ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem OCAKLI

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Özlem OCAKLI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Özlem OCAKLI tarafından hazırlanan "Çift Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 02/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/06/2014

Özlem OCAKLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Özlem OCAKLI
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

Bu çalışma, dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı için ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Bir kümenin yoğunluğu, tek dizilerde yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmış olup bu kavramların temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümün; birinci kısmında, çift dizilerde yakınsaklık kavramları tanıtılarak özellikleri incelenmiş ve örnekler verilmiştir. İkinci kısmında, çift seriler hakkında temel bilgilere değinilmiştir. Çift serilerin yakınsaklığı ve mutlak yakınsaklığı tanımlanmıştır. Bununla ilgili örneklendirme yapılarak incelenmiştir. Dördüncü bölümün; ilk kısmında, ikinci bölümde verilen bilgiler ışığında çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış olup özellikleri incelenmiş ve örneklendirmeler yapılmıştır. Çift dizilerin Pringsheim anlamında yakınsaklığı ile istatistiksel yakınsaklığı arasında ilişkilendirmeler yapılmıştır. Son olarak, ikinci kısımda, çift dizilerde istatistiksel yakısaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

2014, v+60 sayfa

Anahtar Kelimeler : Çift diziler, istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik, Pringsheim yakınsaklık

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON STATISTICAL CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES

Özlem OCAKLI
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Yurdal SEVER

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter includes definitions of necessary concepts and some theorems. Density of a set, convergence in single sequences, statistical convergence concepts are defined and their main properties are given. In the first part of the third chapter, convergence concepts in double sequences are introduced, their properties studied and examples about those are given. In the second part, basic information about double series are discussed. Moreover, convergence of double series and their absolute converge are defined. Examples related with those are solved. In the first part of the fourth chapter, in the light of second chapter, statistical convergence on double sequences is defined and it is studied with examples. Also, the relations between Pringsheim convergence and statistical convergence of double sequences are examined. Finally, in the second part, the connection between statistical convergence and strong Cesàro convergence of double sequences.

2014, v+60 pages

Key Words : Double sequences, statistical convergence, strongly p- Cesàro summable, Pringsheim convergence.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER'e ve hocam Sayın Prof. Dr. Fatih NURAY'a, tez yazım aşaması süresince ilgi ve desteğini hiç eksik etmeyen, engin bilgi ve görüşlerini paylaşarak yol gösteren Sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya, ayrıca tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı Sayın Doç. Dr. Başak KARPUZ'a ve Sayın Arş. Grv. Şükrü TORTOP'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Özlem OCAKLI

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Pozitif tamsayıların kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
c	Yakınsak diziler uzayı
$x = (x_k)$	Reel sayıların bir dizisi
$\delta_2(A)$	A kümesinin çift doğal yoğunluğu
C_1	Cesàro operatörü
L_x	$x = (x_k)$ dizisinin limit noktalarının kümesi
Γ_x	$x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
Λ_x	$x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
$St - \lim x$	$x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel limiti
$x = (x_{jk})$	Reel sayıların bir çift dizisi
$St_2 - \lim x_{jk}$	$x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{M}_u$	Sınırlı çift dizilerin uzayı
Ω	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün çift dizilerin uzayı
C_p	Pringsheim yakınsak çift dizilerin uzayı
C_{bp}	Prigsheim yakınsak ve sınırlı çift dizilerin uzayı
C_r	Regüler yakınsak çift dizilerin uzayı
C_e	e yakınsak çift dizilerin uzayı
(X, Y)	X uzayından Y uzayına tanımlı matrislerin sınıfı
$(X, Y; p)$	X uzayından Y uzayına tanımlı regüler matrislerin sınıfı
ω_p	Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
ω_p^2	Kuvvetli p-Cesàro toplanabilen çift dizilerin kümesi
$\Lambda_2(x)$	$x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
$L_2(x)$	$x = (x_{jk})$ çift dizisinin Pringsheim limit noktalarının kümesi

1 GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1949 yılında Steinhaus tarafından Polonya'da gerçekleştirilen bir konferansta tanıtılmış olup Fast (1951) tarafından ve Steinhaus (1951) tarafından birbirlerinden bağımsız bir şekilde çalışılmıştır. Daha sonra 1953 yılında Buck ve 1959 yılında Schoenberg tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı reel ve kompleks diziler için verilmiştir. İstatistiksel yakınsaklık fourier analiz, ergodic teorisi ve sayılar teorisinde farklı isimler altında tartışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık Zygmund tarafından da ele alınmış olup "hemen hemen yakınsaklık" olarak ifade edilmiştir. İstatistiksel yakınsaklık toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. Toplanabilme teorisi ile ilk ilişkilendirilmesi Schoenberg tarafından yapılmıştır. Daha sonraları bu özellikler 1980 yılında Šalát, 1985 yılında Fridy, 1989 yılında Connor, 1990 yılında Fridy ve Miller, 1991 yılında Fridy ve Orhan tarafından devam edilmiştir. 1993 yılında Fridy tarafından istatistiksel limit noktaları kavramı verilmiş olup 1997 yılında Fridy ve Orhan tarafından istatistiksel üst limit ve alt limit kavramları tanımlanmıştır. 1993 yılında Fridy ve Orhan tarafından verilen lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı Demirci (2002) tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı, $A-$ istatistiksel yakınsaklık kavramına genişletilmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve diğer yakınsaklık kavramları daha sonraları çift dizilerde incelenmeye başlanmıştır. Çift dizilerde Prinsheim anlamında yakınsaklık Hardy tarafından tanımlanmıştır. 2003 yılında Murselen ve Edely İstatistiksel yakınsaklık kavramını çift dizilere genişletmiştir. Móricz 2003 yılında multiple dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramını incelemiştir. İstatistiksel yakınsaklık reel değerli çift indisli fonksiyon dizilerinde Gökhan ve Güngör (2007) tarafından incelenmiştir. Son yıllarda, istatistiksel yakınsaklık genelleştirmeleri locally kapalı uzaylar üzerinde sınırlı sürekli fonksiyonların ideallerinin yapısı ve kuvvetli integral toplanabilirlik çalışmalarında görülmektedir. Nuray (2000) istatistiksel yakınsaklık genelleştirmesi çalışmalarına katkıda bulunmuştur.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilecek ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı yoğunluk kavramı verilecektir.

2.1 Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 X boştan farklı bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde yarı metrik fonksiyon ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir. Eğer (M1) d(x,y)=0 şartı yerine

$$(M1)' \;\; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

şartını alırsak d fonksiyonuna X metrik fonksiyonu ve (X, d) ikilisine de *metrik uzay* denir.

Tanım 2.1.2 Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin w uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

Tanım 2.1.3 X boş olamayan bir cümle ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$$

fonksiyonları eğer $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x+0=x$ olacak şekilde bir $0 \in X$

L4) $x+(-x)=0$ olacak şekilde bir $-x \in X$ mevcut

L5) $1.x=x$

L6) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

L7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

L8) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

şartları sağlanırsa, X cümlesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay* denir.

X, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde lineer uzay ve $Y \subset X$ ise, Y cümlesinin de X cümlesi üzerinde tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında lineer uzay olması için λ ve $y_1, y_2 \in Y$ alındığında $\lambda y_1 + y_2 \in Y$ sağlanması yeterlidir.

Tanım 2.1.4 X bir lineer uzay ve $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve her $\lambda_n \in \mathbb{C}$ için;

P1) $g(\theta)=0$

P2) $g(x)=g(-x)$

P3) $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$

P4) $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $x_n \to x_0$ olması $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$ olmasını gerektirir

şartlarını sağlıyorsa, g fonksiyonuna X üzerinde bir *paranorm* ve (X, g) ikilisine de *paranormlu uzay* denir.

Tanım 2.1.5 X lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her λ skaleri için;

YN1) $\|x\| \geq 0$

YN2) $\|\theta\| = 0$

YN3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

YN4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı-norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *yarı-normalu uzay* denir. Eğer $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir.

Tanım 2.1.6 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir.

Tanım 2.1.7 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x = (x_n)$ dizisi verilsin.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad k(n) = k_n$$

dizisi(fonksiyonu) bir artan dizi olmak üzere

$$x \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir *alt dizi* denir ve

$$(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $K = \{x : \ | x - a | < \varepsilon, \ x \in \mathbb{R}\}$ kümesine *a sayısının ε komşuluğu* denir.

Tanım 2.1.9 (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var ve $x \in \mathbb{R}$, $\forall n > n_0$ için

$$|x_n - x| \leq \varepsilon$$

oluyorsa (x_n) dizisi $x \in \mathbb{R}$ noktasına *yakınsaktır* denir.

$$\lim x_n = x \ \text{ veya } \ (x_n) \to x$$

ile gösterilir. Buradan (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının ε komşuluğunda bulunduğu anlaşılmaktadır.

Tanım 2.1.10 Her $n \in \mathbb{N}$ için $| x | < M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine *sınırlı* dizi denir.

Tanım 2.1.11 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m,\ n\ \geq\ n_0$ olduğunda $\mid x_m - x_n \mid < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.12 Her $\varepsilon > 0$ için $\{k : |x_k - x_0| < \varepsilon\}$ yani x_0 sayısının her ε komşuluğunda (x_k) dizisinin x_0 haricinde sonsuz tane elemanı varsa $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_k)$ dizisinin *yığılma noktası* denir. Burada x_0 dizinin terimi olmak zorunda değildir.

Bu tanım sanki limit tanımına çok benzemektedir. Fakat bu doğru değildir. Çünkü x_0 bir (x_k) dizisinin limiti ise her $k > n_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $|x_k - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısının var olmasıdır. Yani burada n_0 dan büyük olan her k nın $\varepsilon > 0$ komşuluğunda kalması gerekmektedir. Fakat yığılma noktasında ise belli bir n_0 dan büyük olan sonsuz sayıda k lar $\varepsilon > 0$ komşuluğunda kalırken yine n_0 dan büyük olan sonsuz sayıda k lar da bu $\varepsilon > 0$ komşuluğunun dışında kalabilir. Yani yığılma noktası n_0 dan büyük olan her k yı $\varepsilon > 0$ komşuluğunda bulundurmasını garanti etmez.

Tanım 2.1.13 Herhangi bir A kümenin kendisini ve tüm yığılma noktalarını içeren kümeye A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Eğer $A \subset X$ ve $\overline{A} = X$ oluyorsa A kümesi X'de *yoğundur* denir.

Tanım 2.1.14 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.15 $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere A cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_A olmak üzere,

$$\chi_A(j) = \begin{cases} 1 & , \ j \in A \\ 0 & , \ j \in (\mathbb{N} \setminus A) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.16 X ve Y, tüm diziler uzayı olan ω' nın iki alt cümlesi ve $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ ve her $n \geq 1$ için

$$y_n = A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise bu durumda $y = (y_n) = (A_n x) = Ax$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen *dönüşüm dizisi* denir (Wilansky 1984, Maddox 1970, Boss 2000).

Eğer her $x \in X$ için $y = (A_n x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y = (A_n x) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine X uzayından Y uzayı içine bir *matris dönüşümü* denir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsak ise x dizisi, A-*toplanabilirdir* denir ve $A\text{-}\lim x = L$ şeklinde yazılır. X uzayından Y uzayı içine tanımlı tüm matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Eğer A, X uzayından Y uzayı içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ yazılır. $(X, Y; p)$ ifadesi ile toplam yada limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. Özel olarak $X = Y = c$ (yakınsak dizilerin uzayı) olmak üzere, $A \in (c, c)$ ise A matrisine *konservatif matris* ve $A \in (c, c; p)$ ise bu durumda A matrisine *regüler matris* denir.

Tanım 2.1.17 l_∞ ile tüm sınırlı dizilerin uzayını göstereceğiz. Yani

$$l_\infty = \{x = (x_k) : \ \mid x_k \mid \leq K,\ K \in \mathbb{R}\}$$

dır. c uzayı ile tüm yakınsak dizilerin uzayını göstereğiz. Yani

$$c = \{x = (x_k) : x_k \to L,\ L \in \mathbb{R}\}$$

dir. Buradan $c \subset l_\infty$ olduğu açıktır. 0 sayısına yakınsak dizilerin uzayı

$$c_0 = \{x = (x_k) : x_k \to 0\}$$

dır.

2.2 Yoğunluk Kavramı

Bu kısımda yoğunluk kavramı tanımlanacak olup yoğunluk kavramının özellikleri incelenecektir ve yoğunluk yardımıyla istatistiksel yakınsaklık verilecektir.

Tanım 2.2.1 $P(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet cümlesini göstermek üzere;

$$\underline{\delta} : P(\mathbb{N}) \to [0, 1]$$

için,

D1) $A \sim B \implies \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$

D2) $A \cap B = \emptyset \implies \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$

D3) $\forall A, B$ için $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$

D4) $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$

özellikleri sağlanıyorsa $\underline{\delta}$ fonksiyonuna bir *alt yoğunluk fonksiyonu* denir.

Buradaki $A \sim B$; A nın B ye asimptotik olarak eşit olması demektir. Bunun için A ve B doğal sayılar kümesinin herhangi iki alt kümeleri olmak üzere $A \triangle B$ simetrik farkı sonlu olması gerekir.

Tanım 2.2.2 $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} - A)$ şeklinde tanımlanan $\overline{\delta}$ yoğunluğuna *birleştirilmiş üst yoğunluk* adı verilir (Freedman and Sember 1981).

Teorem 2.2.3 Herhangi A, B doğal sayı kümeleri için;

i) $A \subseteq B \implies \underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$

ii) $A \subseteq B \implies \overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B)$

iii) $\forall\ A, B$ için $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$

iv) $\underline{\delta}(\emptyset) = \overline{\delta}(\emptyset) = 0$

v) $\overline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$

vi) $A \sim B \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$

vii) $\underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A)$ dir (Freedman and Sember 1981).

Tanım 2.2.4 $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ cümlelerini ele alalım. $|K| = cardK$, K cümlesinin kardinalitesi olmak üzere

$$\underline{\delta}(K) = \liminf \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla K cümlesinin alt ve üst yoğunlukları denir. Eğer $\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K cümlesinin *doğal yoğunluğu* denir.

$$\delta(K) = \lim \frac{|K_n|}{n} = \lim \frac{1}{n}|\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir.

Örnek 2.2.5 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ doğal sayılar kümesi için $\delta(\mathbb{N}) = 1$ dir.

Örnek 2.2.6 $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ çift doğal sayılar kümesi olsun. $\left(\frac{|A_n|}{n}\right)$ dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots$$

şeklindedir. Buradan;

$$\delta(A) = \lim \frac{|A_n|}{n} = \frac{1}{2}$$

dir. Benzer şekilde,

$B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ tek doğal sayılar kümesinin yoğunluğu ise,

$$\delta(B) = \delta(\mathbb{N} - A) = 1 - \delta(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

olacaktır.

Örnek 2.2.7 $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ kümesi asal sayıların kümesi olsun. $\delta(P) = 0$ dır.

Örnek 2.2.8 $L = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ kümesi için; $\left(\frac{|L_n|}{n}\right)$ dizisi;

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{8}, \frac{3}{9}, \ldots$$

şeklindedir. Burada

$$\delta(L) = \lim \frac{|L_n|}{n} \leq \lim \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olur.

Örnek 2.2.9 $A = \{1, 4, 5, 6, 13, 14, ...24, 49, 50, ...96, 193, 194, ...\}$ kümesi için $\left(\frac{|A_n|}{n}\right)$ dizisinin üst limitini oluşturan alt dizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, \ldots \to \frac{2}{3}$$

ve alt limitini oluşturan alt dizisi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, \dots \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. O halde A kümesinin alt ve üst yoğunlukları mevcut olmasına rağmen, bu değerler birbirine eşit olmadığından yoğunluğu mevcut değildir.

Uyarı 2.2.10 (x_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise,

$$\delta(K) = \lim_k \frac{k}{x_k}$$

dir.

2.3 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda yakınsaklık kavramı hatırlatılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır ve aralarındaki ilişki açıklanacaktır.

Tanım 2.3.1 Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\delta(\{k : |x_k - L| \geq \epsilon\}) = 0$$

yani,

$$\lim \frac{1}{n}\big|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}\big| = 0$$

ise x dizisi $L \in \mathbb{R}$ ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $St - \lim x = L$ ile gösterilir (Šalát and Tijdeman 1980).

Eğer bir (x_k) dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak ise L noktasının her $\varepsilon > 0$ komşuluğunun dışında kalan elemanlarının yoğunluğu sıfırdır. Yakınsak olan herhangi bir (x_k) dizisi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Çünkü dizinin yakınsadığı noktanın her $\varepsilon > 0$ komşuluğunun dışında dizinin sonlu tane eleman kalacaktır. Sonlu tane elemanı olan kümelerin yoğunluğu sıfırdır. O halde dizi istatistiksel yakınsaktır diyebiliriz. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani, istatistiksel yakınsak olan bir dizi aynı zamanda yakınsak bir dizi olmayabilir.

Örnek 2.3.2 $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k = n^2, \quad n \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$K = \{k : |x_k - 0| \geq \epsilon\} = \{1, 4, 9, ...\}$$

olur ve K kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(K) = 0$ dır. O halde $x = (x_k)$ dizisi $L = 0$ noktasına istatistiksel yakınsaktır. $St-\lim x_k = 0$ dır. Fakat bu dizinin ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonlu olmadığından yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı bilinen anlamda adi yakınsaklık kavramını biraz daha genişleterek dizinin yakınsak olduğu noktanın her $\epsilon > 0$ komşuluğunun dışında sonlu sayıda değilde sonsuz sayıda da dizinin elemanının bulunabileceğini fakat bu elemanların sayısının dizinin bütün elemanlarının sayısına göre daha az olmasını ifade eder. Burada kastedilen dizinin hemen hemen bütün elemanları yakınsanan noktanın $\varepsilon > 0$ komşuluğunda kalmasıdır. Dizinin yakınsadığı noktanın $\varepsilon > 0$ komşuluğunun dışındaki terimlerinin dizinin tüm terimlerine göre daha az olması, yakınsanan noktanın $\varepsilon > 0$ komşuluğunun dışında kalan elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir.

Tanım 2.3.3 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizisileri için $\delta(\{k \in N : x_k \neq y_k\}) = 0$ ise x ve y dizileri *hemen hemen her k için eşittir* denir.

Örnek 2.3.4 $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 2 & , \quad k \text{ asal sayı ise} \\ k & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Gerçektende, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k : |x_k - L| \geq \epsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı bulunamaktadır. Burada dizinin 2 olan terimlerinin indis kümesinin yoğunluğu sıfırdır fakat dizinin 2 haricindeki terimleri herhangi bir $L \in \mathbb{R}$ sayısının $\varepsilon > 0$ komşuluğu içinde kalmamaktadır. Bu yüzden $x = (x_k)$ dizisi ne yakınsaktır ne de istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.3.5 $x = (x_n)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta(\{n_k : k \in N\}) = 1$ ve $\lim x_{n_k} = L$ olacak şekilde bir (n_k) indis dizisinin mevcut olmasıdır.

Lemma 2.3.6 $St - \lim_{k\to\infty} x_k = a$ ve $St - \lim_{\to\infty} y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu durumda;

(i) $St - \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = a + b$

(ii) $St - \lim_{k\to\infty}(cx_k) = ca$

olur.

Tanım 2.3.7 Herhangi bir J reel sayısı için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > J\}) = 1$$

ise (x_k) dizisi $+\infty$ a *istatistiksel ıraksaktır*,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < J\}) = 1$$

ise (x_k) dizisi $-\infty$ a *istatistiksel ıraksaktır* denir (Tripathy 1998).

Tanım 2.3.8 $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin $St - \lim_{k\to\infty} x_k = 0$ ise diziye *istatistiksel sıfır dizisi* denir.

Teorem 2.3.9 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu durumda dizilerin çarpımları da istatistiksel sıfır dizisidir (Connor 1985).

Aşağıdaki tanımda Cauchy yakınsaklık kriterinin bir benzeri olarak istatistiksel Cauchy dizisi tanımlanacak ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu belirtilecektir.

Tanım 2.3.10 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big|\{k \le n : |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}\big| = 0$$

olacak şekilde veya h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir (Fridy 1985).

Teorem 2.3.11 İstatistiksel yakınsak olan her $x = (x_k)$ dizisi aynı zamanda bir istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy 1985).

Teorem 2.3.12 Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

Şimdide; Ayrışım Teoremi olarak bilinen teoremi ifade edelim.

Teorem 2.3.13 $x = (x_k)$ dizisi bir L noktasına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $x = y + z$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \neq y_k\}\right| = 0$$

olacak şekilde L sayısına yakınsak olan bir $y = (y_k)$ dizisi ve $z = (z_k)$ istatistiksel sıfır dizisi vardır. Ayrıca $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ise

$$\|z_k\|_\infty \leq \|x_k\|_\infty + |L|$$

olacak şekilde $z = (z_k)$ dizisi de sınırlıdır (Connor 1988).

Sonuç 2.3.14 Bir $x = (x_k)$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak ise $\lim y_k = L$ olacak şekilde bir $y = (y_k)$ alt dizisi vardır (Connor 1988).

Şimdi reel terimli diziler için, bir dizinin yığılma noktaları ve limit noktaları kavramlarının benzerleri olan istatistiksel yığılma ve istatistiksel limit noktalarını tanımlanıp, bu noktaların temel özellikleri verilecektir ve bu noktalar ile dizinin adi anlamda limit noktaları arasındaki bağıntılara yer verilecektir.

Bilindiği gibi, bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına yakınsayan bir alt dizisi var ise L sayısı x dizisinin bir adi limit noktasıdır. Örneğin, $(x_k) = (-1)^k$ dizisini ele alırsak, bu dizinin terimlerinin oluşturduğu küme $\{-1, 1\}$ kümesinden ibarettir. Bu kümenin yığılma noktalarının kümesi $\emptyset$ dir. Bu dizinin limit noktalarının kümesi

-1 ve 1 sayılarına yakınsak olan alt diziler bulunabileceğinden $\{-1, 1\}$ dir. Fakat bu dizi yakınsak bir dizi değildir. Burada dizinin limiti ve limit noktası ifadelerinin farklı anlamlar taşıdığı görülmektedir.

Tanım 2.3.15 (x_{k_i}) dizisi (x_k) dizisinin bir alt dizisi olsun. $K = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi (x_{k_i}) alt dizisnin indis kümesi olsun. Eğer $\delta(K) = 0$ ise (x_{k_i}) alt dizisine *seyrek alt dizi* veya *sıfır yoğunluklu alt dizi* denir. Eğer $\delta(K) > 0$ veya K kümesi doğal yoğunluğa sahip değilse (x_{k_i}) alt dizisine *seyrek olmayan alt dizi* veya *sıfır yoğunluğa sahip olmayan alt dizi* denir (Fridy 1993).

Örnek 2.3.16 $x = (x_k) = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ dizisini ele alalım;

$$\begin{aligned} A &= \{1, 4, 7, ...\} = \{1 + 3k : k = 0, 1, 2, ...\} \\ B &= \{2, 5, 8, ...\} = \{2 + 3k : k = 0, 1, 2, ...\} \\ C &= \{3, 6, 9, ...\} = \{3 + 3k : k = 0, 1, 2, ...\} \end{aligned}$$

Burada $\delta(A) = \delta(B) = \delta(C) = \frac{1}{3} > 0$ olduğundan bu indeks kümelerine göre oluşturulan alt diziler $x = (x_k)$ dizisinin seyrek olmayan alt dizileridir (Pehlivan 2001).

Verilen bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına yakınsak bir alt dizisi varsa L sayısı dizinin adi anlamda limit noktasıdır. Buradan hareketle Fridy (1993) tarafından bir $x = (x_k)$ dizisi için bir alt dizisinin yoğunuğu göz önüne alınarak istatistiksel limit noktası aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.17 Bir $x = (x_k)$ dizisinin $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsayan seyrek olmayan bir alt dizisi varsa yani $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_i < \cdots\}$ ve $\delta(K) > 0$ olmak üzere $i \to \infty$ için $x_{k_i} \to \lambda$ ise λ, $x = (x_k)$ dizisinin bir *istatistiksel limit noktası* adı verilir (Fridy 1993).

Herhangi bir $x = (x_k)$ sayı dizisinin adi anlamda limit noktalarının kümesi L_x ile istatistiksel anlamda limit noktalarının kümesini ise Λ_x ile gösterilmektedir.

Örnek 2.3.18 $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1 \quad , \quad k = n^2 \ , \quad n = 1, 2, 3, ... \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $x = (x_k)$ dizisi için $L_x = \{0, 1\}$ ve $\Lambda_x = \{0\}$ dır.

Herhangi bir $x = (x_k)$ sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ dir. Gerçektende $\lambda \in \Lambda_x$ olması, λ sayısına adi anlamda yakınsayacak seyrek olmayan bir alt dizisinin mevcut olduğunu gösterir. Burada λ sayısına yakınsak bir alt dizinin varlığı ortaya çıkmaktadır ki bu ifadenin sonucu olarak da $\lambda \in L_x$ olduğu açıkca görülmektedir. Bu ifadenin tersinin doğru olmadığı Örnek (2.3.18) de görülmektedir. Herhangi bir sayının L_x kümesinin elemanı olmasının sonucu olarak bu sayıya yakınsak olan bir alt dizinin varlığını garanti ederiz fakat bu alt dizinin indislerinin kümesinin yoğunluğunun sıfırdan farklı olduğunu yani seyrek olmayan bir alt dizi olduğunu garanti edemeyiz.

Tanım 2.3.19 Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\left\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\right\}$$

kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse γ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel yığılma noktası* denir. Γ_x ifadesi, verilen bir $x = (x_k)$ dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesini gösterir (Fridy 1993).

Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ dir. Gerçektende, $\lambda \in \Gamma_x$ olması λ nın her $\varepsilon > 0$ komşuluğunun sıfır yoğunluğa sahip olmaması demektir. Bu da bu komşuluklarda sonsuz tane elemanın bulunduğunun göstergesidir. λ sayısının $\varepsilon > 0$ komşulukları sınırlı ve sonsuz tane elemana sahip olduğundan burada yakınsak bir alt dizi bulunur. Bu ise λ sayısının L_x kümesinin elamanı olduğunu göstermektedir. Genelde adi limit noktaları ile ilgili bilgilerimiz bize Λ_x ve Γ_x kümelerinin birbirine denk olacağını düşündürür. Fakat Fridy 1993 yılında bunun böyle olmadığını ispatlamıştır. Herhangi bir x dizi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dir. Buradan hereketle $St - \lim x_k = \lambda$ ise $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\lambda\}$ denilir. Fakat bu ifadenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnek ile Fridy tarafında 1993 te gösterilmiştir. Bu açıklamalar sonucunda bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x \subseteq L_x$ geçerli olduğu görülür (Fridy 1993).

Örnek 2.3.20 $x = (x_k)$ dizisi,

$$x_k = \{(1 + (-1)^k)k : k \in \mathbb{N}\} = \{0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, 16, 0, ...\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizinin iki tane alt dizisi

$$x_{2k} = \{4, 8, 12, 16, ...\}$$

ve

$$x_{2k-1} = \{0, 0, 0, 0, ...\}$$

dir. $\delta(\{1, 3, 5, ...\}) = \delta(\{2, 4, 6, ...\}) = \frac{1}{2}$ olduğundan, $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ dır. Fakat $St - \lim x$ mevcut değildir.

Şimdi istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramlarını ve alışılmış üst ve alt limit'in özelliklerinin bazı istatistiksel benzerlerini vereceğiz. Herhangi bir $x = (x_k)$ sayı dizisi için

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \delta(\{k : x_k < a\}) \neq 0\}$$

olsun. Burada $\delta(K) \neq 0$ ifadesi ile $\delta(K) > 0$ veya K kümesi yoğunluğa sahip değil anlamında ele alacağız.

Tanım 2.3.21 Bir x dizisinin istatistiksel üst limiti

$$St - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x & , \quad B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir. Benze şekilde bir x dizisin istatistiksel alt limiti

$$St - \liminf x = \begin{cases} \inf A_x & , \quad A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , \quad A_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklindedir (Fridy and Orhan 1997).

Teorem 2.3.22 $\beta = St - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k : x_k > \beta - \varepsilon\}) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k : x_k > \beta + \varepsilon\}) = 0 \tag{2.1}$$

dır. Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (2.1) ifadesi gerçeklenirse $\beta = St - \limsup x$ dir (Fridy and Orhan 1997).

Teorem 2.3.23 $\alpha = St - \liminf x$ sonlu ise ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k : x_k < \alpha - \varepsilon\}) = 0$$

dır. Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için yukarıdaki ifade gerçeklenirse $\alpha = St - \liminf x$ dir (Fridy and Orhan 1997).

İstatistiksel yığılma noktası tanımından ve yukarıdaki (2.3.22) ve (2.3.23) teoremlerinden $St - \limsup x$, x dizisinin en büyük istatistiksel yığılma noktasıdır; $St - \liminf x$, x dizisinin en küçük istatistiksel yığılma noktasıdır diyebiliriz.

Teorem 2.3.24 Herhangi bir x dizisi için

$$St - \liminf x \leq St - \limsup x$$

dir (Fridy ve Orhan 1997).

Bu teoremin sonucu olarak herhangi bir x dizisi için

$$\liminf x \leq St - \liminf x \leq St - \limsup x \leq \limsup x$$

olduğu görülür. Ayrıca istatistiksel sınırlı bir x dizisi için $St - \limsup x$ ve $St - \liminf x$ değerlerinin sonlu olmasını gerektirir.

Teorem 2.3.25 İstatistiksel sınırlı bir x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ver yeter şart

$$St - \liminf x = St - \limsup x$$

olmasıdır.

2.4 İstatistiksel Yakınsaklık ve Toplanabilme

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık ile aritmetik ortalama ve klasik toplanabilme metotları arasındaki ilişki verilecektir. İstatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisi ile ilk ilişkisini Schoenberg (1959) belirtmiştir. Daha sonra ise yine aynı özelliklerin incelenmesine Fridy (1985), Fridy ve Miller (1990), Fridy ve Orhan (1991) tarafından devam edilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklığa denk bir ifadeyi vermek için öncelikle $C_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisini tanımlayacağız. Bu matris

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklindedir. Bu durumda, $K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ ve $\chi_{K(\varepsilon)}$, $K(\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\begin{aligned} St - \lim_k x_k = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \lim_n \frac{1}{n} \big| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \big| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \lim_n (C_1 \chi_{K(\varepsilon)})_n = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 2.4.1 $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $St - \lim x_k = L$, $(L \in \mathbb{R})$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < K$, $(K \in \mathbb{R})$ ise $C_1 - \lim x_k = L$ dir. Yani istatistiksel yakınsak ve sınırlı her dizinin aritmetik ortalamasıda yakınsaktır (Schoenberg 1959).

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Örneğin $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ şeklinde tanımlanan bir dizinin aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ ye yakınsaktır. Fakat dizinin kendisi istatistiksel yakınsak değildir.

Aşağıdaki teorem, istatistiksel yakınsaklık metodunun hiç bir matris metodu tarafından içerilmediğini göstermektedir. Bunun için öncelikle bir lemma vereceğiz.

Lemma 2.4.2 Sonsuz çoklukta k'lar için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir dizi t ise, h.h.k. için $x_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi vardır (Fridy 1985).

Teorem 2.4.3 Hiçbir toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez. Yani $A \in (\mathcal{S}, c; p)$ olacak şekilde hiç bir matris yoktur (Fridy 1985).

İstatistiksel yakınsaklık metodu $\{(-1)^k\}$ gibi periyodik bir diziyi toplayamaz. Yani $\{(-1)^k\}$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bu yüzden istatistiksel yakınsaklık metodu, klasik toplanabilme metodlarından çoğunu içermez.

Burada son olarak istatistiksel yakınsaklık ve p-Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi Teorem (2.4.7) ile vereceğiz. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve bir dizinin kuvvetli p-Cesàro toplanabilirliği aslında birbirinden bağımsız olarak gelişmiştir fakat bu iki kavramın birbiri ile ilişkili ve hatta sınırlı diziler için birbirine denk oldukları Connor (1988) tarafından gösterilmiştir. Bu sonuç Zygmund tarafından da elde edildi fakat Zygmund istatistikel yakınsaklığı, hemen hemen yakınsaklık olarak adlandırmaktadır. Öncelikle p-Cesàro toplanabilirliği tanımlayalım.

Tanım 2.4.4 $x = (x_k)$ kompleks veya reel terimli bir dizi olsun ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli *p-Cesàro toplanabilirdir* denir.

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesini ω_p ile gösterilir. O halde, $p > 0$ için

$$\omega_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \to 0, \quad n \to \infty \right\}$$

Sonuç 2.4.5 Sınırlı diziler üzerinde kuvvetli p-Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık denktir. Yani $p > 0$ için $\omega_p \cap l_\infty = \mathcal{S} \cap l_\infty$ dır.

Sonuç 2.4.6 Kompleks terimli bir x dizisi bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir veya L sayısına istatistiksel yakınsak ise x, L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir (Connor 1988).

Teorem 2.4.7 $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

i) Bir dizi L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise bu dizi L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

ii) Sınırlı bir dizi L sayısına istatistiksel yakınsak ise bu dizi L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir (Connor 1988).

Buck (1953), bir x dizisi $\limsup x$ değerine C_1 toplanabilirse bu dizinin aynı değere istatistiksel yakınsak olması gerektiğini gösterdi. Aşağıdaki teorem bu sonucun istatiksel benzeridir.

Teorem 2.4.8 Üstten sınırlı bir x dizisi $\beta = St - \limsup x$ değerine C_1 toplanabilirse $St - \lim x = \beta$ dır.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.4.9 Alttan sınırlı bir x dizisi $\alpha = St - \liminf x$ değerine C_1 toplanabilirse $St - \lim x = \alpha$dır.

3 ÇİFT DİZİLER

Bu bölümde ilk olarak çift dizi tanıtılarak özellikleri verilecektir. Ayrıca çift dizilerde yakınsaklık çeşitleri ifade edilecektir.

3.1 Çift Dizilerde Yakınsaklık

Bu kısımda çift dizileri tanımlayacak ve çift dizilerdeki yakınsaklık çeşitlerini ele alacağız. Çift dizilerde tek dizilerin aksine birden fazla yakınsaklık çeşidi tanımlanmıştır. İlk olarak Pringsheim (1900) çift dizilerde yakınsaklık kavramını incelemiştir ve tek dizilerde adi yakınsaklık burada Pringsheim yakınsaklığa denk gelmektedir. Fakat adi yakınsak olan bir tek dizi hakkında yapılan çıkarımların hepsi Pringsheim anlamında yakınsak olan çift dizilerde geçerli olmayabilir. Bunun en büyük örneği yakınsak olan tek dizinin sınırlı olmasına rağmen Pringsheim anlamında yakınsak olan çift dizinin sınırlı olmayabileceği gerçeğidir. Çift dizilerde Pringsheim anlamında yakınsaklık haricinde regüler yakınsaklık, *c*-, *be*-, ve *e*- yakınsaklık kavramları ortaya atılmıştır. Bu yakınsaklık çeşitlerini Altay (2002) tezinde tanımlamıştır. Daha sonra Altay ve Başar (2005) çift dizi uzaylarını incelemişlerdir.

Tanım 3.1.1 X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$$

$$(m, n) \to f(m, n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir *çift indisli dizi* denir. Bundan sonraki kısımlarda çift indisli dizi yerine çift dizi veya sadece dizi ifadesi kullanılacaktır.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz.

$$\Omega = \left\{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\right\}$$

cümlesi reel veya kompleks terimli bütün çift dizilerin cümlesini göstermektedir. Bu cümle $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için

$$\alpha x = (\alpha x_{mn}) \text{ ve } x + y = (x_{mn} + y_{mn})$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Tanım 3.1.2 $x = (x_{mn})$ çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için, $m, n > N$ olduğunda,

$$|x_{mn} - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi $L \in \mathbb{C}$ sayısına *Pringsheim anlamında yakınsaktır* denir ve L sayısı $x = (x_{mn})$ dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir diziye kısaca P-yakınsak çift dizi denilir ve $P - \lim x = L$ şeklinde gösterilir.

Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı C_p şeklinde gösterilmektedir.

$$C_p = \left\{x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \exists L \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq k \ni |x_{mn} - L| < \varepsilon\right\}$$

cümlesi Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin cümlesini göstermektedir. C_p cümlesi çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında lineer uzaydır ve,

$$\|x\|_C = \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |x_{mn}|$$

yarınormu ile bir tam uzay teşkil etmektedir (Moricz 1991).

Pringsheim anlamında yakınsak olan bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.3 $x = (x_{mn})$ çift dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , \quad m = 1 \text{ ise} \\ m & , \quad n = 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{mn} & , \quad n = m \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu dizi sınırlı olmamasına rağmen 0 noktasına Pringsheim anlamında yakınsaktır. Öyleki, verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall m, n > N$ olduğunda,

$$|x_{mn} - 0| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

Örnek 3.1.4 $x = (x_{mn}) = (\frac{n}{m+n})$ çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değildir. Gerçektende, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için yeterince büyük m, n $(m = n) \in \mathbb{N}$ sayıları ele alındıında

$$|x_{mn} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$$

olacaktır. Fakat $n = 2m$ olacak şekilde yeterince büyük $m, n \in \mathbb{N}$ sayıları ele alındığında ise

$$|x_{mn} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$$

olur. O halde $x = (x_{mn})$ dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değildir.

Tanım 3.1.5 $x = (x_{mn})$ çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesini $\mathcal{M}_u$ ile gösterilir.

$$\mathcal{M}_u = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} | x_{mn} | < \infty\}$$

şeklindedir. Bu uzay $\| \cdot \|_\infty$ normu altında Banach uzayıdır.

$x = (x_{mn})$ çift dizisi bir $L \in \mathbb{C}$ noktasına Pringsheim anlamında yakınsak ve sınırlı ise bu diziye Pringsheim anlamında sınırlı yakınsak dizi denir. Bu şekildeki dizilerin cümlesini C_{bp} ile gösterirsek,

$$C_{bp} = \{x = (x_{mn}) \in C_p : \|x\|_\infty = \sup_{m,n \geq 0} | x_{mn} | < \infty\} = C_p \cap \mathcal{M}_u$$

şeklindedir. Bu uzay $\| \cdot \|_\infty$ normu ile Banach uzayıdır (Moricz 1991).

Teorem 3.1.6 $x = (x_{mn})$ çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak ise Pringsheim limiti tektir.

İspat Farzedelim ki l ve l' sayıları x dizisinin Pringsheim limitleri olsun. O halde verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için $\forall m, n > N_1$ olduğunda

$$|x_{mn} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Aynı şekilde, $\forall m, n > N_2$ için,

$$|x_{mn} - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\max\{N_1, N_2\} = N$ olsun. O halde $\forall m, n > N$ için,

$$0 \leq |l - l'| = |l - x_{mn} + x_{mn} - l'| \leq |x_{mn} - l| + |x_{mn} - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Buradan $l = l'$ olduğu görülmektedir.

Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak olan bir $x = (x_{mn})$ dizisi için ilaveten $\lim_m x_{mn} (n \in \mathbb{N})$ ve $\lim_n x_{mn} (m \in \mathbb{N})$ limitleri var ise x dizisine l noktasına *regüler yakınsaktır* denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_m \lim_n x_{mn}$ ve $\lim_n \lim_m x_{mn}$ limitleri vardır ve bu limitler Pringsheim limitine eşittir. Regüler yakınsak çift dizilerin cümlesi C_r ile gösterirsek,

$$C_r = \{x = (x_{mn}) \in C_p \mid \forall m \in \mathbb{N} : (x_{mn})_m \in c \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_n \in c\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.7 $x = (x_{mn}) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ dizisi tanımlansın. Bu dizi Pringsheim anlamında 0 noktasına yakınsar. Aynı zamanda her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} x_{mn} = \frac{1}{n}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_{mn} = \frac{1}{m}$ olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} x_{mn}) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{mn}) = 0$$

elde edilir. O halde, $x = (x_{mn})$ dizisi 0 noktasına regüler yakınsaktır. Böylece bu dizi sınırlı bir dizidir.

Regüler yakınsaklığın Prinsheim anlamında yakınsaklıktan farkı, bir çift dizinin yakınsaklığının dizisinin sınırlılığını gerektirmesidir.

Çift dizilerin Prinsheim anlamında yakınsaklığından daha zayıf olan e-yakınsaklığı Boos, Leiger ve Zeller (1997) tarafından,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0, \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} : m > m_0 \implies |x_{mn} - L| \leq \varepsilon$$

şeklinde tanımlandı. e-yakınsak bir x dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\sup_m |x_{mn}|$ değeri sonlu ve $\lim_m x_{mn}$ mevcut ise x dizisine sırasıla be-yakınsak ve c-yakınsak denir. c-yakınsak bir x dizisi için, $\lim_n \lim_m x_{mn}$ mevcut ve e-yakınsaklık limitine eşittir. Buna göre; e-yakınsak dizilerin cümlesi,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_e := & \Big\{ x = (x_{mn}) \in \Omega : \ \exists L \in \mathbb{C}, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \\ & \qquad\qquad \exists m_n \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq m_n \implies |x_{mn} - L| < \varepsilon \Big\} \\ = & \Big\{ x = (x_{mn}) \in \Omega : \ \exists L \in \mathbb{C} : \lim_n \overline{\lim}_m |x_{mn} - L| = 0 \Big\}. \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi Pringsheim anlamında yakınsak olmayan fakat e-yakınsak olan bir çift dizi örneği verelim.

Örnek 3.1.8 $x = (x_{mn})$ çift dizisini,

$$x_{mn} = \begin{cases} m, & m = n, \\ 1, & m < n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi Pringsheim anlamında yakınsak olmadığı halde $e-\lim x_{mn} = 0$ dır.

Genel olarak gözönüne alınan çift dizi uzayları,

$$e_{ij}^{mn} = \begin{cases} 1 \quad , & ((m,n) = (i,j)) \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan e^{mn} dizilerinin gerdiği Φ uzayını kapsarlar.

Tanım 3.1.9 $x = (x_{mn})$ çift dizi olmak üzere verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n, p, q > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $x = (x_{mn})$ dizisine Pringsheim anlamında *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 3.1.10 $x = (x_{mn})$ çift dizi olsun. $x = (x_{mn})$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{mn})$ çift dizisinin Cauchy dizisi olmasıdır (Habil 2005).

İspat $(\Rightarrow)$: $x = (x_{mn})$ çift dizisi L noktasına yakınsak olsun. O halde verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki; $\forall m, n \geq \mathbb{N}$ için

$$\left|x_{mn} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Böylece $\forall p \geq m \geq N$ ve $\forall q \geq n \geq N$ için

$$\begin{aligned} |x_{pq} - x_{mn}| &= \left|x_{pq} - L + L - x_{mn}\right| \\ &\leq \left|x_{pq} - L\right| + \left|x_{mn} - L\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

olur. O halde $x = (x_{mn})$ çift dizisi Cauchy dizisidir.

$(\Leftarrow)$: $x = (x_{mn})$ dizisi Cauchy dizisi olsun. O halde verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $m = n$ olarak ele alındığında $x_{nn} = b_n$ olarak tanımlayalım. $x = (x_{mn})$ Cauchy dizisi olduğundan $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki; $\forall p \geq n \geq k$ için

$$|b_p - b_n| < \varepsilon$$

dır. Tek dizilerdeki Cauchy kriteri gereği (b_n) dizisi L saysına yakınsaktır. Böylece $N_1 \in \mathbb{N}$ olacak şekilde N_1 sayısı vardır ve $\forall n \geq N_1$ için

$$|b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır.

$x = (x_{nm})$ Cauchy dizisi olduğundan $N_2 \in \mathbb{N}$ olacak şekilde N_2 sayısı vardır öyleki $\forall p, q \geq n \geq N_2$

$$|x_{pq} - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. $N = max\{N_1, N_2\}$ ve $n \geq N$ olacak şekilde seçtiğimizde $\forall p, q \geq N$ için

$$|x_{pq} - L| \leq |x_{pq} - b_n| + |b_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. O halde (x_{mn}) çift dizisi L noktasına yakınsar.

Tanım 3.1.11

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\rightarrow X \\ (m,n) &\rightarrow f(m,n) = x_{mn} \end{aligned}$$

çift dizisi verilsin.

$$\begin{aligned} k \ : \ \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ m &\rightarrow k_m \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r \ : \ \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\rightarrow r_n \end{aligned}$$

artan fonksiyonlar(diziler) olmak üzere

$$\begin{aligned} h \ : \ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ (m,n) &\rightarrow h(m,n) = (k(m), r(n)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} f\circ h \ : \ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m,n) &\rightarrow f\circ h(m,n) = x_{k_m r_n} \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{mn}) çift dizisinin bir *alt dizisi* denir (Altay 2002).

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz çoklukta $(k_m r_n)$ dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{mn}) çift dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt dizi, dizinin kendisinden satır ve sutunlar atılarak elde edilir. Ayrıca $(x_{k_m r_n})$ alt dizisinin her teriminin (x_{mn}) dizisinin bir terimi olduğu açıkça görülmektedir.

Örnek 3.1.12 Her $m,\ n\in\mathbb{N}$ için $x_{mn} = (-1)^{m+n}$ çift dizisinin alt dizileri $y_{mn} = 1$ ve $z_{mn} = -1$ dizileridir.

Tek dizilerde olduğu gibi çift dizilerde de yakınsak bir dizinin her alt dizisi de aynı sayıya yakınsaktır. Burada bahsettiğimiz Pringsheim anlamında yakınsaklıktır.

Teorem 3.1.13 $x = (x_{mn})$ çift dizisi L noktasına Pringsheim anlamında yakınsak olsun. O halde $x = (x_{mn})$ çift dizisinin herhangi bir alt dizisi de L noktasına yakınsaktır (Habil 2005).

İspat $(x_{k_m r_n})$ dizisi (x_{mn}) çift dizisinin alt dizisi olsun. (x_{mn}) çift dizisi L noktasına Pringsheim anlamında yakınsak olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyleki, $\forall m, n \geq N$ için

$$|x_{mn} - L| < \varepsilon$$

olur. $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_m < \cdots$ ve $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots$ olduğundan $k_m \geq m$, $r_n \geq n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde k_m, r_n sayıları bulunabilir. Böyle olduğunda $k_m > m, r_n > n$ olmak üzere $\forall m, n \geq N$ için $k_m, r_n \geq N$ olur ve $|x_{k_m r_n} - L| < \varepsilon$ elde edilir. Yani

$$P\text{-}\lim(x_{k_m r_n}) = L$$

dir.

Tanım 3.1.14 $x = (x_{mn})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_N(x) = \sup_{m,n \geq N} x_{mn} \quad \text{ve} \quad \beta_N(x) = \inf_{m,n \geq N} x_{mn}$$

olsun. Bu durumda, en az bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$\alpha_N(x) < \infty \quad \text{ve} \quad \beta_N(x) > -\infty$$

ise $x = (x_{mn})$ çift dizisi Pringsheim anlamında bir üst ve alt limite sahiptir denir. Buna göre, bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin Pringsheim alt limiti,

i) Eğer her bir $N \in \mathbb{N}$ için $\beta_N(x) = -\infty$ ise,

$$P - \liminf x = -\infty,$$

ii) Eğer bazı $N \in \mathbb{N}$ için $\beta_N(x) > -\infty$ ise,

$$P - \liminf x = \lim_{N \to \infty} \big(\inf_{m,n \geq N} x_{mn} \big) = \sup_N \beta_N(x)$$

ve Pringsheim üst limiti,

i) Eğer her bir $N \in \mathbb{N}$ için $\alpha_N(x) = +\infty$ ise,

$$P - \limsup x = +\infty,$$

ii) Eğer bazı $N \in \mathbb{N}$ için $\alpha_N(x) < +\infty$ ise,

$$P - \limsup x = \lim_{N\to\infty} (\sup_{m,n\geq N} x_{mn}) = \inf_N \alpha_N(x)$$

şeklinde tanımlanır (Patterson 1999).

Örnek 3.1.15 $x = (x_{mn})$ çift dizisi

$$x_{mn} := \begin{cases} m, & n = 1, \\ -n, & m = 1, \\ (-1)^m, & m = n > 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\sup x_{mn} = +\infty$ ve $\inf x_{mn} = -\infty$ olduğu halde $N \geq 2$ için $\alpha_N(x) = 1$ ve $\beta_N(x) = -1$ bulunduğu için

$$P - \liminf x = -1 \quad \text{ve} \quad P - \limsup x = 1$$

olur.

Teorem 3.1.16 $x = (x_{mn})$ çift dizi olsun. Bu durumda dizinin $P\text{-}\liminf$ ve $P\text{-}\limsup$ değerleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur (Patterson 1999).

1) $P\text{-}\liminf x \leq P\text{-}\limsup x$,

2) $P\text{-}\lim x = L \Leftrightarrow P\text{-}\liminf x = P\text{-}\limsup x = L$

3) $P\text{-}\limsup(-x) = -P\text{-}\liminf x$

4) $P\text{-}\limsup(x+y) \leq P\text{-}\limsup x + P\text{-}\limsup y$,

5) $P\text{-}\liminf(x+y) \geq P\text{-}\liminf x + P\text{-}\liminf y$

6) Eğer z, x çift dizisinin bir alt dizisi ise

$$P\text{-}\liminf x \leq P\text{-}\liminf z \leq P\text{-}\limsup z \leq P\text{-}\limsup x.$$

Tanım 3.1.17 $m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $x_{mn} \leq x_{m'n'}$ oluyorsa (x_{mn}) dizisine *monoton artan*, $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $x_{mn} \leq x_{m'n'}$ oluyorsa (x_{mn}) dizisine *monoton azalandır* denir.

Teorem 3.1.18 Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna, azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti infumumuna eşittir.

Teorem 3.1.19 $x = (x_{mn})$ reel sayılarda bir çift dizi olsun. Bu durumda

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \alpha$$

dır ancak ve ancak

i) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki, her $m, n \geq N$ için $x_{mn} > \alpha - \varepsilon$ dır.

ii) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $N \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq N$ olacak şekilde m, n sayıları vardır öyleki $x_{mn} < \alpha + \varepsilon$ dır (Sever *et al.*).

İspat

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_N \big(\inf_{m,n\geq N} x_{mn} \big) = \alpha$$

olsun. Çift dizilerde supremum tanımından, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{m,n\geq N} x_{mn} > \alpha - \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ve her $m, n \geq N$ için $x_{mn} > \alpha - \varepsilon$ elde ederiz. Bu ifade (i) ifadesinin ispatını gösterir.

Şimdi ise (ii) ifadesini ispatlayalım. Farzedelim ki (ii) ifadesi gerçekleşmesin.

O halde, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $m, n \geq N_0$ için

$$\inf_{m,n>N_0} x_{mn} \geq \alpha + \varepsilon$$

olacak şekilde $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece,

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{m,n} = \sup_N \big(\inf_{m,n\geq N} x_{mn} \big) \geq \alpha + \varepsilon$$

olur. Bu ifade ise $\alpha \geq \alpha + \varepsilon$ olur. Fakat bu doğru değildir. Çelişki elde edilmiş olur.

Tersine (i) ve (ii) ifadeleri sağlansın. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $m, n \geq N_0$ için $x_{mn} > \alpha - \varepsilon$ olacak şekilde $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ve

$$\inf_{m,n\geq N_0} x_{mn} \geq \alpha - \varepsilon$$

dır. Böylece,

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_N (\inf_{m,n\geq N} x_{mn}) \geq \alpha - \varepsilon$$

olur. (ii) ifadesinden ise her $N \in \mathbb{N}$ sayısı için $x_{mn} < \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde m, n vardır. Bu durumda, her $N \in \mathbb{N}$ için

$$\inf_{m,n\geq N} x_{mn} < \alpha + \varepsilon$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_N (\inf_{m,n\geq N} x_{mn}) \leq \alpha + \varepsilon$$

elde edilir. O halde $\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \alpha$ dır.

Benzer şekilde lim sup için ifadeler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 3.1.20 $x = (x_{mn})$ reel sayılarda bir çift dizi olsun. $\limsup_{m,n\to\infty} x_{mn} = \beta$ dır. Ancak ve ancak

i) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki, $\forall j, k > N$ için, $x_{mn} < \beta + \varepsilon$ olur.

ii) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $N \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq N$ olacak şekilde m, n sayıları vardır öyleki $x_{mn} > \beta - \varepsilon$ olur.

3.2 Çift Seriler

Bu kısımda çift seriler hakkında temel bilgilere değinilmiştir. Çift serilerin yakınsaklığı ve mutlak yakınsaklığı tanımlanmıştır. Bununla ilgili örneklendirme yapılarak incelenmiştir.

Tanım 3.2.1 $x = (x_{mn})$ çift dizisi verilmiş olsun. Şimdi,

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad ; \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $\big((x_{mn}), (s_{mn})\big)$ ikilisine bir *çift seri* denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir. Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına υ-yakınsak, yani

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s$$

ise $((x_{mn}), (s_{mn}))$ serisi υ-yakınsaktır ve serinin υ-toplamı s sayısıdır. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir. Burada υ çift dizilerde herhangi bir yakınsaklığı göstermektedir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} = s$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}$$

ile gösterilir. υ-yakınsak çift seri oluşturan dizilerin uzayı $\mathcal{CS}_\upsilon$ ile gösterilmektedir. Buna göre,

$$\mathcal{CS}_\upsilon = \left\{ x = (x_{ij}) \in \Omega \mid \upsilon\text{-}\sum_{i,j} x_{ij} = \upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \text{ mevcut} \right\}$$

şeklindedir (Altay 2002).

$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}$ serilerine sıralı seriler denir. Sıralı seriler, aynı toplama sahip olmak zorunda değildir. Gerçekten $x = (x_{mn})$ çift dizisi için

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n+1, n = 1, 2, ... \\ -1 & , \quad m = n-1, n = 1, 2, ... \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} = -1$ fakat $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn} = 1$' dir.

Tanım 3.2.2 Eğer $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_{ij}|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_{ij}$ reel terimli serisi *mutlak yakınsaktır* denir.

Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesi $\mathcal{L}_u$ ile gösterilir. Yani;

$$\mathcal{L}_u = \left\{ x \in \Omega : \|x\|_1 = \sum_{i,j} |x_{ij}| < \infty \right\}.$$

Teorem 3.2.3 (i) Mutlak yakınsak bir çift seri yakınsaktır.

(ii) Pozitif reel terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır.

(iii) Reel terimli (a_{ij}) ve (b_{ij}) dizilerini gözönüne alalım.

Her $i,j \in \mathbb{N}$ için $0 \leq a_{ij} \leq b_{ij}$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}$ serisi yakınsak ise $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ serisi de yakınsaktır ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}$$

eşitsizliği geçerlidir (Iyer 1985).

Yakınsak bir çift indisli serinin kısmi toplamları sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad m = 1 \\ -1 & , \quad m = 2 \\ 0 & , \quad m \geq 3 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\sum_{m,n} x_{mn}$ serisi yakınsak fakat kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir.

4 ÇİFT DİZİLERDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık incelenecektir. Öncelikle, tek diziler için verilmiş olan yoğunluk kavramı çift dizilerde tanımlanacak ve çift indisli kümelerin yoğunluklarına ilişkin örnekler verilecektir. Daha sonra ise çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecek, ilgili tanım ve teoremlere değinilecek ve örneklendirmeler yapılacaktır. En son kısımda ise çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

4.1 Çift Dizilerde Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast (1951) tarafından verilmiştir. Çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramı Murselen ve Edelly tarafından tanıtılmıştır. Bu bölümde çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramını ele alacağız.

$K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. $K(m,n)$, $\{(j,k): \ (j,k) \in K, \ j \leq m, \ k \leq n\}$ kümesinin eleman sayısını göstermek üzere çift dizilerde yoğunluk aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1.1 $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere K kümesinin alttan asimptotik yoğunluğu

$$\underline{\delta_2}(K) = \liminf_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn}$$

olur. $(\frac{K(m,n)}{mn})$ dizisinin Pringsheim anlamında limiti varsa K kümesinin çift doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn}$$

dır.

Örnek 4.1.2 $\left\{(j^2,k^2): j,k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn} \leq \lim_{m,n} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

olur.

Örnek 4.1.3 $\{(j,2k) : j,k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn} = \frac{1}{2}$$

olur.

Örnek 4.1.4 $\{(j,j) : j \in \mathbb{N}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn} = \lim_{m,n} \frac{m}{mn} = 0$$

bulunur.

Örnek 4.1.5 $\{(1,k) : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn} = \lim_{m,n} \frac{n}{mn} = 0$$

olur.

Tanım 4.1.6 $x = (x_{jk})$ reel bir çift dizi olsun. Verilen herbir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\{(j,k) : j \leq m, k \leq n,\ |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise $x = (x_{jk})$ çift dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durum $St_2 - \lim x_{jk} = L$ şeklinde gösterilir.

St_2 ile bütün istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayını göstereceğiz.

Uyarı 4.1.7

a) $x = (x_{jk})$ Pringsheim anlamında bir L sayısına yakınsak bir çift dizi ise aynı zamanda $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır. Çünkü sınırlı veya sınırsız satır ve sutunlar için sınırlı birer sayı bulunabilir. Bu sayılar s_1 ve s_2 olarak tanımlanırsa,

$$K(m,n) \leq s_1 m + s_2 n$$

olur. Buradan eşitsizlik $\frac{1}{mn}$ ile çarpılır ise,

$$\frac{K(m,n)}{mn} \leq \frac{s_1}{n} + \frac{s_2}{m}$$

elde edilecektir ve limit alındığında

$$\begin{aligned}\lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn} &\leq \lim_{m,n}(\frac{s_1}{n} + \frac{s_2}{m}) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Böylece $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

b) $x = (x_{jk})$ eğer L noktasına istatistiksel yakınsak ise L tektir.

c) $x = (x_{jk})$ istatistiksel yakınsak ise Pringsheim anlamında yakınsak olmasına gerek yoktur. Sınırlı olmasına da gerek yoktur.

Şimdi son ifadeye bir örnek verelim.

Örnek 4.1.8 $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} jk & , \text{ j ve k lar tam kare ise} \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. $x = (x_{jk})$ çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değildir ve üstelik sınırlı da değildir. Fakat 1 noktasına istatistiksel yakınsaktır. Çünkü dizinin 1 haricindeki elemanların yogunluğu 0 dır. Yani verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için;

$$\left|\{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}\right| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$$

dır. Burada her iki tarafın limiti alındığında,

$$\begin{aligned}\lim_{mn} \left|\{(j,k) : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}\right| &\leq \lim_{mn} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Burada küme parantezlerinin dışarısında bulunan dikey çizgiler ile bahsi geçen kümenin eleman sayısı belirtilmektedir.

Güngör ve Gökhan (2007) reel değerli çift fonksiyon dizilerininin istatistiksel yakınsaklığını incelemişlerdir ve aşağıdaki örnek bu yayında verilen bir fonksiyon dizisinin tanım kümesinden uygun bir değer alınarak çift diziye indirgenmiş halidir.

Örnek 4.1.9 $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} (2)^{jk} & , \ j \in [3^p, 3^p + p) \ \text{ ve } \ k \in [3^q, 3^q + q), \quad p, q = 1, 2, ... \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $j, k = 1, 2, 3, ...$ için

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \left| \{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\} \right|$$

$$\leq \frac{pq(p+1)(q+1)}{4.3^{p+q}} \to 0$$

dır. Sonuç olarak,

$$St_2 - \lim x_{jk} = 0$$

olur. Fakat $\lim_{j,k} x_{jk}$ mevcut değildir.

Şimdi tek diziler için Šalát tarafından ispatlanmış olan Teorem (2.3.5) ifadesinin çift diziler için ispatını yapacağız.

Teorem 4.1.10 $x = (x_{jk})$ çift reel sayı dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $K = \{(j,k) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j, k = 1, 2, 3, ...\}$, $\delta_2(K) = 1$ ve

$$\lim_{j,k \to \infty,\quad (j,k) \in K} x_{jk} = L$$

olacak şekilde $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesinin var olmasıdır (Mursaleen and Edely 2003).

İspat $x = (x_{jk})$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak olsun. $r = 1, 2, 3, ...$ için,

$$\begin{aligned} K_r &= \left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| \geq \frac{1}{r}\right\} \\ M_r &= \left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| < \frac{1}{r}\right\} \end{aligned}$$

kümelerini ele alalım. Bu durumda $x = (x_{jk})$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak olduğundan $\delta_2(K_r) = 0$ dır. $M_r = K_r^{'}$ olduğundan

$$\delta_2(M_r) = 1, \quad (r = 1, 2, 3, 4....)$$

dır. Burada

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ... \supset M_i \supset M_{i+1} \supset .... \tag{4.1}$$

olacaktır. Şimdi $(j,k) \in M_r$ olan (j,k) elemanları için $x = (x_{jk})$ çift dizisinin L noktasına Pringsheim anlamında yakınsadığını gösterelim. Farzedelim ki $x = (x_{jk})$

çift dizisi L noktasına yakınsamasın. O halde her $\varepsilon > 0$ verildiğinde sonsuz çoklukta değerler için

$$|x_{jk} - L| \geq \varepsilon$$

olacaktır.

$$M_\varepsilon = \big\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| < \varepsilon\big\} \text{ ve } \varepsilon > \frac{1}{r} \quad (r = 1,2,3,....)$$

şeklinde ele alınırsa $\delta_2(M_\varepsilon) = 0$ olur. (4.1) ifadesinden $M_\varepsilon \supset M_r$ $(r = 1,2,3,....)$ olduğu için $\delta_2(M_r) = 0$ elde edilir. Fakat bu durum $\delta_2(M_r) = 1$ olması ile çelişir.

Tersine, $\lim_{j,k} x_{jk} = L$ ve $\delta_2(K) = 1$ olan $K = \{(j,k)\} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesi var olsun. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ki $\forall j,k \geq n$ için $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ dır.

$$K_\varepsilon = \{(j,k) : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(j_{n+1}, k_{n+1}), (j_{n+2}, k_{n+2}), ...\}$$

olduğundan

$$\delta_2(K_\varepsilon) \leq 1 - 1 = 0.$$

O halde $x = (x_{jk})$ çift dizisi L noktasına istatistiksel yakınsaktır.

Uyarı 4.1.11 $St_2 - \lim x_{jk} = L$ ise $\lim y_{jk} = L$ ve $\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} = y_{jk}\}\big) = 1$ olacak şekilde $y = (y_{jk})$ çift dizisi vardır. Yani,

hemen hemen her j,k (kısaca h.h.h. j,k) için $x_{jk} = y_{jk}$

dır.

Teorem 4.1.12 $St_2 \cap \mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u$ normlu lineer uzayının kapalı bir lineer alt uzayıdır (Mursaleen and Edely 2003).

İspat $x^{(nm)} = (x_{jk}^{(nm)}) \in St_2 \cap \mathcal{M}_u$ ve $x^{(nm)} \to x \in \mathcal{M}_u$ olsun. $x^{(nm)} \in St_2 \cap \mathcal{M}_u$ olduğundan

$$St_2 - \lim x_{jk}^{nm} = a_{nm} \quad (n,m = 1,2,3,...)$$

olacak şekilde a_{nm} reel sayıları vardır.

$x^{(nm)} \to x$ olduğu için verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$|x^{(pq)} - x^{(nm)}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{her} \quad p \geq n \geq N, \quad q \geq m \geq N \quad \text{için}, \tag{4.2}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Teorem (4.1.10) e göre $\delta_2(K_1) = \delta_2(K_2) = 1$ ve

$$(1) \quad \lim_{j,k\to\infty,\ (j,k)\in K_1} x_{jk}^{(nm)} = a_{nm},$$

$$(2) \quad \lim_{j,k\to\infty,\ (j,k)\in K_2} x_{jk}^{(pq)} = a_{pq},$$

olacak şekilde K_1 ve K_2 kümeleri vardır.

$\delta_2(K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan $K_1 \cap K_2$ kümesi sonsuzdur. $(k_1, k_2) \in K_1 \cap K_2$ olacak şekilde seçilirse, (1) ve (2) ifadelerinden,

$$|x_{k_1,k_2}^{(pq)} - a_{pq}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.3}$$

ve

$$|x_{k_1,k_2}^{(nm)} - a_{nm}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.4}$$

olur. Böylece her bir $p \geq n \geq N$ ve $q \geq m \geq N$ için (4.2), (4.3), (4.4) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} |a_{pq} - a_{nm}| &\leq |a_{pq} - x_{k_1k_2}^{pq}| + |x_{k_1k_2}^{pq} - x_{k_1k_2}^{nm}| + |x_{k_1k_2}^{nm} - a_{nm}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Böylece (a_{nm}) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. O halde (a_{nm}) dizisi yakınsaktır denilir ve,

$$\lim_{n,m} a_{nm} = a$$

şeklinde yazılır.

Şimdi $x = (x_{jk})$ çift dizisinin a noktasına istatistiksel yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $x^{(nm)}$ dizisi x'e yakınsak olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N_1(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki her $j, k \geq N_1(\varepsilon)$ için,

$$|x_{jk}^{(nm)} - x_{jk}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aynı zamanda $a_{nm} \to a$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N_2(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki her $j, k \geq N_2(\varepsilon)$ için,

$$|a_{jk} - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$x^{(nm)}$ dizisi a_{nm} ye istatistiksel yakınsak olduğundan $K = \{(j,k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olacak şekilde K kümesi vardır öyleki $\delta_2(K) = 1$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, her $j,k \geq N_3(\varepsilon)$ için, $(j,k) \in K$

$$|x_{jk}^{nm} - a_{nm}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $N_3(\varepsilon)$ sayısı vardır.
$\max\left\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon),\ N_3(\varepsilon)\right\} = N_4(\varepsilon)$ olsun. Böylece verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $j,k \geq N_4(\varepsilon)$ $(j,k) \in K$ için

$$\begin{aligned} |x_{jk} - a| &\leq |x_{jk} - x_{jk}^{(nm)}| + |x_{jk}^{(nm)} - a_{jk}| + |a_{jk} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

O halde x, a noktasına istatistiksel yakınsaktır. Yani,

$$x \in St_2 \cap \mathcal{M}_u.$$

Böylece $St_2 \cap \mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u$ un kapalı lineer bir alt uzayıdır.

Teorem 4.1.13 $St_2 \cap \mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u$ da hiçbiryerde yoğun değildir (Mursaleen and Edely 2003).

İspat Keyfi bir lineer normlu S uzayının S'den farklı her kapalı lineer alt uzayı S kümesinde hiçbiryerde yoğun olmadığından (Neubrum *et al.* 1968) sadece $St_2 \cap \mathcal{M}_u \neq \mathcal{M}_u$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için istatistiksel yakınsak olmayan fakat sınırlı olan bir dizi tanımlamalıyız. $x = (x_{jk})$ çift dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 \ , & \text{j ve k lar çift ise} \\ 0 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Görüldüğü gibi $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel yakınsak değildir fakat sınırlıdır. O halde $St_2 \cap \mathcal{M}_u \neq \mathcal{M}_u$ dir.

Teorem 4.1.14 $St_2 - \lim x_{jk} = L_1$, $St_2 - \lim y_{jk} = L_2$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise

i) $St_2 - \lim(x_{jk} + y_{jk}) = L_1 + L_2$ dir.

ii) $St_2 - \lim(cx_{jk}) = cL_1$ dir.

İspat i) $St_2 - \lim x_{jk} = L_1$ olsun. O halde $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_2(A) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall j, k > k_1$ için $(j, k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus A)$ için

$$|x_{jk} - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

Aynı şekilde $St_2 - \lim y_{jk} = L_2$ olsun. O halde $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_2(B) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall\ j, k > k_2$ ve $(j, k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus B)$ için

$$|y_{jk} - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ olsun. $\forall (j, k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus (A \cap B))$ ve her $j, k > k_0$ için

$$|(x_{jk} + y_{jk}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

olduğunu gösterelim. Öncelikle sıfır yoğunluklu iki kümenin arakesiti de sıfır yoğunluğa sahip olduğundan $A \cap B$ kümesinin de yoğunluğu sıfıra eşittir. O halde,

$\forall (j, k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus (A \cap B))$ ve $\forall j, k > k_0$ için

$$\begin{aligned} |(x_{jk} - y_{jk}) - (L_1 + L_2)| &\leq |x_{jk} - L_1| + |y_{jk} - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim \frac{1}{mn} \big|\{(j, k) : j < m, k < n,\ |x_{jk} + y_{jk} - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}\big| = 0$$

olup

$$St_2 - \lim(x + y) = L_1 + L_2$$

olur.

ii) Eğer $c = 0$ ise $cx_{jk} \to 0$ dir.

$c \neq 0$ ve $St_2 - \lim x_{jk} = L_1$ olsun. O halde $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\delta_2(A) = 0$ olduğunda, her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall j, k > k_0$ ve her $(j, k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus A)$

$$|x_{jk} - L_1| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\forall (j,k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus A)$ ve $\forall j,k > k_0$ için

$$|cx_{jk} - cL_1| = |c||x_{jk} - L_1| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

olur, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{nm} \frac{1}{nm}\left|\{(j,k) : j \leq n,\ k \leq m,\ |cx_{jk} - L_1| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Yani $St_2 - \lim(cx_{jk}) = cL_1$ dir.

Fridy (1985), tek dizilerde istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanımladı. Daha sonra Mursaleen ve Edely (2003) istatistiksel Cauchy dizisi kavramını çift dizilere taşıdılar. Şimdi çift diziler için istatistiksel Cauchy dizisinin tanımını verelim.

Tanım 4.1.15 $x = (x_{jk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık ve her $j,p \geq N,\ k,q \geq M$ için,

$$\delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, k \leq n,\ |x_{jk} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon),\ M = M(\varepsilon)$ sayıları varsa $x = (x_{jk})$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.1.16 $x = (x_{jk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır (Mursaleen and Edely 2003).

İspat $x = (x_{jk})$ çift dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olsun. O halde verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$\big\{(j,k) : j \leq m,\ \ k \leq n,\ |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\big\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. $|x_{MN} - L| \geq \varepsilon$ olacak şekilde M ve N sayılarını seçelim.

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \big\{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - x_{MN}| \geq \varepsilon\big\} \\
B_\varepsilon &= \big\{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\big\} \\
C_\varepsilon &= \big\{(j,k) : j = M \leq m,\ k = N \leq n \text{ için } |x_{MN} - L| \geq \varepsilon\big\}
\end{aligned}$$

kümeleri için $A_\varepsilon \subseteq (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)$ olacağından,

$$\delta_2(A_\varepsilon) \leq \delta_2(B_\varepsilon) + \delta_2(C_\varepsilon) = 0$$

olur. O halde $x = (x_{jk})$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tersine, $x = (x_{jk})$ istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Fakat istatistiksel yakınsak olmasın. O halde A_ε kümesinin doğal yoğunluğu 0 olacak şekilde N ve M doğal sayıları vardır. Bu durumda

$$E_\varepsilon = \left\{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - x_{MN}| < \varepsilon\right\}$$

kümesini ele alalım.

$$E_\varepsilon = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus A_\varepsilon$$

olduğundan

$$\delta_2(E_\varepsilon) = \delta_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) - \delta_2(A_\varepsilon)$$

$$\delta_2(E_\varepsilon) = 1 - 0 = 1$$

olacaktır. $|x_{jk} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğunda

$$|x_{jk} - x_{MN}| = |x_{jk} - x_{MN} - L + L| \leq 2|x_{jk} - L| < \varepsilon \tag{4.5}$$

olur. x çift dizisi istatistiksel yakınsak olmadığından B_ε kümesinin doğal yoğunluğu 1 dir. Öyleyse

$$\left\{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - L| < \varepsilon\right\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. (4.5) ifadesinden dolayı

$$\left\{(j,k) : j \leq m,\ k \leq n,\ |x_{jk} - x_{MN}| < \varepsilon\right\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu 0 dır. Bu ise A_ε doğal yoğunluğunun 1 olması ile çelişir. O halde x çift dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

Fridy'nin 1985 yılında tek diziler için yaptığı çıkarımlarına benzer olarak, Mursaleen ve Edely 2003 yılında Teorem (4.1.10) ve Teorem (4.1.16) ifadelerinden yararlanarak çift diziler için aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 4.1.17 Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) $x = (x_{jk})$ çift dizisi L noktasına istatistiksel yakınsaktır.

b) $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

c) $x = (x_{jk})$ çift dizisinin bir $y = (y_{j_m k_n})$ alt dizisi vardır öyleki $\lim y_{j_m k_n} = L$ dir.

Şimdi çift dizilerde istatistiksel sınırlılığın tanımı vereceğiz.

Tanım 4.1.18

a) $x = (x_{jk})$ dizisi reel değerli bir çift dizi olsun.

$$\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > M\}) = 0$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa x dizisine *üstten istatistiksel sınırlı* denir.

b) $x = (x_{jk})$ dizisi reel değerli bir çift dizi olsun.

$$\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < N\}) = 0$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{R}$ sayısı varsa x dizisine *alttan istatistiksel sınırlı* denir.

Eğer bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi hem üstten hem alttan St_2-sınırlı ise $x = (x_{jk})$ çift dizisine *St_2-sınırlı dizi* denir (Çakan ve Altay 2006).

Uyarı 4.1.19 Herhangi sınırlı çift dizi aynı zamanda St_2- sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 4.1.20 $x = (x_{jk})$ çift dizisini

$$x_{jk} = \begin{cases} jk & , \quad \text{j ve k lar kare ise} \\ 1 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > 1\}) = 0$ olduğundan $x = (x_{jk})$ dizisi üstten istatistiksel sınırlıdır. Aynı şekilde $\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < 1\}) = 0$ olduğundan bu dizi alttan istatistiksel sınırlıdır. Fakat $x = (x_{jk})$ dizisi sınırlı bir dizi değildir. O halde istatistiksel sınırlı bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

St_2^∞ ile tüm istatistiksel sınırlı çift dizilerin uzayını göstereceğiz.

Moricz (2003), Connor (1988) tarafından verilen ayrışım teoremini bilinen (tek) diziden çift diziye aşağıdaki teoremle genişletmiştir.

Teorem 4.1.21 Bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$x_{jk} = u_{jk} + v_{jk}, \quad j, k = 0, 1, 2, ... \tag{4.6}$$

$$\lim_{j,k \to \infty} u_{jk} = L \tag{4.7}$$

ve

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{mn} \left| \{ j \leq m, \ k \leq n : \ v_{jk} \neq 0 \} \right| = 0 \tag{4.8}$$

olacak şekilde (u_{jk}) ve (v_{jk}) dizilerinin var olmasıdır. Dahası (x_{jk}) sınırlı ise (u_{jk}) ve (v_{jk}) da sınırlıdır (Moricz 2003).

İspat (Gerek şart) (x_{jk}) çift dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan

$$2N_p \leq N_{p+1}, p = 1, 2, 3, ... \tag{4.9}$$

ve

$$\frac{1}{mn} \left| \{ j \leq m, k \leq n : |x_{jk} - L| > 2^{-p} \} \right| < 2^{-2p}, \ (m, n \geq N_p) \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir $(N_p : p = 1, 2, 3, ...)$ pozitif tamsayı dizisini seçebiliriz. (u_{jk}) dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım: Eğer $\min(j, k) < N_1$ ise o zaman $u_{jk} = x_{jk}$ yazalım ve eğer p ve q pozitif tam sayı değerleri için

$$N_p \leq j < N_{p+1} \ \text{ ve } \ N_q \leq k < N_{q+1}$$

iken

$$u_{jk} = \begin{cases} x_{jk} & , \ |x_{jk} - L| \leq 2^{-\min(p,q)} \\ L & , \ |x_{jk} - L| > 2^{-\min(p,q)} \end{cases} \tag{4.11}$$

yazalım. Son olarak da, $v_{jk} = x_{jk} - u_{jk}$ olarak belirtelim. Bu durumda (4.6) şartı sağlanır ve (4.7) şartının ispatı da açık olarak görülmektedir. Gerçektende, verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $2^{-p_0} < \varepsilon$ sağlanacak şekilde p_0 sayısını yeterince büyük seçebiliriz. Yukarıdaki u_{jk} tanımından $p > p_0$ için

$$N_p \leq \min(j, k) < N_{p+1}$$

olmak üzere $(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ise o zaman

$$|u_{jk}-L| = \begin{cases} |x_{jk}-L| \leq 2^{-p} < \varepsilon & , \quad |x_{jk}-L| \leq 2^{-p} \\ |L-L| & , \quad |x_{jk}-L| > 2^{-p} \end{cases}$$

olur. Buradan, $j,k \geq N_{p_0}$ ise $|u_{jk}-L| < \varepsilon$ olduğu elde edilir. Böylece, (u_{jk}) dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır. Son olarak, (4.8) nin ispatını yapalım. $v_{jk}=0$ olduğundan eğer $\min(j,k) < N_1$ ise $p,q \geq 1$ için,

$$N_p \leq m < N_{p+1} \;\; \text{ve} \;\; N_q \leq n < N_{p+1}$$

olduğunu kabul edebiliriz. $r = \min(p,q)$ olsun. (4.11) daki ifadeden

$$\begin{aligned} &\{j \leq m \text{ ve } k \leq n : v_{jk} \neq 0\} \\ &= \{N_r \leq j \leq m \text{ ve } \; N_r \leq k \leq n : |x_{jk}-L| > 2^{-r}\} \\ &\;\; \cup \bigcup_{s=1}^{r-1} \big[\{N_s \leq j \leq m \;\text{ ve }\; N_s \leq k \leq N_{s+1} : |x_{jk}-L| > 2^{-s}\} \\ &\;\;\; \cup \{N_s \leq j < N_{s+1} \;\text{ ve }\; N_s \leq k \leq n : |x_{jk}-L| > 2^{-s}\}\big] \end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.1) kullanılarak $r = \min(p,q) \to \infty$ veya buna denk olarak $m,n \to \infty$ iken,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{mn}\big|\{j \leq m \;\text{ ve }\; k \leq n : v_{jk} \neq 0\}\big| \\ &\leq 2^{-2r} + \sum_{s=1}^{r-1} [\frac{N_{s+1}}{n}2^{-2s} + \frac{N_{s+1}}{m}2^{-2s}] \\ &\leq 2^{-2r} + [\frac{N_r}{n} + \frac{N_r}{m}] \sum_{s=1}^{r-1} 2^{-2s-(r-1-s)} \\ &\leq 2^{-2r} + 2^{-r+1} \to 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise (4.8) ifadesini ispatlar.

(Yeter şart) (4.8) ifadesinden,

$$St_2 - \lim v_{jk} = 0 \tag{4.12}$$

yazılabilir. Bu ifadeden ve (4.7) ifadesinden, istatistiksel yakınsaklık görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Burada eğer $(j,k) \in S$ ise $u_{jk} = x_{jk}$ ve $(j,k) \notin S$ ise $u_{jk} = L$ iken

$$S = \big\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : u_{jk} = x_{jk}\big\}$$

şeklinde tanımlanıp teorem yeniden ifade edilecek olursa;

Bir (x_{jk}) çift dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_2(S) = 1$ olan ve

$$\lim_{\substack{j,k\to\infty \\ (j,k)\in S}} x_{jk} = L$$

olacak şekilde bir $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin var olmasıdır.

Bu ifadenin ispatı, Teorem 4.1.10 verildi.

Fridy ve Orhan 1997 yılında tek diziler için istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limiti tanımlamıştır. Bu tanımı Altay ve Çakan (2006) çift dizilere taşımışlardır.

Tanım 4.1.22 Herhangi bir $M, N \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_{jk})$ çift dizisi için K_x ve L_x kümeleri;

$$K_x = \big\{N : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < N\}) = 0\big\}$$

ve

$$L_x = \big\{M : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > M\}) = 0\big\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde x dizisinin istatistiksel infimum $(St_2 - \inf)$ $\sup K_x$, x dizisinin istatistiksel supremum $(St_2 - \sup)$ $\inf L_x$ şeklinde belirtilmektedir.

Herhangi bir istatistiksel sınırlı çift dizisi $(St_2 - \inf)$ ve $(St_2 - \sup)$ değerlerine sahiptir.

Örnek 4.1.23 $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} j & , \quad j = k \\ 1 & , \quad j = 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $L_x = (0, \infty)$ ve $K_x = (-\infty, 0)$ dır.
O halde $St_2 - \sup x = 0 = St_2 - \inf x$ olur. Fakat x sınırlı ve yakınsak bir dizi değildir. Bu durumda $\mathcal{M}_u \subset St_2^\infty$ olduğunu söyleyebiliriz.

Herhangi bir x reel değerli çift dizisi verildiğinde istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit tanımlayabilmek için

$$G_x = \left\{C \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > C\}) \neq 0\right\}$$

ve

$$F_x = \left\{D \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < D\}) \neq 0\right\}$$

kümelerini oluşturalım.

Uyarı 4.1.24 Herhangi bir E kümesinin yoğunluğunun 0 olmaması demekle ya E kümesinin doğal yoğunluğa sahip olmadığı ya da $\delta_2(E) > 0$ olduğu anlaşılmalıdır.

Tanım 4.1.25 Herhangi bir x reel değerli çift dizisi için istatistiksel üst limit;

$$St_2 - \limsup x = \begin{cases} \sup G_x & , \quad G_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad G_x = \emptyset \end{cases}$$

Aynı şekilde x in istatistiksel alt limit;

$$St_2 - \liminf x = \begin{cases} \inf F_x & , \quad F_x \neq \emptyset \\ \infty & , \quad F_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.23 deki $x = (x_{jk})$ dizisi için $G_x = (-\infty, 0)$ ve $F_x = (0, \infty)$ dır. O halde

$$St_2 - \limsup x = St_2 - \liminf x = 0$$

dır.

Teorem 4.1.26

a) $St_2 - \limsup x = \beta \Leftrightarrow$ Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > \beta - \varepsilon\}\big) \neq 0$$

ve

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > \beta + \varepsilon\}\big) = 0$$

dır.

b) $St_2 - \liminf x = \alpha \Leftrightarrow$ Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha + \varepsilon\}\big) \neq 0$$

ve

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha - \varepsilon\}\big) = 0$$

dır.

İspat

a) $\beta-$ sonlu ise tanım gereği $G_x \neq \emptyset$ dir.

$$G_x = \big\{C \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > C\}) \neq 0\big\}$$

olmak üzere $\beta = \sup G_x$ dir. Bu durumda $\forall\ b \in G_x$ için $b \leq \beta$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $b > \beta - \varepsilon$ olacak şekilde $b \in G_x$ vardır.

$$\big\{(j,k) : x_{jk} > b\big\} \subseteq \big\{(j,k) : x_{jk} > \beta - \varepsilon\big\}$$

olduğundan

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > b\}\big) \leq \delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > \beta - \varepsilon\}\big)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte sol taraf sıfırdan farklı olduğundan sağ taraf da sıfırdan farklıdır.

$b \leq \beta$ ise $\forall\ \varepsilon > 0$ için $b + \varepsilon \leq \beta + \varepsilon$ olduğundan

$$\big\{(j,k) : x_{jk} > b + \varepsilon\big\} \supseteq \big\{(j,k) : x_{jk} > \beta + \varepsilon\big\}$$

olur. Ayrıca $\beta = \sup G_x$ ve $b \in G_x$ olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ için $b + \varepsilon \notin G_x$ elde edilir.

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > b + \varepsilon\}\big) \geq \delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > \beta + \varepsilon\}\big)$$

eşitsizliğinde sol taraf 0 a eşit olduğundan sağ tarafta sıfıra eşit olur.

Tersine her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\delta_2\big(\{(i,j) : x_{jk} > \beta - \varepsilon\}\big) \neq 0$$

ve

$$\delta_2\big(\{(i,j) : x_{jk} > \beta + \varepsilon\}\big) = 0$$

olsun. Bu durumda $\beta - \varepsilon \in G_x$ ve dolayısıyla $G_x \neq \emptyset$ dir. $\beta + \varepsilon \notin G_x$ olduğundan $\sup G_x = \beta$ olur. Çünkü her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\beta - \varepsilon \in G_x$ ve her $b \in G_x$ için $b \leq \beta$ gerçeklenir.

b) α sonlu ise tanım gereği $F_x \neq \emptyset$ dır.

$$F_x = \big\{D \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < D\}) \neq 0\big\}$$

için $\alpha = \inf F_x$ olsun. Bu durumda $\forall \alpha \in F_x$ için $a \geq \alpha$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $a < \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde $a \in F_x$ vardır. Ayrıca

$$\big\{(j,k) : x_{jk} < a\big\} \subseteq \big\{(j,k) : x_{jk} < \alpha + \varepsilon\big\}$$

olduğundan

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < a\}\big) \leq \delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha + \varepsilon\}\big)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte sol taraf sıfırdan farklı olduğunda sağ tarafta sıfırdan farklı olacaktır.

$a \geq \alpha$ ise her $\varepsilon > 0$ için $a - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon$ olduğundan

$$\big\{(j,k) : x_{jk} < a - \varepsilon\big\} \supseteq \big\{(j,k) : x_{jk} < \alpha - \varepsilon\big\}$$

olur. Ayrıca $\alpha = \inf F_x$ ve $a \in F_x$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $a - \varepsilon \notin F_x$ elde edilir. Bu durumda

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < a - \varepsilon\}\big) \geq \delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha - \varepsilon\}\big)$$

eşitsizliğinin sol tarafı sıfır olacağından sağ tarafı da sıfır olur.

Tersine her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha + \varepsilon\}\big) \neq 0$$

ve

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha - \varepsilon\}\big) = 0$$

olsun. Bu durumda $\alpha + \varepsilon \in F_x$ olup $F_x \neq \emptyset$ dır. O halde $\inf F_x = \alpha$ olur. Çünkü $\forall a \in F_x$ için $a \geq \alpha$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $a < \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde $a \in F_x$ vardır.

Teorem 4.1.27 $x = (x_{jk})$ herhangi reel değerli çift dizi olsun.

$$St_2 - \liminf x \leq St_2 - \limsup x$$

dir (Çakan ve Altay 2006).

İspat İlk olarak, $St_2 - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu durumda $G_x = \emptyset$ olur. Yani $\forall C \in \mathbb{R}$ için $\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > C\}\big) = 0$ olur. O halde

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} \leq C\}\big) = 1$$

dir. Böylece $F_x = \mathbb{R}$ olur ve $\inf F_x = -\infty$ olacağından $St_2 - \liminf x = -\infty$ dır. Eğer $St_2 - \limsup x = \infty$ ise $St_2 - \liminf x \leq \infty$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $St_2 - \limsup x = \beta$ ve $St_2 - \liminf x = \alpha$ olsun. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık teorem gereği

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > \beta + \frac{\varepsilon}{2}\}\big) = 0$$

olur. Bu durumda

$$\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\}) = 1$$

olduğundan $\beta + \varepsilon \in F_x$ dir. $\inf F_x = \alpha$ olması $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ demektir. ε keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ dır. O halde

$$St_2 - \liminf x \leq St_2 - \limsup x$$

dir. Ayrıca,

$$P - \liminf x \leq St_2 - \liminf x \leq St_2 - \limsup x \leq P - \limsup x$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.1.28 $x = (x_{jk})$ dizisi St_2- sınırlı bir çift dizi olmak üzere $x = (x_{jk})$ dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $St_2 - \liminf x = St_2 - \limsup x$ olmasıdır.

İspat $St_2 - \lim x = L$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2\big(\{(j,k) : |x_{jk} - L| > \varepsilon\}\big) = 0$$

olur. O halde $\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > \varepsilon + L\}\big) = 0$ ve $\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < -\varepsilon + L\}\big) = 0$ olacaktır. Bu ifadeler sırasıyla $St_2 - \limsup x \leq L$ ve $L \leq St_2 - \liminf x$ olduğunu ispat eder. Teorem (4.1.27) gereği $St_2 - \liminf x = St_2 - \limsup x$ dır.

Tersine $St_2 - \limsup x = St_2 - \liminf x = L$ olsun. Bu durumda teorem gereği

$$\delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} > L + \frac{\varepsilon}{2}\}\big) = 0 \text{ ve } \delta_2\big(\{(j,k) : x_{jk} < L - \frac{\varepsilon}{2}\}\big) = 0$$

olur. Böylece $St_2 - \lim x = L$ olduğu görülür.

Uyarı 4.1.29 $x = (x_{jk})$ dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel sınırlıdır.

Gerçekten de, $x = (x_{jk})$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak olsun. O halde

$$\delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \ |x_{jk} - L| > \varepsilon\}\big) = 0$$

olacak şekilde L noktası vardır.

$$\begin{aligned}\big\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \quad |x_{jk} - L| > \varepsilon\big\} &= \big\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \quad x_{jk} > L + \varepsilon\big\} \\ &\cup \big\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \quad x_{jk} < L - \varepsilon\big\}\end{aligned}$$

olur. Buradan yoğunluklara geçilirse,

$$\begin{aligned}\delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \quad |x_{jk} - L| > \varepsilon\}\big) &= \delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \quad x_{jk} > L + \varepsilon\}\big) \\ &+ \delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n, \quad x_{jk} < L - \varepsilon\}\big) \\ &= \delta_2(A) + \delta_2(B) = 0\end{aligned}$$

$\delta_2(A)$ değeri $[0,1]$ aralığında olacağından pozitif değerli iki ifadenin sonucunun 0 çıkması için $\delta_2(A) = 0$ ve $\delta_2(B) = 0$ olmalıdır. O halde $x = (x_{jk})$ çift dizisi hem üstten hem alttan istatistiksel sınırlı olduğundan St_2-sınırlıdır.

Teorem 4.1.30 $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir.

Yani $St_2 - \lim x_{jk} = L_1$ ve $St_2 - \lim x_{jk} = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

İspat $x = (x_{jk})$ dizisi L_1 noktasına istatistiksel yakınsak olsun. $0 < \varepsilon < |\frac{L_1 - L_2}{2}|$ olacak şekildeki verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\big\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n \ \text{ ve } \ \forall(j,k) \ \text{ için } \ |x_{jk} - L_1| \geq \varepsilon\big\} = A$$

ile ifade edersek

$$\delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n \ \text{ ve } \ \forall (j,k) \ \text{ için } \ |x_{jk} - L_1| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

dir. O halde

$$\delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n \ \text{ ve } \ \forall (j,k) \ \text{ için } \ |x_{jk} - L_1| < \varepsilon\}\big) = \delta_2(A') = 1$$

olacaktır. Aynı şekilde $x = (x_{jk})$ çift dizisi L_2 noktasına istatistiksel yakınsak olduğundan

$$B = \big\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n \ \text{ ve } \ \forall (j,k) \ \text{ için } \ |x_{jk} - L_2| \geq \varepsilon\big\}$$

ile ifade edilirse

$$\delta_2(B) = \delta_2\big(\{(j,k) : j \leq m, \quad k \leq n \ \text{ ve } \ \forall (j,k) \ \text{ için } \ |x_{jk} - L_1| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

olur. Küme bağıntısından $A' \subset B$ elde edilir. Buradan kümelerin yoğunluklarına geçiş yapıldığında $\delta_2(A') \leq \delta_2(B)$ dir. Bu ifade ise $1 \leq 0$ olduğu sonucunu verir. Fakat bu ifade doğru bir ifade değildir. $L_1 \neq L_2$ alındığında çelişki elde edilmiştir. O halde $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 4.1.31 Her $(j,k) \in K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $x_{jk} \leq y_{jk} \leq z_{jk}$ gerçekleşiyor ve $\delta_2(K) = 1$, $St_2 - \lim x_{jk} = St_2 - \lim z_{jk} = L$ olsun. O halde $St_2 - \lim y_{jk} = L$ dir.

İspat Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$A = \big\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - L| < \varepsilon\big\}$$

$$B = \big\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |y_{jk} - L| < \varepsilon\big\}$$

$$C = \big\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |z_{jk} - L| < \varepsilon\big\}$$

kümeleri ele alındığında $A \cap C \cap K \subseteq B$ olur. Her iki tarafın tümleyeni alınırsa $B' \subseteq A' \cup C' \cup K'$ elde edilir. Buradan yoğunluklara geçilirse

$$\delta_2(B') \leq \delta_2(A') + \delta_2(C') + \delta(K')$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada (x_{jk}) ve (z_{jk}) çift dizileri istatistiksel yakınsak olduğundan sağ taraftaki yoğunluklar 0 olacaktır. Yani,

$$\delta_2\big(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |y_{jk} - L| \geq \varepsilon\}\big) \leq 0$$

dır. Yoğunluk hiçbir zaman negatif değer alamayacağından

$$\delta_2\big(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |y_{jk} - L| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

elde edilir. Bu ifade ise $St_2 - \lim y_{nm} = L$ olduğunu gösterir.

Şimdi verilen bir çift dizinin Pringsheim limit noktaları kümesini ve istatistiksel limit noktarının kümesini tanımlayarak aralarındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 4.1.32 Eğer $x = (x_{jk})$ çift dizisinin $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsayan bir alt dizisi varsa $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_{jk})$ çift dizisinin *Pringsheim limit noktası* denir. $x = (x_{jk})$ çift dizisinin Pringsheim limit noktalarının oluşturduğu kümeyi $L_2(x)$ ile göstereceğiz. Yani,

$$L_2(x) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha, \ \ x \ \text{ dizisinin Pringsheim limit noktası}\}$$

Tanım 4.1.33 $k_j, r_k \in A$ ve $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere $(x_{k_j r_k})$, $x = (x_{jk})$ çift dizisinin alt dizisi olsun. Eğer $\overline{\delta}_2(A) > 0$ ve $\lim(x_{k_j r_k}) = \alpha$ olacak şekilde $(x_{k_j r_k})$ alt dizisi varsa $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_{jk})$ dizisinin istatistiksel limit noktası denir. Herhangi bir x çift dizisi için

$$\Lambda_2(x) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha, x \text{ dizisinin } St_2 - \text{ limit noktası}\}$$

(Das *et al.* 2009)

Örnek 4.1.34 $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 \ , & j = n^2 \text{ ve } k = m^2 \text{ ise} \\ 0 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\Lambda_2(x) = \{0\}$ dır. Fakat $L_2(x) = \{0, 1\}$ dir. Buradan $\Lambda_2(x) \subseteq L_2(x)$ olduğu açık bir şekilde görülür. Bu ifade herhangi bir çift dizi için de geçerlidir. Yani herhangi bir x çift dizisinin istatistiksel limit noktaları aynı zamanda limit noktalarıdır.

Örnek 4.1.35 $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} r_{jk} & , \quad j = n^2 \text{ ve } k = m^2 \text{ ise} \\ jk & , \qquad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada (r_{jk}) değerleri tüm rasyonel sayılar kümesi olan bir çift dizi olsun. $\Lambda_2(x) = \emptyset$ olacaktır. Çünkü karelerden oluşan indisli terimlerin yoğunluğu sıfırdır. Yoğunluğu sıfır olmayan terimlerde ise dizi jk değerlerini alır ve bu değerler için Pringsheim anlamında limit yoktur. Yani $x = (x_{jk})$ dizisinin yoğunluğu sıfır olmayan ve Pringsheim anlamında bir noktaya yakınsak olabilen bir alt dizisi bulunamamaktadır. Bu yüzden $\Lambda_2(x) = \emptyset$ dır. Fakat (r_{jk}) dizisi rasyonel sayılar kümesinin hepsini temsil ettiğinden ve rasyonel sayılar kümesi de $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $L_2(x) = \mathbb{R}$ dir.

Teorem 4.1.36 $x = (x_{jk})$ ve $y = (y_{jk})$ herhangi çift diziler olsun. Eğer

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M.N} \sum_{\substack{1\le j\le M \\ 1\le k\le N}} |x_{jk} - y_{jk}| = 0$$

ise $\Lambda_2(x) = \Lambda_2(y)$. (Das *et al.* 2009)

İspat Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\overline{\delta}_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ |x_{jk} - y_{jk}| \ge \varepsilon\}) = 0$$

olduğunu iddia ediyoruz. Aksi taktirde eğer

$$\overline{\delta}_2(\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ |x_{jk} - y_{jk}| \ge \varepsilon_0\}) = \alpha > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

olacak şekilde bir ε_0 varsa

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{M.N} \sum_{\substack{1\le j\le M \\ 1\le k\le N}} |x_{jk} - y_{jk}| \ge \alpha.\varepsilon_0 > 0$$

olur. Bu ifade varsaydığımız ifade ile çelişmektedir. Böylece $\{|x_{jk} - y_{jk}|\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsaktır. O halde $D \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\delta_2(D) = 1$ ve

$$\lim_{\substack{j,k\to\infty \\ (j,k)\in D}} |x_{jk} - y_{jk}| = 0$$

olacak şekilde D kümesi vardır. Şimdi $\beta \in \Lambda_2(x)$ olsun. O halde $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olacak şekilde x dizisinin bir $\{x_{jk}\}_{(j,k)\in A}$ alt dizisi vardır öyleki, $\overline{\delta}_2(A) > 0$ ve

$$\lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = \beta$$

dır. Böylece $\overline{\delta}(A \cap D) = \overline{\delta}(A) > 0$ ve

$$\lim_{\substack{j,k\to\infty \\ (j,k)\in A}} y_{jk} = \beta$$

dır. Buradan $\beta \in \Lambda_2(y)$ olur.

4.2 Çift Dizilerde İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Aşağıdaki tanım Móricz (1994) tarafından, verilmiştir.

Tanım 4.2.1 $x = (x_{jk})$ çift dizi olsun. Eğer,

$$P - \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_{jk} = l$$

oluyorsa, $x = (x_{jk})$ çift dizisi l sayısına *Cesàro toplanabilirdir* denir.

$(C, 1, 1)$ ifadesi ile Cesàro toplanabilen tüm çift dizilerin uzayını göstermekteyiz. Tek dizilerdeki tanımına benzer şekilde kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

Tanım 4.2.2 $x = (x_{jk})$ çift dizi ve p sayısı pozitif reel bir sayı olmak üzere, eğer

$$P - \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |x_{jk} - l|^p = 0$$

oluyorsa, $x = (x_{jk})$ çift dizisi l sayısına *kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir* denir.

ω_p^2 ifadesi ile tüm kuvvetli p-Cesàro toplanabilen çift dizilerin uzayını göstereceğiz.

Uyarı 4.2.3

i) $0 < p \leq q < \infty$ ise, hölder eşitsizliğinden $\omega_q^2 \subseteq \omega_p^2$ dir ve

$$\omega_p^2 \cap \mathcal{M}_u = \omega_1^2 \cap \mathcal{M}_u \subseteq (C,1,1) \cap \mathcal{M}_u.$$

ii) Eğer $x = (x_{jk})$ çift dizisi yakısnak fakat sınırlı değilse, bu durumda $x = (x_{jk})$ dizisi istatistiksel yakınsaktır. Fakat Cesàro yada kuvvetli Cesàro toplanabilir olmak zorunda değildir.

iii) Eğer $x = (x_{jk})$ çift dizisi sınırlı yakınsak ise $x = (x_{jk})$ çift dizisi aynı zamanda Cesàro ve kuvvetli p- Cesàro toplanabilir olup istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 4.2.4 $x = (x_{jk})$ çift dizisi,

$$x_{jk} = \begin{cases} k & , \quad j = 1 \text{ ve her } k \text{ için} \\ j & , \quad k = 1 \text{ ve her } j \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $P - \lim_{j,k} x_{jk} = 0$ dır. Fakat

$$P - \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_{jk} = P - \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \frac{1}{2} \big(m^2 + n^2 + m + n - 2 \big)$$

olacaktır. Burada sonlu bir limit bulunamayacağından $x = (x_{jk})$ Cesàro toplanabilir değildir. Aynı zamanda, $x = (x_{jk})$ çift dizisi kuvvetli p-Cesàro toplanabilir de değildir. Fakat,

$$P - \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \big| \{ (j,k) : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon \} \big| = P - \lim_{n,m} \frac{m+n-1}{nm} = 0$$

olduğundan $x = (x_{jk})$ dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.2.5 $x = (x_{jk})$ çift dizi ve p pozitif reel bir sayı olsun. O halde,

i) $x = (x_{jk})$ çift dizisi l sayısına kuvvetli p-Cesáro toplanabilir ise $x = (x_{jk})$ çift dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır.

ii) $\omega_p^2 \cap \mathcal{M}_u = St_2 \cap \mathcal{M}_u$

İspat a) $K_\varepsilon(p) = \big\{(j,k) : j \leq n, k \leq m, |x_{jk} - l|^p \geq \varepsilon\big\}$ kümesini tanımlayalım. $x = (x_{jk})$ çift dizisi l sayısına p-Cesáro toplanabilir olduğu için,

$$\begin{aligned} 0 &\leftarrow \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|x_{jk} - l|^p \\ &= \frac{1}{nm}\left\{\sum_{(j,k)\in K_\varepsilon(p)}|x_{jk} - l|^p + \sum_{(j,k)\notin K_\varepsilon(p)}|x_{jk} - l|^p\right\} \\ &\geq \frac{1}{nm}\big|\{(j,k) : j \leq n,\ k \leq m,\ |x_{jk} - l|^p \geq \varepsilon\}\big|\varepsilon. \end{aligned}$$

Böylece $x = (x_{jk})$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır.

b) $I_\varepsilon(p) = \{(j,k) : j \leq n,\ k \leq m,\ |x_{jk} - l| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\}$ şeklinde tanımlayalım. $M = \|x\|_\infty + |l|$ olsun. $x = (x_{jk})$ çift dizisi sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizi olduğu için her $n, m \geq N$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı seçebiliriz öyleki,

$$\frac{1}{nm}\big|\{(j,k) :\ j \leq n,\ k \leq m,\ |x_{jk} - l| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\}\big| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

dir. Şimdi her $n, m \geq N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|x_{jk} - l|^p &= \frac{1}{nm}\left\{\sum_{(j,k)\in I_\varepsilon(p)}|x_{jk} - l|^p + \sum_{(j,k)\notin I_\varepsilon(p)}|x_{jk} - l|^p\right\} \\ &< \frac{1}{nm}nm\frac{\varepsilon}{2M^p}M^p + \frac{1}{nm}nm\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x = (x_{jk})$ çift dizisi l sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir.

Uyarı 4.2.6 Eğer sınırlı bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel yakınsak ise $x = (x_{jk})$ çift dizisi $(C, 1, 1)$ toplanabilirdir. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 4.2.7 $x = (x_{jk})$ çift dizisi

$$\text{her k için,}\ \ (x_{jk}) = (-1)^j$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$P - \lim_{n,m}\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}x_{jk} = 0$$

olur. Fakat $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel yakınsak bir çift dizi değildir.

5 KAYNAKLAR

Altay, B. (2002). Bazı yeni çift dizi uzayları, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya

Altay, B., Başar, F. (2005). Some new spaces of double sequences, *J. Math. Anal. Appl.*, **309**

Boss, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Science Publications, Newyork, USA.

Boos, J., Leiger, T., Zeller, K. (1997). Consistency theory for SM-methods, *Acta Math. Hungar.*, **76**: 83-116.

Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *Amer. J. Math*, **75**: 335-346.

Connor, J.S. (1988). The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, *Analysis* **8**: 47-63.

Connor, J.S. (1985). Some applications of functional analysis to summability theory, Ph. D. Thesis, Kent State University, Kent, USA.

Çakan, C., Altay, B. (2006). Statistical boundedness and statistical core of double sequences, *J. Math. Anal. Appl.* **317**: 690-697.

Das, P., Malik, P., Savaş, E., (2009). On statistical limit points of double sequences, *Appl. Math. and Com.* **215**: 1030-1034

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, **2**: 241-244

Freedman, A.R., Sember I.J., (1981). Densities and summability, *Pacific J. Math.*, **95**: 293-305.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence, *Analysis* **5**: 301–313.

Fridy, J.A., Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**: 3625-3631.

Fridy, J.A., Orhan, C. (1997). Statistical core theorems, *J.Math Anal. Appl.*, **208**: 520-527.

Fridy, J.A., (1993). Statistical limit points. *Proc. Am. Math. Soc.* **118**: 1187-1192

Habil, E. D., (2005). Double sequences and double series, The Islamic University Journal, **14**: 1-32.

Hamilton, H. J. (1936). Transformation of multiple sequences, *Duke Math. J.* **2**: 29-60.

Iyer, V. G. (1985). Mathematicel Analysisi, Tata McGraw-Hill, 3rd Edition.

Maddox, I.J. (1970). Elements of Functional Analysis.Cambridge University Pres.

Móricz, F. (1991). Extensions of the space c and c_0 from single to double sequences, *Glasnik Math*, **26**(46): 67-73

Móricz, F. (1994) Tauberian theorems for Cesàro summable double sequences. *Stud. Math.* 110, 83-96

Móricz, F. (2003). Statistical convergence of multiple sequences, *Arch. Math.***81**: 82-89

Mursaleen, Edely, O. H. H. (2003). Statistical convergence of double sequences, *J. Math. Anal. Appl.* **288**: 223-231.

Neubrum, T. Smital, J. Salat, T. (1968). On the structure of the space M(0, 1), *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **13**: 337-386.

Nuray, F., Ruckle, W.H., (2000) Generalized statistical convergence and convergence free spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **245(2)**: 513-527.

Patterson, R.F. (1999). Double sequences core theorems, *Intertant. J. Math. Sci.*, **22**: 785-793.

Pringsheim, A. (1900). Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen, *Math. Ann.* **53**: 289-321.

Robison, G. M. (1926). Divergent Double Sequences and Series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **28**: 50-73.

Tripathy, B.C. (1998). On statistical convergent sequences, *Bull. Cal. Math.Soc.*, 20-31.

Salat, T., Tijdeman, R., (1980). On statistically convergence sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, **30**: 139-150.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly* **66**: 361-375.

Sever, Y. Talo, Ö., Altay, B. on convergence of double sequence of cloed set. Yazışma aşamasında.

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.* **2**: 73-74.

Wilansky, A. (1984). Summability through Functional Analysis. North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, North Holland.

Zygmund, A. (1979). Trigonometric series Ed., Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Özlem OCAKLI
Doğum Yeri ve Tarihi	: Sütçüler-ISPARTA, 25/03/1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 0 551 621 09 44, mathematikerozlem@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Gülkent Lisesi, 2001–2004
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2005–2006
	: Uludağ Üniversitesi, 2006-2009
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2011–2014

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

M.E.B. Ağrı, Diyadin Lisesi, 2011

M.E.B. Afyonkarahisar, Çobanlar Çok Programlı Lisesi, 2011-...