0 & s_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a_k & t_k \\ 0 & a_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 & (\frac{1}{2})^k s_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_kb_0 & a_k(\frac{1}{2})^k s_0 + t_kb_0 \\ 0 & a_kb_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. Buradan $a_kb_0 = 0$ olup $\mathbb{Z}$ tamlık bölgesi olduğundan $a_k = 0$ veya $b_0 = 0$ olur. Yukarıda açıklanan sebepten dolayı $a_k \neq 0$ olup $b_0 = 0$ olmalıdır. $a_k(\frac{1}{2})^k s_0 + t_kb_0 = 0$ eşitliğinde $b_0 = 0$ yerine yazılırsa $a_k(\frac{1}{2})^k s_0 = 0$ olup $\mathbb{Q}$ tamlık bölgesi olduğundan $s_0 = 0$ olur. Böylece $B_0 = \begin{pmatrix} b_0 & s_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir. (3.5) eşitliği kullanılarak $A_k\alpha^k(B_1) = 0$ bulunur. Buradan $a_kb_1 = 0$ ve $a_k(\frac{1}{2})^k s_1 + t_kb_1 = 0$ olup yukarıdakine benzer olarak $b_1 = 0$ ve buradan da $s_1 = 0$ olur. Böylece $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & s_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $B_0 = B_1 = \cdots = B_n = 0$ olur. Sonuç olarak $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ elde edilir.

2. durum: $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $B_0 = B_1 = ... = B_{k-1} = 0$ ve $0 \neq B_k = \begin{pmatrix} b_k & s_k \\ 0 & b_k \end{pmatrix}$ olacak şekilde $0 \neq b_k$ var olsun. $b_k = 0$ olsaydı $\begin{pmatrix} a_i & t_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & s_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_is_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olup buradan $\mathbb{Q}$ tamlık bölgesi olduğundan $a_i = 0$ veya $s_k = 0$

bulunurdu ki bu durumda $s_k = 0$ olması $B_k \neq 0$ olması ile çelişirdi. Bundan dolayı ispat yapılırken çelişki halinin ortaya çıkmaması için $b_k \neq 0$ olarak kabul edilecektir. $pq = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_0B_0 =& 0 \qquad (3.6)\\ A_0B_1 + A_1\alpha(B_0) =& 0 \qquad (3.7)\\ A_0B_1 + A_1\alpha(B_1) + A_2\alpha^2(B_0) =& 0 \qquad (3.8)\\ &\vdots\\ A_0B_k + A_1\alpha(B_{k-1}) + ... + A_{k-1}\alpha^{k-1}(B_1) + A_k\alpha^k(B_0) =& 0 \qquad (3.9)\\ A_0B_{k+1} + A_1\alpha(B_k) + ... + A_{k-1}\alpha^{k-1}(B_2) + A_k\alpha^k(B_1) + A_{k+1}\alpha^{k+1}(B_0) =& 0 \qquad (3.10) \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotez gereğince (3.9) eşitliğinden $A_0B_k = 0$ bulunur. Bu durumda

$$0 = A_0B_k = \begin{pmatrix} a_0 & t_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k & s_k \\ 0 & b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0b_k & a_0s_k + t_0b_k \\ 0 & a_0b_k \end{pmatrix}$$

olup $a_0b_k = 0$ ve $a_0s_k + t_0b_k = 0$ bulunur. Yukarıda açıklanan sebepten dolayı $b_k \neq 0$ olup $a_0 = 0$ olmalıdır. $a_0s_k + t_0b_k = 0$ eşitliğinde $a_0 = 0$ yerine yazılırsa $t_0 = 0$ yani $A_0 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse 1.durumdaki metoda benzer olarak $A_0 = A_1 = \ldots = A_m = 0$ elde edilir. Böylece her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ bulunur.

3. durum: Kabul edelim ki $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i = \begin{pmatrix} 0 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_j = \begin{pmatrix} 0 & s_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $A_i\alpha^i(B_j) = \begin{pmatrix} 0 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\frac{1}{2})^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Yukarıdaki üç durumun sonucu olarak R, α-skew Armendarizdir. □

Aşağıdaki örnekte; Sonuç 3.1.5'in tersinin doğru olmadığını gösteren başka bir halka örneği yer almaktadır.

Örnek 3.1.7 R=$\mathbb{Z}_2[x]$ halkasını ve $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım.

(1) R'nin α-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $pq = 0$ olacak şekilde $p = f_0 + f_1y... + f_my^m$ ve $q = g_0 + g_1y + ... + g_ny^n \in R[y;\alpha]$ polinomlarını alalım. Kabul

edelim ki $f_0 = f_1 = \ldots = f_{s-1} = 0$ ve $f_s \neq 0$ olacak şekilde $0 \leq s \leq m$ var olsun. $pq = 0$ oluğundan x^s'li terimin katsayısından

$$f_0 g_s + f_1\alpha(g_{s-1}) + f_2\alpha^2(g_{s-1)} + ... + f_{s-1}\alpha^{s-1}(g_1) + f_s\alpha^s(g_0) = 0$$

olup kabulden $f_s\alpha^s(g_0) = 0$ bulunur. $f_s \neq 0$ olduğundan $\alpha^s(g_0) = 0$'dır. x^{s+1}'li terimin katsayısından

$$f_0 g_{s+1} + f_1\alpha(g_s) + f_2\alpha^2(g_{s-1)} + ... + f_{s-1}\alpha^{s-1}(g_2) + f_s\alpha^s(g_1) + f_{s+1}\alpha^{s+1}(g_0) = 0$$

olup kabulden ve $\alpha^s(g_0) = 0$ olduğundan $f_s\alpha^s(g_1) = 0$ bulunur. $f_s \neq 0$ olduğundan $\alpha^s(g_1) = 0$ elde edilir. Böyle devam edilerek her $0 \leq i \leq s-1$ için $f_i = 0$ ve her $s \leq i \leq m$ için $\alpha^i(g_j) = 0$ olup böylece her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $f_i\alpha^i(g_j) = 0$ bulunur. Sonuç olarak R α-skew Armendariz'dir.

(2) Şimdi R'nin α-katı olmadığını gösterelim. $0 \neq xy \in R[y;\alpha]$ polinomu için α'nın tanımı kullanılarak

$$(xy)^2 = xyxy = x\alpha(x)y^2 = x0y^2 = 0$$

bulunur. Fakat $x \neq 0$ olduğundan $R[y;\alpha]$ inmiş değildir. Dolayısıyla Önerme 3.1.4 gereğince R'nin α-katı olmadığı açıktır. □

Anderson and Camillo (1998), R'nin I_R-skew Armendariz (Armendariz) olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in $\bar{I}_R$-skew Armendariz (Armendariz) olması gerektiğini göstermiş-lerdir. Fakat Hong vd. (2003) aşağıdaki gibi daha genel bir sonuç elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.8 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun. Uygun pozitif bir t tamsayısı için $\alpha^t = I_R$ olsun. R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R α-skew Armendariz olsun. $p(y) = f_0 + f_1 y + \ldots + f_m y^m, q(y) = g_0 + g_1 y + \ldots + g_n y^n \in (R[x])[y;\bar{\alpha}]$ için $p(y)q(y) = 0$ olsun. Burada $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ iken $f_i(x) = a_{i_0} + a_{i_1}x + \ldots + a_{i_{w_i}}x^{w_i}$ ve $g_j(x) = b_{j_0} + b_{j_1}x + \ldots + b_{j_{v_j}}x^{v_j}$ biçimindedir. $R[x]$'in $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu göstermek için $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ iken $f_i\bar{\alpha}^i(g_j) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. *der* kısaltması $R[x]$'de herhangi bir polinomun derecesini göstermek ve sıfır polinomunun dercesi 0 olmak üzere herhangi $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $k > maks\{der(f_i), der(g_j)\}$ olacak şekilde bir pozitif k tam sayısı alalım.

$$p(x^{tk}) = f_0 + f_1 x^{tk} + \ldots + f_m x^{mtk}$$

$$q(x^{tk}) = g_0 + g_1 x^{tk} + \ldots + g_n x^{ntk}$$

polinomları için f_i'nin (sırasıyla g_j)'nin katsayılarının kümesi ile $p(x^{tk})$'nın (sırasıyla $q(x^{tk})$)'nın katsayılarının kümesi eşittir. $p(y)q(y) = 0$, $\alpha^{tk} = I_R$ ve $R[x]$ polinom halkasında x, R'nin elemanlarıyla yer değiştirdiğinden $R[x;\alpha]$'da $p(x^{tk})q(x^{tk}) = 0$ olur. R α-skew Armendariz olduğundan her bir $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq l_i \leq w_i$ ve $0 \leq s_j \leq v_j$ için

$$a_{l_i}\alpha^{l_i+ikt}(b_{s_j}) = a_{l_i}\alpha^{l_i}(b_{s_j}) = 0$$

bulunur. Böylece her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $f_i\bar{\alpha}^i(g_j) = 0$ olduğundan $R[x]$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Tersine $R[x]$ polinom halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu kabul edelim. R, $R[x]$'in bir alt halkası olduğundan R'nin α-skew Armendariz olduğu açıktır. $\square$

Uyarı 3.1.9 Teorem 3.1.8'den polinom halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olan bir R halkasının α-katı (yani $R[x;\alpha]$'nın inmiş) olması gerekmez. Gerçekten; Örnek 3.1.7' deki $R = \mathbb{Z}_2[x]$ halkasını ve $\alpha(f(x)) = f(0)$ endomorfizmasını gözönüne alalım. $R = \mathbb{Z}_2[x]$ halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu önceden gösterilmişti. Teorem 3.1.8'den $R[y] = (\mathbb{Z}_2[x])[y]$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. Fakat $R = \mathbb{Z}_2[x]$ α-katı değildir.

Aşağıdaki örnek; hem Teorem 3.1.8'deki gibi R α-skew Armendariz ve uygun pozitif bir t tamsayısı için $\alpha^t = I_R$ olacak şekilde R halkasının birimden farklı bir α otomorfizmasının var olduğunu hem de α-skew Armendariz bir halkanın homomorfik görüntüsünün $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.10 $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. R α-skew Armendariz'dir. Gerçekten $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $R[x;\alpha]$'da

$$p(x) = \begin{pmatrix} a_0 & \bar{b}_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \bar{b}_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + \ldots + \begin{pmatrix} a_m & \bar{b}_m \\ 0 & a_m \end{pmatrix} x^m$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} c_0 & \bar{d}_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & \bar{d}_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} x + ... + \begin{pmatrix} c_n & \bar{d}_n \\ 0 & c_n \end{pmatrix} x^n$$

polinomlarını alalım. Burada $p_0(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$, $p_1(x) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1x + ... + \bar{b}_mx^m$, $q_0(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$ ve $q_1(x) = \bar{d}_0 + \bar{d}_1x + ... + \bar{d}_nx^n$ olmak üzere

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) & p_1(x) \\ 0 & q_0(x) \end{pmatrix} \text{ ve } q(x) = \begin{pmatrix} q_0(x) & q_1(x) \\ 0 & q_0(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. $p(x)q(x) = 0$ olduğundan

$$p_0(x)q_0(x) = 0 \tag{3.11}$$

$$p_0(x)q_1(x) + p_1(x)q_0(x) = 0 \tag{3.12}$$

eşitlikleri elde edilir. $\mathbb{Z}$ tamlık bölgesi olduğundan $\mathbb{Z}$ inmiştir. Bundan dolayı $\mathbb{Z}[x;\alpha]$ inmiş ve buradan da terslenebilir olduğundan (3.11) eşitliğinden $q_0(x)p_0(x) = 0$ elde edilir. (3.12) eşitliği sağ taraftan $p_0(x)$ ile çarpılırsa $p_0(x)q_1(x)p_0(x) = 0$ elde edilir, buradan $\mathbb{Z}[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $p_0(x)q_1(x) = 0$ bulunur. Bu ifade (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa $p_1(x)q_0(x) = 0$ elde edilir. $\mathbb{Z}[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $\mathbb{Z}$ halkası α-katı olup Önerme 3.1.5 gereğince $\mathbb{Z}$ α-skew Armendariz olduğundan;

$$p_0(x)q_0(x) = 0 \;\text{ olduğundan }\; a_i\alpha^i(c_j) = 0$$

$$p_0(x)q_1(x) = 0 \;\text{ olduğundan }\; a_i\alpha^i(\bar{d}_j) = 0$$

$$p_1(x)q_0(x) = 0 \;\text{ olduğundan }\; \bar{b}_i\alpha^i(c_j) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} a_i & \bar{b}_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \alpha^i \left(\begin{pmatrix} c_j & \bar{d}_j \\ 0 & c_j \end{pmatrix} \right) = 0$$

olup R α-skew Armendariz'dir.

Şimdi R halkasının $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, \bar{0} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ ideali için R/I'nın $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmadığını gösterelim. $R/I \cong \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} : \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ olduğu gözönüne alınırsa R/I, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir. Gerçekten $(R/I)[x;\bar{\alpha}]$'da $p(x)p(x) = 0$ olacak şekildeki

$$p(x) = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & \bar{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ 0 & \bar{2} \end{pmatrix} x$$

polinomu için $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ 0 & \bar{2} \end{pmatrix} \bar{\alpha} \left(\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & \bar{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ 0 & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan R/I bölüm halkası (ya da R'nin I idealine göre homomorfik görüntüsü) $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir. □

Lemma 3.1.11 Bir R halkasının herhangi α endomorfizması için aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R α-katıdır.

(ii) $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ ise $a = 0$ dır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. R α-katı olduğundan R inmiş halkadır. $(a\alpha(a))^2 = a\alpha(a)a\alpha(a) = 0$ olup R inmiş olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve buradan R α-katı olduğundan $a = 0$ olur.
(ii) $\Rightarrow$ (i) İlk olarak R'nin inmiş olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$0 = a^2 = \alpha(a^2) = \alpha^2(a)\alpha(a^2)a = \alpha(\alpha(a)a)(\alpha(a)a) = 0$$

olup kabulden $\alpha(a)a = 0$ ve tekrar kabulden $a = 0$ elde edilir. Böylece R inmiş halkadır. Kabul edelim ki $a\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $(\alpha(a)a)^2 = \alpha(a)a\alpha(a)a = 0$ olup R inmiş olduğundan $\alpha(a)a = 0$ ve kabulden $a = 0$ elde edilir. □

Örnek 3.1.10'dan bir R halkasının homomorfik görüntüsü α-skew Armendariz değildir. Fakat Hong vd. (2003) aşağıdaki önermeyi ispatlayarak $R[x]$ polinom halkası-
nın bir homomorfik görüntüsünün $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için bir karakterizasyon vermiş-lerdir(Hong et al. 2003).

Önerme 3.1.12 α, R halkasının $\alpha(1) = 1$ olacak şekildeki bir monomorfizması olsun. Bu durumda R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $\langle x^2 \rangle$, $R[x]$'in x^2 tarafından üretilen ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^2 \rangle$ bölüm halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat R α-katı olsun. Bu durumda Önerme 3.1.4'ten $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır. $R[x]/\langle x^2\rangle$'de bir $\bar{h}$ elemanını $h = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x]$ olmak üzere $\bar{h} = h + \langle x^2\rangle = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \langle x^2\rangle = a_0 + a_1x + \langle x^2\rangle = a_0 + a_1\bar{x} \in R[x]/\langle x^2\rangle$ biçiminde yazabiliriz. Burada $\bar{x} = x + \langle x^2\rangle$ dir. Şimdi $R[x]/\langle x^2\rangle$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $\bar{p} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1y + \cdots + \bar{f}_my^m,\ \bar{q} = \bar{g}_0 + \bar{g}_1y + \cdots + \bar{g}_ny^n \in (R[x]/\langle x^2\rangle)[y;\bar{\alpha}]$ için $\bar{p}\bar{q} = 0$ olsun. Burada her bir $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}, a_{i_1}, b_{j_0}, b_{j_1} \in R$ olmak üzere $\bar{x}^2 = 0$ olduğundan $\bar{f}_i = a_{i_0} + a_{i_1}\bar{x},\ \bar{g}_j = b_{j_0} + b_{j_1}\bar{x}$ yazılabilir. Ayrıca $\alpha(1) = 1$ olduğu kullanılarak $y\bar{x} = y(x + \langle x^2\rangle) = \bar{\alpha}(x + \langle x^2\rangle)y = (\alpha(x) + \langle x^2\rangle)y = (x + \langle x^2\rangle)y = \bar{x}y$ olduğu görülür. Diğer taraftan herhangi bir $a \in R$ için $a\bar{x} = \bar{x}a$ olur. Böylece

$$h_0 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_0}y^i,\ h_1 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_1}y^i,\ k_0 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_0}y^j,\ k_1 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_1}y^j \in R[y]$$

olmak üzere $\bar{p} = h_0 + h_1\bar{x},\ \bar{q} = k_0 + k_1\bar{x}$ yazılır. $\bar{p}\bar{q} = 0$ ve $\bar{x}^2 = \bar{0}$ olduğundan

$$\bar{0} = \bar{p}\bar{q} = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x} + h_1k_1\bar{x}^2 = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x}$$

elde edilir. Böylece $R[y;\alpha]$'da $h_0k_0 = 0$ ve $h_0k_1 + h_1k_0 = 0$ bulunur. $R[y;\alpha](\cong R[x;\alpha])$ inmiş olduğundan $k_0h_0 = 0$ ve $0 = k_0(h_0k_1 + h_1k_0)h_1 = (k_0h_1)^2$ olur. Böylece $k_0h_1 = 0$ ve buradan $h_1k_0 = 0$ dır. Sonuç olarak $h_0k_1 = 0$ olur. Sonuç 3.1.5'ten R α-skew Armendarizdir. Böylece her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}\alpha^i(b_{j_0}) = 0,\ a_{i_0}\alpha^i(b_{j_1}) = 0,\ a_{i_1}\alpha^i(b_{j_0}) = 0$ olur. Buna göre $0 = a_{i_0}\alpha^i(b_{j_0}) + [a_{i_0}\alpha^i(b_{j_1}) + a_{i_1}\alpha^i(b_{j_0})]\bar{x} + [a_{i_1}\alpha^i(b_{j_1})]\bar{x}^2 = (a_{i_0} + a_{i_1}\bar{x})\bar{\alpha}^i(b_{j_0} + b_{j_1}\bar{x}) = \bar{f}_i\bar{\alpha}^i(\bar{g}_j)$ olduğundan $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Tersine $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. Şimdi R'nin α-katı olduğunu Lemma 3.1.11'i kullanarak gösterelim. $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. $\bar{x} = x + \langle x^2\rangle \in R[x]/\langle x^2\rangle$ olmak üzere $(\alpha(a) - \bar{x}y),\ (a + \bar{x}y) \in (R[x]/\langle x^2\rangle)[y;\bar{\alpha}]$ polinomlarını gözönüne alalım. $(R[x]/\langle x^2\rangle)[y;\bar{\alpha}]$'da $\alpha(a)\bar{x} = \bar{x}\alpha(a)$ olduğundan $(\alpha(a) - \bar{x}y)(a + \bar{x}y) = \alpha(a)a + [\alpha(a)\bar{x} - \bar{x}\alpha(a)]y - \alpha(1)\bar{x}^2y^2 = \bar{0}$ ve $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğundan $\alpha(a)\bar{x} = 0$ olur. Bu durumda $\alpha(a) = 0$ ve α bir monomorfizma olduğundan $a = 0$ elde edilir. Böylece R α-katıdır. □

Hong vd. (2003), tarafından aşağıdaki önermede bir halkanın homomorfik görüntüsünün hangi koşullar altında $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu incelenmiştir.

Önerme 3.1.13 α, bir R halkasının bir endomorfizması ve $\alpha(I) \subseteq I$ olacak biçimde I, R'nin bir ideali olsun. Eğer I ideali

$$(*) \quad a \in R \text{ için } a\alpha(a) \in I \text{ iken } a \in I$$

koşulunu sağlarsa, R/I bölüm halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

İspat İlk olarak, $a \in R$ olmak üzere $a^2 \in I$ ise $a \in I$ (yani I, R'nin yarıasal ideali) olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten; $a^2 \in I$ olsun. Kabulden $\alpha(a^2) \in I$ ve buradan $a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(a)\alpha(a)\alpha(\alpha(a)) = a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) \in I$ olup $(*)$'dan $a\alpha(a) \in I$ ve tekrar $(*)$'dan $a \in I$ dır. Şimdi R/I'nın $\bar{\alpha}$-katı olduğunu gösterelim. $r+I \in R/I$ elemanı için $(r+I)\bar{\alpha}(r+I) = I$ olsun. Bu durumda $I = (r+I)\bar{\alpha}(r+I) = (r+I)(\alpha(r)+I) = r\alpha(r)+I$ olup $r\alpha(r) \in I$ bulunur. $(*)$'dan dolayı $r \in I$ olur. O halde $r+I = I$ yani R/I $\bar{\alpha}$-katıdır. Sonuç 3.1.5'ten R/I $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. □

Uyarı 3.1.14 Önerme 3.1.13'deki $(*)$ koşulu fazladan bir koşul değildir. Gerçekten Örnek 3.1.10'daki $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, \bar{0} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ idealini gözönüne alalım.

$$\begin{pmatrix} 2 & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} 2 & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

fakat $\begin{pmatrix} 2 & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin I$ olduğundan I, $(*)$ koşulunu sağlamaz. Bundan dolayı Örnek 3.1.10'daki R halkası için R/I bölüm halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir.

Önerme 3.1.15 R bir tamlık bölgesi olsun. R'nin herhangi bir α endomorfizması için R α-skew Armendariz'dir.

İspat R bir tamlık bölgesi olsun. $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $R[x;\alpha]$'da $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ polinomlarını alalım. Kabul edelim ki $0 \leq s \leq m$ olmak üzere $a_0 = a_1 = \ldots = a_{s-1} = 0$ ve $a_s \neq 0$ olsun. $p(x)q(x) = 0$ olduğundan x^s'li terimin katsayısından

$$a_0 b_s + a_1\alpha(b_{s-1)} + \ldots + a_{s-1}\alpha^{s-1}(b_1) + a_s\alpha^s(b_0) = 0$$

elde edilir. Kabulden $a_s\alpha^s(b_0) = 0$ olur. R tamlık bölgesi ve $a_s \neq 0$ olduğundan $\alpha^s(b_0) = 0$ bulunur. x^{s+1}'li terimin katsayısından

$$a_0b_{s+1} + a_1\alpha(b_s) + \ldots + a_{s-1}\alpha^{s-1}(b_2) + a_s\alpha^s(b_1) + a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = 0$$

olup kabulden ve $\alpha^s(b_0) = 0$ olduğundan $a_s\alpha^s(b_1) = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $\alpha^s(b_0) = \alpha^s(b_1) = \cdots = \alpha^s(b_n) = 0$ bulunur. $0 \leq i \leq s-1$ için $a_i = 0$ ve her $s \leq i \leq m$ için $\alpha^i(b_j) = 0$ olduğundan her $0 \leq i \leq m$ ve her bir $0 \leq j \leq n$ için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R α-skew Armendariz'dir. □

Uyarı 3.1.16 Özel olarak herhangi bir R halkasının bir P asal ideali için R/P tamlık bölgesi olduğundan Önerme 3.1.15 gereğince R/P $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olur.

Uyarı 3.1.17 Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi: R; halkası abelyan fakat α-skew Armendariz değil, $P(R)$; Önerme 3.1.13'deki $(*)$ koşulunu sağlayan R halkasının yarıasal ve α-skew Armendariz olan asal radikali ve $R/P(R)$; $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olacak şekilde R'nin bir α otomorfizması vardır.

Örnek 3.1.18

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a - b \equiv c \ (\mathrm{mod}\ 2), a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım .Bu durumda;

$$P(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : c \equiv \ 0 \ (\mathrm{mod}\ 2) \right\}$$

asal radikali yarıasaldır. Gerçekten; $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ac + cb \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \in P(R)$$

olsun. Bu durumda $a^2 = 0$ ve $b^2 = 0$ olup $\mathbb{Z}$ tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ ve $b = 0$ bulunur. Bu durumda $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P(R)$ elde edilir. Ayrıca $P(R)$'nin elemanlarının özelliği gereğince $P(R)$'nin α-skew Armendariz olduğu açıktır.

R'nin özüslü elemanları sadece $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Bundan dolayı R'nin abelyan olduğu açıktır. Ayrıca $\alpha(P(R)) = P(R)$ dir. Bundan başka $P(R)$'nin Önerme 3.1.13'teki $(*)$ koşulunu sağladığı da açıktır.

$$\begin{aligned} R/P(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} + P(R) : a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ ve } a - b \equiv c \pmod 2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a - b \equiv 0 \pmod 2 \right\} \end{aligned}$$

halkasının elemanlarının formundan dolayı inmiş olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan α; $R/P(R)$ üzerinde birim dönüşüm olur. Bundan dolayı $R/P(R)$ bölüm halkası α-katıdır. Önerme- 3.1.5 gereğince $R/P(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Fakat R α-skew Armendariz değildir. Gerçekten; $p(x)q(x) = 0$ olacak şekildeki $R[x;\alpha]$'daki

$$p(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

polinomları için;

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olur. □

Diğer yandan aşağıdaki örnek I α-skew Armendariz, R/I $\bar{\alpha}$-skew Armendariz fakat R α-skew Armendariz olmayacak şekilde R'nin bir I ideali ve birimden farklı bir otomorfizmasının var olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.19 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)$ $= \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ olsun. $pq = 0$ olacak biçimde $R[x;\alpha]$'daki

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \text{ ve } q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

polinomları için

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan dolayı R α-skew Armendariz değildir.

Şimdi R'nin herhangi sıfırdan farklı bir I ideali için I'nın α-skew Armendariz ve R/I'nın $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu gösterelim. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri sadece

$$\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \text{ve} \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formundadır.

Öncelikle $I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ idealini gözönüne alalım. $R/I \cong F$ olduğundan R/I bir tamlık bölgesi olur. Önerme 3.1.15 gereğince R/I $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. Şimdi I'nın α-skew Armendariz olduğunu gösterelim: Her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_j = \begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olmak üzere $I[x;\alpha]$'da

$$p = A_0 + A_1x + ... + A_mx^m$$

$$q = B_0 + B_1x + ... + B_nx^n$$

polinomları için $pq = 0$ olsun. Bu durumda sabit terimin katsayısından $A_0B_0 = 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $A_0 \neq 0$ ve $B_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$A_0B_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0c_0 & a_0d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup buradan $a_0c_0 = 0 = a_0d_0$ bulunur. F tamlık bölgesi olduğundan $a_0 = 0$ veya $c_0 = 0$ olmalıdır. $a_0 \neq 0$ olursa $c_0 = 0 = d_0$ olur ki bu durum $B_0 = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $a_0 = 0$ olmalıdır. Böylece her $0 \leq j \leq n$ için

$$A_0B_j = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

bulunur. Bu ifade x'li terimin katsayısında kullanılarak

$$0 = A_1\alpha(B_0) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & -d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_0 & -a_1d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $a_1c_0 = 0 = a_1d_0$ bulunur. $a_1 \neq 0$ olursa $c_0 = 0 = d_0$ olur ki bu durum $B_0 = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $a_1 = 0$ olmalıdır. Böylece her $0 \leq j \leq n$ için $A_1\alpha(B_j) = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ olur. Sonuç olarak I α-skew Armendariz'dir.

Şimdi $J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ idealini gözönüne alalım. $R/J \cong F$ olduğundan R/J'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu açıktır. İddia ediyoruz ki J ideali α-skew Armendarizdir. Gerçekten; $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$, $B_j = \begin{pmatrix} 0 & c_j \\ 0 & d_j \end{pmatrix}$ olmak üzere $\in J[x;\alpha]$'da

$$p = A_0 + A_1x + ... + A_mx^m$$

$$q = B_0 + B_1x + ... + B_nx^n$$

polinomları için $pq = 0$ olsun. $A_0 \neq 0$ ve $B_0 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $pq = 0$ olduğundan $0 = A_0B_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_0d_0 \\ 0 & b_0d_0 \end{pmatrix}$ olup $a_0d_0 = 0 = b_0d_0$ elde edilir. $d_0 \neq 0$ olursa $a_0 = 0 = b_0$ elde edilir ki bu ifade $A_0 \neq 0$ olması ile çelişir, dolayısıyla $d_0 = 0$ olmalıdır. Böylece $A_1\alpha(B_0) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Böyle devam edilerek her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ bulunur. Yani J, α-skew Armendariz'dir.

Son olarak $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$R/K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + K \ : \ a, c \in F \right\}$$

biçimindedir. Ayrıca $\bar{\alpha}$; R/K üzerindeki birim dönüşüm olur. R/K halkasının inmiş (yani $I_{R/K}$-katı) olduğu açıktır. Böylece R/K $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. K'nın elemanlarının formundan dolayı K'nın α-skew Armendariz olduğu açıktır. □

Rege and Chhawchharia (1997), bir R halkası üzerindeki $n \times n$ tipindeki matris halkasının I_R-skew Armendariz olmadığı gösterilmiştir. Aynı zamanda aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris halkası da I_R-skew Armendariz olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.20 $R = Mat_2(\mathbb{Z}_3)$ halkasını ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. $R[x, \alpha]$'daki

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

polinomları için $pq = 0$ dır. Fakat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R α-skew Armendariz değildir. Benzer olarak $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki 2×2 tipindeki üst üçgensel matrislerin $UTM_2(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ halkası da α-skew Armendariz değildir. □

Aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi, α-skew Armendariz bir R halkasının (R inmiş ya da α birim dönüşüm olsa bile) $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmak zorunda olmadığı gösterilmiştir (Hong et al. 2003) .

Örnek 3.1.21 (1) $R=\mathbb{Z}_4$ olsun. I_R, R'nin birim dönüşümü olmak üzere R halkası I_R-skew Armendariz'dir. $p(x)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}x\in T(R,R)[x;\alpha]$ polinomu için $p(x)^2=0$ dır fakat; $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\bar{I_R}\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\neq 0$ olduğundan $T(R,R)$ aşikar genişlemesi $\bar{I_R}$-skew Armendariz değildir.

(2) Örnek 3.1.6'daki α-skew Armendariz olan $R=\left\{\begin{pmatrix}a&t\\0&a\end{pmatrix}:a\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{Q}\right\}$ halkasını ve $\alpha\left(\begin{pmatrix}a&t\\0&a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&t/2\\0&a\end{pmatrix}$ ile tanımlı α endomorfizmasını gözönüne alalım. R'nin aşikar genişlemesi $S=T(R,R)=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\0&A\end{pmatrix}:A,B\in R\right\}$ olmak üzere $S[x;\bar{\alpha}]$'daki $pq=0$ olacak şekildeki

$$p=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1/2\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1/2\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}x$$

ve

$$q=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}x$$

polinomları için

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1/2\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)\neq 0$$

olduğundan S, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir.

(3) Örnek 3.1.7'deki α-skew Armendariz olan $R=\mathbb{Z}_2[x]$ halkasını ve $\alpha(f(x))=f(0)$ ile tanımlı α endomorfizmasını gözönüne alalım. $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir.

Gerçekten $T(R,R)[x;\bar{\alpha}] \cong T(R[x;\alpha],R[x;\alpha])$ olduğu gözönüne alınarak

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} y\right]^2 = 0$$

dır. Fakat; $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ dır.

□

Hong vd. (2003), bir halkanın aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için aşağıdaki gibi bir karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 3.1.22 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun. R α-katı ise, bu durumda $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

İspat R'nin α-katı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Önerme 3.1.5 gereğince $R[x;\alpha]$ inmiştir. $p = \sum_{i=0}^{m}(a_i,b_i)x^i, q = \sum_{j=0}^{n}(c_j,d_j)x^j \in T(R,R)[x;\bar{\alpha}]$ için $pq = 0$ olsun.

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ p_1 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,\ q_0 = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j,\ q_1 = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

olmak üzere $p = (p_0,p_1)$, $q = (q_0,q_1)$ biçiminde yazılabilir. $pq = 0$ olduğundan $p_0q_0 = 0$ ve $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ elde edilir. $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $q_0p_0 = 0$ olup ikinci eşitlik sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_1p_0 = 0$ bulunur. $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $p_0q_1 = 0$ dır. Bu ifade $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa $p_1q_0 = 0$ olur. Önerme 3.1.4 gereğince R'nin α-skew Armendariz olduğu kullanılarak

$$p_0q_0 = 0 \text{ olduğundan } a_i\alpha^i(c_j) = 0$$

$$p_0q_1 = 0 \text{ olduğundan } a_i\alpha^i(d_j) = 0$$

$$p_1q_0 = 0 \text{ olduğundan } b_i\alpha^i(c_j) = 0$$

bulunur. Böylece $(a_i,b_i)\bar{\alpha}^i((c_j,d_j)) = (a_i\alpha^i(c_j), a_i\alpha^i(d_j) + b_i\alpha^i(c_j)) = 0$ olur. Dolayısı ile $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. □

Uyarı 3.1.23 Yukarıdaki önermede de görüldüğü gibi α-katı bir R halkası için, $T(R,R)$ aşikar genişlemesi $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. Fakat $T(R,R)$'nin α-katı olması gerekmez. Örneğin; R cismini ve I_R birim endomorfizmasını göz önüne alalım. R cisim olduğundan tamlık bölgesi olup R inmiş yani R I_R-katıdır. Bundan dolayı $T(R,R)$, $\bar{I}_R$-skew Armendariz'dir. Fakat $(0,1)\bar{I}_R((0,1)) = (0,0)$ iken $(0,1) \neq (0,0)$ olduğundan $T(R,R)$, $\bar{I}_R$-katı değildir.

Uyarı 3.1.24 Önerme 3.1.22'de "R'nin α-katı"olma şartı yerine Örnek 3.1.21(2)'den "R'nin α-skew Armendariz" olma şartı getirilemez.

Aşağıdaki örnek $T(R,R)$ aşikar genişlemesi $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmayacak şekilde inmiş bir R halkasının bir α otomorfizmasının var olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.25 Değişmeli ve inmiş (dolayısıyla Armendariz) olan $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını ve $\alpha((a,b)) = (b,a)$ ile tanımlı α otomorfizmasını gözönüne alalım. $pq = 0$ olacak şekilde $T(R,R)[x;\alpha]$ daki

$$p = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} x$$

$$q = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} x$$

polinomları için; $\begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} \bar{\alpha} \left(\begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} \neq$ 0 olduğundan $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir. □

Bir R halkasının $T(R,R)$ aşikar genişlemesi bir

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b,c,d \in R \right\}$$

halkasına genişletebilir. R halkasının bir α endomorfizması da $\bar{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ ile tanımlanarak $S_3(R)$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir. Örnek 3.1.25'deki R halkası inmiştir fakat $S_3(R)$ halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir.
Önerme 3.1.22'nin ispatına benzer metodla R halkası α-katı iken $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Önerme 3.1.26 α, R'nin endomorfizması olsun. R, α-katı ise, bu durumda

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in R \right\}$$

$\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

İspat $S_3(R)$'nin $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ elemanlarını sırasıyla (a_1, b_1, c_1, d_1) ve (a_2, b_2, c_2, d_2) ile gösterelim. Buna göre $S_3(R)$'deki toplama ve çarpma işlemleri:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2)$$

biçiminde olur. Bundan dolayı $p_i \in R[x; \alpha]$ olmak üzere her $p \in S_3(R)[x; \alpha]$ için $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ ile gösterilebilir. $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in S_3(R)[x; \bar{\alpha}]$ için $pq = 0$ olsun. Bu durumda;

$$p_0q_0 = 0 \tag{3.13}$$

$$p_0q_1 + p_1q_0 = 0 \tag{3.14}$$

$$p_0q_2 + p_1q_3 + p_2q_0 = 0 \tag{3.15}$$

$$p_0q_3 + p_3q_0 = 0 \tag{3.16}$$

eşitlikleri elde edilir. Önerme 3.1.5'ten $R[x; \alpha]$ inmiş olduğundan (3.13) eşitliğinden $q_0p_0 = 0$ olup (3.14) eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_1 = 0$ elde edilir. Bu ifade (3.14)'te yerine yazılırsa $p_1q_0 = 0$ bulunur. (3.16) eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_3 = 0$ elde edilir ve (3.16)'da yerine yazılırsa $p_3q_0 = 0$ olur. (3.15) eşitliği sağdan p_0 ile çarpılarak $p_0q_2 = 0$ bulunur ki, bu durum (3.15)'te yerine yazılarak $p_1q_3 + p_2q_0 = 0$ bulunur. Bu eşitlik sağdan p_1 ile çarpılırsa $p_1q_3 = 0$ olup, buradan $p_2q_0 = 0$ elde edilir.

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i, \ p_1 = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i, \ p_2 = \sum_{i=0}^{m} c_ix^i, \ p_3 = \sum_{i=0}^{m} d_ix^i$$

$$q_0 = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j, \ q_1 = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j, \ q_2 = \sum_{j=0}^{n} c_jx^j, \ q_3 = \sum_{j=0}^{n} d_jx^j$$

olmak üzere, R'nin α-skew Armendariz olduğu kullanılarak

$$p_0q_0 = 0 \text{ olduğundan } a_i\alpha^i(a_j^{'}) = 0$$

$$p_0q_1 = 0 \text{ olduğundan } a_i\alpha^i(b_j^{'}) = 0$$

$$p_1q_0 = 0 \text{ olduğundan } b_i\alpha^i(a_j^{'}) = 0$$

$$p_0q_2 = 0 \text{ olduğundan } a_i\alpha^i(c_j^{'}) = 0$$

$$p_1q_3 = 0 \text{ olduğundan } b_i\alpha^i(d_j^{'}) = 0$$

$$p_2q_0 = 0 \text{ olduğundan } c_i\alpha^i(a_j^{'}) = 0$$

$$p_0q_3 = 0 \text{ olduğundan } a_i\alpha^i(d_j^{'}) = 0$$

$$p_3q_0 = 0 \text{ olduğundan } d_i\alpha^i(a_j^{'}) = 0$$

bulunur. Buradan her i, j için

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} \bar{\alpha}^i \left(\begin{pmatrix} a_j^{'} & b_j^{'} & c_j^{'} \\ 0 & a_j^{'} & d_j^{'} \\ 0 & 0 & a_j^{'} \end{pmatrix} \right) = 0$$

olup $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. □

α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere R α-katı bir halka olsun. n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} : a, a_{ij} \in R \right\}$$

olsun. Önerme 3.1.26'dan $n \geq 4$ için $S_n(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 3.1.27 α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere R α-katı ve

$$S_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, a_{ij} \in R \right\}$$

olsun. Dikkat edilirse R α-katı bir halka iken $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olur. e_{ij}'ler $S_4(R)$'deki matris birimleri olmak üzere $p = e_{12} + (e_{12} - e_{13})x, q = e_{34} + (e_{24} + e_{34})x \in S_4(R)[x; \bar{\alpha}]$ polinomları için $pq = 0$ dır, fakat $(e_{12} - e_{13})\bar{\alpha}(e_{34}) \neq 0$ olduğundan $S_4(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir. Benzer olarak $n \geq 5$ için $S_n(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmadığı gösterilebilir. □

3.2 α-Skew Armendariz Halkaların Diğer Halka Sınıflarıyla İlişkisi

Bundan sonraki kısımda R halkasının α-skew Armendariz olması durumunda R'nin Baer olma ve p.p.-halka olma özelliklerinin $R[x; \alpha]$'ya taşınıp taşınamadığı incelenecektir. Hirano (1999), α-katı olan bir R halkası için, α; R'nin bir otomorfizması olmak üzere $R[x; \alpha]$'daki tüm tersinir elemanların kümesinin R'deki tüm tersinir elemanların kümesine eşit olduğu gösterilmiştir. Fakat Hong vd. (2003)'te α-skew Armendariz bir R halkası için bu durumun geçerli olmadığı şu örnek verilerek gösterilmiştir:
Örnek 3.1.6'
daki α-skew Armendariz olan $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ halkası ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & t/2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
ile tanımlı α otomorfizması için; $pq = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = qp$ olduğundan

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \text{ ve } q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

polinomları $R[x; \alpha]$'da tersinir elemanlardır. Fakat $p, q \notin R$'dir.
Hong vd. (2003), α-skew Armendariz olan bir R halkası için, $R[x; \alpha]$'nın tüm özüslü elemanlarının kümesi ile R'nin tüm özüslü elemanlarının kümesinin çakışık olduğu aşağıdaki lemmada gösterilmiştir.

Lemma 3.2.1 R bir α-skew Armendariz halka olsun. $e(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ olmak üzere $e^2(x) = e(x) \in R[x; \alpha]$ ise $e = e_0$ dır.

İspat $e(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ olmak üzere $e^2(x) = e(x) \in R[x; \alpha]$ olduğunu kabul edelim. $e(x)$ polinomu $R[x; \alpha]$'da bir özüslü eleman olduğundan

$$e(x)(1 - e(x)) = 0 = (1 - e(x))e(x)$$

dır. Bu durumda $(e_0+e_1x+...+e_nx^n)((1-e_0)-e_1x-...-e_nx^n)=0$ ve $((1-e_0)-e_1x-...-e_nx^n)(e_0+e_1x+...+e_nx^n)=0$ olur. R α-skew Armendariz olduğundan $e_0(1-e_0)=0$ olup buradan $e_0^2=e_0$ yani e_0, R'de bir özüslü elemandır. Ayrıca R α-skew Armendariz olduğundan $1\leq i\leq n$ için $e_0e_i=0$ ve $(1-e_0)e_i=0$ bulunur. Buradan $(1-e_0)e_i=e_i-e_0e_i=e_i-0=e_i=0$ olur. Böylece $1\leq i\leq n$ için $e_i=0$ olduğundan $e(x)=e_0\in R$'dir. $\square$

Önerme 3.2.2 R α-skew Armendariz olsun. $R[x;\alpha]$'nın abelyan olması için gerek ve yeter koşul $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R α-skew Armendariz, $R[x;\alpha]$ abelyan ve $e^2=e\in R$ olsun. R halkası $R[x;\alpha]$'nın bir alt halkası olarak düşünülürse $e^2=e\in R[x;\alpha]$ olur. $R[x;\alpha]$ abelyan olduğundan e merkezidir. Yani her $f(x)\in R[x;\alpha]$ için $ef(x)=f(x)e$ dir. Özel olarak $f(x)=x\in R[x;\alpha]$ için $ex=xe=\alpha(e)x$ dir. Böylece $\alpha(e)=e$ dir.
Karşıt olarak $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ olsun. $R[x;\alpha]$'nın abelyan olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle R'nin abelyan olduğunu göstermeliyiz.
İddia ediyoruz ki $e,f\in R$ özüslü elemanları için $efR\cap(1-f)(1-e)\alpha(R)=0$ dır. Kabul edelim ki $efR\cap(1-f)(1-e)\alpha(R)\neq 0$. Bu durumda; $0\neq a\in efR\cap(1-f)(1-e)\alpha(R)$ dır. Buradan $0\neq a\in efR$ ve $0\neq a\in(1-f)(1-e)\alpha(R)$ dir. Böylece $0\neq a=ef(-t)=(1-f)(1-e)\alpha(s)$ olacak biçimde $t,s\in R$ vardır. Şimdi $R[x;\alpha]$'daki $P(x)=e+(1-f)x$ ve $Q(x)=(1-e)s+ftx$ polinomlarını göz önüne alalım. $P(x)Q(x)=(e+(1-f)x)((1-e)s+ftx)=e(1-e)s+(eft+(1-f)(1-e)\alpha(s))x+(1-f)f\alpha(t)x^2=0$ olur. R α-skew Armendariz olduğundan $eft=0$ olmalıdır. Bu durum $ef(-t)\neq 0$ ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $e,f\in R$ özüslü elemanları için $efR\cap(1-f)(1-e)\alpha(R)=0$ dır.
Ayrıca $fe=0$ iken $ef=0$'dır. Gerçekten $fe=0$ olsun.

$$ef=(1-f)(1-e)(-f)=(1-f)(1-e)(-\alpha(f))\in efR\cap(1-f)(1-e)\alpha(R)=0$$

olur. Herhangi $e\in R$ özüslü elemanı ve herhangi $r\in R$ için $g=e+er(1-e)$ bir özüslü elemandır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
g^2 =&[e+er(1-e)][e+er(1-e)]\\
=&e+er(1-e)+er(1-e)e+er(1-e)er(1-e)\\
=&e+er-ere+ere-ere+erer-erere-erer+erere\\
=&e+er(1-e)\\
=&g
\end{aligned}$$

Ayrıca $(1-e)g=(1-e)[e+er(1-e)]=(1-e)e+(1-e)er(1-e)=0$ olduğundan $0=g(1-e)=[e+er(1-e)](1-e)=e(1-e)+er(1-e)=0$ olup $er(1-e)=0$'dan $er=ere$ elde edilir. Benzer olarak $h=(1-e)+(1-e)re$'nin R'de $eh=0$ olacak şekilde bir özüslü eleman olduğu görülür. Böylece $he=0$ olmasından $re=ere$ bulunur. Böylece herhangi $r\in R$ için $er=re$ olduğundan R abelyandır. Şimdi iddia ediyoruz ki $R[x;\alpha]$ abelyandır. $e^2=e\in R[x;\alpha]$ alalım. Lemma 3.2.1'den e, R'de bir özüslü elemandır. $p(x)=a_0x^k+a_1x^{k+1}+...+a_mx^{k+m}\in R[x;\alpha]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
pe =&(a_0x^k+a_1x^{k+1}+...+a_mx^{k+m})e\\
=&a_0\alpha^k(e)x^k+a_1\alpha^{k+1}(e)x^{k+1}+...+a_m\alpha^{k+m}(e)x^{k+m}\\
=&a_0ex^k+a_1ex^{k+1}+...+a_mex^{k+m}\\
=&e(a_0x^k+a_1x^{k+1}+...+a_mx^{k+m})\\
=&ep
\end{aligned}$$

olduğundan $R[x;\alpha]$ abelyandır. $\square$

Hong vd. (2003) bir R halkasının Baer olma ya da $p.p$-halka olma özelliklerinin R α-skew Armendariz iken $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasına taşındığı aşağıdaki iki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.3 Herhangi $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ olacak şekilde α'nın R'nin bir otomorfizması olduğunu kabul edelim. R halkası α-skew Armendariz ise, R'nin Baer olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$'nın Baer olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R halkası α-skew Armendariz ve Baer olsun. A, $R[x;\alpha]$'nın boştan farklı bir alt kümesi ve A^*, A'daki elemanların tüm katsayılarının kümesi olsun.

Bu durumda $\emptyset \neq A^* \subseteq R$ olup R Baer olduğundan $r_R(A^*) = eR$ (yani $e = e1 \in eR = r_R(A^*)$ olup $A^*e = 0$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır. Buradan $e \in r_{R[x;\alpha]}(A)$ olduğu (yani $Ae = 0$) açıktır. Böylece her $ef(x) \in eR[x;\alpha]$ için $Aef(x) = 0$ olup $ef(x) \in r_{R[x;\alpha]}(A)$ ve buradan da $eR[x;\alpha] \subseteq r_{R[x;\alpha]}(A)$ elde edilir. Diğer yandan $0 \neq g = b_0+b_1x+...+b_tx^t \in r_{R[x;\alpha]}(A)$ alalım. Bu durumda $Ag = 0$ dır. Yani herhangi $f \in A$ için $fg = 0$ olur. $f = a_0x^k + a_1x^{k+1} + ... + a_sx^{k+s} \in R[x;\alpha]$ olsun. R, α-skew Armendariz olduğundan $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ dır. Buradan $\alpha^k(b_0), \alpha^{k+1}(b_1), ..., \alpha^{k+s}(b_t) \in r_R(A^*) = eR$ dir. Bu durumda $\alpha(e) = e$ (dolayısıyla $\alpha^{k+j}(e) = e$) ve α'nın bir otomorfizma (dolayısıyla örten) olduğu gözönüne alınarak $0 \leq j \leq t$ olmak üzere $\alpha^{k+j}(b_j) \in eR$ olmasından $\alpha^{k+j}(b_j) = \alpha^{k+j}(ec_j)$ olacak şekilde (α'nın birebir olmasından dolayı) $b_j = ec_j \in R$ vardır. Böylece $g = ec_0+ec_1x+...+ec_tx^t = e(c_0+c_1x+...+c_tx^t) \in eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $c_0, c_1, ..., c_t \in R$ var olduğundan $r_{R[x;\alpha]}(A) \subseteq eR[x;\alpha]$ elde edlir. Sonuç olarak $r_R[x;\alpha](A) = eR[x,\alpha]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ var olduğundan $R[x;\alpha]$ Baerdir.

Karşıt olarak $R[x;\alpha]$ Baer olsun. B, R'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $\emptyset \neq B \subseteq R[x;\alpha]$ olup kabulden $r_{R[x;\alpha]}(B) = eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının R ile arakesiti alınıp Lemma 3.2.1 kullanılarak $r_R(B) = r_{R[x;\alpha]}(B) \cap R = eR[x;\alpha] \cap R = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ var olduğundan R'nin Baer olduğu görülür. □

Teorem 3.2.4 Herhangi $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olmak üzere α, R'nin bir otomorfizması olsun. R, α-skew Armendariz ise R'nin *p.p.*-halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$'nın *p.p.*-halka olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R halkası α-skew Armendariz ve *p.p.* halka olsun. $p = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m \in R[x;\alpha]$ alalım. Bu durumda her bir i için $a_i \in R$ olup R *p.p.* halka olduğundan, $r_R(a_i) = e_iR$ (yani $a_ie_i = 0$) olacak şekilde $e_i^2 = e_i \in R$ vardır. $e = e_0e_1...e_m$ diyelim. $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olduğundan Önerme 3.2.2 gereğince $R[x;\alpha]$ abelyan ve dolayısıyla R abelyan olduğundan $\bigcap_{i=0}^m r_R(a_i) = eR$ (yani $a_ie = 0$) olur. O halde $\alpha(e) = e$ olduğundan $pe = a_0e + a_1\alpha(e)x + ... + a_m\alpha^m(e)x^m = a_0e + a_1ex + ... + a_me^m = 0$ olur. Buradan her $ef \in eR[x;\alpha]$ için $pef = 0$ olup $ef \in r_{R[x;\alpha]}(p)$ yani $eR[x;\alpha] \subseteq r_{R[x;\alpha]}(p)$ elde edilir. Diğer yandan $q = b_0 + b_1 + ... + b_nx^n \in r_{R[x;\alpha]}(p)$ alalım. $pq = 0$ dır. R, α-skew Armendariz olduğundan $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olur. Böylece

$\alpha^i(b_j) \in r_R(a_i) = e_iR$ dir. Herbir $0 \leq i \leq m$ için $b_j \in e_iR$ dir. Her $0 \leq j \leq n$ için $b_j \in eR = \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$ dir. Buradan $q \in eR[x;\alpha]$ dır. Buradan $r_{R[x;\alpha]}(p) \subseteq eR[x;\alpha]$ elde edilir. Sonuç olarak $r_{R[x;\alpha]}(p) = eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ var olduğundan $R[x;\alpha]$ *p.p.*-halkadır.

Tersine $R[x;\alpha]$ *p.p.*-halka olsun. $a \in R$ alalım. Bu durumda $a \in R[x;\alpha]$ olup kabulden $r_{R[x;\alpha]}(a) = eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının R ile arakesiti alınarak ve Lemma 3.2.1 kulanılarak $r_R(a) = r_{R[x;\alpha]}(a) \cap R = eR[x;\alpha] \cap R = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ var olduğundan R *p.p.*-halkadır. □

Uyarı 3.2.5 Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4'teki α'nın bir otomorfizma olması koşulu Örnek 3.1.7'den fazladan bir koşul değildir. Gerçekten Örnek 3.1.7'deki $R = \mathbb{Z}_2[x]$ halkası Baer'dir bundan dolayı sağ *p.p.*-halkadır. Fakat $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı α endomorfizması (birebir olmadığından) bir otomorfizma değildir. Böylece $R[x;\alpha]$ hem Baer hem de *p.p.*-halka değildir.

Uyarı 3.2.6 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. Kabul edelim ki R'nin $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkası var olsun. R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $Q(R)$'nin $\bar{\alpha}$-katı olmasıdır. Böylece R halkası α-katı iken $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkası $\bar{\alpha}$-katı olup Önerme 3.1.5 gereğince $Q(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. Fakat R'nin inmiş olması durumunda bu ifade geçerli değildir. Çünkü Örnek 3.0.2'den $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmayan inmiş bir $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkası vardır.

Hong vd. (2003); Önerme 3.1.4'ün bir sonucu olarak Sonuç 3.1.5'te "R halkası α-katı iken R'nin α-skew Armendariz" olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda bu ifadenin karşıtı hangi koşullar altında doğru olur anlamına gelen "α, (değişmeli) inmiş bir R halkasının bir monomorfizması (ya da otomorfizması) ve R α-skew Armendariz iken R α-katı olur mu?"
problemini ortaya atmışlardır. Chen and Tong (2005), bu soruya olumlu cevap verilerek aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.7 R inmiş bir halka α, R'nin bir monomorfizması ve R α-skew Armendariz olsun. Bu durumda R α-katıdır.

İspat R inmiş ve α-skew Armendariz bir halka olmak üzere α, R'nin bir monomorfizması olsun. Kabul edelim ki R α-katı olmasın. Yani, $a\alpha(a) = 0$ fakat $a \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ var olsun. O halde

$$0 = \alpha(0) = \alpha(a\alpha(a)) = \alpha(a)\alpha^2(a)$$

bulunur. Aynı zamanda $a\alpha(a) = 0$ olup R inmiş (reversible) olduğundan $\alpha(a)a = 0$'dır. $a \neq 0$ ve α monomorfizma olduğundan $\alpha(a) \neq 0$ olur. Ayrıca

$$(*) \quad a \neq 0 \text{ iken } \alpha(a) \neq 0 \text{ ve } R \text{ inmiş olduğundan } (\alpha(a))^2 \neq 0$$

Şimdi $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x \in R[x;\alpha]$ için;

$$p(x)q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1\alpha(b_0))x + a_1\alpha(b_1)x^2$$

olup; özel olarak $a_0 = \alpha(a)$,$a_1 = \alpha(a)$, $b_0 = a$, $b_1 = -\alpha(a)$ alınırsa;

$$p(x)q(x) = \alpha(a)a + (-\alpha^2(a) + \alpha^2(a))x - \alpha(a)\alpha^2(a)x^2 = 0$$

olup R α-skew Armendariz olduğundan; $a_0b_1 = -(\alpha(a))^2 = 0$ olmalıdır. Bu durum (*) ifadesi ile çelişir. Böylece R α-katı'dır. □

Sonuç 3.2.8 R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul α'nın monomorfizma, R'nin inmiş ve α-skew Armendariz olmasıdır.

İspat R halkası α-katı iken R'nin inmiş ve α'nın monomorfizma olduğu Hong vd. (2000)'den açıktır. Ayrıca Önerme 3.1.5 gereğince R'nin α-skew Armendariz olduğu da açıktır. Tersi Teorem 3.2.7'den açıktır. □

Sonuç 3.2.9 R inmiş bir halka ve α, R'nin bir monomorfizması olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) $R[x;\alpha]$ inmiştir.

(2) R, α-skew Armendarizdir.

(3) R, α-katıdır.

Chen and Tong (2005)'te; Hong vd. (2003)'te ispatlanan Önerme 3.1.22 ve Önerme 3.1.26, Teorem 3.2.7'nin sonucu olarak aşağıdaki biçimde yeniden ifade edilmiştir.

Sonuç 3.2.10 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun. α bir monomorfima ve R inmiş bir α-skew Armendariz halka ise, bu durumda R'nin $T(R, R)$ aşikar genişlemesi $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

Sonuç 3.2.11 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun. α bir monomorfima ve R inmiş bir α-skew Armendariz halka ise, bu durumda

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

$\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

Anderson and Camillo (1998), "R'nin Armendariz olması için gerek ve yeter koşulun $R[x]$'in Armendariz olması"olduğu gösterilmiştir. Hong vd. (2003), Teorem 3.1.8'-de α-skew Armendariz halkalar için benzer bir sonuç elde edilmiştir. Chen and Tong (2005), aşağıdaki önerme ifade edilerek R'nin α-skew Armendariz olma özelliğinin hangi koşullar altında $R[x]$ polinom halkasına taşındığı farklı bir biçimde gösterilmiştir.

Önerme 3.2.12 R inmiş bir halka ve α, R'nin bir monomorfizması olsun. R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in α-skew Armendariz olmasıdır.

İspat R inmiş bir halka, α; R'nin bir monomorfizması ve R α-skew Armendariz olsun. Bu durumda Teorem 3.2.7'den R α-katıdır. Aynı zamanda $R[x]$'de α-katıdır. Gerçekten; $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ için, $f(x)\alpha(f(x)) = 0$ olsun. Bu durumda $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)(\alpha(a_0) + \alpha(a_1)x + \cdots + \alpha(a_n)x^n)) = 0$ olur. Buradan $a_0\alpha(a_0) = 0$ ve R α-katı olduğundan $a_0 = 0$ bulunur. Böylece $(a_1x + \cdots + a_nx^n)(\alpha(a_1)x + \cdots + \alpha(a_n)x^n)) = 0$ olup, benzer biçimde $a_1\alpha(a_1) = 0$ ve R α-katı olduğundan $a_1 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ yani $f(x) = 0$ bulunur. Böylece Sonuç 3.2.9 gereğince $R[x]$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir. Tersine, $R[x]$ α-skew Armendariz olsun. R'nin $R[x]$'in bir alt halkası olduğu düşünüldüğünde R'nin α-skew Armendariz olduğu açıktır. □

Chen and Tong (2005), Hong vd. (2003)'te ispatladıkları Teorem 3.1.8'in ispatında bir yanlışlık olduğunu iddia edip aşağıda bu teoremin doğru bir ispatını vermişlerdir.

Önerme 3.2.13 Uygun bir pozitif t tam sayısı için $\alpha^t = I_R$ olacak şekilde α; R'nin bir endomorfizması olsun. R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in α-skew Armendariz olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R α-skew Armendariz olsun. $f_i(x) = a_{i_0} + a_{i_1}x + \cdots + a_{i_{s_i}}x^{s_i}, g_j(x) = b_{j0} + b_{j1}x + \cdots + b_{jw_j}x^{w_j} \in R[x]$ olmak üzere $p(y) = f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_m(x)y^m$, $q(y) = g_0(x) + g_1(x)y + \cdots + g_n(x)y^n \in R[y;\alpha]$ için, $p(y)q(y) = 0$ olsun. Her $0 \le i \le m$ ve $0 \le j \le n$ için $R[x]$'de $f_i(x)\alpha^i(g_j(x)) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. der; $R[x]$'de bir polinomun derecesini göstermek ve sıfır polinomunun derecesi 0 olmak üzere $k > der(f_0(x)) + der(f_1(x)) + \cdots + der(f_m(x)) + der(g_0(x)) + der(g_1(x)) + \cdots + der(g_n(x))$ seçelim. $R[x][y;\alpha]$'da $p(y)q(y) = 0$ olduğundan $R[x]$'de;

$$\begin{cases} f_0(x)g_0(x) = 0 \\ f_0(x)g_1(x) + f_1(x)\alpha(g_0(x)) = 0 \\ \cdots \\ f_m\alpha^m(g_n(x)) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} f(x) =& f_0(x^t) + f_1(x^t)x^{tk+1} + f_2(x^t)x^{2tk+2} + \cdots + f_m(x^t)x^{mtk+m} \\ g(x) =& g_0(x^t) + g_1(x^t)x^{tk+1} + g_2(x^t)x^{2tk+2} + \cdots + g_m(x^t)x^{mtk+m} \end{aligned} \tag{$**$}$$

alalım. $R[x;\alpha]$'da;

$$f(x)g(x) = f_0(x^t)g_0(x^t) + [f_0(x^t)g_1(x^t) + f_1(x^t)\alpha(g_0(x^t))]x^{tk+1}$$

$$+ \cdots + [f_m(x^t)\alpha^m(g_n(x^t))]x^{(m+n)(tk+1)}$$

olduğu görülür. $(*)$'daki eşitlikler ve $\alpha^t = I_R$ olduğu kullanılarak $f(x)g(x) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan (**)'daki eşitlikler kullanılarak $f(x)g(x) = (a_{00} + a_{01}x^t + \cdots + a_{0_{s_0}}x^{s_0t} + a_{10}x^{tk+1} + a_{11}x^{tk+t+1} + \cdots + a_{1_{s_1}}x^{tk+s_1t} + \cdots + a_{m0}x^{mtk+m} + a_{m1}x^{mtk+t+m} + \cdots + a_{ms_m}x^{mtk+s_mt+m})(b_{00} + b_{01}x^t + \cdots + b_{0w_0}x^{w_0t} + b_{10}x^{tk+1}b_{11}x^{tk+t+1} + \cdots + b_{1w_1}x^{tk+w_1t+1} + \cdots + b_{n0}x^{ntk+n} + b_{n1}x^{ntk+t+n} + \cdots + b_{nw_n}x^{ntk+w_nt+n}) = 0$ bulunur. R α-skew Armendariz ve $\alpha^t = I_R$ olduğundan tüm $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ ve $u \in 0, 1, \cdots, s_0, \cdots, s_m$, $v \in 0, 1, \cdots, w_0, \cdots, w_n$ için $a_{iu}\alpha^i(b_{jv}) = a_{iu}\alpha^{itk+ut+i}(b_{jv}) = 0$ olur. Bundan dolayı her $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ için $R[x]$'de $f_i(x^t)\alpha^i(g_j(x^t)) = 0$ elde edilir. Böylece her

$0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $f_i(x)\alpha^i(g_j(x)) = 0$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak $R[x]$ polinom halkası α-skew Armendariz'dir. $\square$

Chen and Tong (2007), Teorem 3.2.7 ile ilişkili olarak α bir monomorfizma olmayacak şekilde inmiş olmayan α-skew Armendariz bir R halkasının var olduğunu aşağıdaki örnekte göstermişlerdir.

Örnek 3.2.14 F bir cisim ve $n \geq 2$ olmak üzere $M_n(F)$'nin bir alt halkası olan

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} : a, a_{ij} \in F \right\}$$

halkasını ve R'nin

$$\alpha : \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı α endomorfizmasını göz önüne alalım.

α'nın bir monomorfizma olmadığı açıktır. Ayrıca R inmiş bir halka değildir. Şimdi R'nin α-skew Armendariz olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$, $g(x) = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m \in R[x;\alpha]$ polinomlarını alalım. Her i ve j için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. $\alpha^2 = \alpha$ olduğundan her $i, j \geq 1$ için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

1. durum. A_0 terslenebilir ise: $f(x)g(x) = 0$ olduğundan sabit terimin katsayısının 0 olması kullanılarak $B_0 = 0$ bulunur. Her $j \leq n$ için $B_j = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $B_0 = B_1 = \cdots = B_{k-1} = 0$ fakat $B_k \neq 0$ olacak şekilde en az bir $k \geq 1$ olsaydı $f(x)g(x) = 0$ eşitliğinde x^k'lı terimin katsayısından $A_0B_k + A_1\alpha(B_{k-1}) + \cdots + A_k\alpha(B_0) = 0$ olup kabulden $A_0B_k = 0$ bulunurdu. A_0 terslenebilir olduğundan $B_k = 0$ elde edilirdi. Bu ise kabulümüz ile çelişirdi. Sonuç olarak her $0 \leq j \leq n$ için $B_j = 0$'dır.

2. durum. B_0 terslenebilir ise: birinci durumdakine benzer olarak her $0 \leq i \leq m$ için A_i=0 elde edilir.
3. durum. A_0 ve B_0 terslenemez ise: $A_0 \neq 0$ olduğu durumda her j için $\alpha(B_j) = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Kabul edelim ki $\alpha(B_j) \neq 0$ olacak şekilde en az bir j var olsaydı $f(x)g(x) = 0$ eşitliğinde x^j'li terimin katsayısından $A_0B_j + A_1\alpha(B_{j-1}) + \cdots + A_j\alpha(B_0) = 0$ olup kabulden $A_0B_j = 0$ bulunurdu. $\alpha(B_j) \neq 0$ iken B_j terslenebilir olup buradan $A_0 = 0$ olurdu ki bu durum $A_0 \neq 0$ olması ile çelişirdi. O halde her j için $\alpha(B_j) = 0$ elde edilir. Diğer yandan $A_0 = 0$ olduğu durumda iddia ediyoruz ki ya her $A_i = 0$ veya her $\alpha(B_j) = 0$'dır. Kabul edelim ki $A_i \neq 0$ veya her $\alpha(B_j) \neq 0$ olacak şekilde en küçük i ve j var olsun. $f(x)g(x) = 0$ eşitliğinde x^{i+j}'li terimin katsayısından

$$A_0B_{i+j} + \cdots + A_{i-1}\alpha(B_{j+1}) + A_i\alpha(B_j) + A_{i+1}\alpha(B_{j-1}) + \cdots + A_{i+j}\alpha(B_0) = 0$$

olup kabulden $A_i\alpha(B_j) = 0$ olur. Diğer yandan $\alpha(B_j) \neq 0$ olması $\alpha(B_j)$'nin terslenebilirdir olmasını gerektirdiğinden $A_i = 0$ olur ki bu durum $A_i \neq 0$ olması ile çelişir.
Sonuç olarak yukarıdaki bütün durumlar gözönüne alındığında her i, j için $A_i\alpha^i(B_j) = 0$ olduğundan R α-skew Armendariz'dir. $\square$

Lemma 3.2.15 R bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda

$$M_n(R[x;\alpha]) \cong M_n(R)[x;\bar{\alpha}]$$

sağlanır.

İspat $(\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{k} x^k) \mapsto \sum_{k=0}^{m} (a_{ij}^{(k)}) x^k$ ile tanımlı $\phi : M_n(R[x;\alpha]) \to M_n(R)[x;\bar{\alpha}]$ endomorfizmasını gözönüne alalım. ϕ'nin $1-1$ ve örten olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca ϕ'nin toplamayı koruduğu açıktır. Şimdi ϕ'nin çarpmayı koruduğunu gösterelim.
$A = (\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)} x^k), B = (\sum_{l=0}^{m} b_{ij}^{(l)} x^l) \in M_n(R[x;\alpha])$ alalım.

$$AB = (\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)} x^k)(\sum_{l=0}^{m} b_{ij}^{(l)} x^l) = (f_{ij}(x))$$

olup burada;

$$
\begin{aligned}
f_{ij}(x) =&(\sum_{k=0}^{m} a_{i1}^{(k)} x^k)(\sum_{l=0}^{m} b_{1j}^{(l)} x^l) + (\sum_{k=0}^{m} a_{i2}^{(k)} x^k)(\sum_{l=0}^{m} b_{2j}^{(l)} x^l) \\
&+ \cdots + (\sum_{k=0}^{m} a_{in}^{(k)} x^k)(\sum_{l=0}^{m} b_{nj}^{(l)} x^l) \\
=&\sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} a_{i1}^{(k)} \alpha^k (b_{1j}^{(l)}) x^s + \sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} a_{i2}^{(k)} \alpha^k (b_{2j}^{(l)}) x^s \\
&+ \cdots + \sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} a_{in}^{(k)} \alpha^k (b_{nj}^{(l)}) x^s \\
=&\sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} a_{i1}^{(k)} \alpha^k (b_{1j}^{(l)}) + \sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} a_{i2}^{(k)} \alpha^k (b_{2j}^{(l)}) + \cdots + a_{in}^{(k)} \alpha^k (b_{nj}^{(l)}) x^s \in R[x;\alpha]
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$
\phi(AB) = \sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} \big(a_{i1}^{(k)} \alpha^k (b_{1j}^{(l)}) + a_{i2}^{(k)} \alpha^k (b_{2j}^{(l)}) + \cdots + a_{in}^{(k)} \alpha^k (b_{nj}^{(l)})\big) x^s
$$

elde edilir. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
\phi(A)\phi(B) =&(\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)} x^k)(\sum_{l=0}^{m} b_{ij}^{(l)} x^l) \\
=&\sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} (a_{ij}^{(k)})(\bar{\alpha}^k (b_{ij}^{(l)})) x^s \\
=&\sum_{s=0}^{2m} \sum_{k+l=s} \big(a_{i1}^{(k)} \alpha^k (b_{1j}^{(l)}) + a_{i2}^{(k)} \alpha^k (b_{2j}^{(l)}) + \cdots + a_{in}^{(k)} \alpha^k (b_{nj}^{(l)})\big) x^s
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç olarak $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ olduğundan ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki örnekte Chen and tong (2007), verilen α-skew Armendariz olmayan matris halkaları yer almaktadır.

Örnek 3.2.16 *R bir halka ve α, R'nin herhangi endomorfizması olsun.*

(1) $n = 2k \geq 2$ için $B_n^e(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değil.

(2) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $B_n^0(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değil.

(3) $n \geq 2$ için $B_n(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değil.

Lemma 3.2.17 R bir inmiş halka olsun. Her $n = 2k + 1 \geq 3$ için $S = A_n(R)$ ve her $n = 2k \geq 4$ için $S = A_n(R) + RE_{1k}$ olsun. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in S$ olmak üzere $AB = 0$ ise $[AB]_{ij} = 0$ dır (Lee and Zhou 2004).

Teorem 3.2.18 R, α-katı bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\forall n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz.

(2) $\forall n = 2k \geq 4$ olduğunda $A_n(R) + RE_{1k}$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz (Chen ve Tong, 2007).

İspat $n = 2k+1 \geq 3$ iken $S = A_n(R)$ ve $n = 2k \geq 4$ iken $S = A_n(R) + RE_{1k}$ olmak üzere $\alpha(x) = A_0 + A_1(x) + \cdots + A_m x^m, \beta(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m \in S[x; \alpha]$ için $\alpha(x)\beta(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Her k, s için $A_k \bar{\alpha}^k(B_s) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $l = 0, 1, \cdots, m$ için $a_{ij}^{(l)}$ ve $b_{ij}^{(l)}$ sırasıyla A_l ve B_l matrislerinin bileşenleri olmak üzere $f_{ij}(x) = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} x + \cdots + a_{ij}^{(m)} x^m$ ve $g_{ij}(x) = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} x + \cdots + b_{ij}^{(n)} x^n$ olsun. Lemma 3.2.15 gereğince $\phi : M_n(R[x; \alpha]) \to M_n(R)[x; \bar{\alpha}]$ izomorfizması kullanılarak

$$\phi(f_{ij}(x)) = \phi(\sum_{l=0}^{m} a_{ij}^{(l)} x^l) = \sum_{l=0}^{m} (a_{ij}^{(l)}) x^l = \alpha(x)$$

$$\phi(g_{ij}(x)) = \phi(\sum_{l=0}^{m} b_{ij}^{(l)} x^l) = \sum_{l=0}^{m} (b_{ij}^{(l)}) x^l = \beta(x)$$

olacak biçimde $n = 2k + 1 \geq 3$ iken $A_n(R[x; \alpha])$'da $n = 2k \geq 4$ iken $A_n(R[x; \alpha]) + R[x; \alpha]E_{1k}$'da f_{ij}, g_{ij} matrisleri vardır. Burada

$$(f_{ij}) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}, (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca $\alpha(x)\beta(x) = 0$ olduğundan $\phi((f_{ij}))\phi((g_{ij})) = 0$ olup buradan ϕ homomorfizma olduğundan $\phi((f_{ij})(g_{ij})) = 0$ olur. Ayrıca ϕ birebir olduğundan $(f_{ij})(g_{ij}) = 0$ bulunur. R halkası α-katı olduğundan Önerme 3.1.4 gereğince $R[x; \alpha]$ inmiştir. Bu durumda Lemma 3.2.17'den her i, j için $[(f_{ij})(g_{ij})]_{ij} = 0$ bulunur. R halkası α-katı olduğundan Sonuç 3.1.5 gereğince R α-skew Armendarizdir. Bundan dolayı $l = 1, 2, \cdots, n$ için $f_{il}g_{li} = (a_{il}^{(0)} + a_{il}^{(1)}x + \cdots + a_{il}^{(m)}x^m)(b_{lj}^{(0)} + b_{lj}^{(1)}x + \cdots + b_{lj}^{(m)}x^m) = 0$ olup R α-skew Armendariz olduğundan her i, j, k, l, s için $a_{il}^{(k)}\alpha^k(b_{lj}^{(s)}) = 0$ bulunur. Böylece $A_k\bar{\alpha}^k(B_s) = 0$ olup S α-skew Armendariz'dir. $\square$

Sonuç 3.2.19 R α-katı olsun. Bu durumda $V_n(R) = RI_n + RV + RV^2 + \cdots + RV^{n-1}$ bir $\bar{\alpha}$-skew Armendariz halkadır.

İspat Her n için $V_n(R)$; $A_n(R)$'nin $\alpha(V_n(R)) \subseteq V_n(R)$ olacak biçimde bir alt halkası olduğundan ispat açıktır. $\square$

Teorem 3.2.18'de $\alpha = I_R$ alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.20 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her $n = 2k + 1 \geq 3$ için, $A_n(R)$ Armendariz'dir.

(2) Her $n = 2k \geq 4$ için, $A_n(R) + RE_{ik}$ Armendariz'dir (Lee and Zhou, 2004).

Lee ve Wong (2003); bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter şartın $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin Armendariz olduğunu Rege and Chhawchharia (1997), sonucu geliştirerek göstermişlerdir. Ayrıca Hong vd. (2003),R halkası α-katı iken $T(R, R)$ ve $S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$ halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu ifade etmişlerdir. Daha sonra Chen ve Tong (2007), yılında aşağıdaki teoremi ispatlayarak bu önermelerin terslerinin de doğru olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 3.2.21 R bir halka α R'nin bir endomorfizması olsun. R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$ halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) Önerme 3.1.26'den açıktır.
($\Leftarrow$) Kabul edelim ki $S_3(R)$ halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. İddia ediyoruz ki α bir monomorfizmadır. Kabul edelim ki α monomorfizma olmasın. Bu durumda $\alpha(a) = 0$ olacak şekilde $0 \neq a \in R$ vardır. Buradan;

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} x\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} x\right] =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde olur fakat, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olur ki bu $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup α bir monomorfizmadır. Şimdi R'nin α-katı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki R α-katı olmasın. Bu durumda Lemma 3.1.11'den $\alpha(a)a = 0$ fakat $a \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır. α bir monomorfizma olduğundan $\alpha(a) \neq 0$'dır. $b = \alpha(a)$ olsun.

$$\left[\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x\right]\left[\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x\right] =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur fakat, $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olması $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması ile çelişir. Sonuç olarak kabulümüz yanlış olup R halkası α-katıdır. □

Teorem 3.2.21'de $\alpha = I_R$ alınması durumunda, Kim and Lee (2000), ifade edilen sonucun tersinin de doğru olduğu aşağıdaki sonuçta gösterilmiştir.

Sonuç 3.2.22 R bir halka olsun. R'nin inmiş olması için gerek ve yeter koşul

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

halkasının Armendariz olmasıdır (Chen and Tong 2007).

Chen ve Tong (2007), Teorem 3.2.21'in bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.2.23 R bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) Önerme 3.1.22'den açıktır.
($\Leftarrow$) İspatı Teorem 3.2.21'e benzer olarak yapılır. $\square$

Sonuç 3.2.24 R bir halka olsun. R'nin inmiş olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin Armendariz olmasıdır (Lee and Wong 2003).

Teorem 3.2.18 ve Sonuç 3.2.19 kullanılarak Teorem 3.2.21'in ispatına benzer olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.2.25 α bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R, α katıdır.

(2) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(3) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(4) $n \geq 2$ için $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Sonuç 3.2.26 R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R, inmiş halkadır.

(2) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ Armendarizdir.

(3) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$ Armendarizdir.

(4) $n \geq 2$ için $V_n(R)$ Armendarizdir.

Lemma 3.2.27 α, bir R halkasının bir endomorfizması ve $\sigma : R \cong S$ bir halka izomorfizması olmak üzere, R, α-skew Armendariz ise S halkası da $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-skew Armendariz'dir.

İspat Kabul edelim ki $\sigma : R \to S$ bir halka izomorfizması ve R, α-skew Armendariz olsun. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in S[x; \sigma\alpha\sigma^{-1}]$ polinomlarını gözönüne alalım. Her i ve j için $a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(b_j) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\sigma : R \to S$ izomorfizması yardımıyla $\sigma(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x +$

$\cdots + \sigma(a_m)x^m$ ile tanımlanan bir $\sigma : R[x] \to S[x]$ izomorfizması vardır. σ örten olduğundan

$$f(x) = \sigma(f_1(x)) = \sigma(a_0^{'} + a_1^{'}x + \cdots + a_m^{'}x^m) = \sigma(a_0^{'}) + \sigma(a_1^{'})x + \cdots + \sigma(a_m^{'})x^m$$

$$g(x) = \sigma(g_1(x)) = \sigma(b_0^{'} + b_1^{'}x + \cdots + b_n^{'}x^n) = \sigma(b_0^{'}) + \sigma(b_1^{'})x + \cdots + \sigma(b_n^{'})x^n$$

olacak şekilde $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{'}x^i, g_1(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j^{'}x^j \in R[x;\alpha]$ vardır. İddia ediyoruz ki $R[x;\alpha]$'da $f_1(x)g_1(x) = 0$ dır. Gerçekten; $S[x;\sigma\alpha\sigma^{-1}]$ da $f(x)g(x) = 0$ olduğundan herhangi $0 \leq k \leq m$ için x^k'lı terimin katsayısından

$$a_0b_k + a_1(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_{k-1}) + \cdots + a_k(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k(b_0) = 0$$

elde edilir. $a_i = \sigma(a_i^{'})$ ve $b_j = \sigma(b_j^{'})$ olduğu gözönüne alınarak herhangi $0 \leq k \leq m$ için

$$\sigma(a_0^{'})\sigma(b_k^{'}) + \sigma(a_1^{'})\sigma\alpha\sigma^{-1}(\sigma(b_{k-1}^{'})) + \cdots + \sigma(a'_k)(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k(\sigma(b_0^{'})) = 0$$

bulunur. $(\sigma\alpha\sigma^{-1})^t = \sigma\alpha^t\sigma^{-1}$ olduğu ve σ'nın birebir olduğu kullanılarak $R[x;\alpha]$'da x^k'lı terim

$$a_0^{'}b_k^{'} + a_1^{'}\alpha(b_{k-1}^{'}) + \cdots + a'_k\alpha^k(b_0^{'}) = 0$$

olduğundan $R[x;\alpha]$'da $f_1(x)g_1(x) = 0$ ve buradan R α-skew Armendariz olduğundan $a_i^{'}\alpha^i(b_j^{'}) = 0$'dır. $a_i^{'} = \sigma^{-1}(a_i)$ ve $b_j^{'} = \sigma^{-1}(b_j)$ olduğuna dikkat edilerek

$$0 = a_i^{'}\alpha^i(b_j^{'}) = \sigma^{-1}(a_i)\alpha^i(\sigma^{-1}(b_j)) = \sigma^{-1}(a_i)\sigma^{-1}(\sigma\alpha^i(\sigma^{-1}(b_j)) = \sigma^{-1}(a_i\sigma\alpha^i\sigma^{-1}(b_j))$$

bulunur. Bu durumda $a_i(\sigma\alpha^i\sigma^{-1})(b_j) = a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(b_j) = 0$ elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.2.28 α, bir R halkasının endomorfizması olsun. $n \geq 2$ ve $\langle x^n \rangle$, x^n tarafından üretilen $R[x]$'in bir ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için gerek ve yeter şart R'nin α-katı olmasıdır.

İspat $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. $\theta(r_0I_n + r_1V + r_2V^2 + \cdots + r_{n-1}V^{n-1}) = r_0 + r_1x + \cdots + r_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n \rangle$ olacak şekilde $\theta : V_n(R) = RI_n + RV + \cdots + RV^{n-1} \to$

$R[x]/\langle x^n \rangle$ bir halka izomorfizmasıdır. Lemma 3.2.27 gereğince $V_n(R)$ $\theta^{-1}\bar{\alpha}\theta$-skew Armendarizdir. Her $r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1}V^{n-1} \in V_n(R)$ için

$$\begin{aligned}\theta^{-1}\bar{\alpha}\theta(r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1}V^{n-1}) =& \theta^{-1}\bar{\alpha}(r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n \rangle \\ =& \theta^{-1}(\alpha(r_0) + \alpha(r_1)x + \cdots + \alpha(r_{n-1})x^{n-1} + \langle x^n \rangle) \\ =& \alpha(r_0)I_n + \alpha(r_1)V + \cdots + \alpha(r_{n-1})V^{n-1} \\ =& \bar{\alpha}(r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1}V^{n-1})\end{aligned}$$

olduğundan $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir. Böylece Teorem 3.2.25'ten R α-katıdır. Diğer taraftan R α-katı olsun. Teorem 3.2.25'ten $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. Lemma
3.2.27'e göre $R[x]/\langle x^n \rangle$, $\theta\bar{\alpha}\theta^{-1}$-skew Armendariz'dir. Böylece yukarıdaki paragrafın ispatına benzer olarak $R[x]/\langle x^n \rangle$'in $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu görülür. □

Hong vd. (2003) ispatlanan Önerme 3.1.12, Teorem 3.2.28'in bir sonucu olarak Chen and Tong (2007), aşağıdaki gibi verilmiştir.

Sonuç 3.2.29 α, bir R halkasının monomorfizması olsun. Bu durumda $\langle x^2 \rangle$, x^2 tarafından üretilen $R[x]$'in bir ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^2 \rangle \cong T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için gerek ve yeter şart R'nin α-katı olmasıdır.

Bir R halkasının aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için aşağıdaki gibi yeni bir karakterizasyon vermişlerdir (Chen and Tong 2007).

Teorem 3.2.30 R, bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda $T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerin sağlanmasıdır:

(1) R, α-skew Armendariz'dir.

(2) $R[x;\alpha]$'da $f(x)g(x) = 0$ ise $f(x)R[x;\alpha] \cap R[x;\alpha]g(x) = 0$'dır.

İspat ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki; $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun.
(1) $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ alalım. Bu durumda $T(R[x;\alpha], R[x;\alpha])$'da

$$\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Lemma 3.2.15'ten $T(R,R)[x;\alpha]$'da

$$\left[\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_m & 0 \\ 0 & a_m \end{pmatrix} x^m\right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & b_m \end{pmatrix} x^m\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğundan her i,j için;

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \bar{\alpha}^i \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = 0$$

olur. Böylece $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğundan R, α-skew Armendariz'dir.

(2) $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğundan Teorem 3.2.23'ten R, α-katıdır. Böylece Lemma 3.1.4'ten $R[x;\alpha]$ inmiştir. Sonuç 3.2.24'ten $T(R[x;\alpha], R[x;\alpha])$ Armendarizdir. $R[x;\alpha]$'da $f(x)g(x) = 0$ olsun. Kabul edelimki $f(x)R[x;\alpha] \bigcap R[x;\alpha]g(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $R[x;\alpha]$'da $f(x)s(x) = -t(x)g(x) \neq 0$ olacak şekilde $s(x)$ ve $t(x)$ elemanları vardır. $T(R[x;\alpha], R[x;\alpha])[y]$'de
$\left[\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y\right]\left[\begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y\right] =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fakat; $\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & s(x) \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(x)s(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olur. Bu durum $T(R[x;\alpha], R[x;\alpha])$'nın Armendariz olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $f(x)R[x,\alpha] \bigcap R[x;\alpha]g(x) = 0$ olmalıdır.

($\Leftarrow$) Tersine (1) ve (2) doğru olsun. $T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $T(R,R)[x;\bar{\alpha}]$'da

$$p(x) = \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_m & c_m \\ 0 & a_m \end{pmatrix} x^m$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} b_0 & d_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & d_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} b_m & d_m \\ 0 & b_m \end{pmatrix} x^m$$

polinomları için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Her i,j için $\begin{pmatrix} a_i & c_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \bar{\alpha}^i \begin{pmatrix} b_j & d_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Lemma 3.2.15'ten $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $g(x) = b_0 +$

$b_1x+\cdots+b_mx^m$, $s(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m$, $t(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m$ olmak üzere
$$\begin{pmatrix} f(x) & s(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(x) & t(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x)g(x) & f(x)t(x)+s(x)g(x) \\ 0 & f(x)g(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
bulunur. Buradan $f(x)g(x)=0$ ve $f(x)t(x)+s(x)t(x)=0$ bulunur. $f(x)g(x)=0$ ve R, α-skew Armendariz olduğundan her i,j için $a_i\alpha^i(b_j)=0$ olur. $f(x)t(x)+s(x)t(x)=0$ olduğundan $f(x)t(x)=-s(x)g(x)\in f(x)R[x;\alpha]\cap R[x;\alpha]g(x)=0$ ve R, α-skew Armendariz olduğundan $a_i\alpha^i(d_j)=0$ ve $c_i\alpha^i(b_j)=0$'dır. Böylece
$$\begin{pmatrix} a_i & c_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}\bar{\alpha}^i\begin{pmatrix} b_j & d_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i\alpha^i(b_j) & a_i\alpha^i(d_j)+c_i\alpha^i(b_j) \\ 0 & a_i\alpha^i(b_j) \end{pmatrix}=0$$
olur. Sonuç olarak $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir. □

Chen ve Tong 82007); (tez çalışmasının buraya kadar olan kısmının kısa bir özetini içeren) α-skew Armendariz halkalar kullanılarak α-katı halkaların bazı karakterizasyonları aşağıdaki teoremde ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.2.31 R bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R, α-katıdır.

(2) $a\in R$ için $\alpha(a)a=0$ ise $a=0$ olur.

(3) $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır.

(4) R inmiş ve R'nin her minimal P asal ideali için $\alpha^{-1}(P)\subseteq P$ sağlanır.

(5) R inmiş, α monomorfizma ve R'nin her minimal P asal ideali için $\alpha^{-1}(P)\subseteq P$ olur.

(6) R inmiş, α monomorfizma ve R'de sağ sıfırlayanlar korunur.

(7) α monomorfizma, R inmiş ve α-skew Armendariz bir halkadır.

(8) R inmiş ve $R[x;\alpha]$'da herhangi $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ için $f(x)g(x)=0$ olması için gerek ve yeter koşul her i,j için $a_ib_j=0$ olmasıdır.

(9) $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

(10) $S_3(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

(11) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

(12) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

(13) $n \geq 2$ için $V_n(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

(14) $n \geq 2$ için $R[x]/(x^n)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz'dir.

(15) R α-skew Armendariz ve $R[x;\alpha]$'da $f(x)g(x) = 0$ ise $f(x)R[x;\alpha] \bigcap R[x;\alpha]g(x)$ $= 0$ sağlanır.

Lee and Zhou (2004), inmiş halkalar üzerindeki (Armendariz olmayan) matris halkalarının bazı "göreceli maksimal"Armendariz alt halkaları incelenmiştir. Önerme-3.1.26'-da α-katı olan bir R halkası üzerinde $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu gösterilmişti. Fakat Örnek 3.1.27'de $n \geq 4$ için $S_n(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew olmadığı belirtilmişti. Yang vd. (2010) R halkası α-katı ve $n \geq 2$ iken $UTM_n(R)$'nin (göreceli maksimal olan) $\bar{\alpha}$-skew Armendariz alt halkalarını bulmak için; üst üçgensel matris halkalarının özel bir alt halkası olan $U_n(R)$ matris halkaları kullanılmıştır. Ayrıca $n = 3$ durumunda R halkası α-katı iken $U_3(R) = S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğu açıktır.

Lemma 3.2.32 $\alpha : R \to R$ bir halka endomorfizması olsun. Bu durumda $k = [n/2]$ olmak üzere herhangi $l \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ ve her $n \geq 4$ için $U_n(R) + RE_{1,k}$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir.

İspat $U_n(R) + RE_{1,k}$'nın bir halka olduğu açıktır. $(U_n(R) + RE_{1,k})[x;\bar{\alpha}]$'da $f = E_{l,k} + (E_{l,k} - E_{l,k+1})x$ ve $g = E_{k+1,k+2} + (E_{k,k+2} + E_{k+1,k+2})x$ polinomları gözönüne alındığında $fg = 0$ olduğu açıktır. Fakat $(E_{l,k} - E_{l,k+1})\bar{\alpha}(E_{k+1,k+2}) \neq 0$'dır. Böylece $U_n(R) + RE_{1,k}$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değildir.

Lemma 3.2.33 $\alpha : R \to R$ bir halka endomorfizması olsun. Bu durumda R halkası α-katı iken her $n = 2k + 1 \geq 3$ için $U_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

İspat R halkasının α-katı olduğunu kabul edelim. Her $n = 2k+1 \geq 3$ için $U_n(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $i = 0, 1, \cdots, s$ için $A_i = (a^{(i)}_{uv}) \in U_n(R)$

ve $j = 0, 1, \cdots, t$ için $B_j = (b_{uv}^{(j)}) \in U_n(R)$ olmak üzere $A_i, B_j \in U_n(R)$, $f = \sum_{i=0}^{s} A_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{t} B_j x^j \in U_n(R)[x;\bar{\alpha}]$ için $fg = 0$ olsun. İdda ediyoruz ki her i,j için $A_i \bar{\alpha}^i(B_j) = 0$'dır. $u = v$ için $(a_{uv}^{(i)})$ ve $(b_{uv}^{(j)})$ yerine sırasıyle $a^{(i)}$ ve $b^{(j)}$ kullanılır. $u \neq v$ ve $1 \leq u \leq k+1 \leq v \leq 2k+1$ için $f_{uu} = \sum_{i=0}^{s} a^{(i)} x^i$, $f_{uv} = \sum_{i=0}^{s} a_{u.v}^{(i)} x^i$, $g_{uu} = \sum_{j=0}^{t} b^{(j)} x^j$, $g_{uv} = \sum_{j=0}^{t} b_{u,v}^{(j)} x^j$ olsun. Diğer tüm f_{uv}, g_{uv}'ler sıfırdır. $f_0 = f_{uv}$ ve $g_0 = g_{uv}$ olmak üzere herhangi $p, q \in \{1, 2, \cdots, k\}$ için

$$f_0 g_0 = 0 \tag{3.17}$$

$$f_0 g_{p,k+1} + f_{p,k+1} g_0 = 0 \tag{3.18}$$

$$f_0 g_{p,k+1+q} + f_{p,k+1} g_{k+1,k+1+q} + f_{p,k+1+q} g_0 = 0 \tag{3.19}$$

$$f_0 g_{k+1+q} + f_{k+1,k+1+q} g_0 = 0 \tag{3.20}$$

elde edilir. Her i, j için (3.17) eşitliğinden $a^{(i)} \alpha^{(i)}(b^{(j)}) = 0$ elde edilir. Önerme 3.1.5 ten dolayı R α-skew Armendariz'dir. Aynı zamanda $g_0 f_0 = 0$ olup Önerme 3.1.4'den $R[x;\alpha]$ inmiştir. (3.18) eşitliğini soldan g_0 ile çarparsak $p = 1, 2, \cdots, k$ için $g_0 f_0 g_{p,k+1} + g_0 f_{p,k+1} g_0 = 0$ olup $g_0 f_{p,k+1} g_0 = 0$ olur, $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $p = 1, 2, \cdots, k$ için $f_{p,k+1} g_0 = 0$ (bu nedenle $g_0 f_{p,k+1} = 0$) ve dolayısıyla $f_0 g_{p,k+1} = 0$ (bu nedenle $g_{p,k+1 f_0} = 0$) elde edilir. $p = 1, 2, \cdots, k$ ve R α-skew Armendariz olduğundan tüm i, j için $a_{p,k+1}^{i} \alpha^i(b^{(j)}) = 0$ ve $a^{(i)} \alpha^i(b_{p,k+1}^{(j)}) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde (3.20) eşitliği içinde aynı yöntem kullanılarak $q = 1, 2, \cdots, k$ için $f_0 g_{k+1,k+1+q} = g_{k+1,k+1+q} f_0 = 0$ ve $f_{k+1,k+1+q} g_0 = g_0 f_{k+1,k+1+q} = 0$ olur. Böylece $q = 1, 2, \cdots, k$ ve tüm i, j için $a^{(i)} \alpha^i(b_{k+1,k+1+q}^{(j)}) = a_{k+1,k+1+q}^{(i)} \alpha^i(b^{(j)}) = 0$ elde edilir. (3.19) eşitliği soldan g_0 ile çarpılırsa

$$g_0 f_0 g_{p,k+1+q} + g_0 f_{p,k+1} g_{k+1,k+1+q} + g_0 f_{p,k+1+q} g_0 = g_0 f_{p,k+1+q} g_0$$

elde edilir. Herhangi $p, q \in 1, 2, \cdots, k$ için $f_{p,k+1+q} g_0 = 0$ olup R α-skew Armendariz olduğundan $p, q \in 1, 2, \cdots, k$ ve tüm i, j için $a_{k+1+q}^{i} \alpha^i(b^{(j)}) = 0$ olup bundan dolayı herhangi $p, q \in 1, 2, \cdots, k$ için

$$f_0 g_{p,k+1+q} + f_{p,k+1} g_{k+1,k+1+q} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği sağdan f_0 ile çarparsak herhangi $p, q \in \{1, 2, \cdots, k\}$ için

$$f_0 g_{p,k+1+q} f_0 + f_{p,k+1} g_{k+1,k+1+q} f_0 = f_0 g_{p,k+1+q} f_0$$

elde edilir. $R[x;\alpha]$ inmiş oldğundan $f_0 g_{p,k+1+q} = 0$ olup R α-skew Armendariz olduğundan $p, q \in \{1, 2, \cdots, k\}$ ve tüm i, j için $a^{(i)}\alpha^i(b^j_{p,k+1+q}) = 0$ bulunur. Aynı zamanda herhangi $p, q \in \{1, 2, \cdots, k\}$ için $f_{p,k+1}g_{k+1,k+1+q} = 0$ elde edilir. R α-skew Armendariz olduğundan $p, q \in \{1, 2, \cdots, k\}$ ve tüm i, j için $a^{(i)}_{p,k+1}\alpha^i(b^j_{k+1,k+1+q}) = 0$ elde edilir. Şimdi tüm $i = 0, 1, \cdots, s$ ve $j = 0, 1, \cdots, t$ için $A_i\bar{\alpha}^i(B_j) = 0$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla her $n = 2k + 1 \geq 3$ için $U_n(R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz halkadır.

Lemma 3.2.34 $\alpha : R \to R$ bir halka endomorfizması olsun. Bu durumda R halkası α-katı iken her $n = 2k \geq 2$ için $U_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

İspat Lemma 3.2.33'ün ispatına benzer olarak yapılır.

Yang vd. (2010), aşağıdaki iki teoremi ispatlayarak Hong vd. (2003), ispatladıkları Önerme 3.1.26'ü genelleştirmişlerdir.

Teorem 3.2.35 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R halkası α-katıdır.

(2) Her $n \geq 2$ için $U_n(R)$ halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Lemma 3.2.33 ve Lemma 3.2.34'ten açıktır.
(2) $\Rightarrow$ (1) Her $n \geq 2$ için $U_n(R)$ halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. Kabul edelim ki R α-katı olmasın. Bu durumda $a\alpha(a) = 0$ olan bir $0 \neq a \in R$ elemanı vardır. $U_n(R)[x;\bar{\alpha}]$'daki $f = E_{1,n} + aI_nx$ ve $g = E_{1,n} - aI_nx$ polinomları için $fg = 0$ olur. $U_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğundan $E_{1,n}aI_n = 0$ olmalıdır. Bu ise $0 \neq a$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup R halkası α-katıdır.

İnmiş halkalar Armendariz (yani I_R-skew Armendariz) olduğundan aşağıdaki sonuç Kim and Lee (2000), elde edilen sonucu genelleştirerek $n \geq 2$ için $UTM_n(R)$'nin Armendariz olan bazı alt halkalarının belirlenmesini sağlar.

Sonuç 3.2.36 R halkası inmiş ise, her $n \geq 2$ için $U_n(R)$ Armendarizdir.

Teorem 3.2.37 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. R α-katı ise, bu durumda $k = [n/2]$ olmak üzere $U_n(R)$; $U_n(R) + RE_{1,k}$'nın bir maksimal $\bar{\alpha}$-skew Armendariz alt halkasıdır.

İspat $k = [n/2]$ olmak üzere uygun $n \geq 4$ ve $l \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ için $U_n(R)$'nin bir maksimal $\bar{\alpha}$-skew Armendariz alt halka olmadığını kabul edelim. Bu durumda (Teorem 3.2.35 gereğince) $U_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğundan $U_n(R)$'yi öz olarak kapsayacak şekilde $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olan bir W alt halkası vardır. Buradan $0 \neq aE_{l,k} \in RE_{l,k}$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ vardır. Şimdi $W[x; \bar{\alpha}]$'da $f = aE_{l,k} + a(E_{l,k} - E_{l,k+1})x$ ve $g = E_{k+1,k+2} + (E_{k,k+2} + E_{k+1,k+2})x$ polinomlarını gözönüne alalım. $fg = 0$ olduğu açıktır. Fakat $a(E_{l,k} - E_{l,k+1})\bar{\alpha}(E_{k+1,k+2}) = aE_{l,k+2} \neq 0$ olduğundan çelişki durumu sözkonusudur. O halde kabulümüz yanlış olup $U_n(R)$; $U_n(R) + RE_{1,k}$'nın bir maksimal $\bar{\alpha}$-skew Armendariz alt halkasıdır.

Uyarı 3.2.38 α bir R halkasının bir endomorfizması olsun.

(1) Herhangi $l \in \{k+2, k+3, \cdots, n\}$ ve her $n = 2k \geq 4$ için $V_n(R)$; $V_n(R) + RE_{k+1,l}$'nin bir maksimal $\bar{\alpha}$-skew Armendariz alt halkasıdır.

(2) Herhangi $l \in \{k+3, k+4, \cdots, n\}$ ve her $n = 2k+1 \geq 5$ için $U_n(R)$; $U_n(R) + RE_{k+2,l}$'nin bir maksimal $\bar{\alpha}$-skew Armendariz alt halkasıdır.

3.3 α-Armendariz Halkalar

Armendariz ve α-katı halkaların bir genelleştirmesi olan α-Armendariz halkalar Hong vd.(2006), tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bu notasyon sayesinde; Hong vd, (2003)'te ortaya atılan sorunun bir cevabı olarak α-katı halkaların bir karakterizasyonu verilebilir.

Tanım 3.3.1 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. $pq = 0$ olacak şekilde $R[x; \alpha]$'daki $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ polinomları için $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ olmak üzere $a_i b_j = 0$ oluyorsa R halkası α-Armendariz olarak adlandırılır.

Hong vd. (2000), bir halkanın katı bir α endomorfizması için, α-Armendarizlik özelliği ile α-skew Armendarizlik özelliği birbirine denk olduğundan her α-katı halkanın (Teorem 3.1.5 gereğince) α-Armendariz olduğu açıktır. Bir R halkasının I_R birim endomorfizması için, R'nin Armendariz, I_R-skew Armendariz ve I_R-Armendariz olması denktir.

İnmiş halkalar her zaman I_R-Armendariz'dir. Fakat Örnek 3.3.12'den görüleceği gibi $\alpha \neq I_R$ olmak üzere α-Armendariz olmayan bir inmiş α-skew Armendariz R halkası vardır. Ayrıca α-Armendariz bir halkanın her alt halkasının da α-Armendariz olduğu kolayca görülebilir.
Genelde; yukarıdaki α-Armendarizlik tanımının ters gerektirmesi aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi doğru değildir.

Örnek 3.3.2 $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun. $\alpha((\bar{a}, \bar{b})) = (\bar{b}, \bar{a})$ ile tanımlanan $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. $p = (\bar{1}, \bar{0})x,\ q = (\bar{0}, \bar{1})x \in R[x; \alpha]$ için $(\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{1}) = 0$'dır fakat

$$pq = (\bar{1}, \bar{0})x(\bar{0}, \bar{1})x = (\bar{1}, \bar{0})\alpha((\bar{0}, \bar{1}))x^2 = (\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0})x^2 = (\bar{1}, \bar{0})x^2 \neq 0$$

olur. Ayrıca R α-Armendariz değildir. Gerçekten; $R[x; \alpha]$'daki $p = (\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0})x$ ve $q = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0})x$ polinomları için

$$\begin{aligned} pq =& [(\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0})x][(\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0})x] \\ =& (\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{1}) + [(\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0})\alpha((\bar{0}, \bar{1}))]x + [(\bar{1}, \bar{0})\alpha((\bar{1}, \bar{0}))]x^2 \\ =& (\bar{0}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0})]x + [(\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{1})]x^2 \\ =& (\bar{0}, \bar{0}) \\ =& 0 \end{aligned}$$

fakat $(\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{0}) \neq (0, 0) = 0$'dır. □

Önerme 3.3.3 Her bir $i \in I$ için α_i; R_i'nin bir endomorfizması olmak üzere R_i bir α_i-Armendariz bir halka ise, $\prod_{i \in I} R_i$ direkt çarpımı da $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

İspat Her bir $i \in I$ için α_i; R_i'nin bir endomorfizması olmak üzere R_i bir α_i-Armendariz bir halka olsun. $pq = 0$ olacak şekilde $p = \sum_{k=0}^{m} (a_i)_k x^k, q = \sum_{l=0}^{n} (b_i)_l x^l \in (\prod_{i \in I} R_i)[x; \bar{\alpha}]$ alalım. Bu durumda her bir i için $(a_k b_l)_{i \in I} = (0)_{i \in I}$ olur. Böylece her $0 \leq k \leq m$ ve $0 \leq l \leq n$ için $(a_i)_k (b_i)_l = 0$ olduğundan $\prod_{i \in I} R_i$ direkt çarpımı da $\bar{\alpha}$-Armendarizdir. □

Önerme 3.3.4 R bir α-Armendariz halka olsun. $a, b \in R$ için aşağıdakiler sağlanır.

(1) $ab = 0$ ise herhangi pozitif n tamsayısı için $\alpha^n(a)b = 0$

(2) Herhangi pozitif m tamsayısı için $a\alpha^m(b) = 0$ ise $ab = 0$

İspat (1) Kabul edelim ki $ab = 0$ olsun. $n = 1$ için $\alpha(a)b = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $R[x;\alpha]$'daki $p = \alpha(a)x$ ve $q = bx$ polinomları için olsun. $pq = [\alpha(a)x][bx] = \alpha(a)\alpha(b)x^2 = \alpha(ab)x^2 = 0$ olur. R α-Armendariz olduğundan $\alpha(a)b = 0$ bulunur.
(2) Bir pozitif m tamsayısı için $a\alpha^m(b) = 0$ alalım. $p = ax^m, q = bx \in R[x;\alpha]$ olsun. Bu durumda $pq = (ax^m)(bx) = a\alpha^m(b)x^{m+1} = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $ab = 0$ elde edilir. □

Uyarı 3.3.5 (1) R bir α-Armendariz halka ise, α bir monomorfizmadır. Gerçekten; R'nin α-Armendariz olduğunu ve $\alpha(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. $R[x;\alpha]$'daki $p(x) = x$ ve $q(x) = a$ polinomları için $p(x)q(x) = xa = \alpha(a)x = 0x = 0$ olup R, α-Armendariz olduğundan $1.a = a = 0$ bulunur. Başka bir ifadeyle Önerme 3.3.4 (2)'de de $a = 1$ ve $m = 1$ alınırsa $\alpha(b) = 0$ iken $b = 0$ olacağından α monomorfizma olur.
(2) Ayrıca $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ ise Önerme 3.3.4 (2)'den $ab = 0$ olup Önerme 3.3.4 (1)'den $\alpha(a)b = 0$ elde edilir.

Sonuç 3.3.6 R halkası α-Armendariz olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(1) 1, R'nin birimi olmak üzere $\alpha(1) = 1$'dir. Bu durumda $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olur.

(2) $R[x;\alpha]$ abelyandır.

İspat (1) $(1 - \alpha(1))\alpha(1) = 0$ olduğundan Önerme 3.3.4 (1) gereğince $\alpha(1 - \alpha(1))\alpha(1) = 0$ olur. Böylece $\alpha(1) - \alpha(\alpha(1))\alpha(1) = 0$ olduğundan $\alpha(1) = \alpha(\alpha(1))$ olup α monomorfizma olduğundan $\alpha(1) = 1$ bulunur. Şimdi $e^2 = e \in R$ olsun. $e(1-e) = 0$ olduğundan Önerme 3.3.4 (1)'den $\alpha(e)(1 - e) = 0$ olur. Böylece $\alpha(e) = \alpha(e)e$'dir. Benzer şekilde $(1 - e)e = 0$ olduğundan Önerme 3.3.4 (1)'den $\alpha(1 - e)e = 0$ olur. Böylece $\alpha(1)e - \alpha(e)e = 0$ ve buradan $e = \alpha(e)e$ olup sonuç olarak $\alpha(e) = e$ bulunur.
(2) $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ özüslü elemanını alalım. R α-Armendariz olduğundan R α-skew Armendarizdir. Lemma 3.2.1 gereğince $e^2 = e \in R$ olur. Sonuç 3.3.6 gereğince $\alpha(e) = e$ bulunur. Böylece Önerme 3.2.2'den $R[x;\alpha]$ abelyandır.

Örnek 3.3.2'deki R halkası ve α endomorfizması için $e^2 = e \in R$ olmak üzere $\alpha(e) \neq e$ olmasına rağmen R abelyan halkası abelyandır. Gerçekten;

$$R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$$

ve $\alpha((\bar{a}, \bar{b})) = (\bar{b}, \bar{a})$ olmak üzere R'nin tüm özüslü elemanları $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})$ dir ve her özüslü eleman merkezi olduğu için R abelyandır. Fakat

$$\alpha((\bar{0}, \bar{1})) = (\bar{1}, \bar{0}) \neq (\bar{0}, \bar{1})$$

olur.

Aşağıdaki önermede; Hong vd. (2006) abelyan bir R halkasının α-Armenda-riz olması için halkanın özüslü elemanlarının kullanıldığı bir karakterizasyon vermişler-dir.

Önerme 3.3.7 Herhangi $e^2 = e \in R$ özüslü elemanı için $\alpha(e) = e$ olmak üzere R bir abelyan halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(1) R α-Armendariz'dir.

(2) Herhangi $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1-e)R$ α-Armendariz'dir.

(3) Uygun $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1-e)R$ α-Armendariz'dir.

İspat Herhangi $e^2 = e \in R$ özüslü elemanı için $\alpha(e) = e$ olmak üzere R halkasının abelyan olduğunu kabul edelim. α-Armendariz bir halkanın alt halkası da α-Armenda-riz olduğundan $(1) \Rightarrow (2), (1) \Rightarrow (3)$ ve $(2) \Rightarrow (3)$ ispatları açık olup sadece $(3) \Rightarrow (1)$ ispatını göstermemiz yeterlidir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. Bu durumda $e^2 = e \in R$ uygun bir özüslü eleman olmak üzere $ep, eq \in (eR)[x;\alpha]$ ve $(1-e)p, (1-e)q \in ((1-e)R)[x;\alpha]$ polinomları için $(ep)(eq) = 0$ ve $((1-e)p)((1-e)q) = 0$ olur. Kabulden eR ve $(1-e)R$ α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ için $ea_i eb_j = ea_i b_j = 0$ ve $(1-e)a_i(1-e)b_j = (1-e)a_i b_j = 0$ olur. Böylece $a_i b_j = ea_i b_j + (1-e)a_i b_j = 0 + 0 = 0$ bulunur. Sonuç olarak R α-Armendariz'dir. $\square$

Hong vd. (2006) aşağıdaki örneği vererek α-katı olmayan değişmeli bir α-Armen-dariz halkanın var olduğunu göstermişlerdir.

Örnek 3.3.8 $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ olsun. Her $(a_1, x_1), (a_2, x_2) \in R$ için

$$(a_1, x_1)(a_2, x_2) = (a_1a_2, a_1x_2 + x_1a_2) = (a_2a_1, a_2x_1 + x_2a_1) = (a_2, x_2)(a_1, x_1)$$

olduğundan R değişmelidir. R'nin bir α endomorfizması $\alpha((a, s)) = (a, s/2)$ ile tanımlansın. Bu durumda α; R'nin bir otomorfizmasıdır. R α-katı değildir. Gerçekten $(0, 1) \in R$ için

$$(0, 1)\alpha((0, 1)) = (0, 1)(0, 1/2) = (0, 0)$$

iken $(0, 1) \neq (0, 0)$ dır. İddia ediyoruz ki R α-Armendariz'dir. Gerçekten; $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ iken $A_i = (a_i, s_i)$ ve $B_j = (b_j, t_j) \in R$ için $p = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i, q = \sum_{j=0}^{n} B_j x^j \in R[x; \alpha]$ alalım. Kabul edelim ki $pq = 0$ olsun. $p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ ve $p_1 = \sum_{i=0}^{m} s_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ olmak üzere $p = (p_0, p_1)$ biçiminde yazılabilir. Benzer olarak $q_0 = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$ ve $q_1 = \sum_{j=0}^{n} t_j x^j \in \mathbb{Q}[x]$ olmak üzere $q = (q_0, q_1)$ yazılır.

$$pq = (p_0, p_1)(q_0, q_1) = (p_0, q_0, p_0q_1 + p_1q_0) = (0, 0)$$

olup buradan $p_0q_0 = 0$ bulunur. $\mathbb{Z}[x]$ tamlık bölgesi olduğundan $p_0 = 0$ veya $q_0 = 0$ olmalıdır. Eğer $p_0 = 0$ ise her i için $a_i = 0$ ve buradan $p_1q_0 = 0$ elde edilir. $\mathbb{Q}[x]$ tamlık bölgesi olduğundan $p_1 = 0$ veya $q_0 = 0$ dır. Böylece her i, j için $A_iB_j = 0$ elde edilir. Eğer $q_0 = 0$ ise her j için $b_j = 0$ ve buradan $p_0q_1 = 0$ bulunur. $\mathbb{Q}[x]$ tamlık bölgesi olduğundan $p_0 = 0$ ya da $q_1 = 0$ dır. Böylece her i, j için $A_iB_j = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R α-Armendariz'dir. □

Hong vd. (2006) inmiş α-Armendariz halkalar için aşağıdaki gibi bir karakterizasyon vermişlerdir.

Önerme 3.3.9 R'nin α-katı olması için gerek ve yeter şart R'nin inmiş α-Armendariz olmasıdır.

İspat Önermenin gerek koşulunun ispatı açıktır. Şimdi R inmiş ve α-Armendariz iken R'nin α-katı olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. $p = ax, q = a \in R[x; \alpha]$ için $pq = (ax)a = a\alpha(a)x = 0x = 0$ dır. R α-Armandariz olduğundan $aa = a^2 = 0$ olup R inmiş olduğundan $a = 0$ bulunur. Böylece R α-katıdır. □

Teorem 3.3.10 R bir α-Armandariz halka ise R α-skew Armendariz'dir.

İspat R'nin α-Armendariz olduğunu kabul edelim. $pq = 0$ olacak şekilde $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ alalım. R α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ için $a_i b_j = 0$ olur. İddia ediyoruz ki her $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
0 =& pq \\
=& (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
=& \underbrace{a_0(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)}_{0} + (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
=& (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
=& (a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1}) x (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
=& (a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1})(\alpha(b_0)x + \alpha(b_1)x^2 + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1})
\end{aligned}$$

$p_1 = a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1}, q_1 = \alpha(b_0)x + \alpha(b_1)x^2 + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1} \in R[x;\alpha]$ alınırsa $p_1 q_1 = 0$ olur. R α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha(b_j) = 0$ bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned}
0 =& p_1 q_1 \\
=& (a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1})(\alpha(b_0)x + \alpha(b_1)x^2 + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1}) \\
=& \underbrace{a_1(\alpha(b_0)x + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1})}_{0} + (a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1})(\alpha(b_0)x + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1}) \\
=& (a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a^m x^{m-1})(\alpha(b_0)x + \alpha(b_1)x^2 + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1}) \\
=& (a_2 + a_3 x + \cdots + a^m x^{m-2}) x (\alpha(b_0)x + \alpha(b_1)x^2 + \cdots + \alpha(b_n)x^{n+1}) \\
=& (a_2 + a_3 x + \cdots + a^m x^{m-2})(\alpha^2(b_0)x^2 + \alpha^2(b_1)x^3 + \cdots + \alpha^2(b_n)x^{n+2})
\end{aligned}$$

$p_2 = a_2 + a_3 x + \cdots + a_m x^m, q_2 = \alpha^2(b_0)x^2 + \alpha^2(b_1)x^3 + \cdots + \alpha^2(b_n)x^{n+2} \in R[x;\alpha]$ alınırsa $p_2 q_2 = 0$ olur. R α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^2(b_j) = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse her $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ bulunur. Böylece R α-skew Armendariz'dir. □

Uyarı 3.3.11 Hong vd. (2006) verilen aşağıdaki örnek; Teorem 3.3.10'un tersinin genelde doğru olmadığını gösterir. Ayrıca Önerme 3.3.9'daki "R bir α-Armendariz halka"şartının "R bir α-skew Armendariz halka"şartı ile değiştirileme-yeceğini de gösterir.

Örnek 3.3.12 $R = \mathbb{Z}_2[x]$ olsun. $f(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 + \cdots + \bar{a}_m x^m \in R$ için α endomorfizması $\alpha(f(x)) = f(0)$ olarak tanımlansın. R halkası α-skew Armendariz'dir. Gerçekten; $R[y;\alpha] = \mathbb{Z}_2[x][y;\alpha]$ gözönüne olsun. $pq = 0$ olacak şekilde $p = f_0 + f_1 y + \cdots + f_m y^m, q = g_0 + g_1 y + \cdots + g_n y^n \in R[y;\alpha]$ alalım. Kabul edelim ki $0 \leq s \leq m$ olmak üzere $f_0 = f_1 = \cdots = f_{s-1} = 0$ ve $f_s \neq 0$ var olsun. $pq = 0$ olduğundan; x^s ve x^{s+1}'li terimlerin katsayılarından

$$f_0 g_s + f_1 \alpha(g_{s-1}) + f_2 \alpha^2(g_{s-2}) + \cdots + f_{s-1}\alpha^{s-1}(g_1) + f_s \alpha^s(g_0) = 0 \tag{3.21}$$

$$f_0 g_{s+1} + f_1 \alpha(g_s) + f_2 \alpha^2(g_{s-1}) + \cdots + f_{s-1}\alpha^{s-1}(g_2) + f_s \alpha^s(g_1) + f_{s+1}\alpha^{s+1}(g_0) = 0 \tag{3.22}$$

olup (3.21) eşitliğinde kabul gereğince $f_s \alpha^s(g_0) = 0$ elde edilir. $\mathbb{Z}_2[x]$ tamlık bölgesi ve $f_s \neq 0$ olduğundan $\alpha^s(g_0) = 0$ elde edilir. Bu durum (3.22) eşitliğinde kullanılarak yukarıdakine benzer şekilde $\alpha^s(g_1) = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $0 \leq i \leq m$ için $\alpha^i(g_j) = 0$ ve her $0 \leq i \leq s-1$ için $f_i = 0$ olduğundan tüm $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ için $f_i \alpha^i(g_j) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R, α-skew Armendariz'dir.
Uyarı 3.3.5'te R α-Armendariz ise α'nın monomorfizma olduğu ifade edilmişti. Fakat $\alpha(f(x)) = f(0)$ endomorfizması monomorfizma olmadığından R α-Armendariz değildir. □

Uyarı 3.3.13 Önerme 3.1.15'de R bir tamlık bölgesi ise, R'nin herhangi α endomorfizması için R'nin α-skew Armendariz olduğu gösterilmişti. Örnek 3.3.12 gereğince ise keyfi bir α endomorfizması için R, α-Armendariz olmayabilir. Fakat α monomorfizma ise bunun doğru olduğu gösterilebilir. Teorem 3.3.10'da R α-Armendariz ise R α-skew Armendariz olduğu gösterildi. Bu ifadenin tersi R bir tamlık bölgesi ve α monomorfizma iken doğrudur. Yani R tamlık bölgesi, α-skew Armendariz ve α monomorfizma ise R α-Armendariz. Gerçekten; $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. R α-skew Armendariz olduğundan $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ olup R tamlık bölgesi olduğundan $a_i = 0$ veya $\alpha^i(b_j) = 0$ bulunur. Buradan α monomorfizma olduğundan $a_i = 0$ veya $b_j = 0$ elde edilir. Böylece her i, j için $a_i b_j = 0$ olduğundan R, α-Armendarizdir.

Hong vd (2006), aşağıdaki örneği vererek α-Armendariz bir halkanın homomorfik görüntüsünün $\bar{\alpha}$-Armendariz olması gerekmediğini göstermişlerdir.

Örnek 3.3.14 $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{s} \\ 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{Z}, \bar{s} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & \bar{s} \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & \bar{s} \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı α endomorfizmasını gözönüne alalım. $pq = 0$ olacak şekilde $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}[x]$ ve $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_4[x]$ olmak üzere $p = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix} \in R[x;\alpha]$ polinomlarını alalım. $pq = 0$ olduğundan $p_0q_0 = 0$ ve $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ elde edilir. $\mathbb{Z}[x]$'de $p_0q_0 = 0$ olup $\mathbb{Z}[x]$ tamlık bölgesi olduğundan $p_0 = 0$ veya $q_0 = 0$ bulunur.

1.durum. $p_0 = 0$ (yani her i için $a_i = 0$) ise: $p_1q_0 = 0$ olup buradan $\bar{s}_i b_j = 0$ olur. Böylece her bir i, j için;

$$\begin{pmatrix} a_i & \bar{s}_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_j & \bar{t}_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{s}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_j & \bar{t}_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{s}_i b_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olup R α-Armendariz'dir.

2.durum. $q_0 = 0$ (yani her j için $b_j = 0$) ise: $p_0q_1 = 0$ olup $\mathbb{Z}_4[x]$ Armendariz olduğundan $a_i\bar{t}_j = 0$ elde edilir. Böylece her bir i, j için;

$$\begin{pmatrix} a_i & \bar{s}_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_j & \bar{t}_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & \bar{s}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \bar{t}_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_i\bar{t}_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olduğundan R α-Armendariz'dir.

$I = \left\{ \begin{pmatrix} a_i & \bar{s}_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix} : a \in 4\mathbb{Z}, \bar{s} \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ idealini gözönüne alalım. $\alpha^{-1}(I) = I$ olduğundan I R'nin bir α-değişmez idealidir. Bundan dolayı I α-idealdir.

$$R/I = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{s} \\ 0 & a \end{pmatrix} + I : a \in \mathbb{Z}, \bar{s} \in \mathbb{Z}_4 \right\} \cong \{(\bar{a}, \bar{b}) : \ \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4\}$$

olup (R/I) $\bar{\alpha}$-Armendariz değildir. Gerçekten; $p = (\bar{2},\bar{0}) + (\bar{2},\bar{1})x \in (R/I)[x;\bar{\alpha}]$ polinomu için, $\bar{\alpha}((\bar{2},\bar{0})) = (\bar{2},\bar{0})$ ve $\bar{\alpha}((\bar{2},\bar{1})) = (\bar{2},\bar{3})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
p^2 =& [(\bar{2},\bar{0}) + (\bar{2},\bar{1})x][(\bar{2},\bar{0}) + (\bar{2},\bar{1})x] \\
=& (\bar{2},\bar{0})(\bar{2},\bar{0}) + [(\bar{2},\bar{0})(\bar{2},\bar{1}) + (\bar{2},\bar{1})\bar{\alpha}(\bar{2},\bar{0})]x + [(\bar{2},\bar{1})\bar{\alpha}(\bar{2},\bar{1})]x^2 \\
=& (\bar{0},\bar{0}) + [(\bar{0},\bar{2}) + (\bar{2},\bar{1})(\bar{2},\bar{0})]x + [(\bar{2},\bar{1})(\bar{2},\bar{3})]x^2 \\
=& (\bar{0},\bar{0}) + (\bar{0},\bar{0})x + (\bar{0},\bar{0})x^2 \\
=& 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat; $(\bar{2},\bar{0})(\bar{2},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{2}) \neq (\bar{0},\bar{0})$ olduğundan R/I bölüm halkası $\bar{\alpha}$-Armendariz değildir.

Önerme 3.3.15 Bir R halkasının bir I α-ideali için aşağıdakiler birbirine denktir:

(1) I α-katı (yani $a \in R$ için $a\alpha(a) \in I$ iken $a \in I$).

(2) I yarıasal ve R/I $\bar{\alpha}$-Armendariz.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Kabul edelim ki I α-katı olsun. Öncelikle I'nın yarıasal olduğunu gösterelim. $r^2 \in R$ olmak üzere $r^2 \in I$ olsun. $\alpha(r^2) \in \alpha(I) \subseteq I$ ve I ideal olduğundan $r\alpha(r^2)\alpha^2(r) = r\alpha(r)\alpha(r\alpha(r)) \in I$ olup I α-katı olduğundan $r\alpha(r) \in I$ ve buradan $r \in I$ elde edilir. Sonuç olarak I yarıasaldır. Şimdi R/I'nın $\bar{\alpha}$-katı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $r + I \in R/I$ olmak üzere $(r+I)\bar{\alpha}(r+I) = I$ olsun. Buradan;

$$\begin{aligned}
(r+I)\bar{\alpha}(r+I) = I \Rightarrow& (r+I)(\alpha(r)+I) = I \\
\Rightarrow& r\alpha(r) + I = I \\
\Rightarrow& r\alpha(r) \in I \\
\Rightarrow& r \in I \\
\Rightarrow& r + I = I
\end{aligned}$$

olduğundan R/I $\bar{\alpha}$-katıdır. Önerme 3.3.9'dan R/I $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki I yarıasal ve R/I $\bar{\alpha}$-Armendariz olsun. I'nın α-katı olduğunu gösterelim. Bunun için $a \in R$ olmak üzere $a\alpha(a) \in I$ olsun. $p = \bar{a}x =$

$(a+I)x \in (R/I)[x;\alpha]$ polinomunu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} p^2 =& (\bar{a}x)(\bar{a}x) \\ =& [(a+I)x][(a+I)x] \\ =& [(a+I)\bar{\alpha}(a+I)]x^2 \\ =& [(a+I)(\alpha(a)+I)]x^2 \\ =& [(a\alpha(a)+I)]x^2 \\ =& I \end{aligned}$$

R/I $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğundan $(a+I)(a+I) = I$ olup $a^2 \in I$ elde edilir. I yarıasal olduğundan $a \in I$'dır. Sonuç olarak I α-katıdır.

Hong vd. (2006), I ideali α-Armendariz ve R/I bölüm halkası $\bar{\alpha}$-Armendariz olan fakat R halkası α-Armendariz olmayan bir örnek aşağıdaki gibi verilmiştir.

Örnek 3.3.16 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in F \right\}$ halkasını ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ile tanımlı α endomorfizmasını gözönüne alalım. $e^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$ olduğundan $e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ özüslü bir elemandır. $\alpha(e) = \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$ olduğundan Sonuç 3.3.6 gereğince R α-Armendariz değildir.

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; : \; a,b \in F \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \; : \; b,c \in F \right\}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; : \; b \in F \right\}$$

ideallerini gözönüne alalım. I'nın α-katı olduğunu gösterelim. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \in I$ olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & -ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \in I$$

olup buradan $c^2 = 0$ olmalıdır. F cisim olduğundan $c = 0$ bulunur. Böylece $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olduğundan I α-katıdır. Benzer şekilde J ve K'nın α-katı olduğu gösterilebilir. Böylece Önerme 3.3.15 gereğince R/I, R/J, R/K $\bar{\alpha}$-Armendariz olur. K'nın elemanlarının formatından dolayı K'nın α-Armendariz olduğu açıktır.

Şimdi I'nın α-Armendariz olduğunu gösterelim.
$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_j = \begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olmak üzere $p = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m$, $q = B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n \in I[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. Buradan;

$$A_0B_0 = 0 \tag{3.23}$$

$$A_0B_1 + A_1\alpha(B_0) = 0 \tag{3.24}$$

$$A_0B_2 + A_1\alpha(B_1) + A_2\alpha^2(B_0) = 0 \tag{3.25}$$

$$\vdots$$

$$A_0B_m + A_1\alpha(B_{m-1}) + ... + A_{m-1}\alpha^{m-1}(B_1) + A_n\alpha^n(B_0) = 0 \tag{3.26}$$

eşitlikleri elde edilir. Kabul edelim ki $A_0 \neq 0$ ve $B_0 \neq 0$ olsun.
$A_0B_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0c_0 & a_0d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olduğundan $a_0c_0 = 0 = a_0d_0$ olup $a_0 \neq 0$ ve F cisim olduğundan (a_0'ın tersi var) $c_0 = 0 = d_0$ bulunur. Buradan $B_0 = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olması $B_0 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $a_0 = 0$ olmalıdır. Böylece her $0 \leq j \leq n$ için $A_0B_j = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ bulunur. Böylece (3.24) eşitliğinden $A_1\alpha(B_0) = 0$ bulunur. Yani;

$$A_1\alpha(B_0) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \left(\begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1c_0 & -a_1d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olur. Buradan $a_1c_0 = 0 = a_1d_0$ bulunur. $a_1 \neq 0$ ise F cisim olduğundan (a_1'in tersi vardır) $c_0 = 0 = d_0$ elde edilir. Böylece $B_0 = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olması $B_0 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $a_1 = 0$ olmalıdır. Böylece her $0 \leq j \leq n$ için $A_1B_j = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ için $A_iB_j = 0$ bulunur. Sonuç olarak I α-Armendariz'dir. Benzer şekilde J'nin de α-Armendariz olduğu gösterilebilir. □

Uyarı 3.3.17 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. Kabul edelim ki R'nin $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkası var olsun. R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $Q(R)$'nin $\bar{\alpha}$-katı olmasıdır. Böylece R halkası α-katı iken $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkası $\bar{\alpha}$-katı olup Önerme 3.3.9 gereğince $Q(R)$, $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir. Fakat R'nin inmiş olması durumunda bu ifade geçerli değildir. Çünkü Örnek 3.0.2'den $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkası $\bar{\alpha}$-Armendariz olmayan inmiş bir $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkası vardır.

Önerme 3.3.18 α, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. R α-katı ise

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir.

İspat $S_3(R)$'nin $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ elemanlarını sırasıyla (a_1, b_1, c_1, d_1) ve (a_2, b_2, c_2, d_2) ile gösterelim. Buna göre $S_3(R)$'de toplama ve çarpma işlemleri:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2)$$

biçiminde olur. Dolayısıyla $pq = 0$ olacak şekildeki

$$p = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} x^i, q = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j \\ 0 & a_j & d_j \\ 0 & 0 & a_j \end{pmatrix} x^i \in S[x; \bar{\alpha}]$$

polinomları için $p_i, q_j \in R[x;\alpha]$ ve

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ p_1 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,\ p_2 = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i,\ p_3 = \sum_{i=0}^{m} d_i x^i$$

$$q_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,\ q_1 = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j,\ q_2 = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j,\ q_3 = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

olmak üzere

$$p = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ 0 & p_1 & p_3 \\ 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

ve

$$q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ 0 & q_1 & q_3 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda;

$$p_0 q_0 = 0 \tag{3.27}$$

$$p_0 q_1 + p_1 q_0 = 0 \tag{3.28}$$

$$p_0 q_2 + p_1 q_3 + p_2 q_0 = 0 \tag{3.29}$$

$$p_0 q_3 + p_3 q_0 = 0 \tag{3.30}$$

eşitlikleri elde edilir. Önerme 3.1.4 gereğince R halkası α-katı olduğundan $R[x;\alpha]$ inmiştir. Böylece (3,27) eşitliğinden $q_0 p_0 = 0$ elde edilir. (3.28) eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0 q_1 = 0$ elde edilir. Bu ifade (3.28) eşitliğinde yerine yazılırsa $p_1 q_0 = 0$ olur. Ayrıca (3.30) eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0 q_3 = 0$ olup bu ifade (3.30) da yerine yazılırsa $p_3 q_0 = 0$ elde edilir. (3.29) eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0 q_2 = 0$ olup (3.29) eşitliğinde yerine yazılırsa $p_1 q_3 + p_2 q_0 = 0$ elde edilir. Bu eşitlik sağdan p_1 ile çarpılırsa $p_1 q_3 = 0$ elde edilir ve bu ifade yerine yazılırsa $p_2 q_0 = 0$ elde edilir. R α-katı olduğundan Önerme 3.3.9 gereğince R α-Armendariz olur. Böylece $R[x;\alpha]$'da

$$p_0 q_0 = 0 \text{ olduğundan } a_i a_j^{'} = 0$$

$$p_0 q_1 = 0 \text{ olduğundan } a_i b_j^{'} = 0$$

$$p_1 q_0 = 0 \text{ olduğundan } b_i a_j^{'} = 0$$

$$p_0q_2 = 0 \text{ olduğundan } a_ic_j^{'} = 0$$

$$p_1q_3 = 0 \text{ olduğundan } b_id_j^{'} = 0$$

$$p_2q_0 = 0 \text{ olduğundan } c_ia_j^{'} = 0$$

$$p_0q_3 = 0 \text{ olduğundan } a_id_j^{'} = 0$$

$$p_3q_0 = 0 \text{ olduğundan } d_ia_j^{'} = 0$$

elde edilir. Böylece her i, j için

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j^{'} & b_j^{'} & c_j^{'} \\ 0 & a_j^{'} & d_j^{'} \\ 0 & 0 & a_j^{'} \end{pmatrix} = 0$$

olup $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir. □

Önerme 3.3.18'in bir sonucu olarak aşağıdaki karakterizasyon verilebilir.

Sonuç 3.3.19 R'nin α-katı olması için gerek ve yeter şart $T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-Armendariz olmasıdır (Hong et al. 2006).

İspat Önerme 3.3.18'deki $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğundan $S_3(R)$'nin $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$ alt halkası $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir. $T(R,R)$ bu halkaya izomorf olduğundan $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir. □

Bir halkanın aşikar genişlemesinin Armendarizlik özelliği (Lee ve Zhou, 2004)'te detaylı bie şekilde çalışılmıştır. Sonuç 3.3.19'da "R'nin α-katı olması "koşulu "R'nin inmiş halka olması "ya da "R'nin α-Armendariz olması "koşulu ile değiştirilemez. Çünkü; Teorem 3.3.10'dan R α-Armendariz ise R'nin α-skew Armendariz olduğu biliniyor. Buna göre; Sonuç 3.3.19'da "R α-katı"yerine "R α-Armendariz"yazılsaydı; R α-skew Armendariz olur fakat Örnek 3.1.21 gereğince $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-skew Armendariz değil ve dolayısıyla $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-Armendariz olmazdı. Eğer Sonuç 3.3.19'da "R α-katı"yerine "R (değişmeli) inmiş"yazılsaydı Örnek 3.1.25 gereğince $T(R,R)$ α-skew Armendariz değil ve dolayısıyla $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olmazdı.

Önerme 3.3.20 α; uygun bir t tamsayısı için $\alpha^t = I_R$ olacak şekilde R'nin bir endomorfizması olsun. R'nin α-Armendariz olması için gerek ve yeter şart $R[x]$'in α-Armendariz olmasıdır.

İspat R, α Armendariz olsun. $p = f_0 + f_1 y + \cdots + f_m y^m, q = g_0 + g_1 y + \cdots + g_n y^n \in (R[x])[y;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{w_i}, b_{j_0}, b_{j_1}, \cdots, b_{v_j} \in R$ olmak üzere her $0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n$ için $f_i = a_{i_0} + a_{i_1}x + \cdots + a_{w_i}x^{w_i},\ g_j = b_{j_0} + b_{j_1}x + \cdots + b_{v_i}x^{v_i} \in R[x]$ olsun. Herhangi $0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n$ için $k > \max\{der(f_i), der(g_i)\}$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı alalım. $p(x^{tk}) = f_0 + f_1 x^{tk} + \cdots + f_m x^{mtk},\ q(x^{tk}) = g_0 + g_1 x^{tk} + \cdots + g_n x^{ntk} \in R[x]$'dir. $f_i(g_j)$'lerin katsayılarının kümesi $(p(x^{tk})\ q(x^{tk}))$ katsayılarının kümesine eşittir. $pq = 0$ olduğundan x, $R[x]$'deki polinomlarda R'nin elemanları ile yer değiştirir ve $\alpha^{tk} = I_R$ olduğundan $(p(x^{tk})\ q(x^{tk}))$=0 $\in R[x;\alpha]$'dır. R α Armendariz olduğundan $a_{l_i}b_{s_j} = 0$ olup buradan her $0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n$ için $f_i g_j = 0$ bulunur. Dolayısıyla $R[x]$ α-Armendariz'dir. Tersine $R[x]$, α-Armendariz olsun. R halkası $R[x]$'in alt halkası olduğundan R α-Armendariz'dir. $\square$

Önerme 3.3.21 R bir halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

(1) R, α-katıdır.

(2) Uygun bir pozitif n tam sayısı için $\alpha^n(a)a = 0$ ise $a = 0$ olur.

(3) $R[x]/\langle x^2 \rangle$ bölüm halkası $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) R α-katı olsun. Önerme 3.3.9'dan R inmiştir. $\alpha^n(a)a = 0$ olduğunu kabul edelim. R inmiş olduğundan $a\alpha^n(a) = 0$'dır. Önerme 3.3.4 (2)'den $a^2 = 0$ ve R inmiş olduğundan $a = 0$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Öncelikle R'nin inmiş olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. $\alpha(\alpha(a)a)\ \alpha(a)a = \alpha^2(a)\ \alpha(a^2)a$ olup kabulden $\alpha(a)a = 0$ bulunur, yine kabulden $a = 0$ elde edilir. Böylece R inmiştir. $r \in R$ için $r\alpha(r) = 0$ olsun. R inmiş olduğundan $\alpha(r)r = 0$ olup kabulden $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R α-katıdır.

(1) $\Rightarrow$ (3) R α-katı olsun. $\bar{h} = h + \langle x^2 \rangle = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \langle x^2 \rangle \in R[x]/\langle x^2 \rangle$ için $\bar{h} = a_0 + a_1 x + \langle x^2 \rangle$ yazılır. $\bar{p} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 y + \cdots + \bar{f}_m y^m,\ \bar{q} =$

$\bar{g}_0 + \bar{g}_1 y + \cdots + \bar{g}_n y^n \in (R[x]/\langle x^2\rangle)[y;\alpha]$ için $\bar{p}\bar{q} = \bar{0}$ olsun. Buradan $\bar{f}_i = a_{i_0} + a_{i_1}\bar{x}$, $\bar{g}_j = b_{j_0} + b_{j_1}\bar{x} \in R[x]/\langle x^2\rangle$'dir. R α-katı olduğundan Önerme 3.3.9'dan R α-Armendariz'dir. Sonuç 3.3.6 (1)'den $\alpha(1) = 1$'dir. $\bar{x}y = (x + \langle x^2\rangle)y = xy + \langle x^2\rangle = yx + \langle x^2\rangle = y(x + \langle x^2\rangle) = y\bar{x}$ olduğunu gösterelim. Herhangi $a \in R$ için $a\bar{x} = a(x + \langle x^2\rangle) = ax + \langle x^2\rangle = xa + \langle x^2\rangle = (x + \langle x^2\rangle)a = \bar{x}a$ şeklindedir. Böylece $h_0 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_0} y^i$, $h_1 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_1} y^i$, $k_0 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_0} y^j$, $k_1 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_1} y^j \in R[y]$ olup $\bar{p} = h_0 + h_1\bar{x}$ ve $\bar{q} = k_0 + k_1\bar{x}$ olur. $\bar{p}\bar{q}$ ve $\bar{x^2} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{0} = \bar{p}\bar{q} = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x} + h_1k_1\bar{x^2} = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x}$ olup $h_0k_0 = 0$ ve $h_0k_1 + h_1k_0 = 0$'dır. Hong vd. (2003), $R[y,\alpha]$ inmiş olduğundan $k_0h_0 = 0$'dır. Buradan $0 = k_0(h_0k_1 + h_1k_0)h_1 = k_0h_0k_1h_1 + k_0h_1k_0h_1$, yani $(k_0h_1)^2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $k_0h_1 = 0$ ve $h_1k_0 = 0$ bulunur. Buradan $h_0k_1 = 0$'dır. Böylece R α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ için $a_{0_i}b_{0_j} = 0$, $a_{0_i}b_{1_j} = 0$ ve $a_{1_i}b_{0_j} = 0$'dır. Böylece $\bar{f}_i\bar{g}_j = \bar{0}$ bulunur. Sonuç olarak $R[x]/\langle x^2\rangle$, $\bar{\alpha}$-Armendariz'dir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $R[x]/\langle x^2\rangle$, $\bar{\alpha}$-Armendariz olsun. Sonuç 3.3.6 (1)'den $\bar{\alpha}(\bar{1}) = \bar{1}$'dir. $\bar{\alpha}(\bar{1}) = \bar{\alpha}(1+\langle x^2\rangle) = \alpha(1)+\langle x^2\rangle = 1+\langle x^2\rangle = \bar{1}$ olduğundan $\alpha(1) = 1$'dir. $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. $p = \alpha(a) - \bar{x}y,\ q = a + \bar{x}y \in (R[x]/\langle x^2\rangle)[y,\alpha]$ için $pq = (\alpha(a) - \bar{x}y)(a + \bar{x}y) = \alpha(a)a + (\alpha(a)\bar{x} - \bar{x}\alpha(a))y - \alpha(1)\bar{x}^2y^2 = 0$ olup $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğundan $\bar{x}a = (x + \langle x^2\rangle)a = xa + \langle x^2\rangle = \langle x^2\rangle = \bar{0}$ olduğundan $a = 0$ olup R α-katı halkadır.□

3.4 α-Armendariz Halkaların Diğer Halka Sınıflarıyla İlişkisi

Lemma 3.4.1 *R bir α-Armendariz halka ise, $R[x;\alpha]$'daki tüm özüslü elemanların kümesi, R'deki tüm özüslü elemanların kümesi ile aynıdır.*

İspat R α-Armendariz halka ve $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ olmak üzere $e = e_0+e_1x+\cdots+e_nx^n$ özüslü elemanını alalım. Bu durumda $e(1-e) = 0 = (1-e)e$ olduğundan,

$$e(1-e) = 0 \text{ ise } (e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n)((1-e_0) - e_1x - \cdots - e_nx^n) = 0$$

$$(1-e)e = 0 \text{ ise } ((1-e_0) - e_1x - \cdots - e_nx^n)(e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n) = 0$$

şeklindedir. R α-Armendariz olduğundan $e_0(1-e_0) = 0$'dır. Buradan $0 \leq i \leq n$ için $(1-e_0)e_i = 0$ ve $e_0e_i = 0$ elde edilir. Böylece $1 \leq i \leq n$ için $e_i = 0$'dır. Dolayısıyla

$e = e_0 \in R$ özüslüdür. $\square$

Aşağıdaki sonuçlar Hong vd. (2000), sonuçlarıyla kısmen aynıdır. Ayrıca Kim and Lee (2000), sonuçların genişlemesidir.

Teorem 3.4.2 R α-Armendariz olsun. R'nin Baer (quasi-Baer, p.q. Baer) halka olması için gerek ve yeter şart $R[x;\alpha]$'nın Baer (quasi-Baer, p.q. Baer) halka olmasıdır.

İspat R Baer halka olsun. A, $R[x;\alpha]$'nın boştan farklı bir alt kümesi ve A^*, A'daki elemanların tüm katsayılarının kümesi olsun. Bu durumda A^*, R'nin boştan farklı alt kümesidir. R Baer olduğundan $r_R(A^*) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ özüslü elemanı vardır. Sonuç 3.3.6 (1)'den $e \in r_R[x;\alpha](A)$ olduğundan $eR[x;\alpha] \subseteq r_{R[x;\alpha]}(A)$ elde edilir.
Diğer taraftan, $0 \neq q = b_0 + b_1x + \cdots + b_tx^t \in r_{R[x;\alpha]}(A)$ olsun. Bu durumda $Aq = 0$'dır. Herhangi $p \in A$ için $pq = 0$'dır. R α-Armendariz olduğundan herbir i, j için $a_ib_j = 0$'dır. $a_i \in A^*$ olduğundan $b_0, b_1, \cdots, b_t \in r_R(A^*) = eR$'dir. Böylece $q = ec_0 + ec_1x + \cdots + ec_tx^t = e(c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t) \in eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $c_0, c_1, \cdots, c_t \in R$ vardır. Buradan $r_{R[x;\alpha]}(A) \subseteq eR[x;\alpha]$ elde edilir. Sonuç olarak $r_{R[x;\alpha]}(A) = eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ özüslü elemanı var olduğundan $R[x;\alpha]$ Baer halkadır.
Tersine $R[x;\alpha]$ Baer halka olsun. B, R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda Lemma 3.4.1'den $r_{R[x;\alpha]}(B) = eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ özüslü elemanı vardır. Böylece $r_R(B) = r_{R[x;\alpha]}(B) \bigcap R = eR[x;\alpha] \bigcap R = eR$ olduğundan R Baer halkadır. Quasi-Baer ve $p.q.$-Baer'lik için ispatlar benzer şekildde yapılır. $\square$

Teorem 3.4.3 R α-Armendariz olsun. R'nin $p.p$-halka olması için gerek ve yeter şart $R[x;\alpha]$'nın $p.p$-halka olmasıdır.

İspat R $p.p$-halka olsun. $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x;\alpha]$ alalım. Bu durumda R $p.p$-halka olduğundan her bir $i = 0, 1, \cdots, m$ için $r_R(a_i) = e_iR$ olacak şekilde $e_i \in R$ özüslü elemanları vardır. $e = e_0, e_1, \cdots, e_m$ olsun. Sonuç 3.3.6 (2)'den R α-Armendariz olduğundan $R[x;\alpha]$ abelyandır. Buradan R Abelyan olduğundan $e^2 = e \in R$ ve $eR = \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$'dir. Gerçekten; $y = eR$ alalım. Ohalde $y = er$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Burada e yerine yazılırsa $y = e_0e_1 \cdots e_mr$ elde edilir. Bu eşitlik

soldan a_0 ile çarpılırsa $a_0y = a_0e_0e_1 \cdots e_m r = 0$ olup her $i = 0, 1, \cdots, m$ için $y \in r_R(a_i)$ elde edilir. Buradan $y \in \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$ ise Her $i = 0, 1, \cdots, m$ için $y \in r_R(a_i) = e_iR$ olup buradan Her $i = 0, 1, \cdots, m$ için $y \in= e_iR$ olur. $y = e_ir_i$ olacak şekilde $r_i \in R$ vardır. $y = e_0r_0$ ise $e_0y = e_0r_0 = y$ olup $e_0y = y$ elde edlilir. Aynı şekilde $y = e_1r_1$ ise $e_1y = y$ olup $e_0e_1y = y$ elde edilir. Böyle devam edilerek $y \in R$ elde edilir.
Sonuç 3.3.6 (1)'den $\alpha(e) = e$ olduğundan $pe = a_0e + a_1\alpha(e)x + \cdots + a_m\alpha^m(e)x^m = a_0e + a_1ex + \cdots + a_mex^m = 0$ olup, böylece $eR[x;\alpha] \subseteq r_{R[x;\alpha]}(P)$ elde edilir. Diğer taraftan $q = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in r_{R[x;\alpha]}(p)$ olsun. Bu durumda $pq = 0$'dır. R α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n$ için $a_ib_j = 0$ olur. Böylece her bir $0 \leq i \leq m$ ve her $j = 0, 1, \cdots, n$ için $b_j \in eR$'dir. Buradan $q \in eR[x;\alpha]$ için $r_{R[x;\alpha]}(P) \subseteq eR[x;\alpha]$ elde edilir. Sonuç olarak $R[x;\alpha]$, $p.p$-halkadır.
Tersine $R[x;\alpha]$, $p.p$-halka olsun. $a \in R$ için Lemma 3.4.1'den $r_{R[x;\alpha]}(a) = eR[x;\alpha]$ olacak şekilde $e \in R[x;\alpha]$ yani $e \in R$ özüslü elemanı vardır. Böylece $r_R(a) = eR$ olduğundan R $p.p$-halkadır.

Yukarıdaki iki teoremin bir sonucu olarak, Kim and Lee (2000)'de ispatlanan teoremler, aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 3.4.4 (1) R α-katı olsun. R'nin Baer olması için gerek ve yeter şart $R[x;\alpha]$'nın Baer olmasıdır. Ayrıca R'nin $p.p$-halka olması için gerek ve yeter şart $R[x;\alpha]$'nın $p.p$-halka olmasıdır.
(2) R Armendariz olsun. R'nin Baer olması için gerek ve yeter şart $R[x]$'in Baer olmasıdır. Ayrıca R'nin $p.p$-halka olması için gerek ve yeter şart $R[x]$'in $p.p$-halka olmasıdır (Kim and Lee 2000).

Uyarı 3.4.5 Örnek 3.3.2 ve Örnek 3.3.12 ile karşılaştırıldığında; Teorem 3.4.2 ve Teorem 3.4.3'deki "R'nin α-Armendariz olması"koşulunun fazladan olmadığı görülür.

Aşağıda, R α-Armendariz iken R halkasının ve $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının simetrik olma ve terslenebilir olma özellikleri arasındaki ilişki incelenecektir. Örnek- 3.3.2'de $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ değişmeli halkası simetriktir. Fakat $\alpha((a,b)) = (b,a)$ ile tanımlı R'nin α otomorfizmasını gözönüne alındığında $R[x;\alpha]$ skew polinom halkası terslenebilir değildir. Gerçekten; $p = (1,0),\ q = (0,1)x \in R[x;\alpha]$ için $pq = (1,0)(0,1)x = 0$ fakat $qp = (0,1)x(1,0) = (0,1)\alpha((1,0))x = (0,1)(0,1)x = (0,1)x \neq (0,0)$'dır. "Her simetrik halka terslenebilir "olup bu ifadenin karşıt tersi gereğince $R[x;\alpha]$ simetrik değildir.

Lemma 3.4.6 R α-Armendariz olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $p_1p_2\cdots p_n = 0$ olmak üzere $p_1, p_2, \cdots, p_n \in R[x;\alpha]$ için herbir i için a_i, p_i'nin herhangi katsayısı olmak üzere $a_1a_2\cdots a_n = 0$.

(2) R terslenebilir ise $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması için gerek ve yeter şart herhangi pozitif n tamsayısı için $a\alpha^n(b) = 0$'dır.

İspat (1) $p_1p_2\cdots p_n = 0$ olsun. a_i, p_i'nin herhangi katsayısı olsun. $p_1p_2\cdots p_n = 0$ ise $p_1(p_2p_3\cdots p_n) = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $a_1b = 0$ (b, $p_2p_3\cdots p_n$'in herhangi katsayısı) elde edilir. Böylece $(a_1p_2)(p_3\cdots p_n) = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $(a_1a_2)c = 0$ olur. Buradan $a_1a_2p_3\cdots p_n = 0$ elde edilir. Böyle devam edilirse $a_1a_2\cdots a_n = 0$ elde edilir.

(2) R terslenebilir olduğundan Önerme 3.3.4'den açıktır.

Teorem 3.4.7 R α-Armendariz olsun.

(1) R'nin simetrik olması için gerek ve yeter şart $R[x;\alpha]$'nın simetrik olmasıdır.

(2) R'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $R[x;\alpha]$'nın terslenebilir olmasıdır.

İspat (1) R simetrik olsun. $p = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$, $h = \sum_{k=0}^{t} c_kx^k \in R[x;\alpha]$ için $pqh = 0$ olsun. Bu durumda Lemma 3.4.6 (1)'den her $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, $0 \le k \le t$ için $a_ib_jc_k = 0$'dır. R simetrik olduğundan $a_ic_kb_j = 0$'dır. Negatif olmayan herhangi s tamsayısı için; $a_ic_kb_j = 0$ ise $a_i\alpha^s(c_kb_j) = 0$ olup buradan $a_i\alpha^s(c_k)\alpha^s(b_j) = 0$ bulunur. Lemma 3.4.6 (2)'den her i, j, k ve herhangi $t \ge s$ için $a_i\alpha^s(c_k)\alpha^t(b_j) = 0$'dır. Böylece $pqh = 0$ iken $phq = 0$'dır. Sonuç olarak $R[x;\alpha]$ simetriktir.

(2) $p = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. R α-Armendariz olduğundan her $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ için $a_ib_j = 0$'dır. R terslenebilir olduğundan

$b_j a_i = 0$'dır. Lemma 3.4.6 (2)'den her i, j ve negatif olmayan herhangi s tamsayısı için $b_j \alpha^s(a_i) = 0$'dır. Böylece $R[x;\alpha]$'da $qp = 0$'dır. Sonuç olarak $R[x;\alpha]$ terslenebilirdir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.4.8 R Armendariz halka olsun.

(1) R'nin simetrik olması için gerek ve yeter şart $R[x]$'in simetrik olmasıdır.

(2) R'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $R[x]$'in terslenebilir olmasıdır.

KAYNAKLAR

Anderson, D. D. and Camillo, V. (1998). Armendariz rings and Gaussian rings. *Comm. in Algebra*, **26 (7)**: 2265-2272.

Armendariz, E. P. (1974). A note on extensions of Baer and p.p. rings. *Mathematical Society*, **18**: 470-473.

Birkenmeier, G.F. (1981) Baer rings and quasi-continuous rings have a MDSN, *Pacific-J,Math*, **97**: 283-292.

Birkenmeier, G.F. Kim, N. K. and Park, J.K. (2000) Quasi-Baer rings and extensions and biregular rings. *Bull. Austral. Math. Soch*, **61**: 39-52.

Birkenmeier, G.F.,Kim, N. K. and Park, J.K. (2001) Principally quasi-Baer rings *Comm. Algebra*, **29 (2)**: 639-660.

Birkenmeier, G.F.,Kim, N. K. and Park, J.K. (2001) Polynominal extensions of Baer and quasi-Baer rings *J. Pure Appl. Algebra*, **159**: 25-42.

Clark, W.E. (1967) Twisted matrix units semigroup algebras *Duke Math* **34**: 417-424.

Chen, W. X. and Tong, W. T. (2005). A note on skew Armendariz *Communation in Algebra* **33 (4)**: 1137-1140.

Cohn, P.M. (1999) Revesible rings, *Bull. London Math. Soc* **31**: 641-648.

Goodearl, K. R. Warfield, R. B. Jr. (1989). A few Noetherian rings. *An Introduction to. Noncommutative Noetherian Rings* Cambiridge: University Press.

Han, J. Hirano, Y. , Kim H. (2000). *Some results on skew polynominal rings over a reduced rings,* in, Birkenmeier, G. F. , Park, J. K. , Park Y. S. , International symposium ring theory, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin. 123-129.

Habeb, J.M. (1990). A note on zero commutative and duo rings, *Math. J. Okayama-Univ.* **32**: 73-76.

Hirano, Y. (1999). On the uniqueness of rings of coefficients in skew polynomial rings. *Publ. Math. Debrecen*, **54**: 489-495.

Hirano, Y. (2002). On annihilator ideals of polynominal ring over a noncommutative-ring, *Journal Pure and Applied Algebra*, **168**:45-52.

Hong, C. Y.Kim, N. K. and Kwak, T. K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p rings. *Journal Pure and Applied Algebra*, **151 (3)**:215-226.

Hong, C. Y. Kim, N. K. and Kwak, T. K. (2003). On skew Armendariz rings. *Comm. in Algebra*, **31 (1)**:103-122.

Hong, C. Y. Rizvi and Kwak, S. T. (2005). Rigid ideals and radicals of Ore extensions *Algebra Colloq*, **12 (3)**: 399-412.

Huh, C. Lee, Y. and Smoktunowicz A. (2002). Armendariz rings and semicommutative rings, *Comm. Algebra*, **30 (2)**: 751-761.

Kaplansky, I. (1968).*Rings of Operators*. New York: W. A. Benjamin.

Kim, N. K. and Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings. *Journal of Algebra.* **223**: 477-488.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium*, **3(4)**:289-300.

Lambek, J. (1971). On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canad. Math. Bull*, **14** : 359-368.

Lee, T. S. and Wong, T. L. (2003). On Armendariz rings. *Houston Journal of Mathematics*, **29 (3)**: 583-593.

Lee, T. K. and Zhou, Y. (2004) Armendariz and reduced rings. *Communications in Algebra*, **32**: 2287-2299.

Rege, M. B. and Chhawchharria, S. (1997). Armendariz rings.*Procedings of the Japan Academy Ser. A.Math.Sci*, **73**: 14-17.

Shin, G. Y. (1973). Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* , **184** : 43-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serhat TOKATÇI

Doğum Yeri ve Tarihi : Fethiye, 1990

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) :0 506 825 35 30 / serhattokatci@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fethiye Mehmet Erdoğan Anadolu Lisesi, 2004-2008

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2008-2012

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2012-2014

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :Afyon FEMakademi Dershaneleri, 2012-...

Yayınları (SCI ve diğer) :

Diğer konular