KATI BENZERİ İDEALLER VE HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nigar ÖZSOY

DANIŞMAN

Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2016

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KATI BENZERİ İDEALLER VE HALKALAR

Nigar ÖZSOY

DANIŞMAN
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Nigar ÖZSOY tarafından hazırlanan "Katı Benzeri İdealler Ve Halkalar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 14/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MatematikAnabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Başkan : Doç. Dr. Enver Önder USLU
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Muhittin BAŞER
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
..................sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

14/06/2016

Nigar ÖZSOY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KATI BENZERİ İDEALLER VE HALKALAR

Nigar ÖZSOY

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, katı benzeri idealler ve halkalar karakterize edilmiş ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, katı benzeri halkaların genişlemeleri ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise katı benzeri halkaların bazı uygulamaları verilmiştir.

2016, iv + 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matris Halkası, Polinom Halkası, σ-Katı Benzeri Halka, σ-Katı Benzeri İdeal, Baer Halka.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON QUASI-RIGID IDEALS AND RINGS

Nigar ÖZSOY

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

This theis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, some ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, quasi-rigid ideals and rings are characterized and the basic properties of this ring classes are studied. In the fourth chapter, extensions of quasi σ-rigid rings are studied. In the final chapter, some aplications of quasi σ-rigid rings are given.

2016, iv + 33 pages

Key Words: Matrix Ring, Polynomial Ring, Quasi σ-Rigid Ring, Quasi σ-Rigid İdeal, Baer Ring.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım olan değerli hocam Prof. Dr. Muhittin BAŞER' e teşekkür ederim.

Nigar ÖZSOY

AFYONKARAHİSAR, HAZİRAN 2016

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

R bir halka ve σ da R nin bir endomorfizması olmak üzere, son yıllarda pek çok halka nazariyeci halkaların sınıflandırmasını bu σ endomorfizmasına bağlı olarak yapmıştır. Örneğin Hong vd. (2000) : $a \in R$ için

$$a\sigma \ \ a \ \ = 0 \ \Rightarrow a = 0$$

koşulu sağlanıyorsa bu durumda R halkasını bir σ-katı halka olarak adlandırmışlardır. Diğer taraftan Pearson ve Stephenson bir R halkasının σ-yarıasal olmasını şu şekilde tanımlamışlardır: I bir σ-ideal olsun. A; R nin bir ideali ve σ, R nin bir otomorfizması olmak üzere her $t \geq m$ için $A\sigma^t(A) \subseteq I$ olacak şekilde bir m tamsayısı var olduğunda $A \subseteq I$ oluyor ise, bu durumda R nin I idealine σ-yarıasal ideal demişlerdir. Eğer bir R halkasının sıfır ideali bir σ-yarıasal ideal oluyorsa da, bu durumda R halkasını bir σ-yarıasal halka olarak adlandırmışlardır. Bir σ otomorfizması için; her bir σ-katı ideal bir σ-yarıasal idealdir. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce konu hakkında bazı hatırlatmalar yapalım. Çalışmamız boyunca aksi belirtilmedikçe halkalar birimli olarak ve halkaların endomorfizmaları da otomorfizmalar olarak alınacaktır. Bir R halkası verildiğinde, R üzerindeki polinomlar halkası $R[x]$ ile gösterilecektir. σ bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere bir $\delta: R \to R$ toplamsal dönüşümü, eğer her $a, b \in R$ için $\delta \ \ ab \ \ = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$ oluyorsa bir σ-türev olarak adlandırılır. $R[x]$ polinomlar halkası üzerindeki toplama işlemi bilinen toplama ve çarpma işlemi de; her $r \in R$ için $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$ eşitliği yardımıyla tanımlanarak yeni bir halka elde edilir. Bu halkaya R nin Ore genişlemesi denir ve $R[x; \sigma, \delta]$ ile gösterilir. Eğer $\delta = 0$ alınırsa bu durumda $R[x; \sigma, 0]$ yerine $R[x; \sigma]$ yazılır. Bu halka R üzerinde skew polinomlar halkası olarak adlandırılır. Benzer şekilde $R \ \ \ x; \sigma$ da skew kuvvet serileri halkası olarak adlandırılır. R nin $R[x; \sigma, \delta]$ Ore genişlemesi bir inmiş (yani sıfırdan farklı nilpotent elemana sahip olmayan halka) halka ve σ nın bir monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul R nin σ-katı halka olması ve bunun olması için de gerek ve yeter koşul $R[x; \sigma]$ nın bir inmiş halka olmasıdır [Hong *et al.* 2000, Önerme 5] ve [Hong *et al.* 2003, Önerme 3]. I, R nin bir ideali olmak üzere eğer $\sigma(I) \subseteq I$ oluyor ise bu durumda I ya R nin bir σ-ideali denir. Hong vd. (2005),

$$a\sigma(a) \in I \Rightarrow a \in I$$

oluyorsa bu durumda I idealini σ-katı ideal olarak adlandırmışlardır. Açık olarak R nin bir σ-katı halka olması için gerek ve yeter koşul R nin sıfır idealinin bir σ-katı ideal olmasıdır. I, R nin bir σ-ideali olmak üzere; biz çalışmamızda,

$$a \in R \text{ için } aR\sigma(a) \subseteq I \Rightarrow a \in I$$

koşulunu sağlayan R nin idealleri ile ilgileneceğiz. σ, R nin bir otomorfizması olması durumunda yukarıdaki koşulu sağlayan R nin bir I ideali bir σ-katı benzeri ideal olarak adlandırılacaktır. Diğer taraftan R nin sıfır idealinin bir σ-katı benzeri ideal olması durumunda da R ye bir σ-katı benzeri halka diyeceğiz.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde σ-katı benzeri ideallerin yapısını inceleyeceğiz. Dördüncü bölümde ise σ-katı benzeri halkaların bazı genişlemelerini çalışacağız. σ-katı benzerlik kavramının bir R halkasının hangi genişlemelerine taşınıp taşınamayacağını araştıracağız. Son bölümde ise σ-katı benzeri halkaların Baerlik, quasi-Baerlik, p.q.-Baerlik ve p.p. özelliğinin hangi türden polinom halkalarına taşınıp taşınamayacağını inceleyeceğiz.

Çalışmamız için temel referansımız, Hong vd. (2010) “On quasi-rigid ideals and rings” olacaktır. Çalışmamızdaki sonuçların tamamı adı geçen makaleden alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramları ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız bazı halka sınıflarını hatırlatacağız. Bu bölüm için temel referanslarımız (Hungerford 1982, Anderson and Fuller 1992, Lam 2001, Rowen 1988) olacaktır.

2.1 Halkalar

Bu kısımda halka teorideki bazı temel kavramlar hatırlatılacak ve halkaların sıkça kullanacağımız özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1 R boştan farklı bir küme ve R üzerinde, genellikle $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

(i) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur,

(ii) Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (çarpmanın birleşme özelliği vardır.),

(iii) Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ (çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.)

aksiyomları sağlanıyorsa, bu durumda R ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmelidir* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* denir. 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Teorem 2.1.2 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a, b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a, b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a, b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

Tanım 2.1.3 R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir. Hiçbir sıfır böleni olmayan bir halkaya bir *tamlık bölgesi* (*domain*) denir.

Tanım 2.1.4 R birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ varsa bu durumda a ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. c $(b \in R)$ elemanına a nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Hem sağ hem de sol tersinir bir elemana *tersinir eleman* denir.

Tanım 2.1.5 $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda R halkasına bir *cisim* denir.

Örnek 2.1.6 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. Bununla beraber $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi farklı ikili işlemlere göre de halka yapılabilir. Fakat bundan sonraki çalışmalarımızda $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası denildiğinde, tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikteki halka yapısı göz önüne alınacaktır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar), $\mathbb{R}$ (reel sayılar) ve $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir.

Örnek 2.1.7 $\mathbb{Z}_n = \ 0, 1, 2, \dots, n-1$ kümesi $a + b = a + b$ ve $ab = ab$ ikili işlemleri ile birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Eğer p bir asal tamsayı ise $\mathbb{Z}_p$ bir cisimdir.

Tanım 2.1.8 R bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

Tanım 2.1.9 Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.10 R bir halka olmak üzere,

$$C(R) = \ c \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } cr = rc$$

kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.1.11 Bir R halkasının bir R eşkare elemanı R halkasının merkezine ait ise, bu durumda e eşkare elemanına *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezil eşkare ise, bu durumda R halkası *abelyan (abelian)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.12 R bir halka ve $u, r \in R$ olmak üzere $ur = 0$ iken $r = 0$ ise u *sağ regüler eleman*, $ru = 0$ iken $r = 0$ ise u *sol regüler eleman* olarak isimlendirilir. u hem sağ hem sol regüler ise u ya bir *regüler eleman* denir.

Tanım 2.1.13 R bir halka olmak üzere, R nin her sıfırdan farklı A, B ideal çifti için $AB \neq 0$ oluyorsa bu durumda R ye *asal halka* denir. Açık olarak R nin bir asal halka olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $aRb = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

2.2 Alt Halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1 R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $S; R$ deki işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa, bu durumda S ye R nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Her ideal bir alt halkadır. Fakat her alt halka bir ideal olmak zorunda değildir. Gerçekten bir halkanın merkezi bir alt halka olmasına rağmen bir ideal olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.2 Her bir n tamsayısı için $n = kn \mid k \in \mathbb{Z}$ devirli alt gurubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

Örnek 2.2.3 R bir halka olmak üzere 0 ve $R; R$ nin idealleridir. Bu ideallere R nin aşikar idealleri denir.

R bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n$; R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1,2, \dots, n$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve B; R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \{ab \mid b \in B\}$ olur.

Önerme 2.2.4 R bir halka $\{A_i | \, i \in I\}$, R nin (sol) ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} A_i$ ler de R nin bir (sol) idealidir.

Tanım 2.2.5 X, bir R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin X i kapsayan tüm (sol) ideallerinin arakesitine *X tarafından üretilen (sol) ideal* denir. (X) şeklinde gösterilir. X in elemanlarına (X) idealinin *üreteçleri* denir. Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise bu durumda (X) ideali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde gösterilir ve bu ideale *sonlu üretilmiş ideal* denir. Bir tek eleman tarafından üretilen (x) ideali bir *temel ideal* olarak adlandırılır. R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $R_a = \{ra | \, r \in R\}$, $(ra = ar,\ r \in R)$ R nin bir *sol (sağ) idealidir.*

Örnek 2.2.6 R bir halka ve e de R de bir merkezil eşkare eleman olmak üzere $1_R - e$ de bir merkezil eşkaredir. Ayrıca eR ve $(1_R - e)R$ kümeleri R nin idealleridir.

Grup teoride normal alt grupların oynadığı rolü halka teoride idealler oynar. R bir halka I da R nin bir ideali olsun. R değişmeli toplamsal bir grup olduğundan $I; R$ nin bir toplamsal normal alt grubudur. Böylece;

$$R/I = \{a + I \mid a \in R\}$$

kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. R/I değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya R nin I ideali yardımıyla elde edilen *bölüm halkası* denir. R değişmeli iken R/I nında değişmeli ve R birimli iken R/I nın da birimli olduğu açıktır.

Tanım 2.2.7 R bir halka ve $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere;

$$l_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

$$r_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } xr = 0\}$$

kümelerine sırayla R içinde X in *sol ve sağ sıfırlayanı* denir. Eğer $X = \{x\}$ ise bu durumda $l_R(X) = l_R(\{x\}) = l_R(x)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.8 R bir halka ve $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere; $l_R(X)$; R nin bir sol ideali, $r_R(X)$ de R nin bir sağ idealidir. Ayrıca X ve Y; R nin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

(i) $X \subset Y$ ise $l_R(Y) \subset l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subset r_R(X)$ dir.
(ii) $X \subset r_R(l_R(X))$ ve $X \subset l_R(r_R(X))$ dir.
(iii) $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ dir.

2.3 Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bu bölümde verilen bir R halkasından elde edilen bazı yeni halkaları hatırlatacağız.

Tanım 2.3.1 R birimli bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki bir formal toplama R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad \text{ve} \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \in R[x]$$

olmak üzere, n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek bu iki polinomun toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k}(a_i+b_i)x^i$$

Bu polinomların çarpımı ise,

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_jb_{l-j} = a_0b_l + a_1b_{l-1} + a_2b_{l-2} + \cdots + a_{l-2}b_2 + a_{l-1}b_1 + a_lb_0$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2 R bir halka olmak üzere;

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *kuvvet serilerinin halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.3 R bir halka olmak üzere;

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir.}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.4 R bir halka olmak üzere bileşenleri R den gelen n satırlı ve n sütunlu matrislerin kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R üzerinde $n \times n$ tipindeki *matrislerin halkası* denir ve $M_n(R)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.5 (i, j) inci bileşeni 1, diğer bileşenlerinin hepsi 0 olan matrislere $M_n(R)$ içinde *matris birimselleri* denir ve E_{ij} ile gösterilir. Örneğin,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.6 R bir halka ve $n \geq 2$ olmak üzere ;

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R \right\}$$

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \dots, a_n \in R \right\}$$

kümeleri, $M_n(R)$ nin *alt halkalarıdır.*

2.4 Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda bazı halka sınıfları hatırlatılacak ve bu halka sınıfları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 2.4.1 Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için,

$$a^2 = 0 \implies a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye *inmiş* (*reduced*) *halka* denir.

Sıfır bölensiz her halka inmiş halkadır. Daha özel olarak $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası inmiş bir halkadır. Diğer taraftan $0 \neq 2 \in \mathbb{Z}_4$ için $(2)^2 = 22 = 0$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ halkası inmiş bir halka değildir. Ayrıca inmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğunu görmek çok kolaydır.

Tanım 2.4.2 $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \implies ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

Lemma 2.4.3 Her inmiş halka terslenebilir bir halkadır.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur ■

Tanım 2.4.4 R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı değişmeli* (*semicommitative*) olarak adlandırılır. Bir R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir $a \in R$ için $r_R\ a\ \ (l_R\ a\ )$ kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı değişmelidir. Gerçekten R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece her $r \in R$ için $bar = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.5 R bir halka, $I \neq R$ olacak şekilde R nin bir ideali I olmak üzere, eğer R nin A, B idealleri için;

$$AB \subseteq I \Longrightarrow A \subseteq I \text{ veya } B \subseteq I$$

oluyorsa, bu durumda I ya bir *asal* (*prime*) *ideal* denir.

Tanım 2.4.6 R bir halka olmak üzere $a \in R$ için,

$$aRa = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Lemma 2.4.7 Her inmiş halka yarı asaldır.

İspat. R inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve R inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı asal olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.4.8 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olmak üzere;

$$abc = 0 \Longrightarrow acb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye bir *simetrik* (*symmetric*) *halka* denir.

Tanım 2.4.9 R bir halka, P, R nin bir ideali ve $a, b \in R$ olmak üzere;

$$ab \in P \Longrightarrow a \in P \text{ veya } b \in P$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *tamamen asal* (*completely prime*) *ideal* denir.

3. KATI BENZERİ HALKALAR VE İDEALLER

Bu bölümde Hong vd. (2010), çalışmasını referans alarak bir halkanın σ otomorfizması için ideallerin ve halkaların σ-katı benzerliğini tanımlayacağız. Tanımlanan bu halka sınıfı σ-katı ve σ-yarıasal halka sınıfları arasında yer alacaktır.

3.1 σ-Katı Benzeri İdealler

Çalışmamız boyunca halkalar birimli halka olacak ve aksi belirtilmedikçe verilen bir halkanın σ endomorfizması bir otomorfizma olacaktır.

Tanım 3.1.1 R bir halka I, R nin bir ideali ve σ, R nin bir endomorfizması olmak üzere eğer $\sigma(I) \subseteq I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *σ-ideali* denir.

Hong vd. (2005), çalışmasında σ-katı ideal tanımını şu şekilde vermişlerdir: I bir R halkasının bir σ-ideali olsun. Eğer, $a \in R$ için $a\sigma(a) \in I$ olması $a \in I$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda I ya R nin bir *σ-katı ideali* denir. Bu çalışmada bir R halkasının σ-katı idealleri ile $R[x; \sigma, \delta]$ Ore genişlemesinin idealleri arasındaki ilişki çalışılmıştır. Açık olarak R nin bir σ-katı halka olması için gerek ve yeter koşul R nin sıfır idealinin bir σ-katı ideal olmasıdır. Diğer taraftan Pearson vd. (1977) çalışmalarında bir R halkasının bir σ otomorfizması için R nin bir I σ-idealini; A, R nin bir ideali ve her $t \geq m$ için $A\sigma^t(A) \subseteq I$ olacak şekilde bir m tamsayısı var iken $A \subseteq I$ oluyor ise, bu durumda R nin I idealini bir *σ-yarıasal ideal* olarak adlandırmışlardır. Eğer bir R halkasının sıfır ideali bir σ-yarıasal ideal oluyor ise, bu durumda bu R halkası σ-yarıasal olarak adlandırılır. [Pearson *et al*. 1977, Önerme 1.1] de $R[x; \sigma]$ skew polinom halkasının yarıasal olması için gerek ve yeter koşulun R nin bir σ-yarıasal halka olması gerektiği ispatlanmıştır. Bir R halkasının bir σ otomorfizması için R nin σ-yarıasal olması için gerek ve yeter koşul $a \in R$ ve her $t \geq m$ için $aR\sigma^t \ a = 0$ olacak şekilde bir m tamsayısı var iken $a = 0$ olmasıdır. Açık olarak; bir σ otomorfizması için her σ-katı ideal (halka) bir σ-yarıasal ideal (halka) dır. Böylece bir R halkasının bir σ endomorfizması ve bir I σ-ideali için aşağıdaki koşulu göz önünde bulunduralım.

$$a \in R \text{ için } aR\sigma \ a \subseteq I \Rightarrow a \in I \tag{*}$$

I, R nin bir σ-katı ideali ve $aR\sigma(a) \subseteq I$ olsun. Böylece $a\sigma(a) = a1\sigma(a) \in aR\sigma(a) \subseteq I$ olup buradan $a\sigma(a) \in I$ olur. R, σ-katı ideal olduğundan $a \in I$ elde edilir. Bu ise her σ-katı idealin (*) şartını sağladığını gösterir. Ayrıca, σ bir otomorfizma olduğunda (*) şartını sağlayan her σ-idealin bir σ-yarıasal ideal olduğunu görmek kolaydır. Aşağıdaki örnekler sırasıyla yukarıdaki gerektirmelerin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.2 (1) R, $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerindeki $2x2$ tipindeki matrislerin halkası yani $R = M_2(\mathbb{Z}_3)$ olsun. Bu durumda R nin $I = \{0\}$ ideali R nin bir maksimal (ve asal) idealidir. $\sigma: R \to R$, $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ fonksiyonu R nin bir otomorfizmasıdır. Şimdi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} R\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \subseteq I$ olsun. R bir asal halka olduğundan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$ veya $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \in I$ olur. Böylece $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$ olur ki bu da bize I idealinin (*) şartını sağladığını gösterir. Diğer taraftan [Hong *et al.* 2005, Örnek 3.3] den I bir σ-katı ideal değildir.

(2) $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını göz önüne alalım. Bu durumda R değişmeli reduced bir halkadır. $\sigma: R \to R$, $\sigma((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon açık olarak R nin bir otomorfizmasıdır. Bu durumda R nin $I = \{(0,0)\}$ sıfır ideali (*) şartını sağlamaz. Gerçekten $(1,0) \in R$ için;

$$(1,0)R\sigma((1,0)) = (1,0)R(0,1) = \{(1,0)(a,b)(0,1) : (a,b) \in R\} = \{(0,0)\} = I \subseteq I$$

olmasına rağmen $(1,0) \notin I = \{(0,0)\}$ dır. Şimdi $R[x;\sigma]$ nın yarıasal olduğunu gösterelim. Bunun için $(a_m, b_m) \neq 0$ ile birlikte $f(x) = \sum_{i=0}^{m}(a_i, b_i)x^i \in R[x;\sigma]$ olmak üzere $f(x)R[x;\sigma]f(x) = 0$ olsun. $a_m \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $f(x)R[x;\sigma]f(x) = 0$ olduğundan her $t \geq 0$ tamsayısı için $f(x)x^t f(x) = 0$ olur. Buradan her $t \geq 0$ için $(a_m, b_m)\sigma^{m+t}((a_m, b_m)) = 0$ olur. Bu ise $(a_m, b_m)\sigma^m((a_m, b_m)) = 0$ ve $(a_m, b_m)\sigma^{m+1}((a_m, b_m)) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece eğer m tek veya çift ise, bu durumda $(a_m, b_m)(a_m, b_m) = 0$ olur. Buradan $\mathbb{Z}_2$ reduced olduğundan $a_m = b_m = 0$ olur ki bu ise $a_m \neq 0$ kabulümüzle çelişir. Bu yüzden $R[x;\sigma]$ yarıasal ve böylece de [Pearson *et al.* 1977, Önerme 1.1] gereğince de R, σ-yarıasaldır. Buna denk olarak bir σ-yarıasal idealdir.

σ-katı ideallerin diğer bir genelleştirmesi σ-uyumlu ideallerdir. Hashemi (2006) de aşağıdaki tanımı vermiştir. I, R nin bir ideali olsun. Her bir $a, b \in R$ için $ab \in I \Leftrightarrow a\sigma(b) \in I$ oluyor ise bu durumda I ya R nin bir σ-*uyumlu ideali* denir. Aşağıdaki örnek σ-uyumlu halkaların sınıfı ile (*) şartını sağlayan σ-ideallerin sınıfının birbirinden bağımsız olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.3 (1) Örnek 3.1.2 deki R halkasının $\{0\}$ ideali (*) şartını sağlar. Fakat bir σ-uyumlu ideal değildir. Gerçekten;

$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ fakat

$a\sigma(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan $a\sigma(b) \notin I$ dır.

(2) $f(x)$ bir F cismi üzerindeki polinomlar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} : f(x), g(x) \in F[x]\right\}$ halkasını göz önüne alalım. Bir $0 \neq a \in F$ için $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(x) & ag(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu R nin bir endomorfizmasıdır. $p(x) \in F[x]$ indirgenmez polinomu tarafından üretilen ideal $< p(x) >$ olmak üzere $I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & g(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : g(x) \in < p(x) >\right\}$ ideali R nin bir σ-uyumlu idealidir. Bakınız [Hashemi 2006, Örnek 2.5].

Bununla beraber R nin I ideali (*) şartını sağlamaz. Gerçekten $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin I$ fakat

$$
\begin{aligned}
AR\sigma(A) &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) : \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} \in R\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} \in R\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq I
\end{aligned}
$$

olur.

Yukarıdaki gerçeklere dayanarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.1.4 R bir halka ve σ, R nin bir otomorfizması olsun. I, R nin bir σ-ideali olmak üzere eğer $a \in R$ için $aR\sigma(a) \subseteq I$ olması $a \in I$ olmasını gerektiriyor ise, bu durumda R

ye I nın bir *σ-katı benzeri ideali* (veya *bir güçlü σ-yarıasal ideal*) denir. Eğer bir R halkasının 0 ideali bir σ-katı benzeri ideal ise, bu durumda R ye bir *σ-katı benzeri halka* (veya *bir güçlü σ-yarıasal halka*) denir.

Bu tez çalışmasında bir σ otomorfizması için hem σ-katı benzeri idealleri hem de σ-katı benzeri halkaları çalışacağız. Bir R halkasının σ-katı benzerlik özelliği ile bu halkanın Ore genişlemesi arasındaki ilişkileri araştıracağız.

3.2 σ-Katı Benzeri İdeallerin Yapıları

R bir halka; I, R nin bir ideali ve σ, R nin bir otomorfizması olsun. Eğer $\sigma^{-1}\ I\ = I$ oluyor ise bu durumda I ya *σ-değişmez ideal* denir. Her σ-değişmez ideal bir σ-idealdir. Şimdi bunu görelim. I, R nin bir σ-değişmez ideali olsun. Yani $\sigma^{-1}\ I\ = I$ olsun. $a \in \sigma(I)$ ise $a = \sigma(b)$ olacak şekilde $b \in I$ vardır. Buradan $\sigma^{-1}\ a\ = \sigma^{-1}\ \sigma(b)\ = b \in I = \sigma^{-1}\ I$ olup buradan $b \in \sigma^{-1}\ I$ olur. Böylece $a = \sigma\ b\ \in \sigma\ \sigma^{-1}\ I\ \ = I$ elde edilir. Sonuç olarak $\sigma(I) \subseteq I$ olup I bir σ-idealdir.

Lemma 3.2.1 Bir R halkasının her σ-katı benzeri ideali σ-değişmez ve yarıasal idealdir.

İspat. R bir halka I, R nin bir σ-katı benzeri ideali olsun. Bu durumda I, R nin bir σ-ideali yani $\sigma(I) \subseteq I$ dır. Buradan $I = \sigma^{-1}\ \sigma(I)\ \subseteq \sigma^{-1}\ I$ yani $I \subseteq \sigma^{-1}\ I$ olur. Diğer taraftan $a \in \sigma^{-1}\ I$ olsun. Buradan $\sigma(a) \in I$ ve böylece I bir ideal olduğundan $aR\sigma(a) \subseteq I$ olur. I bir σ-katı benzeri ideal olduğundan $a \in I$ elde edilir. Böylece $\sigma^{-1}\ I\ \subseteq I$ sonuç olarak $\sigma^{-1}\ I\ = I$ elde ederiz ki bu da bize I nın σ-değişmez olduğunu gösterir. Şimdi I nın yarıasal ideal olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $aRa \subseteq I$ olsun. σ örten olduğundan $\sigma\ R\ = R$ dir. Böylece herhangi bir $r \in R$ için $aRa \subseteq I$ olduğundan $ar\sigma\ a\ R\sigma\ ar\sigma\ a\ = ar\sigma\ a\ \sigma\ R\ \sigma\ ar\sigma\ a\ = ar\sigma(aRar\sigma(a)) \subseteq I$ elde edilir. I, σ-katı benzeri halka olduğundan $ar\sigma(a) \in I$ ve tekrar I, σ-katı benzeri ideal olduğundan $a \in I$ olur ki bu da bize I nın bir yarıasal ideal olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki örnek Lemma 3.2.1 in tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.2 $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını ve Örnek 3.1.2. (2) deki gibi $\sigma(\ a, b\ ) = (b, a)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmayı göz önüne alalım. I, R nin $N_*\ R\ =\ (0,0)$ asal radikali olsun. Bu durumda açık olarak I bir yarıasal ideal ve bir σ-değişmez idealdir. Fakat Örnek 3.1.2. (2) den bir σ-katı benzeri ideal değildir.

σ-katı benzeri idealler için denk koşulları aşağıda verelim.

Önerme 3.2.3 I bir R halkasının bir σ-ideali olsun. Aşağıdakilerin her birisi I nın bir σ-katı benzeri ideal olmasına denk koşullardır.

(1) Herhangi bir $a \in R$ için $\sigma(a)Ra \subseteq I$ ise, bu durumda $a \in I$ dır.

(2) R nin herhangi bir A ideali için $A\sigma(A) \subseteq I$ ise, bu durumda $A \subseteq I$ dır.

(3) $R = R \;\; I$, $a \;\; = a + I$ ve $\sigma = R \rightarrow R,\ \sigma \;\; a + I \;\; = \sigma(a) + I$ şeklinde tanımlanmak üzere herhangi bir $a \in R$ için $aR\sigma \;\; a \;\; = 0$ ise, bu durumda $a = 0$ dir.

İspat. (1) I bir σ-katı benzeri ideal ve $a \in R$ için $\sigma(a)Ra \subseteq I$ olsun. Bu durumda Lemma 3.2.1 den I, yarıasal idealdir. Böylece $aR\sigma(a) \subseteq I$ olup I, σ-katı benzeri ideal olduğundan $a \in I$ elde edilir. Tersine (1) sağlansın. $b \in R$ için $bRb \subseteq I$ olsun. Buradan herhangi bir $r \in R$ için $\sigma \;\; \sigma \;\; b \;\; rb \;\; R\sigma \;\; b \;\; rb = \sigma^2(b)\sigma(r)\sigma(bRb)rb \subseteq I$ böylece (1) den $\sigma(b)Rb \in I$ ve tekrar (1) den $b \in I$ elde edilir. Böylece I, yarıasal ideal olur. Şimdi $a \in R$ için $aR\sigma(a) \subseteq I$ olsun. I, yarıasal olduğundan $\sigma(a)Ra \subseteq I$ olup (1) den $a \in I$ elde edilir. Bu da bize I nın bir σ-katı benzeri ideal olduğunu gösterir.

(2) I bir σ-katı benzeri ideal ve $a \in A$ olsun. Eğer $A\sigma(A) \subseteq I$ ise, bu durumda açık olarak $aR\sigma(a) \subseteq I$ olup I, σ-katı benzeri ideal olduğundan $a \in I$ olur. Sonuç olarak $A \subseteq I$ elde ederiz. Tersine olarak (2) sağlansın. Bir $a \in R$ için $aR\sigma(a) \subseteq I$ olsun. Bu durumda $RaR\sigma \;\; RaR \;\; = RaR\sigma(a)R \subseteq I$ ve böylece (2) den $RaR \subseteq I$ olur. Buradan $a \in I$ elde edilir ki, bu da bize I nın σ-katı benzeri ideal olduğunu gösterir.

(3) Kabul edelim ki I, R nin bir σ-katı benzeri ideali olsun. $a \in R$ için $aR\sigma \;\; a \;\; = 0$ olsun. Bir $r \in R$ için $aR\sigma \;\; a \;\; + I = \;\; a + I \;\; r + I \;\; \sigma \;\; a \;\; + I \;\; \in aR\sigma \;\; a \;\; = 0 = I$ olduğundan $aR\sigma \;\; a \;\; \in I$ yani $aR\sigma(a) \subseteq I$ olur. I, σ-katı benzeri ideal olduğundan $a \in I$ ve buradan da $a = 0$ elde edilir. Tersine (3) sağlandığında I nın bir σ-katı benzeri ideal olduğunu görmek kolaydır. ■

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında δ, bir R halkasının bir σ-türevi olacaktır. R nin bir I ideali için eğer $\delta(I) \subseteq I$ oluyorsa, bu durumda I ya bir δ-*ideal* denildiğini hatırlatalım.

Lemma 3.2.4 I bir R halkasının bir σ-katı benzeri ideali olsun.

(1) $a, b \in R$ için eğer $aRb \subseteq I$ ise, bu durumda her pozitif n tamsayısı için $aR\sigma^n \ b$, $\sigma^n(a)Rb \subseteq I$ olur. Tersine uygun bir pozitif k tamsayısı için eğer $aR\sigma^k \ b \ \subseteq I$ veya $\sigma^k(a)Rb \subseteq I$ ise, bu durumda $aRb \subseteq I$ dır.

(2) $a, b \in R$ için eğer I bir δ-ideal ve $aRb \subseteq I$ ise, bu durumda her pozitif n tamsayısı için $aR\delta^n \ b$, $\delta^n(a)Rb \subseteq I$ dır.

İspat. Lemma 3.2.1 den herhangi σ-katı benzeri idealin σ-değişmez ve yarıasal olduğunu biliyoruz. Bu gerçeği ispatlarımızda her seferinde vurgulamadan kullanacağız. (1) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ olsun. $aR\sigma \ b$, $\sigma(a)Rb \subseteq I$ olduklarını göstermek yeterlidir. Herhangi bir $r \in R$ için $br\sigma \ a \ R\sigma \ br\sigma \ a \ = br\sigma(aRb)\sigma(r\sigma \ a \ ) \subseteq I$ dır. I, σ-katı benzeri ideal olduğundan $br\sigma \ a \ \in I$ ve böylece de $bR\sigma(a) \subseteq I$ olur. I bir yarıasal ideal olduğundan $\sigma(a)Rb \subseteq I$ olur. $aRb \subseteq I$ ve I yarıasal ideal olduğundan $bRa \subseteq I$ elde edilir. Yukarıda kullandığımız aynı yöntemle $aR\sigma \ b \ \subseteq I$ elde ederiz. Tersine, uygun bir pozitif k tamsayısı için $aR\sigma^k \ b \ \subseteq I$ olsun. Bu durumda yine yukarıdaki aynı yöntemle $\sigma^k \ aRb \ = \sigma^k(a)R\sigma^k(b) \subseteq I$ olur. I bir σ-değişmez olduğundan $\sigma^{k-1} \ aRb \ \subseteq \sigma^{-1} \ I \ = I$ olur. Bu işlem devam ettirilerek $aRb \subseteq I$ elde edilir. Benzer olarak uygun bir pozitif k tamsayısı için $\sigma^k \ a \ Rb \subseteq I$ olması $aRb \subseteq I$ olmasını gerektirir.

(2) I bir δ-ideal ve $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ olur. $aR\delta \ b \ , \delta(a)Rb \subseteq I$ olduklarını göstermek yeterlidir. $aRb \subseteq I$ dan $bRa \subseteq I$ ve böylece (1) den $bR\sigma(a) \subseteq I$ yazabiliriz. Herhangi bir $r \in R$ için $\delta \ arb \ = \sigma(ar)\delta(b) + \delta(ar)b \in I$ dır. Buradan $\delta \ arb \ \in I$ ve $bR\sigma(a) \subseteq I$ olduğundan, $(\sigma(ar)\delta(b)R)^2 = \delta \ arb \ R\sigma \ ar \ \delta \ b \ R - \delta(ar)bR\sigma(ar)\delta(b)R \subseteq I$ dır. I, yarıasal olduğundan $\sigma(a)R\delta(b) \subseteq I$ ve böylece (1) den $aR\delta \ b \ \subseteq I$ elde ederiz. Benzer olarak $aRb \subseteq I$ olmasından $bRa \subseteq I$ olması da $\delta(a)Rb \subseteq I$ olmasını gerektirir ■

Sonuç 3.2.5 I bir R halkasının bir σ-ideali olsun. Bu durumda I nın bir σ-katı benzeri ideal olması için gerek ve yeter koşul I nın bir yarıasal ideal ve $a, b \in R$ için $aR\sigma \ b \ \subseteq I \ \Leftrightarrow aRb \subseteq I$ olmasıdır.

İspat. I bir σ-ideal olsun. Kabul edelim ki I, σ-katı benzeri bir ideal olsun. Bu durumda Lemma 3.2.1 den I, yarıasaldır. Lemma 3.2.4 den de $a, b \in R$ için $aR\sigma(b) \subseteq I \Leftrightarrow aRb \subseteq I$ olur. Tersine, Lemma 3.2.1 den ve Lemma 3.2.4 den istenilen elde edilir. ■

Teorem 3.2.6. I bir R halkasının bir σ-katı benzeri ideali olsun.

(1) $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\sigma,\delta]$ olsun. Eğer I, R nin bir δ-ideali ise, bu durumda $p(x)R[x;\sigma,\delta]q(x) \subseteq I[x;\sigma,\delta]$ olması için gerek ve yeter koşul her i ve j için $a_i R b_j \subseteq I$ olmasıdır.

(2) $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R[[x;\sigma]]$ olsun. Bu durumda $p(x)R[[x;\sigma]]q(x) \subseteq I[[x,\sigma]]$ olması için gerek ve yeter koşul her i ve j için $a_i R b_j \subseteq I$ olmasıdır.

İspat. (1) $p(x)R[x;\sigma,\delta]q(x) \subseteq I[x;\sigma,\delta]$ olsun. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $p(x)rq(x) \in I[x;\sigma,\delta]$ olur.

$(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i) r (\sum_{j=0}^{n} b_j x^j) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \in I[x;\sigma,\delta]$

olsun. Her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i R b_j \subseteq I$ olduğunu iddia ediyoruz. $i+j$ üzerine tümevarım uygulayalım. $i+j = m+n$ olduğunda $c_{m+n} = a_m \sigma^m(r)\sigma^m(b_n) \in I$ ve böylece Lemma 3.2.4 den $a_m R b_n \subseteq I$ elde edilir. Şimdi iddiamızın $i+j > k \geq 0$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(r)\sigma^i(b_j) + \sum_{i+j>k} a_i(R\sigma^{i_1}\delta^{j_1}\sigma^{i_2}\delta^{j_2}\ldots\sigma^{i_l}\delta^{j_l}(b_j)) \subseteq I$ burada $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_l$ negatif olmayan tamsayılar ve $r \in R$ dir. Tümevarım hipotezi ve Lemma 3.2.4 den $\sum_{i+j>k} a_i(R\sigma^{i_1}\delta^{j_1}\sigma^{i_2}\delta^{j_2}\ldots\sigma^{i_l}\delta^{j_l}(b_j)) \subseteq I$ olduğundan

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(r)\sigma^i(b_j) \in I \tag{1}$$

elde ederiz. (1) denklemini sağdan Ra_k ile çarpalım. Herhangi bir negatif olmayan u tamsayısı, tümevarım hipotezi ve Lemma 3.2.4. (1) den dolayı her $i+j>k$ için $\sigma^u(b_j)Ra_i \subseteq I$ olduğundan

$$\left(\sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(r)\sigma^i(b_j)\right) Ra_k = a_k \sigma^k(r)\sigma^k(b_0) Ra_k \subseteq I$$

elde ederiz. Buradan herhangi bir $r \in R$ için $(a_k\sigma^k(r)\sigma^k(b_0)R)^2 \subseteq I$ ve Lemma 3.2.1 den $a_k\sigma^k(r)\sigma^k(b_0) \in I$ olur. Böylece $a_kR\sigma^k(b_0) \subseteq I$ ve Lemma 3.2.4.(1) den de $a_kRb_0 \subseteq I$ olur. Böylece (1) denklemi,

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leq i\leq k-1}} a_i\,\sigma^i(r)\sigma^i(b_j) \in I \tag{2}$$

haline gelir. (2) denklemini sağdan Ra_{k-1} ile çarparsak,

$$a_{k-1}\sigma^{k-1}(r)\sigma^{k-1}(b_1)Ra_{k-1} \subseteq I$$

ve böylece yukarıdaki aynı metot kullanılarak $a_{k-1}Rb_1 \subseteq I$ elde ederiz. Bu anlamda devam edersek $i+j=k$ olacak şekildeki tüm i,j ler için $a_iRb_j \subseteq I$ elde ederiz. Sonuç olarak tüm $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_iRb_j \subseteq I$ elde edilir. Tersine gerektirmeyi direkt Lemma 3.2.4 den elde edebiliriz.

(2) $p(x)R[[x;\sigma]]q(x) \subseteq I[[x,\sigma]]$ olsun. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $p(x)rq(x) \in I[[x;\sigma]]$ olur. Böylece,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i\right) r \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i\,\sigma^i(r)\sigma^i(b_j)x^{i+j}\right) \in I[[x;\sigma]] \tag{3}$$

elde edilir. Her i,j için $a_iRb_j \subseteq I$ olduğunu iddia ediyoruz. Tümevarım ile ispatı yapalım. $i+j=0$ için (3) denkleminden $a_0Rb_0 \subseteq I$ elde edilir. Şimdi iddiamızın $i+j \leq n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Böylece tümevarım hipotezi ve Lemma 3.2.4. (1) gereğince $i+j \leq n-1$ olduğunda herhangi u ve v negatif olmayan tamsayıları için $a_iR\sigma^u(b_j) \subseteq I$ ve $\sigma^v(b_j)Ra_i \subseteq I$ olur. Şimdi $i+j=n$ için $a_iRb_j \in I$ olduğunu gösterelim. (3) denkleminden,

$$\sum_{i+j=n} a_i\sigma^i(r)\sigma^i(b_j) \in I \tag{4}$$

elde ederiz. (4) denklemini sağ taraftan Ra_0 ile çarparsak $(a_0rb_n)Ra_0 \subseteq I$ ve böylece $a_0rb_n \in I$ elde ederiz. Buradan $a_0Rb_n \subseteq I$ olur. Yani (4) denklemi,

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ 1\leq i\leq n}} a_i\,\sigma^i(r)\sigma^i(b_j) \in I \tag{5}$$

halini alır. Tekrar (5) denklemini sağdan Ra_1 ile çarparsak yukarıdakine benzer metotla $a_1Rb_{n-1} \subseteq I$ elde ederiz. Bu işleme devam ederek $i+j=n$ olacak şekildeki tüm i ve j

ler için $a_iRb_j \subseteq I$ olduğunu görebiliriz. Sonuç olarak her i ve j için $a_iRb_j \subseteq I$ dır. Tersi, direkt Lemma 3.2.4. (1) den elde edilir. ■

Sonuç 3.2.7 R bir halka, I da R nin bir σ-katı benzeri ideali olsun.

(1) I, R nin bir δ-ideali olmak üzere $I[x;\sigma,\delta]$, $R[x;\sigma,\delta]$ nın bir yarıasal idealidir.

(2) $I[[x;\sigma]]$, $R[[x;\sigma]]$ nın bir yarıasal idealidir.

İspat. (1) $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in R[x;\sigma,\delta]$ olmak üzere $p(x)R[x;\sigma,\delta]p(x) \subseteq I[x;\sigma,\delta]$ olsun. Teorem 3.2.6 dan her $0 \leq i \leq m$ için $a_iRa_i \subseteq I$ olur. Lemma 3.2.1 den I bir yarıasal ideal olur ki böylece her $0 \leq i \leq m$ için $a_i \in I$ elde ederiz. Yani $p(x) \in I[x;\sigma,\delta]$ olur bu da bize $I[x;\sigma,\delta]$ nın $R[x;\sigma,\delta]$ nın bir yarıasal ideali olduğunu gösterir.

(2) Benzer şekilde (1) deki ispat yöntemi kullanılarak yapılır. ■

R bir halka I da R nin tek yanlı bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in I$ olması $aRb \subseteq I$ olmasını gerektiriyor ise, bu durumda I ya R nin bir IFP ideali denir (Mason 1981).

Lemma 3.2.8 R bir halka I da R nin bir ideali olsun. I nın bir σ-katı benzeri ideal ve IFP özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul I nın bir σ-katı ideal olmasıdır.

İspat. I bir σ-katı benzeri ideal ve IFP özelliğine sahip olsun. $a \in R$ için $a\sigma(a) \in I$ olsun. I, IFP özelliğine sahip olduğundan $aR\sigma(a) \subseteq I$ ve I, σ-katı benzeri olduğundan da $a \in I$ elde ederiz. Bu da bize I nın bir σ-katı ideal olduğunu gösterir. Tersine kabul edelim ki I bir σ-katı ideal olsun. Bu durumda [Hong C.Y. *et. al*, 2005, Önerme 2.2.(1)] den I, R nin bir tamamen yarıasal idealidir. (Yani $a \in R$ için $a^2 \in I$ olması $a \in I$ olmasını gerektirir.) Böylece [Mason 1981, Lemma 3.2.(a)] dan I ideali IFP özelliğine sahiptir. ■

4. σ-KATI BENZERİ HALKALARIN GENİŞLEMELERİ

Bu bölüme σ-katı benzeri halka tanımının hatırlatmasını yaparak başlayalım. R bir halka olmak üzere eğer R nin sıfır ideali bir σ-katı benzeri ideal oluyor ise, bu durumda R ye bir σ-katı benzeri halka denir. Açık olarak bir σ otomorfizması için her σ-katı halka bir σ-katı benzeri halkadır. Her σ-katı benzeri halka bir σ-yarıasal halkadır. Fakat bunların terslerinin Örnek 3.1.2 den sağlanmadığını görürüz. Her σ-katı benzeri halka Lemma 3.2.1 gereğince bir yarıasal halkadır. $R[x;\sigma]$ halkası yarıasal olmayacak şekilde bir yarıasal R halkasının bir σ endomorfizması olabilir [Kamal 1994, Örnek 4.3]. Bununla beraber Sonuç 3.2.7 yi kullanarak aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 4.1 Eğer R bir σ-katı benzeri halka ise, bu durumda $R[x;\sigma,\delta]$ bir yarıasal halkadır.

İspat. R bir σ-katı benzeri halka olsun. Bu durumda Sonuç 3.2.7.(1) de $I = \{0\}$ alınırsa I ideali bir δ-ideal olup $I\ \ x;\sigma,\delta\ \ = \{0\}$ ideali $R\ \ x;\sigma,\delta$ nın bir yarıasal ideali olur ki bu da $R\ \ x;\sigma,\delta$ nın bir yarıasal halka olduğunu gösterir. ■

Her bir asal halka bir otomorfizması ile birlikte bir σ-katı benzeri halkadır. Gerçekten; R yarıasal halka ve $a \in R$ için $aR\sigma\ \ a\ \ = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$ veya $\sigma\ \ a\ \ = 0$ dır. σ, birebir olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da bize R nin bir σ-katı benzeri halka olduğunu gösterir. Diğer taraftan Örnek 3.1.2.(2) deki $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkası σ otomorfizması için R ve $R[x;\sigma]$ nın her ikisi de yarıasal halkalar fakat R, σ-katı benzeri halka değildir.

R bir halka ve σ, R nin bir endomorfizması olmak üzere eğer R nin sıfır ideali bir σ-uyumlu ideal ($a, b \in R$ için $ab = 0 \ \Leftrightarrow a\sigma\ \ b\ \ = 0$) oluyor ise, bu durumda R ye bir σ-*uyumlu halka* denir (Annin 2002). Her bir σ-katı halka bir σ-uyumlu halkadır. Şimdi bunu görelim. R bir σ-katı halka olsun. Kabul edelim ki $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ dır. Buradan,

$$a\sigma\ \ b\ \ \sigma\ \ a\sigma\ \ b\ \ \ \ = a\sigma\ \ ba\ \ \sigma^2\ \ b\ \ = a\sigma\ \ 0\ \ \sigma^2\ \ b\ \ = a0\sigma^2\ \ b\ \ = 0$$

olup R, σ-katı olduğundan $a\sigma\ \ b\ \ = 0$ elde edilir. Şimdi $a\sigma\ \ b\ \ = 0$ olsun.

$$ba\sigma\ \ ba\ \ = ba\sigma\ \ b\ \ \sigma\ \ a\ \ = b0\sigma\ \ a\ \ = 0$$

olup R, σ-katı olduğundan $ba = 0$ ve R terslenebilir olduğundan da $ab = 0$ elde edilir. Fakat bunun tersi genel olarak doğru değildir. σ-katı benzeri halkalar ile σ-uyumlu halkalar aşağıdaki örnek ve Örnek 3.1.3.(1) den dolayı birbirine bağlı değildir.

Örnek 4.2 $R = \begin{matrix} a & t \\ 0 & a \end{matrix} : a \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{Q}$ halkasını göz önüne alalım. $\sigma: R \to R$, $\sigma\ \begin{matrix} a & t \\ 0 & a \end{matrix} = \begin{matrix} a & t\ 2 \\ 0 & a \end{matrix}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon açık olarak R nin bir endomorfizmasıdır. $0 \neq \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \in R$ için,

$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} a & t \\ 0 & a \end{matrix} \sigma \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} a & t \\ 0 & a \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 0$ olduğundan R bir σ-katı benzeri halka değildir. Şimdi R nin bir σ-uyumlu halka olduğunu gösterelim. $A = \begin{matrix} a & t \\ 0 & a \end{matrix}, B = \begin{matrix} b & s \\ 0 & b \end{matrix} \in R$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda $ab = 0$ ve $as + tb = 0$ dır. Tamsayılar sıfır bölensiz olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ dır. Eğer $a = 0$ ise, bu durumda $t = 0$ olup $A = 0$ olur. Benzer şekilde eğer $b = 0$ ise, bu durumda $s = 0$ olup $B = 0$ olur. Bu ise bize $AB = 0 \Leftrightarrow A\sigma(B) = 0$ sonucunu verir ki böylece R bir σ-uyumlu halkadır.

R bir halka σ da R nin bir endomorfizması olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $aR\sigma(b) = 0$ olmasını gerektiriyor ise, bu durumda σ endomorfizmasına yarıdeğişmeli denir. Bir R halkasının bir yarıdeğişmeli σ endomorfizması var ise, bu durumda R ye σ-yarıdeğişmeli halka denir [Başer *et. al.* 2008, Tanım 2.1]. Bir halkanın yarı değişmeliği ve σ-yarıdeğişmeliği birbirinden bağımsızdır. Bunu görmek için [Başer *et al.* 2008, Örnek 2.3 ve Örnek 2.7] bakılabilir. Lemma 3.2.8 den bir yarıdeğişmeli halkanın σ-katı benzerliği ve σ-katılığı birbiriyle ilgilidir. Diğer taraftan bir σ-yarıdeğişmeli halka için aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Önerme 4.3. R bir σ-yarıdeğişmeli halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) R bir σ-katı halkadır.

(2) R bir σ-katı benzeri halkadır.

(3) R bir σ-yarıasal halkadır.

İspat. (3) $\Rightarrow$ (1) i göstermek yeterlidir. R bir σ-yarıasal halka ve $a \in R$ için $a\sigma(a) = 0$ olsun. Bu durumda Başer *et al.* (2008, Uyarı 2.2) den herhangi bir t pozitif tamsayısı için $aR\sigma^t(a) = 0$ olur. Böylece R, σ-yarıasal olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da R nin bir σ-katı halka olduğunu gösterir. ■

Sonuç 4.4 Eğer R bir yarıasal ve yarıdeğişmeli halka ise, bu durumda R bir inmiş halkadır.

İspat. Önerme 4.3 te $\sigma = 1_R$ birim endomorfizması alınır. ■

R bir halka ve $\sigma: R \to R$ fonksiyonu da R nin bir otomorfizması olsun. Bu durumda $\sigma: R[x] \to R[x]$, $\sigma\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i)\, x^i$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da $R[x]$ polinomlar halkasının bir otomorfizmasıdır. Benzer olarak $\sigma: R[x, x^{-1}] \to R[x, x^{-1}]$, $\sigma\left(\sum_{i=k}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=k}^{n} \sigma(a_i)\, x^i$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da $R[x, x^{-1}]$ halkasının bir otomorfizmasıdır.

Önerme 4.5 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R bir σ-katı benzeri halkadır.
(2) $R[x]$ bir σ-katı benzeri halkadır.
(3) $R[x, x^{-1}]$ bir σ-katı benzeri halkadır.

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2) R bir σ-katı benzeri halka olsun. Kabul edelim ki $R[x]$, σ-katı benzeri halka olmasın. Bu durumda bir $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$ için $f(x)R[x]\sigma(f(x)) = 0$ dır. $a_n \neq 0$ kabul edebiliriz. $f(x)R[x]\sigma(f(x)) = 0$ olduğundan $f(x)R\sigma(f(x)) = 0$ dır. Yani her $r \in R$ için $f(x)r\sigma(f(x)) = 0$ dır. Buradan $a_0 r\sigma(a_0) + \cdots + a_n r\sigma(a_n)x^{2n} = 0$ ve böylece $a_n R\sigma(a_n) = 0$ elde edilir. R, σ-katı benzeri halka olduğundan $a_n = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup $R[x]$ bir σ-katı benzeri halkadır. Tersine kabul edelim ki $R[x]$ bir σ-katı benzeri halka olsun. $a \in R$ için $aR\sigma(a) = 0$ olsun. Bu durumda $aR[x]\sigma(a) = 0$ olur. $R[x]$, σ-katı benzeri halka olduğundan $a = 0$ elde ederiz ki bu da bize R nin bir σ-katı benzeri halka olduğunu gösterir.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) yukarıdakine benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 3.2.3 ten hatırlanacağı üzere bir R halkasının bir I idealinin bir σ-katı benzeri ideal olması için gerek ve yeter koşul R/I bölüm halkasının bir σ-katı benzeri halka olmasıdır. Ayrıca $\sigma: R/I \to R/I$, $\sigma(a+I) = \sigma(a) + I$ şeklinde tanımlandığını hatırlayalım. Aşağıdaki örnekten; R, σ-katı benzeri halka olmamasına rağmen bu halkanın herhangi bir sıfırdan farklı I temel ideali için I, σ-katı ideal ve böylece R/I, σ-katı benzeri halka olacak şekilde bir R halkası ve bu halkanın bir σ otomorfizmasının var olduğunu görürüz. Üstelik aşağıdaki örnek de bir σ-katı benzeri halkanın alt halkalarının da σ-katı benzeri halkalar olmasının gerekmediğini gösterir.

Örnek 4.6 F bir cisim, $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in F \right\}$ olmak üzere bu halkanın $\sigma: R \to R$, $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AR\sigma(A) = 0$ olmasına rağmen $A \neq 0$ dır. Böylece R, σ-katı benzeri bir halka değildir. R halkasının sıfırdan farklı tüm temel idealleri;

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in F \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in F \right\}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in F \right\}$$

şeklindedir. Şimdi I nın bir σ-katı ideal olduğunu gösterelim. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ için $A\sigma(A) \subseteq I$ olsun. Buradan $A\sigma(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & -ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \in I$ ise $c^2 = 0$ ve F bir cisim olduğundan $c = 0$ elde edilir. Böylece $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olur. Sonuç olarak I bir σ-katı idealdir. Benzer olarak K ve J ideallerinin de σ-katı idealler olduğunu gösterebiliriz. Böylece Önerme 3.2.3 ten R/I, R/J ve R/K halkaları σ-katı benzeri halkalar olur.

R bir halka ve σ da R nin bir otomorfizması olsun. Bu durumda $\sigma: M_n(R) \to M_n(R)$, $\sigma((a_{ij})) = (\sigma(a_{ij}))$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da $M_n(R)$ halkasının bir otomorfizmasıdır.

Teorem 4.7 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R bir σ-katı benzeri halkadır.

(2) Herhangi bir $n \geq 2$ için $M_n(R)$ bir σ-katı benzeri halkadır.

(3) Uygun bir $n \geq 2$ için $M_n(R)$ bir σ-katı benzeri halkadır.

İspat. $1 \Rightarrow 2$ R bir σ-katı benzeri halka ve $n \geq 2$ olsun. $A = a_{ij} \in M_n\ R$ için $AM_n\ R\ \sigma\ A = 0$ olsun. Bu durumda özel olarak her $r \in R$ ve her bir $i, j \in 1,2, \ldots, n$ için de $A\ rE_{ij}\ \sigma\ A = 0$ olur. Böylece $a_{ij}R\sigma\ a_{ij} = 0$ dır. R, σ-katı benzeri bir halka olduğundan $a_{ij} = 0$ olur. Bu yüzden $A = 0$ olur ki bu da bize $M_n\ R$ halkasının bir σ-katı benzeri halka olduğunu gösterir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki $n \geq 2$ için $M_n(R)$ bir σ-katı benzeri halka olsun. $a \in R$ için $aR\sigma\ a = 0$ olsun. $A = aE_{11} \in M_n(R)$ diyelim. Bu durumda $AM_n\ R\ \sigma\ A = 0$ olup $M_n\ R$, σ-katı benzeri bir halka olduğundan $A = 0$ elde ederiz. Buradan $a = 0$ olur ki bu da bize R nin bir σ-katı benzeri halka olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.7 yi göz önünde bulundurursak, bir σ-katı benzeri R halkası için $U_n\ R$ alt üçgensel matris halkasının da σ-katı benzeri halka olmasından şüphe edebiliriz. Fakat aşağıdaki örnek bu durumu ortadan kaldırır.

Örnek 4.8 R bir halka, σ da R nin bir endomorfizması olsun. $0 \neq A = E_{1n} \in U_n\ R$ için $AU_n\ R\ \sigma\ A = 0$ dır. Yani $U_n\ R$, $n \times n$ tipindeki alt üçgensel matris halkası herhangi bir $n \geq 2$ için σ-katı benzeri bir halka değildir. Benzer metotla $n \geq 2$ için $S_n\ R$ ve $V_n\ R$ halkalarının da σ-katı benzeri halkalar olmadığı görülür. $n \geq 2$ için x^n, $R[x]$ içerisinde x^n tarafından üretilen ideal olmak üzere $V_n\ R = R[x]\ \ x^n$ dir (Lee and Zhou 2004). Diğer taraftan $\sigma: R[x]\ \ x^n \rightarrow R[x]\ \ x^n$, $\sigma\ f\ x + x^n = \sigma(f(x)) + x^n$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $R[x]\ \ x^n$ halkasının bir endomorfizmasıdır. Sonuç olarak $R[x]\ \ x^n$ halkası da σ-katı benzeri bir halka değildir.

R bir halka, $e^2 = e \in R$ bir eşkare eleman ve σ da R nin bir otomorfizması olmak üzere $\sigma\ e = e$ olsun. Bu durumda $\sigma: eRe \rightarrow eRe$, $\sigma\ ere = e\sigma(r)e$ şeklinde tanımlanan fonksiyon eRe nin bir otomorfizmasıdır.

Önerme 4.9 R bir halka ve $e^2 = e \in R$ için $\sigma(e) = e$ olsun. Eğer R, σ-katı benzeri halka ise, bu durumda eRe de σ-katı benzeri bir halkadır.

İspat. R, σ-katı benzeri bir halka ve $eae \in eRe$ için $eae\, eRe\, \sigma(eae) = 0$ olsun. Bu durumda $0 = eae\, eRe\, \sigma(eae) = eae\, eRe\, e\sigma(a)e = eae\, R\sigma(eae)$ dir. R, σ-katı benzeri bir halka olduğundan $eae = 0$ olur. Bu da bize eRe nin σ-katı benzeri bir halka olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki örnek, yukarıdaki önermedeki $\sigma(e) = e$ şartının kaldırılamayacağını gösterir.

Örnek 4.10 Örnek 3.1.2.(1) deki $R = M_2(\mathbb{Z}_3)$ halkasını ve $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan R nin endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda R nin σ-katı benzeri bir halka olduğunu biliyoruz. $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ idempotenti için,

$$\sigma(e) = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için,

$$e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

dır. Diğer taraftan her $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & u+v \\ 0 & u+v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$ olur. Yani $e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e\, eRe\, \sigma\left(e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e\right) = 0$ olur ki bu da bize eRe nin σ-katı benzeri bir halka olmadığını gösterir.

R bir halka olsun. $a, b \in R$ ve b regüler olmak üzere $ab_1 = ba_1$ ($b_1a = a_1b$) olacak şekilde b_1 regüler olmak üzere $a_1, b_1 \in R$ varsa bu durumda R ye *sağ* (*sol*) *Ore halka* denir. Diğer taraftan R nin bir sağ (sol) Ore halka olması için gerek ve yeter koşul R nin klasik sağ (sol) kesir halkasının var olmasıdır. σ, R halkasının bir otomorfizması olsun. Kabul edelim ki R nin $Q(R)$ klasik sağ kesir halkası mevcut olsun. Bu durumda $a, b \in R$ ve b regüler olmak üzere herhangi bir $ab^{-1} \in Q(R)$ için $\sigma: Q(R) \to Q(R)$, $\sigma(ab^{-1}) = \sigma(a)\sigma(b)^{-1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da $Q(R)$ halkasının bir otomorfizmasıdır. Bir σ-katı R halkasının $Q(R)$ klasik sağ kesir halkası $Q(R)$ de σ-katı halkadır. Benzer olarak aşağıdaki sonuca sahibiz.

Önerme 4.11 Bir R halkasının $Q(R)$ klasik sağ kesir halkasının olduğunu kabul edelim. Eğer R, σ-katı benzeri bir halka ise, bu durumda $Q(R)$ halkası da σ-katı benzeri bir halkadır.

İspat. R, σ-katı benzeri bir halka ve $ab^{-1} \in Q(R)$ için $ab^{-1}Q\ R\ \sigma\ ab^{-1} = 0$ olsun. Bu durumda $0 = ab^{-1}Q\ R\ \sigma\ ab^{-1} = aQ(R)\sigma(a)\sigma(b)^{-1}$ olur. Çünkü,

$$b^{-1}Q\ R = Q\ R$$

dir. Bu ise $aQ\ R\ \sigma\ a = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $aR\sigma\ a = 0$ olur. R, σ-katı benzeri bir halka olduğundan $a = 0$ elde ederiz. Böylece $ab^{-1} = 0$ olur ki bu da bize $Q(R)$ nin σ-katı benzeri bir halka olduğunu gösterir. ■

5. UYGULAMALAR

R bir halka olmak üzere eğer, R nin boştan farklı her alt kümesinin sağ (sol) sıfırlayanı bir idempotent tarafından üretiliyor ise, bu durumda R ye *Baer halka* denir (Kaplansky 1968). Eğer R nin her bir sağ idealinin sağ sıfırlayanı (bir sağ ideal olarak) bir idempotent tarafından üretiliyor ise, bu durumda R ye bir *quasi-Baer halka* denir (Clark 1967). Bir halkanın Baerliği ve quasi-Baerliği sağ (sol) simetriktir. Eğer R nin her bir elemanının sağ (sol) sıfırlayanı bir idempotent tarafından üretiliyor ise bu durumda R halkasına bir *sağ (sol) p.p.-halka* denir. Eğer bir R halkası hem sağ hem de sol p.p.-halka ise, bu durumda bu halkaya bir *p.p.-halka* denir. Birkenmeier (2001) de, R nin her bir temel sağ (sol) idealinin sağ (sol) sıfırlayanı bir idempotent tarafından üretiliyor ise bu durumda R ye *sağ p.q.-Baer* (*sol p.q.-Baer*) *halka* denir. Eğer R halkası hem sağ hem de sol p.q.-Baer halkası ise bu durumda R ye bir *p.q.-Baer halka* denir. p.q.-Baer halkaların sınıfı tüm (quasi-) Baer ve tüm abelyan p.p.-halkaların sınıfı tarafından içerilir. Baer, quasi-Baer, p.q.-Baer ve p.p.-halkaların genişlemeleri kaynaklar bölümünde verilen birçok makalede çalışılmıştır (Hong *et al.* 2000). Bir σ-katı R halkası için R (quasi-) Baer $\Leftrightarrow R[x;\sigma,\delta]$ (quasi-) Baer $\Leftrightarrow R[[x;\sigma]]$ (quasi-) Baer olduğu ve p.q.-Baer (p.p.) $\Leftrightarrow R[[x;\sigma]]$ p.q.-Baer (p.p.) oldukları ispatlanmıştır. Bunlara paralel olarak bir σ-katı benzeri halka için aşağıdaki sonuca sahibiz.

Lemma 5.1 R bir σ-katı benzeri halka olsun.

(1) Herhangi $p(x), q(x) \in R[x;\sigma,\delta]$ için ,

$p(x)R[x;\sigma,\delta]q(x) = 0$ $(p(x)R[[x;\sigma]]q(x) = 0)$ olması için gerek ve yeter koşul $p(x)$ in her a ve $q(x)$ in her b katsayısı için $aRb = 0$ olmasıdır.

(2) $e^2 = e \in R[x;\sigma,\delta]$ $(R[[x;\sigma]])$ için eğer $eR[x;\sigma,\delta]$ $(eR[[x;\sigma]])$ nin bir ideali ise, bu durumda e_0, e nin sabit terimi olmak üzere $e = e_0$ dır.

İspat. (1) Teorem 3.2.6. dan direkt elde edilir.

(2) $e = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i$ olsun.

Bu durumda $1 - e = (1 - e_0) - \sum_{i=1}^{n} e_i x^i$ olur. $eR[x;\sigma,\delta]$ bir ideal olduğundan ,

$$(1-e)R[x;\sigma,\delta]e \subseteq (1-e)eR[x;\sigma,\delta] = 0$$

olup böylece $(1-e)R[x;\sigma,\delta]e = 0$ elde edilir.

(1) den $(1-e_0)Re_0 = 0$ ve $1 \leq i \leq n$ için $e_iRe_i = 0$ olur. Lemma 3.2.1. den R yarıasal olduğundan $1 \leq i \leq n$ için $e_i = 0$ elde edilir. Böylece $e = e_0$ olur. ■

Aşağıdaki örnek yukarıdaki Lemma da "$eR[x;\sigma,\delta]$, $R[x;\sigma,\delta]$ nın bir idealidir" şartının kaldırılamayacağını gösterir.

Örnek 5.2 Örnek 3.1.2.(1) deki $R = M_2(F)$ halkasını ve σ endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda R halkasının σ-katı benzeri bir halka olduğunu biliyoruz. $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in R[x;\sigma]$ için,

$$e^2 = e \in R[x;\sigma] \text{ ve } e \in eR[x;\sigma]$$

olur. $r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R[x;\sigma]$ için,

$$re = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \notin eR[x;\sigma]$$

dır. Çünkü $eR[x;\sigma]$ nın herhangi bir elemanının sabit terimi $a, b \in F$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ formdadır. Bu ise $eR[x;\sigma]$ nın bir ideal olmadığını gösterir. Ayrıca $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \notin R$ dir.

Önerme 5.3 R bir σ-katı benzeri halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) R bir quasi-Baer halkadır.
(2) $R[x;\sigma,\delta]$ bir quasi-Baer halkadır.
(3) $R[[x;\sigma]]$ bir quasi-Baer halkadır.

İspat. [Hong *et al.* 2009, Teorem 1] ve [Birkenmeier *et al.* 2001, Teorem 1.2] de R nin σ-katı benzerliği kabul olmaksızın (1) $\Rightarrow$ (2) ve (1) $\Rightarrow$ (3) ispatlanmıştır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki $R[x;\sigma,\delta]$ bir quasi-Baer halka ve J, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $r_{R[x;\sigma,\delta]}(JR[x;\sigma,\delta]) = eR[x;\sigma,\delta]$ olacak şekilde uygun bir $e \in R[x;\sigma,\delta]$ vardır. Fakat Lemma 5.1.(2) den $e \in R$ olur. Buradan,

$$r_R\ J\ = r_{R\ x;\sigma,\delta}\ \ J\, R\ x;\sigma,\delta\ \ \cap R = eR\ x;\sigma,\delta\ \cap R = eR$$

olduğunu Lemma 5.1.(1) den görürüz. Sonuç olarak R bir quasi-Baer halka olur.

$(3) \Rightarrow (1)$ benzer yöntemle ispatlanır. ■

Teorem 5.4 R bir σ-katı benzeri halka olsun.

(1) R nin bir sağ p.q.-Baer halka olması için gerek ve yeter koşul $R\ x;\sigma,\delta$ nın bir sağ p.q.-Baer halka olmasıdır.

(2) Eğer $R[[x;\sigma]]$ bir sağ p.q.-Baer halka ise bu durumda R bir sağ p.q.-Baer halkadır.

İspat. (1) Kabul edelim ki R bir sağ p.q.-Baer halka olsun.

$p\ x\ = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x;\sigma,\delta]$ olmak üzere $I = p(x)R[x;\sigma,\delta]$, $R[x;\sigma,\delta]$ nın bir temel sağ ideali olsun. $I^* = a_0R + \cdots + a_mR$ olarak alalım. R bir sağ p.q.-Baer halka olduğundan $r_R\ I^*\ = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır. R yarıasal olduğundan e, merkezi bir idempotenttir. Bu durumda $I^*Re = 0$ ve böylece Lemma 5.1.(1) den $p\ x\ R\ x;\sigma,\delta\ e = 0$ olur. Böylece $Ie = 0$ ve buradan $e \in r_{R\ x;\sigma,\delta}\ (I)$ elde edilir. Buradan $eR[x;\sigma,\delta] \subseteq r_{R\ x;\sigma,\delta}\ (I)$ olur. Şimdi $q\ x\ = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in r_{R\ x;\sigma,\delta}\ (I)$ olsun. Bu durumda $p\ x\ R\ x;\sigma,\delta\ q\ x\ = 0$ ve Lemma 5.1.(1) gereğince de $b_0, b_1, \dots, b_n \in r_R\ I^*\ = eR$ elde edilir. Böylece $0 \le i \le n$ için $b_i = ec_i$ olacak şekilde $c_i \in R$ ler vardır. O halde, $q\ x\ = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n = ec_0 + ec_1x + \cdots + ec_nx^n = e(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \in eR[x;\sigma,\delta]$ olur. Sonuç olarak,

$$r_{R\ x;\sigma,\delta}\ \ I\ = eR[x;\sigma,\delta]$$

olur ki bu da bize $R[x;\sigma,\delta]$ halkasının sağ p.q.-Baer halka olduğunu gösterir.

(1) in tersi ve (2) nin ispatları Önerme 5.3 ün $(2) \Rightarrow (1)$ durumundan elde edilir. ■

Önerme 5.5 R bir yarıasal halka ve σ da herhangi bir $e \in R$ merkezi idempotenti için $\sigma\ e\ = e$ olacak şekilde bir otomorfizma olsun. Eğer R bir sağ p.q.-Baer halka ise bu durumda R, σ-katı benzeri bir halkadır.

İspat. Kabul edelim ki R bir sağ p.q.-Baer halka , yarıasal ve $a \in R$ için $aR\sigma(a) = 0$ olsun. Bu durumda $\sigma(a) \in r_R(aR) = eR = \sigma(eR)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ idempotenti vardır. R, yarıasal olduğundan bu e idempotenti merkezidir.
$a \in eR = r_R(aR)$ olduğundan $aRa = 0$ olur. R yarıasal oluğundan da $a = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak R bir σ-katı benzeri halkadır. ■

Önerme 5.5 teki "herhangi bir $e \in R$ merkezi idempotenti için $\sigma(e) = e$" şartı kaldırılamaz. Gerçekten; Örnek 3.1.2.(2) deki $R = Z_2 \oplus Z_2$ halkası ve σ otomorfizması göz önüne alındığında, R yarıasal ve sağ p.q.-Baer bir halkadır fakat σ-katı benzeri bir halka değildir ve $\sigma((1,0)) \neq (1,0)$ dır.

KAYNAKLAR

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992). Rings and Categories of Modules. Springer Verlag, 2. Edition, USA.

Annin, S. (2002). Associated primes over skew polynomial rings. *Communications in Algebra*, **30:** 2511-2528.

Başer, M., Harmanci, A. and Kwak, T.K. (2008). Generalized semicommutative rings and their extensions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **45:** 285-297.

Birkenmeier, G.F., Heatherly, H.E. and Lee, E.K. (1993). Completely prime ideals and associated radicals. *World Scientific Publishing, River Edge, NJ and Ring theory (Granvile, OH, 1992),* 102-129.

Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y. and Park, J.K. (2001). Principally quasi-Baer rings. *Communications in Algebra,* **29:** 639-660.

Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y. and Park, J.K. (2001). Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings. *Journal of Pure and Applied Algebra,* **159:** 25-42.

Clark, W.E. (1967). Twisted matrix units semigroup algebras. *Duke Mathematical Journal*, **34:** 417-423.

Hashemi, E. and Moussavi, A. (2005). Polynomial extensions of quasi-Baer rings. *Acta Mathematical Hungarica,* **107:** 207-224.

Hashemi, E. (2006). Compatible ideals and radicals of Ore extensions. *New York Journal of Mathematics,* **12:** 349-356.

Hong, C.Y. and Kwak, T.K. (2000). On minimal strongly prime ideals. *Communications in Algebra,* **28:** 4867-4878.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p.-rings.

Journal of Pure and Applied Algebra, **151:** 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2003). On skew Armendariz rings.

Communications in Algebra, **31:** 103-122.

Hong, C.Y., Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. (2005). Rigid ideals and radicals of Ore extensions. *Algebra Colloquium,* **12:** 399-412.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Lee, Y. (2009). Ore extensions of quasi-Baer rings. *Communications in Algebra,* **37:** 2030-2039.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2010). On quasi-rigid ideals and rings. *Bulletin of the Korean Mathematical Society,* **47:** 385-399.

Hungerford, T.W. (1974). Algebra Holt, Rinehart and Winston Inc., New York.

Kamal, A.A.M. (1994). Some remarks on Ore extensions rings. *Communications in Algebra,* **22:** 3637-3667.

Kaplansky, I. (1968). Rings of Operators. W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam.

Kim, N.K. and Kwak, T.K. (1999). Minimal prime ideals in 2-primal rings. *Mathematics Japon,* **50:** 415-420.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium,* **3:** 289-300.

Lam, T.Y., Leroy, A. and Matczuk, J. (1997). Primeness, semiprimeness and prime radical of Ore extensions. *Communications in Algebra,* **25:** 2459-2506.

Lee, T.K. and Zhou, Y.Q. (2004). Armendariz and reduced rings. *Communications in Algebra,* **32:** 2287-2299.

Marks, G. (2001). On 2-primal Ore extensions. *Communications in Algebra,* **29:** 2113-2123.

Pearson, K.R. and Stephenson, W. (1977). A skew polynomial ring over a Jacobson ring need not be a Jacobson ring. *Communications in Algebra,* **5:** 783-794.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nigar ÖZSOY

Doğum Yeri : Fethiye

Doğum Tarihi : 22.05.1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fethiye Lisesi, 2010

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2014