GENELLEŞTİRİLMİŞ MCCOY HALKALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurten KILIÇ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MCCOY HALKALARI

Nurten KILIÇ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Nurten KILIÇ tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş McCoy Halkaları" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 18/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Başkan **:** Doç. Dr. Erdoğan HALAT
Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Üye **:** Prof. Dr. Muhittin BAŞER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/06/2014

Nurten KILIÇ

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ MCCOY
HALKALARI

Nurten KILIÇ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Bu araştırma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, McCoy halkaların temel özellikleri ve genişlemelerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise McCoy halkaların bir genelleştirmesi yapılacak bu yeni halka sınıfının temel özelliklerive genişlemeleri incelenmiştir.

2014, v + 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: İnmiş Halkalar, McCoy Halkalar, Armendariz Halkalar.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

GENERALIZED MCCOY RINGS

Nurten KILIÇ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, McCoy ring, which is a extensions of McCoy rings are characterized and the basic properties of this ring classes are studied. In the fourth chapter, McCoy ring which is a generalization of McCoy rings are studied.

2014, v + 48 pages

Key Words: Reduced Rings, McCoy Rings, Armendariz Rings

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda danışmanlığımı yapan sayın kıymetli hocam Prof. Dr. Muhittin BAŞER'e göstermiş olduğu sabır, ilgi, destek ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen babam Ahmet KILIÇ, annem Ayten KILIÇ, kardeşim Eyüp KILIÇ ve canım arkadaşım Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Nurten KILIÇ

AFYONKARAHİSAR 2014

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları 4
2.2. Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları 8
2.3. Matris Halkaları ve Polinom Halkaları 10
2.4. Bazı Halka Sınıfları 12
3. MCCOY HALKALAR 17
3.1. McCoy Halkaların Temel Özellikleri 17
3.2. McCoy Halkaların Genişlemeleri 22
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MCCOY HALKALAR 35
KAYNAKLAR 46
ÖZGEÇMİŞ 48

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
σ	R halkasının bir endomorfizması
$\bar{\sigma}$	R nin bir σ endomorfizmasının R nin bir genişlemesine genişletilmişi
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
I_R	R halkasının birim endomorfizması
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x;x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x;\sigma]$	R nin skew polinom halkası
$T(R,M)$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının x^n tarafından üretilen ideali
$P(T)$	R halkasının asal radikali
$R[x]/\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının $\langle x^n \rangle$ ideali ile elde edilen bölüm halkası

1. GİRİŞ

Çalışmamıza son yıllarda pek çok matematikçi tarafından çalışılan halka sınıflarından biri olan McCoy halkalar konu olmuştur. Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce McCoy halkalarla ilgili bu güne kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgileri hatırlatalım. R bir halka ve R üzerindeki polinomların halkası $R[x]$ olsun. İlk olarak McCoy halka tanımını verelim. Nielsen (2006)' ya göre $f(x), g(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ için eğer $f(x)g(x) = 0$ iken $f(x)r = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ mevcut ise, bu durumda R halkasına *sağ McCoy halka* denir. Benzer şekilde $f(x)g(x) = 0$ iken $sg(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq s \in R$ mevcut ise, bu durumda R halkasına *sol McCoy halka* denir. Bir R halkası hem sağ hem de sol McCoy ise R halkası *McCoy* olarak adlandırılır. R halkasına bu ismin verilmesinin nedeni; 1942 yılında N.H. McCoy' un değişmeli halkaların bu özelliği sağlandığını göstermesidir. Şimdi çalışmamızda bize yardımcı olacak bazı kavramları hatırlatalım.

Eğer bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa veya denk olarak $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R ye inmiş (reduced) halka denir. Her tamlık bölgesinin inmiş bir halka olduğu açıktır. Ayrıca inmiş halkaların sınıfının terslenebilir halkaların sınıfını kapsadığı bilinmektedir. Diğer taraftan, her değişmeli halkanın terslenebilir olduğu da açıktır. İnmiş halkaların sınıfının diğer bir genelleştirilmesi Armendariz halkalardır. Rege and Chhawchharia (1997)' de Armendariz halka tanımını şu şekilde vermişlerdir. $R[x]$; R üzerindeki polinomların halkası olmak üzere $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası Armendariz halka olarak adlandırılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalara Armendariz halka denilmesinin sebebi; inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını 1974 de gösteren kişinin Armendariz olmasıdır. Halkaların Armendarizlik özelliği üzerine birçok makale yazılmıştır.

Diğer taraftan Armendariz halkalarında McCoy oldukları bilinmektedir. Bu bakımdan McCoy halkalarda Armendariz halkaların bir genelleştirmesidir. R bir halka ve $\sigma; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere R halkasından katsayılı polinomların kümesi, polinomlarda bilinen toplama işlemi ve herhangi bir $a \in R$ için $xa = \sigma(a)x$ ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya endomorfizma tipinin Ore genişlemesi (yada skew polinom halkası) denir ve $R[x;\sigma]$ ile gösterilir.

Son yıllarda bir R halkasının Armendarizlik özelliği skew polinomların halkasına genişletilmiştir. Hong vd. (2006) tarafından aşağıdaki tanımlar verilmiştir. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\sigma]$ polinomları için $p(x)q(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i\sigma^i(b_j) = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası $\sigma -$ skew Armendariz ($\sigma -$ Armendariz) olarak adlandırılmıştır. Eğer σ; R nin birim endomorfizması olarak alınırsa bu durumda, yukarıdaki iki tanım da Armendariz halka tanımı ile çakışacaktır. Ayrıca R; $\sigma -$skew Armendariz ($\sigma -$Armendariz) bir halka ve $S, \sigma(S) \subseteq S$ olacak şekilde R nin bir alt halkası ise, bu durumda S de $\sigma -$skew Armendariz ($\sigma -$Armendariz) dir. Diğer taraftan her $\sigma -$Armendariz halkanın $\sigma -$skew Armendariz halka olduğu Hong vd. (2006)' da ispatlanmıştır ve bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. Krempa (1996)' da $\sigma; R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için,

$$a\sigma(a) = 0 \Rightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda σ'yı katı (rigid) endomorfizma olarak adlandırmıştır. Daha sonra Hong vd. (2003)' de bir R halkasının katı bir σ endomorfizmasının var olması durumunda R yi $\sigma -$katı ($\sigma -$rigid) halka olarak adlandırmışlardır. Kolayca görülebilir ki; $I_R; R$ nin birim endomorfizması olmak üzere R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin $I_R -$katı olmasıdır. Bir R halkasının herhangi bir katı endomorfizması bir monomorfizmadır. Hong vd. (2000)' de $\sigma -$ katı halkaların inmiş halka olduğunu ispatlamışlardır. Diğer taraftan Hong vd. (2000)' de herhangi bir $\sigma -$katı halkanın $\sigma -$Armendariz olduğu ispatlanmış ve bunun tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. Hong vd. (2003)' den bir R halkasının $\sigma -$katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x;\sigma]$ skew polinom halkasının inmiş olması gerektiğini biliyoruz. Yukarıda ifade edilen bilgilerin ışığı altında, bu çalışmada Başer vd. (2009) çalışması kullanılarak McCoy halkaların bir genelleştirmesi yapılacak ve bu halka sınıflarıyla diğer halka sınıflarının ilişkileri, özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalar ile arasındaki ilişkiler çalışılacaktır.

Çalışmamız boyunca R birimli bir halka ve aksi söylenmedikçe de σ; R nin sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizması olacaktır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, sonraki bölümde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlerle birlikte polinom halkaları, matris halkaları gibi bazı özel halka sınıfları verilecektir.

Üçüncü bölümde Zhao and Liu (2009)' dan yararlanarak McCoy halkalar karakterize edilecek ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenecektir.

Dördüncü bölümde Başer vd. (2009)' dan yararlanarak McCoy halkaların Armendariz' lik özelliğinin skew polinomlar halkasına genelleştirilmesi göz önüne alınarak; McCoy halkaların bir genelleştirmesi olan $\sigma -$ skew McCoy halkalar tanımlanacak, bu yeni halka sınıfının bazı karakterizasyonları ve bu halka sınıflarının diğer halka sınıfları ile özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalarla olan ilişkileri çalışılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlar ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları hatırlatılacaktır. Bu bölümde kullandığımız temel referanslar Hungerford (1982), Anderson and Fuller (1992) ve Lam (2001)' dır.

2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Bu kısımda halka teorideki bazı temel kavramlar tanımlanacak ve halkaların sıkça kullanacağımız bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde, genellikle $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

(i) $(R,+)$ bir değişmeli grup,

(ii) Her $a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (çarpmanın birleşme özelliği),

(iii) Her $a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$ (sol ve sağ dağılma özelliği)

oluyorsa, bu durumda R ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a,b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmelidir* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* denir. 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Teorem 2.1.2. R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a,b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a,b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a,b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

Tanım 2.1.3. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir.

Tanım 2.1.4. R birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ varsa bu durumda a ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. c (b) elemanına a nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Hem sağ hem de sol tersinir bir elemana *tersinir eleman* denir.

Tanım 2.1.5. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının hiçbir sıfır böleni yoksa bu R halkasına bir *tamlık bölgesi* denir. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda R halkasına bir *cisim* denir.

Uyarı 2.1.6.

(i) Her tamlık bölgesi 0 ve 1_R gibi en az iki elemana sahiptir.
(ii) Her cisim bir tamlık bölgesidir.
(iii) Değişmeli ve birimli bir R halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R nin sıfırdan farklı elemanlarının kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olmasıdır.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. Bununla beraber $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi farklı ikili işlemlere göre de halka yapılabilir. Fakat bundan sonraki çalışmalarımızda $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası denildiğinde, tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikteki halka yapısı göz önüne alınacaktır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar), $\mathbb{R}$ (reel sayılar) ve $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir.

Örnek 2.1.8. $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ kümesi $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ ve $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ ikili işlemleri ile birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Eğer p bir asal tamsayı ise $\mathbb{Z}_p$ bir cisimdir.

Tanım 2.1.9. R ile S iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

oluyorsa, bu durumda f ye bir *halka homomorfizması* denir. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, f birebir ise, bu durumda f ye bir *monomorfizma*, örten ise, bu durumda f ye bir *epimorfizma* denir. Eğer bir $f: R \to S$ halka homomorfizması hem birebir hem de örten ise, bu durumda f ye bir izomorfizma ve R ile S halkalarına da *izomorf* halkalar denir. $R \cong S$ ile gösterilir. Bir $f: R \to R$ homomorfizmasına R halkasının bir *endomorfizması* denir. Bir $f: R \to R$ izomorfizmayada R halkasının bir *otomorfizması* denir.

Örnek 2.1.10. R bir halka olmak üzere $O: R \to R, O(a) = 0_R$ ve $I_R: R \to R, I_R(a) = a$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar R halkasının endomorfizmalarıdır. Bunlara sırasıyla R nin *sıfır endomorfizması* ve *birim endomorfizması* adı verilir.

Tanım 2.1.11. R bir halka olmak üzere eğer, her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir pozitif en küçük n tamsayısı varsa, bu durumda R halkası n *karekteristiğine* sahiptir denir ve $Char\, R = n$ yazılır. Eğer böyle bir n tamsayısı yoksa R nin *karekteristiği sıfırdır* denir.

Tanım 2.1.12. R ile S iki halka olmak üzere, bir $f: R \to S$ monomorfizmasına R nin S ye bir *gömülüşü* denir. Eğer böyle bir monomorfizma varsa, bu durumda R halkası S halkası içine *gömülebilir* denir.

Teorem 2.1.13. Her R halkası birimli bir S halkası içine gömülebilir. Bu S halkası bir tek değildir. Ayrıca, S halkası karekteristiği 0 veya R nin karekteristiği ile aynı olacak şekilde seçilebilir.

İspat. R bir halka olmak üzere $S = R \times \mathbb{Z} = R \oplus \mathbb{Z} = \{(r,k) |\, r \in R,\ k \in \mathbb{Z}\}$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$(r_1, k_1)(r_2, k_2) = (r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, k_1 k_2) \quad (r_i \in R; k_i \in \mathbb{Z})$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0,1)$ birimine sahip, karekteristiği 0 olan bir halkadır. Ayrıca $f: R \to S, f(r) = (r, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır.

Eğer $Char\,R = n > 0$ ise, bu durumda $S = R \oplus \mathbb{Z}_n$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$\left(r_1, \overline{k_1}\right)\left(r_2, \overline{k_2}\right) = \left(r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, \overline{k_1}\,\overline{k_2}\right)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0, \overline{1})$ birimine sahip bir halkadır. Ayrıca $Char\,S = n$ olup $g: R \to S, g(r) = (r, \overline{0})$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır.

Uyarı 2.1.14. $\alpha: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\alpha(0_R) = 0_S$ dir. Bununla beraber R ile S birimli halkalar ise $\alpha(1_R) = 1_S$ olmak zorunda değildir. Gerçekten $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\alpha(n) = (n, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir halka homomorfizmasıdır. Fakat $\alpha(1) = (1{,}0) \neq (1{,}1)$ dir. Bununla beraber eğer $\alpha: R \to S$ örten bir halka homomorfizması ise, bu durumda $\alpha(1_R) = 1_S$ olur.

Örnek 2.1.15. R, S, T üç halka, $f: R \to S$, $g: S \to T$ halka homomorfizmaları olmak üzere $g \circ f: R \to T$ bileşke fonksiyonu da bir halka homomorfizmasıdır. Eğer $\alpha: R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda $\alpha \circ \alpha = \alpha^2$ hatta daha genel olarak $i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $\alpha^i = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{i\ tane}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.16. R bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

Tanım 2.1.17. Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.18. R bir halka olmak üzere

$$C = \{c \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } cr = rc\}$$

kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.1.19. Bir R halkasının bir R eşkare elemanı R halkasının merkezine ait ise, bu durumda e eşkare elemanına *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir R

halkasının tüm eşkare elemanları merkezil eşkare ise, bu durumda R halkası *abel* olarak adlandırılır.

2.2. Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $S; R$ deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise, bu durumda S ye R nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Her ideal bir alt halkadır. Fakat her alt halka bir ideal olmak zorunda değildir. Gerçekten bir halkanın merkezi bir alt halka olmasına rağmen bir ideal olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.2. Her bir n tamsayısı için $\langle n \rangle = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ devirli alt gurubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

Örnek 2.2.3. R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve $R; R$ nin idealleridir.

R bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n;$ R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1,2, \dots, n\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve $B;$ R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B,\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \{ab \mid b \in B\}$ olur.

Örnek 2.2.4. R bir halka ve e de R de bir merkezil eşkare eleman olmak üzere $1_R - e$ de bir merkezil eşkaredir. Ayrıca eR ve $(1_R - e)R$ kümeleri R nin idealleridir.

Grup teoride normal alt grupların oynadığı rolü halka teoride idealler oynar. R bir halka I da R nin bir ideali olsun. R değişmeli toplamsal bir grup olduğundan $I; R$ nin bir toplamsal normal alt grubudur. Böylece;

$$R/_I = \{a + I \mid a \in R\}$$

kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/_I$ değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya R nin I ideali yardımıyla elde edilen *bölüm halkası* denir. R değişmeli iken $R/_I$ nında değişmeli ve R birimli iken $R/_I$ nınde birimli olduğu açıktır.

Teorem 2.2.5. R bir halka ve I da onun bir ideali olmak üzere;

$$\pi: R \to R/_I \, , \pi(r) = r + I$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon I çekirdeğine sahip bir epimorfizmadır.

Tanım 2.2.6. R bir halka I da onun bir ideali olmak üzere $R/_I$ halkasına R nin bir *homomorfik görüntüsü* denir.

Tanım 2.2.7. R bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere;

$$l_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

$$r_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } xr = 0\}$$

kümelerine sırayla R içinde X in *sol ve sağ sıfırlayanı* denir. Eğer $X = \{x\}$ ise bu durumda $l_R(X) = l_R(\{x\}) = l_R(x)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.8. R bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere; $l_R(X)$; R nin bir sol ideali, $r_R(X)$ de R nin bir sağ idealidir. Ayrıca X ve Y; R nin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

(i) $X \subset Y$ ise $l_R(Y) \subset l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subset r_R(X)$ dir.

(ii) $X \subset r_R(l_R(X))$ ve $X \subset l_R(r_R(X))$ dir.

(iii) $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ dir.

2.3. Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bu bölümde verilen bir R halkasından elde edilen bazı yeni halkaları hatırlatılacaktır.

Tanım 2.3.1. R birimli bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki bir formal toplama R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \ \in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır. n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek;

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i)x^i$$

şeklinde tanımlanır.

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_jb_{l-j}$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_lx^l$$

şeklinde tanımlanır. c_l katsayıları daha açık bir ifadeyle;

$$c_l = a_0 b_l + a_1 b_{l-1} + a_2 b_{l-2} + \cdots + a_{l-2} b_2 + a_{l-1} b_1 + a_l b_0$$

şeklindedir. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2. R bir halka olmak üzere;

$$R[|x|] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *kuvvet serilerinin halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.3. R bir halka olmak üzere;

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir.}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.4. R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun. $(R[x], +)$ değişmeli grubu, $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ yardımı ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* denir ve $R[x; \alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.5. R bir halka olmak üzere bileşenleri R den gelen n satırlı ve n sütunlu matrislerin kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R üzerinde $n \times n$ tipindeki *matrislerin halkası* denir ve $M_n(R)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.6. R bir halka ve $(M, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $R \times M \rightarrow M, (r, m) \longmapsto rm$ fonksiyonu varsa, bu durumda M ye bir *sol* R *−modül* denir. Her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için;

(i) $r(x + y) = rx + ry$
(ii) $(r + s)x = rx + sx$
(iii) $r(sx) = (rs)x$

R; 1_R birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, ek olarak her $x \in M$ için $1_R x = x$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda M ye bir *birimsel sol* R *−modül* denir.

Tanım 2.3.7. R bir halka ve S değişmeli bir halka olmak üzere, eğer $(R, +)$ bir sol S −modül ve bu modül yapısındaki $S \times R \rightarrow R, (s, r) \longmapsto sr$ fonksiyonu; her $s \in S$ ve her $r_1, r_2 \in R$ için;

$$s(r_1 r_2) = (sr_1)r_2 = r_1(sr_2)$$

özelliğine sahip ise, bu durumda R halkasına S değişmeli halkası üzerinde bir *cebir* veya *R ye S −cebir* denir.

Tanım 2.3.8. S değişmeli bir halka ve R_1 ile R_2; S −cebirler olsun. Bir $f: R_1 \rightarrow R_2$ halka homomorfizması aynı zamanda bir S −modül homomorfizması ise bu durumda f ye bir S *−cebir homomorfizması* denir.

2.4. Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda bazı özel halka sınıfları hatırlatılacak ve bu halka sınıfları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 2.4.1. Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için,

$$a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye *inmiş* (*reduced*) *halka* denir.

Sıfır bölensiz her halka inmiş halkadır. Daha özel olarak $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası inmiş bir halkadır. Diğer taraftan $\overline{0} \neq \overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ için $(\overline{2})^2 = \overline{2}\overline{2} = \overline{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ halkası inmiş bir halka değildir. Ayrıca inmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğunu görmek çok kolaydır.

Tanım 2.4.2. $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

Lemma 2.4.3. Her inmiş halka terslenebilir bir halkadır.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur.

Tanım 2.4.4. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı değişmeli* (*semicommitative*) olarak adlandırılır. Bir R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter şart koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ $(l_R(a))$ kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı değişmelidir. Gerçekten R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece her $r \in R$ için $bar = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.5. R bir halka olmak üzere $a \in R$ için,

$$aRa = 0 \ \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.6.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = 0 \Longrightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki koşulu sağlayan halkalara Armendariz ismi verilmiştir. Çünkü Armendariz (1974)' te inmiş bir halkanın yukarıdaki koşulu sağladığını göstermiştir. Yani her inmiş halka bir Armendariz halkadır.

Tanım 2.4.7. R bir halka ve $\alpha: R \rightarrow R$ bir endomorfizma olsun. $a \in R$ için,

$$a\alpha(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−katı* (α *−rigid*) halka denir.

R bir α −katı halka olmak üzere, $\alpha(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan R nin her S alt halkası da α −katı bir halkadır. Diğer taraftan I_R; R nin birim endomorfizması olmak üzere; R nin α − katı olması için gerek ve yeter koşul R nin inmiş bir halka olmasıdır.

Lemma 2.4.8. R bir α −katı halka olsun. Bu durumda α bir monomorfizmadır.

İspat. $a \in R$ için $\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $a\alpha(a) = a0 = 0$ olup R; α −katı olduğundan $a = 0$ bulunurki bu da α nın bir monomorfizma olduğunu gösterir.

R inmiş olmayan bir halka olmak üzere R nin I_R birim endomorfizması bir monomorfizmadır. Fakat R; I_R −katı değildir. Yani yukarıdaki Lemma'nın tersi doğru değildir.

Lemma 2.4.9. R bir halka ve $\alpha: R \rightarrow R$ bir endomorfizma olsun. Eğer R; α −katı ise, bu durumda R bir inmiş halkadır.

İspat. R; α −katı bir halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(a)\alpha\big(a\alpha(a)\big) = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(0)\alpha^2(a) = a0\alpha^2(a) = 0$ olup, R; α −katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve tekrar R; α −katı olduğundan $a = 0$ elde edilir. Yani R bir inmiş halkadır.

Lemma 2.4.10. Her inmiş halka yarı asaldır.

İspat. R inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve R inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da R nin yarı asal olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.11. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i \alpha^i(b_j) = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−skew Armendariz* halka denir.

Tanım 2.4.12. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i b_j = 0 \ \ (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−Armendariz* halka denir.

Aşağıdaki verilen önermedeki gerektirmeler Hong vd. (2003) tarafından verilmiştir.

Önerme 2.4.13. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

(i) Eğer R; α −katı ise, bu durumda R; α −Armendarizdir.
(ii) Eğer R; α −Armendariz ise, bu durumda R; α −skew Armendarizdir.
(iii) R nin α −katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$ halkasının inmiş olmasıdır.

Son olarak yukarıda tanıtılan halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Bu gerektirmelerin hiçbirinin tersi doğru değildir.

$R;\ \alpha$ −katı $\Longrightarrow R$ inmiş $\Longrightarrow R$ terslenebilir $\Longrightarrow R$ yarı değişmelidir.

Tanım 2.4.14. Bir R halkasının tüm asal ideallerinin arakesitine bu halkanın asal radikali denir.

Tanım 2.4.15. R bir halka ve $a, b \in R$ b regüler eleman olduğunda $ab_1 = ba_1$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in R$ ve b_1 regüler elemanları varsa bu durumda R halkasına $sağ(sol)\ Ore$ halka denir.

Tanım 2.4.16. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $b\sigma(a) = 0$ $(\sigma(b)a = 0\,)$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R halkasının σ endomorfizmasına *sağ* (*sol*) *terslenebilirdir* denir. Eğer bir R halkasının bir sağ (sol) terslenebilir σ endomorfizması varsa, bu durumda R halkasına *sağ* (*sol*) $\sigma - terslenebilir$ denir. Eğer R halkası hem sağ hem de sol $\sigma -$ terslenebilir ise, bu durumda R ye $\sigma -$ *terslenebilir* halka denir.

3. MCCOY HALKALAR

Bu bölümde, McCoy halkalarla ilgili yapılan çalışmalar, bu halkaların temel özellikleri ve genişlemelerinden bahsedilecektir. Çalışmamız boyunca R birimli bir halkayı gösterecektir. Bu bölüm için temel referansımız Zhao and Liu (2009) olacaktır. Bu bölümde vereceğimiz tüm sonuçlar ve örnekler adı geçen makalede mevcuttur.

3.1. McCoy Halkaların Temel Özellikleri

Bu kısımda McCoy halka sınıflarının nasıl ortaya çıktığı üzerinde durulacaktır.

Önerme 3.1.1. R değişmeli ve birimli bir halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ olsun. Bu durumda ;

(1) $f(x)$ in $R[x]$ içinde bir sıfır bölen olması için gerek ve yeter koşul $cf(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ olmasıdır.

(2) R inmiş bir halka olmak üzere, eğer bir $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ oluyorsa , bu durumda $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i b_j = 0$ olur.

İspat. (1) $\Leftarrow$) $cf(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ mevcut olsun. Bu durumda $0 \neq g(x) = c \in R[x]$ seçilirse $f(x)$ $R[x]$ içinde bir sağ sıfır bölen olur. R değişmeli olduğundan $f(x)$ bir sıfır bölen olur.

$\Rightarrow$)$f(x) \in R[x]$ bir sıfır bölen olsun. Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde minimum dereceli bir $0 \neq g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$, $(b_m \neq 0)$ polinomu vardır. Böylece $m = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine $m \geq 1$ olduğu kabul edilmelidir. Her j için $a_j g(x) = 0$ ise, bu durumda her j için $a_j b_m = 0$ olur. $a_j b_m = 0$ ise buradan $b_m f(x) = 0$ olur ki bu $deg b_m = 0 < m$ olduğundan m nin en küçük seçilmesi ile çelişir. Böylece en az bir j için $a_j g(x) \neq 0$ olur. Bu yüzden $\{j: a_j g(x) \neq 0\}$ kümesi boştan farklıdır. $l = max\{j: a_j g(x) \neq 0\}$ olsun. $0 = f(x)g(x)$ olduğu için $a_l b_m = 0$ olur. Buradan $a_l g(x) = a_l b_0 + a_l b_1 x + \cdots + a_l b_m x^{m-1}$ elde edilir. Böylece $deg\big(a_l g(x)\big) < m = \deg\big(g(x)\big)$ bulunur. Fakat; $f(x)\big(a_l g(x)\big) = a_1 f(x)g(x)$=0 olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup $m = 0$ olmalıdır. Bu ise ispatımızı bitirir.

(2) R inmiş bir halka ve $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Her i, j için $a_i b_j = 0$ olduğu gösterilmelidir. $f(x)g(x) = 0$ olmasından;

$$a_0 b_0 = 0 \tag{1}$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \tag{2}$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \tag{3}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k = 0 \tag{k}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_n b_m = 0 \tag{n+m}$$

eşitlikleri elde edilir. R yarı değişmeli olduğu için (1) eşitliğinden $a_0 R b_0 = 0$ elde edilir. (2) eşitliğini sağdan b_0 ile çarptığımızda ise

$$a_0 b_1 a_0 + a_1 b_0 b_0 = 0$$

elde edilir. Buradan $(a_1 b_0) b_0 = 0$ ve R terslenebilir olduğu için $b_0 (a_1 b_0) = 0$ olur. Şimdi $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = a_1 0$ olup R inmiş olduğundan $a_1 b_0 = 0$ bulunur. Dolayısıyla iddia $i + j = 0$ ve $i + j = 1$ için doğru olur. $i + j$ üzerine tümevarım uygulanarak ispat yapılacağından dolayı iddia $i + j < k$ iken doğru olsun. Yani $i + j < k$ iken $a_i b_j = 0$ olsun. $i + j = k$ iken $a_i b_j = 0$ olduğu gösterilmelidir. (k) eşitliği sağdan b_0 ile çarpıldığında; $a_0 b_0 = 0$ olduğundan $a_0 R b_0 = 0$ olur. $a_1 b_0 = 0$ ve R yarı değişmeli olduğu için $a_1 R b_0 = 0$ olur. Böyle devam edilerek $a_{k-1} b_0 = 0$ ve R yarı değişmeli olduğu için $a_{k-1} R b_0 = 0$ elde edilir. Bu durumda $a_k b_0 b_0 = 0$ bulunur. R terslenebilir ve inmiş olduğu için $a_k b_0 = 0$ olur. Böylece (k) eşitliği

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 = 0$$

haline gelir. Bu son eşitlik sağdan b_1 ile çarpıldığında

$$a_0 b_k b_1 + a_1 b_{k-1} b_1 + \cdots + a_{k-1} b_1 b_1 = 0$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdakine benzer olarak $a_{k-1}b_1 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her i, j için $a_i b_j = 0$ olduğu görülür.

Yukarıda önermenin ışığı altında Nielsen (2006)' da aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 3.1.2. $f(x), g(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ için eğer $f(x)g(x) = 0$ iken $f(x)r = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ mevcut ise, bu durumda R halkasına *sağ McCoy halka* denir. Benzer şekilde $f(x)g(x) = 0$ iken $sg(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq s \in R$ mevcut ise, bu durumda R halkasına *sol McCoy halka* denir. Bir R halkası hem sağ hem de sol McCoy ise R halkası *McCoy* olarak adlandırılır.

Aşağıdaki önermeden McCoy halkaların, Armendariz halkaların bir genelleştirmesi olduğunu görüyoruz.

Önerme 3.1.3. Her Armendariz halka bir McCoy halkadır.

İspat. R bir Armendariz halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R Armendariz olduğundan her i, j için $a_i b_j = 0$ olur. $g(x) \neq 0$ olduğu için en az bir $0 \neq b_t \in R$ vardır. O halde $f(x)b_t = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq b_t \in R$ var olduğundan R sağ McCoy halkadır. Benzer şekilde R nin bir sol McCoy halka olduğuda ispatlanabilir. Sonuç olarak R McCoy halka olur.

Sonuç 3.1.4. Her inmiş halka bir McCoy halkadır.

İspat. Önerme 3.1.1 (2) den her inmiş halkanın Armendariz olduğu bilinmektedir. Böylece her inmiş halka bir McCoy halkadır.

Şimdi McCoy halkalarla ilgili çalışmalarımız için oldukça kullanışlı bir lemma vereceğiz.

Lemma 3.1.5. R yarı değişmeli bir halka olmak üzere $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $i = 0, 1, 2, \dots, m$ için $a_i b_0^{i+1} = 0$ olur.

İspat. $f(x)g(x) = 0$ olduğu için x^i li terimin katsayısı

$$a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0 = 0$$

olur. $i = 0$ için $a_0 b_0 = 0$ olur. Şimdi, tümevarım yöntemine göre her $j < k$ için $a_j b_0^{j+1} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R yarı değişmeli olduğu için $a_j R b_0^{j+1} = 0$ olur. $a_j b_0^{j+1} = 0$ ifadesi sağdan art arda b_0 ile çarpıldığında ;

$a_j b_0^{j+2} = 0$, $a_j b_0^{j+3} = 0$, ... $a_j b_0^{k} = 0$ olur. Böylece $a_j b_{k-j} b_0^k = 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$) elde edilir. Şimdi

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = 0$$

sağdan b_0 ile çarpıldığında

$$a_0 b_k b_0^k + a_1 b_{k-1} b_0^k + a_2 b_{k-2} b_0^k + \cdots + a_{k-1} b_1 b_0^k + a_k b_0^{k+1} = 0$$

elde edilir.

$j = 0$ için $a_0 b_k b_0^k = 0$

$j = 1$ için $a_1 b_{k-1} b_0^k = 0$

$\vdots$

$j = k - 1$ için $a_{k-1} b_1 b_0^k = 0$

olur. Sonuç olarak $a_k b_0^{k+1} = 0$ olur.

Aşağıdaki lemma terslenebilir halkaların McCoy' luk özelliğinin sağ-sol simetrik olduğunu gösterir.

Lemma 3.1.6. R terslenebilir bir halka olsun. Bu durumda R nin bir sol McCoy halka olması için gerek ve yeter koşul R nin bir sağ McCoy halka olmasıdır.

İspat. R terslenebilir ve sol McCoy bir halka olsun. $f(x), g(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ için $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olsun. R sol McCoy olduğu için $rg(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ vardır. Buradan her j için $rb_j = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $b_jr = 0$ olur. Böylece $g(x)r = 0$ olup $(g(x)r)f(x) = 0$ olur. R sol McCoy olduğu için $r'f(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r' \in R$ vardır. Her i için $r'a_i = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $a_ir' = 0$ olur. Yani $f(x)r' = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ vardır. Sonuç olarak R bir sağ McCoy halka olur.

Aşağıdaki teorem McCoy halkaların, terslenebilir halkalarında bir genelleştirmesi olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.7. Her terslenebilir halka bir McCoy halkadır.

İspat. R terslenebilir bir halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j \in R[x] \setminus \{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R halkasının sol McCoy olduğunu ispatlamak yeterlidir. Herhangi bir $a(x) \in R[x]$ polinomu için C_a, $a(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_tx^t$ polinomunun katsayıları tarafından üretilen sol ideal olsun. Yani $C_a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_t|$ olsun. Tümevarım yöntemi ile $cg(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in C_f \setminus \{0\}$ olduğu gösterilmelidir. Bu da bize R nin sol McCoy olduğunu gösterecektir. Eğer gerekliyse $f(x)$ ve $g(x)$, x in kuvvetlerine bölündükten sonra $a_0 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ kabul edilebilir. Ayrıca m ve n nin $f(x)$ ve $g(x)$ in gerçek dereceleri olduğu kabul edilebilir. $n = 0$ ve $c = a_0$ ise, bu durumda $cg(x) = a_0b_0 = 0$ olur. Bu yüzden $n \geq 1$ seçilsin. $g(x)$ in derecesi üzerine tümevarım uygulanarak ispat yapılacaktır. Her $k < n$ için $a(x), b(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ olmak üzere $a(x)b(x) = 0$ ve $\deg(b(x)) = k$ ise $cb(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in C_a \setminus \{0\}$ olduğu kabul edilsin. $f(x)b_0^{l+1} = 0 \neq f(x)b_0^{l}$ olacak şekilde bir $l \geq 0$ seçilsin. Eğer $f(x)b_0 = 0$ ise $l = 0$ seçilmiş olur. $f(x)b_0 \neq 0$ ise, bu durumda $f(x)b_0^{l+1} = 0$ olur. R halkasının terslenebilirliği kullanılırsa $f(x)b_0^{l+1} \neq 0$ ise en az bir $a_ib_0^{l} \neq 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $b_0^{l}a^{i} \neq 0$ yani $b_0^{l}f(x) \neq 0$ olup $a(x) :=$

$b_0^l f(x) \neq 0 = b_0^l f(x) b_0$ şeklinde tanımlansın. $f(x)b_0 b_0^l = 0$ ise $a_i b_0 b_0^l = 0$ olup $b_0^l a_i b_0 = 0$ ve ardından $b_0^l f(x) b_0 = 0$ bulunur. Buradan $b_0^l f(x) g(x) = a(x) g(x) = 0$ ve $a(x) b_0 = b_0^l f(x) b_0 = 0$ olur. $b(x) := \frac{g(x)-b_0}{x}$ alırsak yukarıdaki eşitlikten $a(x)b(x) = 0$ elde edilir. $\deg\big(g(x)\big) = n > 0$ olduğu için $b(x) \neq 0$ ve $\deg\big(b(x)\big) = n-1 < n$ olur. Tümevarım hipotezine göre $cb(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in C_a \setminus \{0\}$ vardır. $a(x)b_0 = 0$ olduğu için $C_a b_0 = 0$ ve böylece $cb_0 = 0$ olup $cb(x) = 0$ olur. Yani $cg(x) = 0$ olur. Diğer yandan $a(x)$ in inşasından $C_a \subseteq C_f$ yani $c \in C_f$ olur. Sonuç olarak $g(x)$ in derecesi ne olursa olsun $cg(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in C_f$ vardır. Sonuç olarak R sol McCoy halkadır.

3.2. McCoy Halkaların Genişlemeleri

Bu bölümde bir halkanın McCoy' luk özelliğinin hangi genişlemelerine taşındığı araştırılacaktır.

S bir halka ve $n \geq 2$ bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in S \right\}$$

şeklinde tanımlansın. R herhangi bir halka olmak üzere bu halka üzerine kurulan $M_n(R)$ matris halkasının McCoy halka olmadığını görmek çok kolaydır. Bununla beraber aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 3.2.1. S bir halka olmak üzere, S halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul R_n halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. $\Leftarrow$) R_n sağ McCoy halka olsun. S halkasının sağ McCoy olduğu gösterilmelidir.

$f(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, $g(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j = b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q \in S[x]/\{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$F(x) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & a_p \end{pmatrix} x^p \ \in R_2[x] \setminus \{0\}$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_q & 0 \\ 0 & b_q \end{pmatrix} x^q \ \in R_2[x] \setminus \{0\}$$

olup $F(x)G(x) = \begin{pmatrix} a_0 b_0 & 0 \\ 0 & a_0 b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 b_1 + a_1 b_0 & 0 \\ 0 & a_0 b_1 + a_1 b_0 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_p b_q & 0 \\ 0 & a_p b_q \end{pmatrix} x^{P+q}$ bulunur.

$f(x)g(x) = 0$ olduğundan

$$a_0 b_0 = 0$$

$$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_p b_q = 0$$

olup, böylece $F(x)G(x) = O$ olarak bulunur. R_2 sağ McCoy olduğundan $F(x)C = O$ olacak şekilde bir $O \neq C \in R_2$vardır. $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alırsak;

$$O = F(x)C = \begin{pmatrix} a_0 a & a_0 b \\ 0 & a_0 a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 a & a_1 b \\ 0 & a_1 a \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_p a & a_p b \\ 0 & a_p a \end{pmatrix} x^p$$

olur. Böylece her $i \in \{0,1,\dots,p\}$ için $a_i a = 0$ ve $a_i b = 0$ olur. $C \neq O$ olduğundan ya $a \neq 0$ yada $b \neq 0$ olur. Eğer $a \neq 0$ ise, bu durumda $a_i a = 0$ olduğundan $f(x)a = 0$ olacak şekilde bir $a \neq 0$ vardır. Eğer $b \neq 0$ ise, $a_i b = 0$ olduğundan $f(x)b = 0$ olacak şekilde bir $b \neq 0$ vardır. Sonuç olarak S sağ McCoy halka olur.

⇒) S sağ McCoy halka olsun. $n \geq 2$ için R_n in sağ McCoy halka olduğu gösterilmelidir. $F(x), G(x) \in R_n[x] \setminus \{0\}$ olmak üzere $F(x)G(x) = O$ olsun. $F(x)C = O$ olacak şeklide bir $O \neq C \in R_n$ in mevcut olduğu gösterilmek isteniyor. E_{ij}, (i,j). bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan matris olsun. $F(x)C = O$ olacak şeklide bir $C = rE_{1n} \neq O$ varlığı gösterilmelidir ki bu da R_n in sağ McCoy olduğunu gösterecektir.

1.Durum: $F(x)E_{11} = O$ olsun. Bu durumda $E_{11} \neq O$ olduğundan $C = rE_{11r}E_{1n}$ olur. 2.Durum: $F(x)E_{11} \neq O$ olsun. $G(x) \neq O$ olduğundan i maksimal olmak üzere $E_{ii}G(x)E_{jj} \neq O$ olacak şekilde $j \geq i \geq 1$ mevcuttur.

$$O = E_{11}\big(F(x)G(x)\big)E_{jj} = E_{ii}\mathrm{F(x)}\sum_{k\leq i}(E_{kk}G(x)E_{jj})$$

$$= \sum_{k\leq i}(E_{ii}F(x)E_{kk})(E_{kk}G(x)E_{jj})$$

$$= (E_{ii}F(x)E_{ii})(E_{ii}G(x)E_{jj})$$

Böylece $(E_{ii}F(x)E_{ii})\big(E_{ii}G(x)E_{jj}\big) = O$ olur. S sağ McCoy olduğundan $(E_{ii}F(x)E_{ii}) = O$ olacak şekilde $0 \neq r \in S$ vardır. Böylece $F(x)C = O$ olacak şekilde bir $O \neq C \in R_n$ vardır. Zhao and Liu (2009).

Aşağıdaki önerme bir halkanın McCoy olma özelliğinin, bu halkanın aşikar genişlemesine taşındığını göstermektedir.

Önerme 3.2.2. R bir sağ McCoy halka ise, bu durumda $T(R,R)$ bir sağ McCoy halkadır.

İspat. R sağ McCoy halka olsun. $f_0(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $f_1(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, $g_0(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$, $g_1(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m \in R[x] \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$F(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}x + \cdots + \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}x^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}x + \cdots + \begin{pmatrix} c_m & d_m \\ 0 & c_m \end{pmatrix}x^m$$

olsun. $F(x), G(x) \in T(R,R)[x] \setminus \{0\}$ için $F(x)G(x) = O$ olsun. Bu durumda $F(x)C = O$ olacak şekilde $O \neq C \in T(R,R)$ var olduğu gösterilmelidir. $F(x)$ ve $G(x)$ polinomlarını $F(x) = \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ 0 & f_0(x) \end{pmatrix} \neq O$, $G(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) & g_1(x) \\ 0 & g_0(x) \end{pmatrix} \neq O$ şeklinde gösterebiliriz. Böylece

$$O = F(x)G(x) = \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ 0 & f_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(x) & g_1(x) \\ 0 & g_0(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_0(x)g_0(x) & f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) \\ 0 & f_0(x)g_0(x) \end{pmatrix}$$

olmasından

$$f_0(x)g_0(x) = 0$$

$$f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0 \qquad (3.1)$$

eşitlikleri elde edilir.

1.Durum: $f_0(x) \neq 0$ olsun

(i) $g_0(x) \neq 0$ ise bu durumda $f_0(x)g_0(x) = 0$ ve R sağ McCoy olduğundan $f_0(x)r = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. Böylece

$$F(x) \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ 0 & f_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_0(x)r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $F(x)C = O$ olacak şekilde $O \neq C = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T(R, R)$ vardır.

(ii) $g_0(x) = 0$ olsun. (3.1) eşitliğinden $f_0(x)g_1(x) = 0$ olur. Bu durumda kesinlikle $g_1(x) \neq 0$ olmalıdır. R sağ McCoy olduğundan $f_0(x)r = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. $F(x)C = O$ olacak şekilde $O \neq C = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ seçilebilir.

2.Durum: $f_0(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_1(x) \neq 0$ dır. (3.1) den $f_1(x)g_0(x) = 0$ olur. R sağ McCoy olduğundan $f_1(x)s = 0$ olacak şekilde $0 \neq s \in R$ vardır.

$$F(x) \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1(x)s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. $F(x)C = O$ olacak şekilde bir $O \neq C = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in T(R, R)$ seçilebilir. Sonuç olarak $T(R, R)$ sağ McCoy olur. Zhao and Liu (2009).

Terslenebilir halkaların McCoy olduğunu önceden gördük. Fakat genelde bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani McCoy olup terslenebilir olmayan halkalar vardır. Şimdi bu durum için bir örnek verelim.

Örnek 3.2.3. S inmiş bir halka olsun. Bu durumda S bir McCoy halkadır. Böylece

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in S \right\}$$

halkası Önerme 3.2.1 den sağ McCoy'dur. Fakat $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olur ancak

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olduğundan R terslenebilir değildir.

Armendariz halkaların McCoy olduğunu daha önceden gördük. Fakat genelde bu ifadenin tersi doğru değildir. Ayrıca Armendariz olmayan yarı değişmeli halkalarda mevcuttur.

Örnek 3.2.4. S bir sağ McCoy halka olmak üzere

$$R_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, a_{ij} \in S \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. Önerme 3.2.1 den R_4 sağ McCoy fakat Armendariz değildir. Ayrıca Örnek 3.2.3 den sağ McCoy halkaların yarı değişmeli olmak zorunda olmadığını da görebiliriz.

Önerme 3.2.1 e dayanarak, R sağ McCoy olduğunda $n \geq 2$ için her $n \times n$ tipindeki $T_n(R)$ üst üçgensel matris halkasının ve $n \times n$ tipindeki $M_n(R)$ ful matris halkasının sağ McCoy olduğundan şüphelenilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu ihtimali ortadan kaldırır.

Örnek 3.2.5. R bir halka ve $S = T_n(R)$ (yada $S = M_n(R)$) olsun.

$$f(x) = (I_n - E_{nn}) + E_{1n}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x$$

$$g(x) = E_{nn} - E_{1n}x = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x \in S[x]$$ için $f(x)g(x) = 0$ dır.

Fakat $f(x)(a_{ij}) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq (a_{ij}) \in S$ yoktur. Bundan dolayı S sağ McCoy değildir.

R bir sağ McCoy halka olsun. Bu durumda Önerme 3.2.2 den dolayı $T = T(R,R)$ aşikar genişlemesi sağ McCoy halkadır. Ayrıca T nin asal radikali $P(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | r \in R\right\}$ sağ McCoy halkadır. Gerçekten; $f(x), g(x) \in P(T)[x] \setminus \{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & r_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & r_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^n$ için $f(x)\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ olacak şekilde $O \neq \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P(T)$ mevcut olduğu için $P(T)$ sağ McCoy olur.

$$T/_{P(T)} = \{A + P(T) | A \in T\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + P(T) | a, b \in R\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(T) | a, b \in R\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + P(T) | a \in R\right\}$$

olup $T/_{P(T)} \cong R$ sağ McCoy halkadır.

${}^{R}/_{P(R)}$ ve $P(R)$ sağ McCoy olduğunda R nin sağ McCoy olduğundan şüphelenilebilir. Ancak aşağıdaki örnek bu ihtimali ortadan kaldırır.

Örnek 3.2.6. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}, a - b \equiv c \equiv 0(mod2) \right\}$ olsun. $P(R)$ Armendariz olduğundan McCoy halkadır. Diğer taraftan ${}^{R}/_{P(R)}$ inmiş olduğundan Armendariz, Armendariz olduğu için de McCoy halkadır. Şimdi R nin sağ McCoy halka olmadığını gösterelim. Bunun için;

$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in R[x] \setminus \{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olur. $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R$ için $f(x) \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0$ olsa $a = b = c = 0$ olurdu. O halde R sağ McCoy değildir.

I birimsiz sağ McCoy halka olmak üzere R nin sıfırdan farklı herhangi bir I temel ideali için ${}^{R}/_{I}$ ve I sağ McCoy halka iken R nin de sağ McCoy halka olduğu düşünülebilir. Ancak aşağıda bu durum için tersine bir örnek mevcuttur.

Örnek 3.2.7. F bir cisim ve $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. Örnek 3.2.5 ten dolayı R bir sağ McCoy halka değildir. Fakat ${}^{R}/_{I}$ ve I Armendariz olduğu için bu halkalar McCoy halkalardır.

A bir halka, B de A nın bir alt halkası olmak üzere A nın sayılabilir kopyalarının bir kümesi $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ olsun. Tüm A_i halkalarının direkt çarpımı D olsun. $R = R(A, B)$ de D nin $\oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ ideali ve $\{(b, b, \ldots) b \in B\}$ alt halkası tarafından üretilen alt halkası olsun.

Önerme 3.2.8. A bir sağ McCoy halka ise, bu durumda $R = R(A, B)$ de bir sağ McCoy halkadır.

İspat. $fg = 0$ olacak şekilde $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$ ve $f = (f_1, f_2, \ldots), g = (g_1, g_2, \ldots)$ olsun. $f(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ olduğu için en az bir $f_i \neq 0$ ve $g(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ olduğu için en az bir $g_i \neq 0$ olur. Herhangi bir $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in R$ için a nın desteği $supp(a) = \{i | a_i \neq 0\}$ şeklinde tanımlansın.

1.Durum: Bir $k \notin supp(f)$ mevcut olsun. Bu durumda $f_k = 0$ dır. Böylece

$$(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots)(0,0, \dots, a, \dots) = 0$$

olacak şekilde $0 \neq (0,0, \dots, a, \dots) \in A$ mevcut olduğu için R bir sağ McCoy halka olur.

2.Durum: f nin tüm bileşenleri sıfırdan farklı olsun. Bu durumda bir $k \in supp(f) \cap supp(g)$ vardır. $f_k g_k = 0$ dan ve A sağ McCoy olduğundan $f_k c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in A$ vardır. Şimdi

$$(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots)(0,0, \dots, c, \dots) = (0,0 \dots ,0, \dots)$$

olduğundan $R = R(A, B)$ bir sağ McCoy halka olur. Zhao and Liu (2009).

Bir R halkası için, $\prod_{n=1}^{\infty} R$ sayılabilen direkt çarpımın alt halkası olan

$S = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} R \,| a_k = a_{k+1} = \cdots = b \; olacak\; şekilde\; bir\; b \in R \; ve \; k \in \mathbb{N} \; vardır. \}$ kümesini göz önüne alalım.

Sonuç 3.2.9. S halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. $\Leftarrow$) R bir sağ McCoy halka olsun. Bu durumda Önerme 3.2.8. den $S = R(R, B)$ halkasıda sağ McCoy olur.

$\Rightarrow$)S bir sağ McCoy halka olsun. R nin bir sağ McCoy halka olduğu gösterilmelidir. $fg = 0$ olacak şekilde $f = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j \in R[x]/\{0\}$ olsun. Her i, j için $\alpha_i = (a_i)_{n=1}^{\infty}$, $\beta_j = \left(b_j\right)_{j=0}^{\infty}$ olsun. Bu durumda $\alpha_i, \beta_j \in S$ olur. Böylece $F(x) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x^i$, $G(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j$ olmak üzere $0 \neq F(x) = (a_0, a_0, \dots) + (a_1, a_1, \dots)x + \cdots + (a_p, a_p, \dots)x^p$, $0 \neq G(x) = (b_0, b_0, \dots) + (b_1, b_1, \dots)x + \cdots + \left(b_q, b_q, \dots\right)x^q \in S[x]$ olur. $f(x)g(x) = 0$ olduğundan $a_0 b_0 = 0$, $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \dots , a_p b_q = 0$ olur.

Bu durumda $F(x), G(x) \in S[x]\backslash\{0\}$ içinde $F(x)G(x) = 0$ olur. S sağ McCoy olduğundan $F(x)r = 0$ olacak şekilde bir $r = (r_n)_{n=1}^{\infty} \in S/\{0\}$ vardır. $r \neq 0$ olduğundan $r_k \neq 0$ ve $(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i) r_k = 0$ olacak şekilde $k \in \{1,2,\dots\}$ mevcuttur.

$F(x)r = 0$ olduğundan

$\left[(a_0, a_0, \dots) + (a_1, a_1, \dots)x + \cdots + \left(a_p, a_p\ \dots\right)x^p\right](r_1, r_2, \dots, r_k) = 0$

olur. Yani $a_i r_i = 0$ dır. $a_k r_k = 0$ olup böylece $f(x) r_k = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r_k$ var olduğundan R sağ McCoy' dur. Zhao and Liu (2009).

Önerme 3.2.10. Sağ McCoy halkaların sınıfı direkt toplam ve direkt çarpımlar altında kapalıdır.

İspat. Önerme 3.2.8. deki benzer ispat metodu kullanılır. Zhao and Liu (2009).

R halkasının Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ halkasının Armendariz olmasıdır. Fakat R terslenebilir olduğu halde $R[x]$ terslenebilir olmayan halkalar mevcuttur. Şimdi sağ McCoy halkalar için aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 3.2.11. R halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$) R sağ McCoy olsun. $f(T) = f_0 + f_1 T + \cdots + f_n T^n, g(T) = g_0 + g_1 T + \cdots + g_m T^m \in R[x][T]\backslash\{0\}$ olmak üzere $f(T)g(T) = 0$ olsun. $k = max\{\deg(f_i) | f_i \in R[x]\} + 1$ diyelim. Bu durumda $f(x^k)$ polinomunun katsayılar kümesi ile $F\ (T)$ nin katsayılar kümesi eşit olur. $f(T)g(T) = 0$ ve x, R nin elemanları ile yer değiştirdiğinden $f(x^k)g(x^k) = 0$ olur. R sağ McCoy olduğundan $f(x^k)r = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R \subseteq R[x]$ vardır. Böylece $f(T)r = 0$ olur. Yani $R[x]$ sağ McCoy' dur.

$\Leftarrow$)$R[x]$ bir sağ McCoy halka olsun R nin sağ McCoy olduğu gösterilmelidir. $f(y)g(y) = 0$ olacak şekilde $f(y) = \sum_{i=0}^{m} a_i y^i$, $g(y) = \sum_{j=0}^{n} b_j y^j \in R[y]\backslash\{0\}$ alalım. Bu durumda $f(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_m T^m$, $g(T) = b_0 + b_1 T + \cdots + b_n T^m \in$

$R[x][T] \setminus \{0\}$ ve $f(T)g(T) = 0$ olur. $R[x]$ sağ McCoy olduğundan $f(T)r(x) = 0$ olacak şekilde en az bir $0 \neq r(x) \in R[x]$ vardır. Buradan

$$f(T)(r_0 + r_1 x + \cdots + r_k x^k) = 0$$

$$(a_0 + a_1 T + \cdots + a_m T^m) r(x) = 0$$

$$a_0 r(x) + a_1 r(x) T + \cdots + a_m r(x) T^m = 0$$

elde edilir. Böylece her i için $a_i r(x) = 0$ olur. $r(x) \neq 0$ olduğundan her i için $a_i r_j = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a_j \in R$ vardır. Böylece $f(y) r_j = 0$ olur ki, bu da R nin bir sağ McCoy halka olduğunu gösterir. R nin sol McCoy olması için gerek ve yeter koşulun $R[x]$ polinom halkasının sol McCoy olması gerektiğide benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.2.12. R bir sağ McCoy halka ve $\{x_\alpha\}$ R üzerinde birbirleriyle değişmeli bilinmeyenlerin herhangi bir kümesi olsun. Bu durumda $R[\{x_\alpha\}]$ halkasıda sağ McCoy olur.

İspat. $f, g \in R[\{x_\alpha\}][T] \setminus \{0\}$ için $fg = 0$ olsun. $f = f_0 + f_1 T + \cdots + f_m T^m$, $g = g_0 + g_1 T + \cdots + g_n T^n$ ve $f_i, g_j \in R[\{x_\alpha\}]$ olsun. Sonlu $\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}\} \subseteq \{x_\alpha\}$ için $f, g \in R[\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}\}]$ olur. Teorem 3.2.11 den tümevarım yöntemine göre $R[x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}]$ sağ McCoy olur. Yani $fr = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R[x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}]$ vardır. Böylece $R[\{x_\alpha\}]$ sağ McCoy olur. Zhao and Liu (2009).

Teorem 3.2.13. R bir halka ve n bir pozitif tamsayı olsun. (x^n); x^n tarafından üretilen ideal olmak üzere, eğer R sağ McCoy ise bu durumda $R[x]/(x^n)$ sağ McCoy' dur.

İspat. $R[x]/(x^n)$ de $\overline{x} = x + (x^n)$ olsun. Bu durumda $R[x]/(x^n) = R[u] = R + Ru + \cdots + Ru^{n-1}$ yazılabilir. $fg = 0$ olacak şekilde $f, g \in R[y] \setminus \{0\}$ olsun. $f = \sum_{i=0}^{p} f_i y^i$, $g = \sum_{j=0}^{q} g_j y^j$ ve $f_i = \sum_{s=0}^{n-1} a_s^i u^s$, $g_j = \sum_{t=0}^{n-1} b_t^j u^t$ olsun. Bu durumda $f = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i \right) u^s$ ve $g = \sum_{t=0}^{n-1} \left(b_t^j y^j \right) u^t$ olur. $fg = 0$ olduğundan

$$\sum_{s+t=k}\left(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} b_t^j y^j\right) = 0 \quad k = 0,1,\dots,n-1 \qquad (*)_k$$

elde edilir. Eğer $\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i = 0$ olursa, bu durumda $r = u^{n-1}$ alınabilir. Böylece $0 \neq r \in R[u]$ ve $fr = \left(\sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i\right) u^s\right)u^{n-1} = \left(\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i\right)u^{n-1}$ olur. Eğer $\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i \neq 0$ ise, bu durumda $g \neq 0$ olduğu için $\sum_{j=0}^{q} b_l^j y^j \neq 0$ olacak şekilde bir $l \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ mevcuttur. $l_0 = \left\{l \middle| \sum_{j=0}^{q} b_l^j y^j \neq 0\right\}$ olsun. $(*)_{l_0}$ dan

$$0 = \sum_{s+t=l_0}\left(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} b_t^j y_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} b_{l_0}^j y_j\right)$$

olur. R sağ McCoy olduğundan $\left(\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i\right)c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ mevcuttur. $r = cu^{n-1}$ alırsak $0 \neq r \in R[u]$ olur ve

$$fr = \left(\sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{p} a_s^i y^i\right)u^s\right)cu^{n-1} = \left(\sum_{i=0}^{p} a_0^i y^i\right)cu^{n-1} = 0$$

olur. Böylece $R[u]$ sağ McCoy olur. Zhao and Liu (2009).

F bir cisim ve $R = F\{x, y\}$, F üzerinde iki bilinmeyenli bir serbest cebir olsun. Bu durumda x ve y için $y^{-1}x = ab^{-1}$ $(xy^{-1} = b^{-1}a)$ olacak şekilde $a, b \in R$ mevcut değildir. Bu yüzden R tamlık bölgesi klasik sağ(sol) kesir halkasına sahip olamaz. Böylece aşağıda ifade edilen teoremdeki hipotezler gereklidir.

Teorem 3.2.14. R bir sağ Ore halka ve Q, R halkasının klasik sağ kesir halkası olsun. R halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul Q halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$) R sağ McCoy halka olsun. $F(x)G(x) = 0$ olacak şekilde $F(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$, $G(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j \in Q[x] \setminus \{0\}$ olsun. Her i, j için $a_i, b_j \in R$ ve $u, v \in R$ regüler elemanları için $\alpha_i = a_i u^{-1}$ ve $\beta_i = b_j v^{-1}$ alabiliriz. $u^{-1}b_j = c_j w^{-1}$ olacak şekilde her

j için $c_j \in R$ ve $u, v \in R$ regüler elemanları mevcuttur. $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ alalım. Bu durumda $f(x), g(x) \in R[x] \setminus \{0\}$ olup,

$$0 = F(x)G(x) = \sum_{i+j=k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j} \alpha_i \beta_j \right) x^k = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \left(u^{-1} b_j\right) v^{-1} \right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i c_j w^{-1} v^{-1} \right) x^k = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i+j=k} a_i c_j \right) x^k w^{-1} v^{-1} = f(x) g(x) (vw)^{-1}$$

elde edilir. Böylece $R[x]$ içinde $f(x)g(x) = 0$ olur. R sağ McCoy olduğundan $f(x)r = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ vardır. $u^{-1}r' = rt^{-1}$ ve $r \neq 0$ olduğu için $r' \neq 0$ olacak şekilde $r' \in R$ ve regüler $t \in R$ mevcuttur. Böylece

$$F(x)r' = \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i \right) r' = \sum_{i=0}^{m} a_i u^{-1} r' x^i = \sum_{i=0}^{m} a_i r t^{-1} x^i = f(x) r t^{-1} = 0$$

olur. Bu da Q halkasının sağ McCoy olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$) Q sağ McCoy ve $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda Q sağ McCoy olduğundan $f(x) r u^{-1} = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r u^{-1} \in Q$ mevcuttur. Böylece $0 \neq r \in R$ için $f(x) r = 0$ olur. Yani R sağ McCoy halkadır. Zhao and Liu (2009).

Teorem 3.2.15. $Q(R)$ klasik kesir halkası ile birlikte R sağ ve sol Ore halka olsun. Bu durumda R halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul $Q(R)$ halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$)R bir sağ McCoy halka olsun. $u, v \in R$ regüler elemanları ve $a_i, b_j \in R$ olmak üzere $\alpha_i = a_i u^{-1}, \beta_j = b_j v^{-1}$ ve $F(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i, G(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j \in Q(R)[x] \setminus \{0\}$ için $F(x)G(x) = 0$ olsun. Her i ve j için $a_i u^{-1} = u'^{-1} a_i'$ ve $b_j v^{-1} = v'^{-1} b_j'$ olacak şekilde regüler $u', v' \in R$ ve $a_i', b_j' \in R$ mevcuttur.

$0 = F(x)G(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i u^{-1} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j v^{-1} x^j\right) =$
$(\sum_{i=0}^{m} u'^{-1} a_i' x^i)(\sum_{j=0}^{n} v'^{-1} b_j' x^j) = (u'^{-1} \sum_{i=0}^{m} a_i' x^i)(v'^{-1} \sum_{j=0}^{n} b_j' x^j)$

olur. Dahası her bir i için $a_i' v'^{-1} = v''^{-1} a_i''$ olacak şekilde regüler $v'' \in R$, $a_i'' \in R$ mevcuttur.

$$0 = F(x)G(x) = u'^{-1} v''^{-1} (\sum_{i=0}^{m} a_i'' x^i)(\sum_{j=0}^{n} b_j'' x^j) = (v'' u')^{-1} (\sum_{i=0}^{m} a_i'' x^i)(\sum_{j=0}^{n} b_j' x^j)$$

olur. Bu durumda $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i'' x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ için $f(x)g(x) = 0$ olur. R sağ McCoy olduğu için $f(x)c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ mevcuttur.
Böylece $0 = u'^{-1} v''^{-1} f(x) c = u'^{-1} (\sum_{i=0}^{m} a_i' x^i)(v'^{-1} c) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^{-1} x^i \left(v'^{-1} c\right) = F(x)(v'^{-1} c)$ ve $0 \neq v^{-1} c \in Q(R)$ olur. Yani $Q(R)$ sağ McCoy olur.

$\Leftarrow$) $Q(R)$ halkası sağ McCoy halka olsun. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x] \setminus \{0\}$ olsun. $Q(R)$ sağ McCoy halka olduğu için $f(x)(cu^{-1}) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq cu^{-1} \in Q(R)$ mevcuttur. Böylece $0 \neq c \in R$ için $f(x)c = 0$ olur. Yani R sağ McCoy olur. Zhao and Liu (2009).

Önerme 3.2.16. Δ, central regüler elemanlardan oluşan R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda R halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul $\Delta^{-1} R$ halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. Teorem 3.2.15 teki ispata benzer şekilde yapılabilir. Zhao and Liu (2009)

Sonuç 3.2.17. $R[x]$ halkasının sağ McCoy olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$ halkasının sağ McCoy olmasıdır.

İspat. Önerme 3.2.16 da $\Delta = \{1, x, x^2, \dots\}$ alınırsa, bu durumda Δ, $R[x]$ in çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve $R[x; x^{-1}] = \Delta^{-1} R[x]$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. Zhao and Liu (2009)

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MCCOY HALKALAR

Bu bölümde, bir halkanın Armendariz'lik özelliğinin skew polinomlar halkasına genelleştirilmesi göz önüne alınarak; McCoy halkaların bir genelleştirmesi olan $\sigma -$ skew McCoy halkalar tanımlanacak, bu yeni halka sınıfının bazı karakterizasyonları ve bu halka sınıflarının diğer halka sınıfları ile özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalarla olan ilişkileri çalışılacaktır. Çalışmamız boyunca R birimli bir halkayı ve aksi belirtilmedikçe σ da R halkasının sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizmasını gösterecektir. Bu bölüm için temel referansımız Başer vd. (2009) olacaktır. Bu bölümde vereceğimiz tüm sonuçlar, ispatlar ve örnekler adı geçen çalışmada mevcuttur.

Tanım 4.1. σ, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ olduğunda $p(x)c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ varsa, bu durumda R halkası σ ya göre $skew\, McCoy$ halka, olarak adlandırılır.(Kısaca $\sigma - skew\ McCoy$ halka)

Açık olarak; id_R, R nin birim endomorfizmi olmak üzere R nin $id_R - skew\ McCoy$ olması için gerek ve yeter koşul R nin McCoy olmasıdır.

Önerme 4.2. σ, bir R halkasının bir endomorfizması olsun. Bu durumda;

(1) Eğer R halkası $\sigma -$ skew Armendariz ise, bu durumda R halkası $\sigma -$ skew McCoy'dur.

(2) R ile S iki halka ve $\alpha: R \to S$ bir halka izomorfizması olsun. Bu durumda R halkasının $\sigma -$ skew McCoy olması için gerek ve yeter koşul S halkasının $\alpha\sigma\alpha^{-1} -$ skew McCoy olmasıdır.

İspat. (1) $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ polinomları için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda R halkası $\sigma -$ skew Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i\sigma^i(b_j) = 0$ olur. $q(x) \neq 0$ olduğundan her $0 \leq i \leq m$ için $a_i\sigma^i(b_{j_0}) = 0$ olacak şekilde en az bir $0 \neq b_{j_0}$ mevcuttur. Böylece $p(x)b_{j_0} = 0$ olup R bir $\sigma -$ skew McCoy halka olur.

(2) R ile S iki halka ve $\alpha: R \to S$ bir halka izomorfizması olmak üzere $a \in R$ için $a' = \alpha(a)$ olsun. $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\sigma] \setminus \{0\} \Leftrightarrow p'(x) = \sum_{i=0}^{m} a'_i x^i$, $q'(x) = \sum_{j=0}^{n} b'_j x^j \in S[x;\alpha\sigma\alpha^{-1}] \setminus \{0\}$ $R[x;\sigma]$ içinde $p(x)q(x) = 0 \Leftrightarrow$ Her $0 \leq k \leq m+n$ için $\sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(b_j) = 0 \Leftrightarrow$ Her $0 \leq k \leq m+n$ için $\sum_{i+j=k} \alpha\left(a_i \sigma^i(b_j)\right) = 0 \Leftrightarrow$ Her $0 \leq k \leq m+n$ için $\sum_{i+j=k} \alpha(a_i)(\alpha\sigma\alpha^{-1})^i \alpha(b_j) = 0$

(Herhangi bir t pozitif tamsayı için $(\alpha\sigma\alpha^{-1})^t = \alpha\sigma^t\alpha^{-1}$ dir.)

$\Leftrightarrow$ Her $0 \leq k \leq m+n$ için $\sum_{i+j=k} a'_i (\alpha\sigma\alpha^{-1})^i (b'_j) = 0 \Leftrightarrow 0 = p'(x)q'(x) \in S[x;\alpha\sigma\alpha^{-1}] \setminus \{0\}$ olur. Benzer şekilde bir $0 \neq c \in R$ için $p(x)c = 0$ $\Leftrightarrow$ Her i için $\alpha(a_i)(\alpha\sigma\sigma^{-1})^i \alpha(c) = 0 \Leftrightarrow 0 \neq c' = \alpha(c)$ olacak şekilde her i için $a'_i(\alpha\sigma\alpha^{-1})^i(c') = 0 \Leftrightarrow 0 \neq c' \in S$ için $p'(x)c' = 0$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. Başer vd. (2009).

Sonuç 4.3.

(1) Bir σ endomorfizmi ile birlikte her tamlık bölgesi bir $\sigma -$ skew McCoy halkadır.

(2) Her Armendariz halka bir McCoy halkadır.

Aşağıdaki örnekten görmekteyiz ki σ otomorfizm olmak üzere $\sigma -$ skew McCoy olmadığı halde McCoy olan halkalar vardır.

Örnek 4.4. $\mathbb{Z}_2$ kalan sınıfların halkası olsun. $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ve $\sigma: R \to R$ $\sigma\left((a,b)\right) = (b,a)$ olarak tanımlansın. Bu durumda σ, R halkasının bir otomorfizmidir. R değişmeli olduğundan R McCoy halkadır. Ancak $p(x) = (1,0) + (1,0)x$ ve $q(x) = (0,1) + (1,0)x \in R[x;\sigma]$ için $p(x)q(x) = 0$ olur. Fakat $0 \neq c \in R$ için $p(x)c \neq 0$ olur. Böylece R $\sigma -$ skew McCoy halka değildir.

Teorem 4.5. Bir R halkasının bir endomorfizması σ olsun. Eğer $R[x;\sigma]$ halkası sağ McCoy ise, bu durumda R halkası $\sigma -$ skew McCoy'dur.

İspat. $R[x;\sigma]$ halkası sağ McCoy olsun. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f(y) = a_0 + (a_1x)y + \cdots + (a_mx^m)y^m, g(y) = b_0 + (b_1x)y + \cdots + (b_nx^n)y^n \in (R[x;\sigma])[y] \setminus \{0\}$ olur. Bu durumda kolayca görülebilir ki $f(y)g(y) = 0$ olur. $R[x;\sigma]$ halkası sağ McCoy olduğundan $f(y)c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k \in R[x;\sigma]$ mevcuttur. $f(y)c = 0$ olduğundan $a_ix^ic = 0$ olur. Böylece her c_t için $a_i\sigma^i(c_t) = 0$ olur. $c \neq 0$ olduğundan bir $0 \neq c_{t_0}$ mevcuttur ve $a_i\sigma^i(c_{t_0}) = 0$ olur. Böylece $p(x)c_{t_0} = 0$ olur. Sonuç olarak $R,\ \sigma -$ skew McCoy'dur. Başer vd. (2009).

Sonuç 4.6. Bir R halkasının bir endomorfizması σ olsun. Eğer $R[x;\sigma]$ terslenebilir ise, bu durumda $R;\ \sigma -$ skew McCoy' dur.

İspat. $R[x;\sigma]$ terslenebilir olsun. Bu durumda $R[x;\sigma]$ McCoy olur. Yukarıdaki teoremden $R;\ \sigma -$ skew McCoy' dur. Başer vd. (2009).

Aşağıdaki örnekten; $\sigma -$ Armendariz olmayan fakat σ otomorfizması ile birlikte değişmeli ve $\sigma -$ terslenebilir halkaların mevcut olduğunu görüyoruz. Ancak bu R halkası $\sigma -$ skew McCoy'dur.

Örnek 4.7. $\mathbb{Z}_4$ kalan sınıflarun halkası ve $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_4\right\}$ olsun. $\sigma: R \to R$ endomorfizması ve $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda σ, R nin bir otomorfizmasıdır. Ayrıca R değişmeli ve $\sigma -$ terslenebilirdir. Fakat $\sigma -$ skew Armendariz değildir. Gerçekten;

$p(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \in R[x;\sigma]$ için $(p(x))^2 = 0$ fakat $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sigma\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ olur.

Terslenebilir bir R halkası için; R nin sol $\sigma -$ terslenebilir olması için gerek ve yeter koşulun R nin sağ $\sigma -$ terslenebilir olması gerektiğini biliyoruz.

Lemma 4.8. Bir R halkasının bir endomorfizması σ olsun. Bu durumda;

(1) R terslenebilir ve sağ $\sigma -$ terslenebilir halka olsun. Eğer σ bir monomorfizma ve $m \geq 0$ ise, bu durumda $a, b, c \in R$ için $a\sigma^m(bc) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $ca\sigma^m(b) = 0$ olmasıdır.

(2) R bir yarı değişmeli halka ve $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x; \sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda her $0 \leq i \leq m$ için $a_i \sigma^i(b_0^{i+1}) = 0$ (Yani her $h \geq i + 1$ için $a_i \sigma^i(b_0^h) = 0$) olur.

İspat. (1) σ, terslenebilir ve sağ $\sigma -$terslenebilir R halkasının bir endomorfizması olsun. Eğer $m = 0$ ise, bu durumda, R terslenebilir olduğundan $abc = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $cab = 0$ olmasıdır. $m \geq 1$ olsun. m üzerine tümevarım uygulanarak her bir $k < m$ için $a\sigma^k(bc) = 0 \Leftrightarrow ca\sigma^k(b) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, tümevarım hipotezinden $a\sigma^{k+1}(bc) = 0 \Leftrightarrow a\sigma^k(\sigma(b)\sigma(c)) = 0 \Leftrightarrow \sigma(c)a\sigma^{k+1}(b) = 0$ olur. Böylece, kabulümüzden $a\sigma^{k+1}(b)\sigma(c) = 0 \Leftrightarrow ca\sigma^{k+1}(b) = 0$ olur. Yani $a\sigma^{k+1}(bc) = 0 \Leftrightarrow ca\sigma^{k+1}(b) = 0$ olur.

(2) $p(x)q(x) = 0$ olmasından

$$\sum_{j=0}^{i} a_j \sigma^j(b_{i-j}) = 0 \quad 0 \leq i \leq m \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir. $i = 0$ olduğunda (4.1) dan $a_0 b_0 = 0$ olur. Tümevarım uygulayarak $j < k$ için $a_j \sigma^j(b_0^{j+1}) = 0$ olduğunu kabul edelim. R yarı değişmeli olduğu için $a_j \sigma^j(b_0^{j+1}) = 0 \Rightarrow a_j \sigma^j(b_0)\sigma^j(b_0^{j+1}) = 0 \Rightarrow a_j \sigma^j(b_{k-j})\sigma^j(b_0^k) = 0$ olur. Böylece $j < k$ için $a_j \sigma^j(b_0^k) = 0$ olur. (4.1) sağdan $\sigma^j(b_0^k)$ ile çarpıldığında $i = k$ olmak üzere

$$0 = \sum_{j=0}^{i} a_j \sigma^j(b_{i-j})\sigma^k(b_0^k) = a_k \sigma^k(b_0^{k+1})$$

elde edilir. R yarı değişmeli olduğundan ikinci durum açıktır. Başer vd. (2009).

Sağ McCoy olduğu halde yarı değişmeli olan halkalar vardır. Bir $f(x)$ polinomunun derecesi $\deg(f(x))$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.9. R terslenebilir bir halka, σ; R nin bir monomorfizması ve R sağ $\sigma-$ terslenebilir olsun. Bu durumda

(1) R; $\sigma-$ skew McCoy'dur.

(2) $p(x),\ q(x) \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ ise, bu durumda $cq(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ mevcuttur.

İspat. R terslenebilir bir halka, σ; R nin bir monomorfizması ve R sağ $\sigma-$ terslenebilir olsun. Bu durumda $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. $a_0, b_0, a_m, b_n \in R \setminus \{0\}$ oldukları kabul edebiliriz.

(1) Tüm negatif olmayan s_i tamsayıları ve t_i pozitif tamsayıları için

$$ab = 0 \Leftrightarrow \sigma^{s_1}(a^{t_1})\sigma^{s_2}(b^{t_2}) = 0 \Leftrightarrow \sigma^{s_3}(b^{t_3})\sigma^{t_4}(b^{t_4}) = 0 \qquad (4.2)$$

olduğunu iddia ediyoruz. R terslenebilir ve $\sigma-$ terslenebilir olduğundan $ab = 0$ olması $a\sigma(b) = 0$ ve $b\sigma(a) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $a\sigma(b) = 0$ ve $b\sigma(a) = 0$ olması sırayla $\sigma(b)\sigma(a) = 0$ ve $\sigma(a)\sigma(b) = 0$ eşitliklerini verir. Böylece negatif olmayan tüm s_i tamsayıları için $\sigma^{s_1}(a)\sigma^{s_2}(b) = 0$ ve $\sigma^{s_3}(b)\sigma^{s_4}(a) = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan yarı değişmelidir ve böylece tüm t_i pozitif tamsayıları için $\sigma^{s_1}(a^{t_1})\sigma^{s_2}(b^{t_2}) = 0$ ve $\sigma^{s_3}(b^{t_3})\sigma^{s_4}(b^{t_4}) = 0$ olur. σ nın birebirliğinden bu ifadelerin tersleride elde edilir. Eğer $q(x) = b_0$ ise, bu durumda R; $\sigma-$ skew McCoy olur. Böylece $\deg\big(g(x)\big) \geq 1$ olduğu kabul edebiliriz. $q(x)$ in derecesi üzerine tümevarım uygulayalım. Her i için $a_i q(x) = 0$ olsun. Bu durumda $a_i b_j = 0$ olur. (4.1) eşitliğinden her j için $p(x)b_j = 0$ olur. Böylece $q(x) \neq 0$ olduğundan en az bir $b_j \neq 0$ olur. Yani bir $0 \neq b_j \in R$ mevcuttur. Şimdi en az bir i için $a_i q(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $a_{i_s} q(x) \neq 0$ eşitliğini sağlayan en büyük tamsayı i_0 olarak alınırsa (4.1) eşitliğinden $a_{i_0} b_j = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $b_j \sigma^j\big(a_{i_0}\big) = 0$ olmasını gerektirdiğinden $q(x)a_{i_0} \neq 0$ olur. (4.1) den $p(x)\big(q(x)a_{i_0}\big) = 0$ olur. $t = i_0 + 1, \dots, m$ için $(a_t x^t)q(x) = 0$ olduğu için $p(x)\big(q(x)a_{i_0}\big) = 0$ ifadesinden $p(x)c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ vardır. Böylece R; $\sigma-$ skew McCoy olur.

(2) $p(x) \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ olsun. $p(x)$ in katsayıları tarafından üretilen sol ideal C_p olsun. $n = 0$ olduğunda $a_0 \neq 0$ için $a_0 q(x) = a_0 b_0 = 0$ olur. Şimdi $n \geq 1$ olsun. $q(x)$ in derecesi üzerine tümevarım uygulayarak $s < n$ için $h(x), k(x) \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $h(x)k(x) = 0$ ve $\deg(k(x)) = s$ ise $ck(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in C_h \setminus \{0\}$ vardır. Lemma 4.1.8 (2) yardımıyla

$$p(x)b_0^{l+1} = \sum_{i=0}^{m} a_i \sigma^i\left(b_0^{l+1}\right)x^i = 0 \neq \sum_{i=0}^{m} a_i \sigma^i\left(b_0^{l}\right)x^i = p(x)b_0^{l}$$

olacak şekilde bir $l \geq 0$ vardır. Şimdi Lemma 4.1.8 den $a_i\sigma^i\left(b_0^{l+1}\right) = 0$ olması her $0 \leq i \leq m$ için $b_0^l a_i \sigma^i(b_0) = 0$ olduğunu gösterir ve $0 \leq i_0 \leq m$ için $a_{i_0}\sigma^{i_0}\left(b_0^l\right) \neq 0$ olmasıda $b_0^l a_{i_0} \neq 0$ olduğunu gösterir. Böylece $b_0^l p(x) \neq 0$ ve $b_0^l p(x) b_0 = 0$ olur. Bu durumda $h(x) = b_0^l p(x)$ olmak üzere $h(x)b_0 = 0$ olur. Şimdi $k(x) = \frac{q(x)-b_0}{x}$ olsun. $p(x)q(x) = 0$ olduğundan $h(x) \neq 0,\ k(x) \neq 0$ için $h(x)k(x) = 0$ elde edilir. Şimdi $k(x)$ in derecesi n den küçük olduğundan ve tümevarım hipotezinden dolayı $ck(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in C_h \setminus \{0\}$ vardır. Böylece $h(x)b_0 = 0$ olmasından Lemma 4.1.8 den $C_h b_0 = 0$ elde edilir. Yani $cb_0 = 0$ olup $cq(x) = 0$ olur. Ancak $C_h \subseteq C_p$ olduğundan $cq(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in C_p$ vardır. Başer vd. (2009).

Sonuç 4.10.

(1) Eğer R halkası terslenebilir ise, bu durumda R halkası bir McCoy halkadır.

(2) σ monomorfizması ile birlikte değişmeli $\sigma-$terslenebilir halkalar $\sigma-$skew McCoy'dur.

(3) σ monomorfizması ile birlikte inmiş $\sigma-$terslenebilir halkalar $\sigma-$skew McCoy'dur.

Örnek 4.11. $\mathbb{Z}_3$ kalan sınıfların halkası olsun. $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki $R = Mat_2(\mathbb{Z}_3)$ matris halkasını ve $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $p(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \in R[x;\sigma]$ için $p(x)q(x) = 0$ olur. Fakat her $0 \neq c \in R$ için $p(x)c \neq 0$ olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten;

$p(x)c = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x\right] c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Yani R; $\sigma -$ skew McCoy değildir. Üstelik $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki 2×2 tipindeki üst üçgensel matris halkası $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}_3\right\}$ $\sigma -$ skew McCoy değildir.

Örnek 4.12. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. $R = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} | a - b \equiv c \equiv 0 (mod 2)\ a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ halkasını ve $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizmayı göz önüne alalım. Bu durumda R abelyan ve $P(R) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | c \equiv 0 (mod 2)\right\}$ olmak üzere $\sigma(P(R)) = P(R)$ yarı asaldır. Üstelik $P(R)$; $\sigma -$ skew Armendariz ve ${}^{R}/_{P(R)}$; $\bar{\sigma} -$ skew Armendariz'dir. Böylece $P(R)$; $\sigma -$ skew McCoy ve ${}^{R}/_{P(R)}$ Önerme 4.1.2 (1) den $\bar{\sigma} -$ skew McCoy'dur. Ancak R, $\sigma -$ skew McCoy değildir. Gerçekten $p(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in R[x;\sigma]$ için $p(x)q(x) = 0$ fakat $p(x)c = 0$ olduğunda $c = 0$ olur.

$n \geq 2$ ve R halkası için

$$S_n(R) = \left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R\right\}$$

olsun. Bu durumda R nin herhangi bir σ endomorfizması $\bar{\sigma}\left((a_{ij})\right) = \left(\sigma(a_{ij})\right)$ şeklinde $S_n(R)$ nin $\bar{\sigma}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Teorem 4.13. Bir R halkasının bir endomorfizması σ olsun. Bu durumda R halkasının $\sigma-$ skew McCoy olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n \geq 2$ için $S_n(R)$ halkasının $\bar{\sigma}-$ skew McCoy olmasıdır.

İspat. Diğer durumlarda aynı şekilde ispatlanabileceği için $n = 2$ için ispat yapmak yeterlidir. R halkası $\sigma-$ skew McCoy olsun. $S_n(R)[x;\sigma] \cong S_n(R[x;\sigma])$ olduğunu hatırlatalım.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ 0 & a_{11}^{(i)} \end{pmatrix} x^i = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{11} \end{pmatrix} \in S_2(R)[x;\bar{\sigma}] \setminus \{0\}$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} \\ 0 & b_{11}^{(j)} \end{pmatrix} x^j = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{11} \end{pmatrix} \in S_2(R)[x;\bar{\sigma}] \setminus \{0\}$$

için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$p(x)q(x) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12} + p_{12}q_{11} \\ 0 & p_{11}q_{11} \end{pmatrix} = O$$

olur. Buradan $R[x;\sigma]$ içinde $p_{11}q_{11} = 0$ ve $p_{11}q_{12} + p_{12}q_{11} = 0$ elde edilir. Eğer $p_{11} \neq 0$ ise, bu durumda $p_{11}q = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq q \in \{q_{11}, q_{12}\}$ vardır. R halkası $\sigma-$ skew McCoy olduğundan $p_{11}c = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ mevcuttur. Böylece $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ olur. Eğer $p_{11} = 0$ ise, bu durumda herhangi bir $0 \neq c \in R$ için $\begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ olur. Sonuç olarak $S_2(R)$ halkası, $\sigma-$ skew McCoy halkadır.

Tersine $S_2(R)$ halkası $\sigma-$ skew McCoy halka olsun. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x)q(x) & 0 \\ 0 & p(x)q(x) \end{pmatrix} = O$$

olur. Böylece $S_2(R)$ bir $\bar{\sigma}-$ skew McCoy halka olduğundan $\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = O$ olacak şekilde bir $O \neq \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in S_2(R)$ mevcuttur. Bu durumda $a \neq 0$ ise $p(x)a =$

0 veya $b \neq 0$ ise $p(x)b = 0$ olur. Sonuç olarak R bir $\sigma -$ skew McCoy halka olur. Başer vd. (2009) .

Sonuç 4.14. Bir R halkasının McCoy olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n \geq 2$ için $S_n(R)$ halkasının McCoy olmasıdır.

İspat. Teorem 4.1.13 te $\sigma = id_R$ alınarsa ispat açıktır. Başer vd. (2009).

Aşağıdaki örnek $\sigma -$ skew McCoy halkaların $\sigma -$ skew Armendariz olmak zorunda olmadığını gösterir. Yani Önerme 4.1.2 (1) in tersi doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 4.15. Değişmeli olupta Armendariz olmayan bir R halkası mevcuttur. Böylece $R,\ id_R -$ skew Armendariz değildir. Fakat $id_R -$ skew McCoy halkadır. Üstelik σ rigid endomorfizması ile birlikte bir R halkası için

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R \right\}$$

halkası $\bar{\sigma} -$ skew Armendariz değildir. Fakat S_4 halkası skew McCoy' dur.

$n \geq 2$ olmak üzere bir R halkası için

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \ldots, a_n \in R \right\}$$

olsun. Teorem 4.13 teki benzer ispat metodu kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.16. Bir R halkasının bir endomorfizması σ olsun. Bu durumda R halkasının $\sigma -$ skew McCoy olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n \geq 2$ için $V_n(R)$ halkasının $\bar{\sigma} -$ skew McCoy olmasıdır.

x^n tarafından üretilen $R[x]$ in ideali (x^n) olmak üzere $V_n(R) \cong {R[x]}/{(x^n)}$ dir. Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 4.17. $n \geq 2$ ve bir R halkasının bir endomorfizması σ olsun. Bu durumda R halkasının $\sigma -$ skew McCoy olması için gerek ve yeter koşul ${R[x]}/{(x^n)}$ bölüm halkasının $\bar{\sigma} -$ skew McCoy olmasıdır.

Sonuç 4.18. Bir R halkasının McCoy olması için gerek ve yeter koşul ${R[x]}/{(x^n)}$ bölüm halkasının McCoy olmasıdır.

Bir R halkasının bir endomorfizması σ olmak üzere $\bar{\sigma}: R[x] \rightarrow R[x]$, $\bar{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i) x^i$ şeklinde tanımlanan dönüşümde $R[x]$ polinomlar halkasında bir endomorfizmdir. Bu dönüşüm σ ya genişleyebilir.

Teorem 4.19. Bir R halkasının bir endomorfizması σ ve bir t pozitif tamsayısı için $\sigma^t = id_R$ olsun. Bu durumda R halkasının $\sigma -$ skew McCoy olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ halkasının $\bar{\sigma} -$ skew McCoy olmasıdır.

İspat. R halkası $\sigma -$ skew McCoy olsun.

$$p(y) = f_0(x) + \cdots + f_m(x) y^m \in (R[x])[y; \bar{\sigma}] \setminus \{0\}$$

$$q(y) = g_0(x) + \cdots + g_n(x) y^n \in (R[x])[y; \bar{\sigma}] \setminus \{0\}$$

için $p(y)q(y) = 0$ olsun. $a_{i_0}, \ldots, a_{w_i}, b_{j_0}, \ldots, b_{v_j} \in R$ olmak üzere $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $f_i(x) = a_{i_0} + \cdots + a_{w_i} x^{w_i}$, $g_j(x) = b_{j_0} + \cdots + b_{v_j} x^{v_j}$ olsun. k pozitif bir tamsayısı $k = \sum_{i=0}^{m} \deg(f_i) + \sum_{j=0}^{n} \deg(g_j)$ şeklinde tanımlansın.

$$P = f_0(x^t) + f_1(x^t) x^{tk+1} + \cdots + f_m(x^t) x^{(tk+1)m} \in R[x; \sigma] \setminus \{0\}$$

$$Q = g_0(x^t) + g_1(x^t)x^{tk+1} + \cdots + g_n(x^t)x^{(tk+1)n} \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$$

olsun. Bu durumda $p(y) \neq 0$ ve $q(y) \neq 0$ olduğundan $P \neq 0$ ve $Q \neq 0$ olur. f_i nin katsayılarının kümesi P nin katsayılarının kümesine eşit olduğundan ve hipotezden $\sigma^t = id_R$ olmasından x^t, $R[x;\sigma]$ içindeki R nin tüm elemanları ile yer değiştirebileceği için $p(y)q(y) = 0$ olur. Buradan $R[x;\sigma]$ içinde $PQ = 0$ olur. Kabulden R $\sigma -$ skew McCoy olduğundan $Pc = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c \in R$ mevcuttur. Böylece $i = 0,1,\dots,m$ ve $s = 0,1,\dots,w_i$ için $R[x;\sigma]$ içinde $f_i(x^i)\sigma^i(c) = 0$ ve $a_{i_s}\sigma^i(c) = 0$ olur. Yani $0 \neq c \in (R[x])[y;\bar{\sigma}]$ için $p(y)c = 0$ olur. Böylece $R[x]$ halkası $\bar{\sigma} -$ skew McCoy olur.

Tersine $R[x]$ halkası $\bar{\sigma} -$ skew McCoy olsun. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x;\sigma] \setminus \{0\}$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Şimdi $f(y) = a_0 + a_1y + \cdots + a_my^m$, $g(y) = b_0 + b_1y + \cdots + b_ny \in (R[x])[y;\bar{\sigma}] \setminus \{0\}$ olsun. Böylece $p(x) \neq 0$ ve $q(x) \neq 0$ olduğundan $f(y) \neq 0$ ve $g(y) \neq 0$ olur. Dahası R üzerinde $\sigma = \bar{\sigma}$ ve $p(x)q(x) = 0$ olduğu için $f(y)g(y) = 0$ olur. Böylece $R[x]$ halkası $\bar{\sigma} -$ skew McCoy olduğundan $f(y)c(x) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k \in R[x]$ vardır. Yani en az bir $c_i \neq 0$ dır. Böylece $0 \leq i \leq m$ için $a_i\bar{\sigma}^i(c(x)) = 0$ olur. Buradan $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq l \leq k$ için $a_i\sigma^i(c_l) = 0$ olur. $c(x) \neq 0$ olduğu için bir $0 \neq c_t$ mevcuttur. Yani $a_i\bar{\sigma}^i(c_t) = 0$ olur. $p(x)c_t = (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)c_t = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c_t \in R$ mevcut olduğu için R $\sigma -$ skew McCoy halkadır. Başer vd. (2009).

KAYNAKLAR

Anderson, D.D. and Camillo, V. (1998). Armendariz rings and Gaussian rings, Comm. *Algebra*, **26:** 2265-2272.

Başer, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K. (2009). On extended reversible rings. *Algebra Colloq*., **16** (1)**:** 37-48.

Başer, M., Kwak, T.K. and Lee, Y. (2009). The McCoy Condition on Skew Polynomial Rings, Comm. *Algebra,* **37:** 4026-4037.

Cohn, P.M. (1999). Reversible rings, Bull. *Londan Math. Soc*., **31:** 641-648.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p.-rings. *J. Pure and Appl. Algebra.* **151** (3)**:** 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2003). On skew Armendariz rings. *Comm. Algebra*, **31**(1)**:** 103-122.

Hong, C.Y., Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. (2006). Extensions of generalized Armendariz rings *Algebra Colloq.*, **13**(2)**:** 253-266.

Huh, C., Lee, Y. and Smottunowicz, A. (2000). Armendariz rings and semicommutative rings, *Comm. Algebra,* **30:** 751-761.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings, *J. Algebra*, **223:** 477- 488.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2003). Extensions of reversible rings, *J. Pure Appl. Algebra,* **185:** 207-223.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloq.*, **3**(4)**:** 289-300.

Lee, T.K. and Zhou, Y.Q. (2004). Armendariz and reduced rings. *Comm. Algebra*, **32**(6): 2287-2299.

Lei, Z., Chen, J. and Ying, Z. (2007). A question on McCoy rings. Bull. *Austral. Math. Soc.,***76:** 137-141.

McCoy, N.H. (1942). Remarks on divisiors of zero, *Amer. Math. Monthly,* **49:** 286-295.

Nielsen, P.P. (2006). Semicommutativity and the McCoy condition, *J. Algebra*, **298:** 134-241.

Rege, M.B. and Chhawchharia, S. (1997). Armendariz rings, *Proc. Japan Acad.*, (Ser. A Math. Sci.) **73:** 14-17.

Robson, J.C. and McConnell, J.C. (1987). Noncommutative Noetherian Rings, John Wiley and Sons, Ltd., *Chichester*.

Tuganbaev, A.A. (2002). Rings Close to Regular, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht- Boston-London.

Weiner, L. (1952). Concerning a theorem of McCoy, *Amer. Math Monthly*, **59** (5)**:** 336-337.

Zhao, R. and Zhongkui, L. (2009). Extensions of McCoy Rings, *Algebra Colloquium*, **16:** 3 495-502.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Nurten KILIÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar 27/06/1990
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0555 608 11 77/ nrtn090@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi 2008
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü 2012

Çalıştığı Kurum ve Yıl	: Sınav Dergisi Dershaneleri 2010-2011