

**MAKSİMUM ENTROPİ YÖNTEMİ
İLE TÜRKİYE'DEKİ COĞRAFI
BÖLGELERİN YILLIK HAVA
SICAKLIK DEĞERLERİNİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice ÇİÇEK

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI

İSTATİSTİK

Eylül, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKSİMUM ENTROPİ YÖNTEMİ İLE TÜRKİYE'DEKİ
COĞRAFİ BÖLGELERİN YILLIK HAVA SICAKLIK
DEĞERLERİNİN İNCELENMESİ

Hatice ÇİÇEK

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Eylül, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Hatice ÇİÇEK tarafından hazırlanan “**Maksimum Entropi Yöntemi ile Türkiye’deki Coğrafi Bölgelerin Yıllık Hava Sıcaklık Değerlerinin İncelenmesi**” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 10 Eylül 2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **İstatistik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI

- Başkan** : Prof. Dr. İsmet DOĞAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Tıp Fakültesi
- Üye** : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
- Üye** : Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

09/09/2013

Hatice ÇİÇEK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM ENTROPİ YÖNTEMİ İLE TÜRKİYE'DEKİ COĞRAFİ BÖLGELERİN YILLIK HAVA SICAKLIK DEĞERLERİNİN İNCELENMESİ

Hatice ÇİÇEK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI

Entropi kavramı istatistik bilimi içerisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Fen ve sosyal bilimler üzerine son yıllardaki yapılan çalışmalar incelendiğinde, entropi kavramının hemen hemen her bilim dalında yer aldığı da gözlemlenmektedir.

Bu çalışmada maksimum entropi dağılımı iki ve üç kısıt altında incelenerek ilk olarak konuya ilişkin örnekler verilmiş daha sonra Türkiye geneli ve yedi coğrafi bölge için Meteoroloji Genel Müdürlüğünden alınan son 43 yılın sıcaklık değerleri için MaxEnt dağılımı elde edilerek gözlemlenen frekanslar ile MaxEnt dağılımından elde edilen olasılıklara karşı gelen frekanslar arasındaki uyum Ki-Kare ve R^2 kriterlerine göre incelenmiştir.

2013, x + 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: Entropi, Maksimum Entropi, Yıllık Hava Sıcaklığı

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

EXAMINING THE ANNUAL OPEN-AIR TEMPERATURE VALUES OF GEOGRAPHICAL REGIONS OF TURKEY BY MAXIMUM ENTROPY METHOD

Hatice ÇİÇEK

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assistant Professor Sinan SARAÇLI

Entropy has a very important role in Statistics. When we examine the recent studies it can be seen that entropy take place nearly in every brunches of natural and social sciences.

In this study, maximum entropy distribution is examined under two and three restrictions and there have given some examples firstly, then by calculating the MaxEnt distribution for the last 43 years' annual open-air temperatures of seven geographical regions and Turkey, which are obtained from meteorology general management, the accordance between the observed frequencies and the frequencies obtained from the probabilities of the MaxEnt distribution is examined by Chi-Square and R^2 criteria.

2013, x + 64 pages

Key Words: Entropy, Maximum Entropy, Annual Open-Air Temperature

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel alışmaların ynlendirilmesi, sonuların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI hocama, araştırma ve yazım sürecinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Birdal ŞENOğLU, Sayın Prof. Dr. İsmet DOğAN'a arkadaşlarım Duygu YILDIRIM ve Gizem GÜLSEVİN'e teşekkür ederim.

Ayrıca benim bu alanda çalışmama destek olan her zaman çalışmalarını örnek aldığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI hocama tekrar teşekkür ederim.

Beni bugünlere getiren, hiçbir zaman maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme bütün desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Hatice ÇİÇEK

AFYONKARAHİSAR, 2013

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	v
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR BİLGİLERİ	3
2.1 Entropi'nin Tanımı	3
2.2 Shannon Entropi	6
2.3 Maksimum Entropi Dağılımı.....	6
2.4 Maximum Entropi'nin Değeri.....	11
2.5 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Lagrange Çarpanlarının Varlığı.....	13
2.6 Varyans-Kovaryans Matrisinin Alternatif Türevleri.....	15
2.7 Bir Kısıtlı MaxEnt Dağılımı.....	17
2.8 İki Kısıtlı MaxEnt Dağılımı.....	18
2.8 Üç Kısıtlı MaxEnt Dağılımı.....	21
3. MATERYAL ve METOT	25
4. BULGULAR.....	27
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	59
6. KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	63

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

MaxEnt	Maksimum Entropi
--------	------------------

Simgeler

χ^2	Ki-Kare Kriteri
R^2	Belirlilik Katsayısı
f_e	MaxEnt dağılımından elde edilen frekanslar
f_g	Gözlenen frekanslar

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 p_i değerinin 0, 1 ve $1/2$ olması durumundaki entropi değeri.....	7

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 Düzgün bir paranın üç kez atılışındaki olasılıklar	4
Çizelge 2.2 iki kısımdan oluşan sistemin olasılık dağılımları.....	5
Çizelge 2.3 Farklı hamburger türüne ait fiyat değerleri.....	9
Çizelge 2.4 Dört farklı hamburger türüne ait MaxEnt dağılımı	11
Çizelge 2.5 X rassal değişkeninin değerleri.....	22
Çizelge 2.6 X değerlerine bağlı olarak iki kısıt altında incelenen MaxEnt dağılımı.....	23
Çizelge 2.7 X değerlerine bağlı olarak üç kısıt altında incelenen MaxEnt dağılımı.....	24
Çizelge 4.1 Marmara bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları.....	27
Çizelge 4.2 Marmara bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	28
Çizelge 4.3 Marmara bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	30
Çizelge 4.4 Akdeniz bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları.....	31
Çizelge 4.5 Akdeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	32
Çizelge 4.6 Akdeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	34
Çizelge 4.7 İç Anadolu bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları.....	35

Çizelge 4.8 İç Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	36
Çizelge 4.9 İç Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	38
Çizelge 4.10 Doğu Anadolu bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları.....	39
Çizelge 4.11 Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	40
Çizelge 4.12 Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	42
Çizelge 4.13 Ege bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları	43
Çizelge 4.14 Ege bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	44
Çizelge 4.15 Ege bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	46
Çizelge 4.16 Karadeniz bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları.....	47
Çizelge 4.17 Karadeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	48
Çizelge 4.18 Karadeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	50
Çizelge 4.19 Güney Doğu Anadolu bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları.....	51

Çizelge 4.20 Güney Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı.....	52
Çizelge 4. 21 Güney Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı.....	54
Çizelge 4.22 Türkiye geneline ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları	55
Çizelge 4.23 Türkiye geneline ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	56
Çizelge 4.24 Türkiye geneline ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı	58

1.GİRİŞ

Entropi kavramı, kapalı bir kaptaki ideal bir gazın düzensizliğinin bir ölçüsü olarak 19. Yüzyılın sonlarında Boltzman tarafından ortaya atılan bir kavramdır.

Bir sistemin entropisinin azalması, sistem hakkında bilginin de artmasına neden olmaktadır; o halde bilgi entropi'nin negatifidir. Diğer taraftan mümkün durumları belirsizlik içinde bulunan bir sistem hakkında bazı bilgiler oluştuğunda, söz konusu belirsizlik azalacaktır. Sistem hakkında ne kadar çok bilgi elde edilirse, belirsizlik o oranda azalmaktadır. Bu durumda, bir sistemin belirsizliğini entropi yardımıyla ölçmek mümkün olmaktadır (Orkan 1992).

Olasılık dağılımları istatistik biliminin temel yapıtaşlarından birisidir. Yüzyıllar boyunca, çok sayıda olasılık dağılımları; kesikli veya sürekli, tek değişkenli ya da çok değişkenli, değişik düşüncelerden ortaya çıkmıştır (Kantar 2006).

Günümüzde entropi optimizasyon metotları, istatistik, matematik, coğrafya, uzay bilimleri, ekonomi, finans, pazarlama, sistem analizi, görüntü işleme, model belirleme gibi alanlarda önemli uygulamalara sahiptir.

İstatistikte birçok konu MaxEnt ve MinxEnt metodları yardımıyla incelenmiştir (Kapur and Kesevan 1992; Golan et all. 1996; Kullback 1959; Lind 1997; Shamilov 2005; Shamilov ve Mert 2005; Shamilov ve ark. 2008; Kantar ve Usta 2008; Shamilov ve Asma 2008). Özellikle MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarıyla ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Pandey (2001a, 2001b) çalışmalarında MinxEnt metodunu kullanarak dağılım fonksiyonunun tersinin tahminini yapmıştır. Zellner (1997) ve Zellner ve Tobias (2001) MaxEnt metodunu kullanarak Bayes metodundaki önsel dağılımı tahmin etmişlerdir. Buchen ve Kelly (1996) ve Borwein ve ark. (2003) menkul kıymetlerin opsiyonlu fiyatlarının dağılımı MaxEnt dağılımı yardımıyla incelemiştir. Ryu (1993) MaxEnt dağılımını regresyon modelinde incelemiştir. Zhu (1998) incelediği istatistiksel verinin dağılımını MinxEnt metodu yardımıyla bulmuştur. Rockinger ve Jondeau (2002) MaxEnt dağılımlarını incelemiş ve bu dağılımları zaman serisi modellerine

uygulamıştır. Ebrahimi (2000), Asadi ve ark. (2004) yaşam dağılımları için MaxEnt metodu uygulamıştır. Ramirez ve Carta (2005), Li ve Li (2005a, 2005b) çalışmalarda, rüzgar hızının dağılımını elde etmiş ve istatistiksel dağılımlarla karşılaştırmıştır. Rockinger ve Jondeau (2002) MaxEnt dağılımlarını incelemiş ve bu dağılımları zaman serisi modellerine uygulamıştır. Wu ve Stengos (2005) doğrusal regresyon modelindeki artıkların dağılımı MaxEnt dağılımları yardımıyla modellenmiştir. Bera ve Park (2007, 2009) çalışmalarında zaman serisi modellerindeki parametrelerinin tahminin MaxEnt dağılımına dayalı olarak incelemiştir. Wu (2003) MaxEnt dağılımlarının hesaplanması üzerinde durmuş ve uygulama olarak bir ülkenin gelir dağılımını incelemiştir. Wu ve Perloff (2007) gruplandırılmış verilerin MaxEnt dağılımını tahmin etmiştir (Usta 2009).

Entropi ölçütünün tanımı; anlamına, türüne, değerine veya diğer herhangi bir subjektif özelliğine bakılmaksızın, iletişim yaratan sembol, sinyal ya da sayılar dizisinin istatistiksel yapısını analiz eden Bilgi Kuramı'na dayanmaktadır. Shannon'a göre, bir olay hakkında bilgi edinilmesi, o olayın belirsizlik içermesi halinde söz konusu olabilir. Buna göre, oluşma olasılığı yüksek olayların meydana gelmesi fazla bilgi gerektirmemekte; aksine, olasılığı düşük olayların oluşması daha fazla bilgi taşımaktadır. Bu çerçevede, belli bir alternatif çözümün oluşma olasılığı, o çözümü oluşturan işaret, sembol ya da sayının belirsizlik derecesini temsil etmektedir. Bu yaklaşımla entropi kavramı, bir olayın olabileceği çeşitli alternatif durumların beklenen değeri olarak matematiksel bir bağlantıyla tanımlanmıştır. Bu tanıma göre entropi, belli birimlerle (bit, napier, desibel gibi) ölçülebilen kantitatif bir büyüklük olmaktadır. Böylelikle, bir rastgele sürecin olasılık yapısı belli olduğunda, o sürecin entropisi sayısal olarak hesaplanabilmekte ve söz konusu birimlerle ifade edilebilmektedir. Shannon'un tanımı gereği, entropi fonksiyonu daima pozitif değer almaktadır (Özkul 2001).

2.LİTERATÜR BİLGİLERİ

2.1 Entropi'nin Tanımı

Çok eski bir kavram olan entropi ilk olarak termodinamikte 19. Yüzyılın ortalarına doğru Clausius tarafından geliştirilmiştir. Termodinamikteki ya da istatistiksel mekanikte entropi bir termodinamiksel sistemde var olan düzensizlik düzeyinin bir ölçümüdür (Wu 2003).

Shannon iletişimin temel problemi olarak gördüğü, bir noktada seçilmiş bir mesajın yaklaşık olarak ya da tamamen başka bir noktada yeniden üretilme sürecinde bilgi kaybını azaltabilmek için araştırmalar yapmıştır. Geliştirdiği formül için de iki tabanlı logaritmayı kullanmıştır. Yapılan işlemlerde, logaritmanın alınması, entropiyi bağımsız sistemler için toplanabilir bir nitelik haline getirmektedir. Çalışmalarında, logaritmanın kullanışlı olduğunu belirterek sayısal kodlama sistemine uygun olduğu için iki tabanlı logaritmayı seçmiştir. Bu şekilde entropi sisteminde çıkan sonuç, 'bit' olarak adlandırılmıştır. İkili kodlama sisteminde iki sabit durum, sıfır ve bir olmaktadır (Ocakçı ve Bostancı 2009).

h bilgi içeriği ve p olayın gerçekleşme olasılığı olmak üzere,

$$h = \log \frac{1}{p} \text{ ve ya } h = -\log p \quad (2.1)$$

Eşitlik 2.1'deki gibi logaritmik bir fonksiyon hesaplanabilir. Bir sistemin mümkün tüm durumları ve bunların olasılıkları belirlendiğinde, sisteme ilişkin ortalama veya beklenen bilgi içeriği de hesaplanabilir. Örneğin bir sistemin mümkün durumları X tesadüfi değişkeni ile tanımlanırsa, beklenen bilgi içeriği Eşitlik 2.2. ile hesaplanacaktır.

$$H(x) = -\sum p \log p \quad (2.2)$$

Beklenen bilgi içeriği $H(x)$, bir sistemin durumunu kesin şekilde belirleyebilmek için gerekli olan bilgi miktarına eşittir. Gerekli tüm bilgi sağlandığında, sistemdeki

belirsizlik ortadan kalkacağına göre, bu miktar aynı zamanda mevcut belirsizlik miktarına da eşittir. O halde $H(x)$ ifadesi sistemin entropisi olarak adlandırılabilir (Orkun 1992).

X rassal değişkeni için entropi değeri $H(x)$ Eşitlik 2.3'deki gibi hesaplanır.

$$H(x) = - \sum_{x \in R} p(x) \log p(x) \quad (2.3)$$

Burada logaritma tabanı 2 olarak alınmıştır ve entropi bit olarak ifade edilir. Eğer logaritmanın tabanı e ise, entropi'nin ölçümü naturel olarak ifade edilir (Cover and Thomas 1991).

Entropi kavramının anlaşılması için birkaç örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 1: Çizelge 2.1.'de verildiği üzere, düzgün bir paranın üç kez atılışındaki olasılıklara sahip, 8 durumlu bir sistemin entropisi Eşitlik 2.4 ile verilmiştir. N tane eşit olasılıklı durum gösteren bir sistemin entropisi $\sum p_i \log_2 p_i$ bit'tir. Sadece bir durumda bulunan bir sistemin entropisi sıfırdır.

Çizelge 2.1 Düzgün bir paranın üç kez atılışındaki olasılıkları

YYY	YYT	YTY	TYY	YTT	TYT	TTY	TTT
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

$$H = - \left(\left(\frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \right) 8 \right) = \left(- \left(-\frac{3}{8} \right) * 8 \right) = 3(\text{bit}) \quad (2.4)$$

Örnek 2: İki kısımdan oluşan veya iki alt sistemi bulunan bir sistemde alt sistemlerden birinde meydana gelen bir arıza diğerine bağlı olmadan ortaya çıkmaktadır; yani alt sistemler bağdaşmaz nitelikte sistemlerdir. Belirli bir süre çalıştıktan sonra, sistemin

bulunacağı durumlar şu şekilde ortaya çıkacaktır;

X_1 : her iki alt sistem de çalışır durumdadır

X_2 : birincisi çalışır, ikincisi arızalı durumdadır

X_3 : birincisi arızalı, ikincisi çalışır durumdadır

X_4 : her ikisi de arızalı durumdadır

Sistemin durumlarına ilişkin olasılık dağılımı ise Çizelge 2.2’de verilmiştir. Buna göre sistemin entropisi,

Çizelge 2.2 İki kısımdan oluşan sistemin olasılık dağılımı

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
P_i	0.6	0.25	0.1	0.05

olur.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \\ &= -[0.6 \log(0.6) + 0.25 \log(0.25) + 0.1 \log(0.1) + 0.05 \log(0.05)] \\ &= 1.49 \text{ bit} \end{aligned}$$

Örnek 3: Bir nükleotid dizisinde A,C,G,T nükleotidlerinin oranı (olasılıkları) $P(A), P(G), P(C), P(T)$ olsun. Bu oranlara bağlı olarak

$$H_1 = -P(A) \log_2 P(A) - P(C) \log_2 P(C) - P(G) \log_2 P(G) - P(T) \log_2 P(T)$$

Nükleotid entropisi hesaplanabilir. Maksimum entropi $H_1^{\max}=2$ olmak üzere, eşit olasılıktan uzaklaşma (Divergence from equiprobability) olarak $D_1 = H_1^{\max} - H_1 = 2 - H_1$ sayısal bir ölçüt olarak ele alınabilir. Farklı diziler bu ölçüte göre karşılaştırılabilir. Örneğin M.jannaschii genomu için TIGR dizisindeki veride

$$P(A)=0.344 \quad P(C)=0.155 \quad P(G)=0.157 \quad P(T)=0.343$$

$$H_1 = 1.89653 \text{ bit}$$

$$D_1 = H_1^{\max} - H_1 = 2 - 1.89653 = 0.103473$$

olarak gözlenmiştir.

2.2 Shannon Entropi

X kesikli rassal değişkenine ait p_1, p_2, \dots, p_n olasılıklar olsun. $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ölçümü için şu iki özellik gereklidir.

- i. H'de p_i sürekli olmalıdır.
- ii. Bütün p_i 'ler eşit ise $p_i = \frac{1}{n}$ ve H monoton artan bir fonksiyondur.

Buradan bu iki özellik için Eşitlik 2.5 verilmiştir.

$$H(x) = -K \sum_{x \in R} p_i \log(p_i) \quad (2.5)$$

Eşitlikteki K pozitif bir sabit ve ölçümün bir birimde değişen ölçü miktarıdır. Shannon entropi Eşitlik 2.6 ile tanımlanır (Shannon 1948).

$$H(x) = - \sum_{x \in R} p_i \log(p_i) \quad (2.6)$$

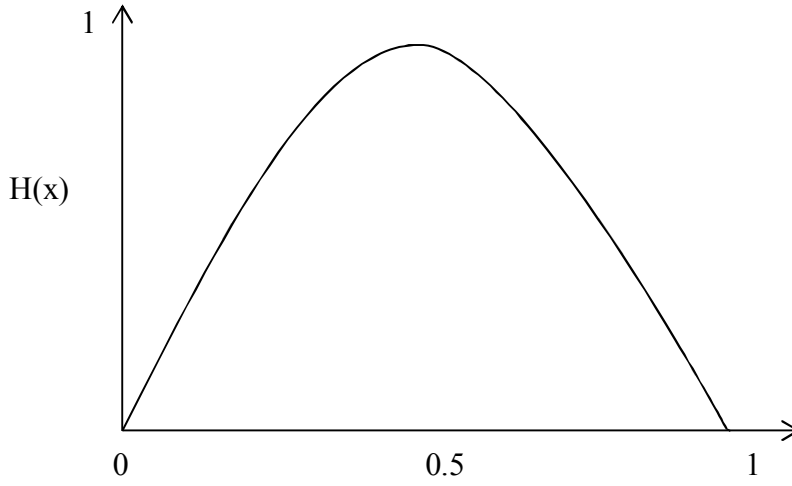
2.3 Maksimum Entropi Dağılımı

Shannon entropi ölçümünü, rassal değişkenlerden elde edilen moment kısıtlarına göre maximum yapan metoda MaxEnt metodu, bu metottan elde edilen dağılıma MaxEnt dağılımı denilmektedir (Jaynes 1957).

$$H(x) = - \sum_{x \in R} p_i \log(p_i) \quad (2.7)$$

Mümkün durumların gerçekleşme olasılıkları p_i 'nin çeşitli durumlarına göre Şekil 2.1 incelenirse; $p_i, 1/n, 1/2$ olduğunda

$H(x) = \log_2 2 = 1$ bit ve grafikten de görüldüğü gibi p_i değeri $1/2$ değeri için maksimum değere ulaşılmıştır (Orkun 1992).



Şekil 2.1 p_i olasılık değerinin 0, 1 ve $1/2$ olması durumundaki Entropi grafiği

2.6 Eşitliğine bağlı olarak,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.8)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n p_i g_{ri} = a_r \quad r = 1, 2, \dots, m; p_i \geq 0, \quad (2.9)$$

2.8 ve 2.9 Eşitlikleri yazılabilir ve burada g_{ri} ($i=1,2,\dots,n$) moment fonksiyonları, a_r 'lere ise rassal değişkenlerden elde edilen moment değerleri denir (Kapur and Kesavan 1992).

Eşitlik 2.7 ile verilen entropi fonksiyonunun Eşitlik 2.8 ve 2.9'da verilen kısıtlara göre maksimum değeri Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunur. Lagrange fonksiyonu, Eşitlik 2.10 şeklindeki gibi tanımlanır.

$$L \equiv - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - (\lambda_0 - 1) \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \sum_{r=1}^m \lambda_r \left(\sum_{i=1}^n p_i g_{ri} - a_r \right) \quad (2.10)$$

Burada λ_r 'ler Lagrange çarpanlarıdır. Burada L fonksiyonunu maksimum yapan p_i olasılık değerlerini bulmak için Eşitlik 2.10'deki fonksiyonun p_i 'lere göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve buradan 2.11 ve 2.12 eşitliklerine ulaşılır.

$$-\ln p_i - \lambda_0 - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_{ri} = 0 \quad (2.11)$$

$$p_i = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i} - \dots - \lambda_m g_{mi}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

Eşitlik 2.12, 2.8 ve 2.9 eşitliklerinde yerine yazılırsa Eşitlik 2.13-2.16'e ulaşılır (Kapur and Kesavan 1992).

$$\sum_{i=1}^n \exp(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}) = 1 \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \exp(-\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}) = a_r \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.14)$$

$$\exp(\lambda_0) = \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}\right) \quad (2.15)$$

$$a_r \exp(\lambda_0) = \sum_{i=1}^n g_{ri} \exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}\right) \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$a_r = \sum_{i=1}^n g_{ri} \frac{\exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}\right)}{\exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{ji}\right)'} \quad (2.16)$$

Lagrange çarpanları kullanılarak maksimum entropi dağılımının hesaplanması örnek4 de gösterilmiştir.

Örnek 4: Çizelge 2.3'te bir hamburgerciye gelen ve günlük ortalama \$2.5'lık yemek harcaması yapabilecek bir öğrencinin, Et (E), Tavuk (T), Balık (B) ve Vejetaryen (V) olmak üzere seçim yapabileceği 4 farklı hamburger türüne ilişkin fiyatlar verilmiştir.

Çizelge 2.3 4 Farklı hamburger türüne ait fiyat değerleri

Tür	Fiyat
<i>Et</i>	<i>\$1</i>
<i>Tavuk</i>	<i>\$2</i>
<i>Balık</i>	<i>\$3</i>
<i>Vejetaryen</i>	<i>\$8</i>

Bir öğrencinin günlük yemek harcaması ortalama \$2.5 olduğuna göre, her bir hamburger türü için sipariş sıklığı (frekansı) ne olacaktır? Sorusuna yanıt aranmak istenirse aşağıda verilen kısıtlar yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned}
p(E) + p(T) + p(B) + p(V) &= 1 \\
\$1p(E) + \$2p(T) + \$3p(B) + \$8p(V) - \$2.5 &= 0 \\
H &= p(E) \log\left(\frac{1}{p(E)}\right) + p(T) \log\left(\frac{1}{p(T)}\right) + p(B) \log\left(\frac{1}{p(B)}\right) + p(V) \log\left(\frac{1}{p(V)}\right) \\
L &= H - (\lambda_0 - \log_2 e)(p(E) + p(T) + p(B) + p(V) - 1) \\
&\quad - \lambda_1(\$1p(E) + \$2p(T) + \$3p(B) + \$8p(V) - \$2.5)
\end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Daha önce anlatılan Maksimum Entropi formülasyonlarına ve 2.17 Eşitliğinde verilen kısıtlara bağlı olarak çözümlenecek olursa 2.18 eşitlikleri elde edilecektir.

$$\left. \begin{aligned}
p^*(E) &= 2^{\lambda_0 - 1 + \lambda_1} \\
p^*(T) &= 2^{\lambda_0 - 1 + 2\lambda_1} \\
p^*(B) &= 2^{\lambda_0 - 1 + 3\lambda_1} \\
p^*(V) &= 2^{\lambda_0 - 1 + 8\lambda_1}
\end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Elde edilen p^* değerlerini 2.17'deki iki kısıt altında çözümlenecek olursa 2.19 Eşitliğinden λ_0 ve λ_1 değerleri elde edilir. Burada 2.19 Eşitliğindeki denklemler 2.8 ve 2.9 kısıtlarının 2 tabanlı logaritması kullanılarak elde edilmiştir.

$$\left. \begin{aligned}
\lambda_0 &= \log_2(2^{-\lambda_1} + 2^{-2\lambda_1} + 2^{-3\lambda_1} + 2^{-8\lambda_1}) \\
0 &= 0.5 \times 2^{-0.5\lambda_1} + 5.5 \times 2^{-5.5\lambda_1} - 1.5 \times 2^{1.5\lambda_1} - 0.5 \times 2^{0.5\lambda_1}
\end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = 1.2371$ ve $\lambda_1 = 0.2586$ elde edilir. Bu değerler yerine yazıldığında ise Çizelge 2.4'deki Entropi dağılımı elde edilir (Penfield 2003).

Çizelge 2.4 4 Farklı hamburger türüne ait MaxEnt dağılımı

Tür	p^*
<i>Et</i>	0.3546
<i>Tavuk</i>	0.2964
<i>Balık</i>	0.2478
<i>Vejetaryen</i>	0.1011

Çizelge 2.4'ten elde edilen bulgulara bağlı olarak bu öğrencinin haftanın herhangi bir günü hamburger yemek için geldiğinde ilgili kısıtlar altında Et hamburger yemeyi tercih etme olasılığı 0,3546, Tavuk hamburger yemeyi tercih etme olasılığı 0,2964, Balık hamburger yemeyi tercih etme olasılığı 0,2478 ve son olarak Vejetaryen hamburger yeme tercih etme olasılığı 0,1011'dir.

2.4 Maksimum Entropi'nin Değeri

Eşitlik 2.12'deki maksimum olasılık dağılımı Eşitlik 2.6'da yerine yazılarak, H_{max} değeri elde edilir. 2.6, 2.9 ve 2.12 eşitlikleri kullanılarak 2.20 ve 2.21 Eşitliklerine ulaşılır (Kapur and Kesevan 1992).

$$H_{max} = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = - \sum_{i=1}^n p_i (-\lambda_0 - \lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i} - \dots - \lambda_i g_{mi}) \quad (2.20)$$

ve

$$H_{max} = \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \quad (2.21)$$

Teorem 2.3: Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak elde edilen MaxEnt dağılımından daha büyük entropi değerine sahip olan başka bir dağılım yoktur.

İspat: q_1, q_2, \dots, q_n 2.8 ve 2.9 kısıtlarını sağlayan bir başka olasılık dağılımı olsun. Dolayısıyla bu olasılık dağılımı için de 2.22 ve 2.23 eşitlikleri yazılabilir.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.22)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n p_i g_{ri} = a_r \quad r = 1, 2, \dots, m; p_i \geq 0, \quad (2.23)$$

2.13 Eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} H_{max} - H &= \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m + \sum_{i=1}^n q_i \ln q_i \\ &= \lambda_0 \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n g_j(x_i) q_i + \sum_{i=1}^n q_i \ln q_i \\ &= \sum_{i=1}^n q_i (\lambda_0 + \lambda_1 g_1(x_1) + \dots + \lambda_1 g_1(x_i) + \ln q_i) \\ &= \sum_{i=1}^n q_i (-\ln p_i + \ln q_i) \\ &= \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.24 ifadesine ulaşılır. Buradan 2.25 Eşitsizliği yazılabilir.

$$\sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq 0 \quad (2.25)$$

Burada ancak $p_i = q_i$ olması durumunda eşitlik sağlanabilir. Bu eşitsizlik Shannon

eşitsizliği olarak adlandırılır. Dolayısıyla 2.26 sonucuna ulaşılır.

$$H_{max} - H \geq 0 \quad (2.26)$$

Ancak ve ancak verilen diğer dağılımın maximum entropi dağılımı ile çakışması sonucu $H_{max} = H$ elde edilir (Kapur and Kosevan 1992).

2.5 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ Lagrange Çarpanlarının Varlığı

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ 'ların varlığını göstermek için 2.16 eşitliği, 2.27 eşitliğindeki gibi yeniden yazılır.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) &= a_1 \\ &\vdots \\ f_m(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) &= a_m \end{aligned} \quad (2.27)$$

Buradan Eşitlik 2.28 elde edilir.

$$f_r(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) = \frac{\sum_{i=1}^n g_r(x_i) \exp\{\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}}{\sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}}, \quad (2.28)$$

$f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_m)'$ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$ ve $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ dir.

$f(\lambda) = a$ kapalı fonksiyon şeklinde yazılıp, $\frac{D(f_1, f_2, f_3, \dots, f_m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)}$ determinantının sıfırdan farklı olduğunu göstermek gerekir. Buna göre eşitlik 2.14'de λ_r 'ye göre türev alınırsa 2.29-2.32 eşitliklerine ulaşılır.

$$\frac{\partial f_r}{\partial \lambda_r} = \frac{-\sum_{i=1}^n g_r(x_i) g_r(x_i) \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\} \sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}}{\left\{ \sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\} \right\}^2}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^n g_r(x_i) \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\} \sum_{i=1}^n g_r(x_i) \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}}{\{\sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}\}^2} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial \lambda_r} = -E(\lambda_r^2(X)) + E(g_r(X)) = -Var(g_r(X)); \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_s} &= \frac{-\sum_{i=1}^n g_r(x_i) g_s(x_i) \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\} \sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}}{\{\sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}\}^2} \\ &= \frac{-\sum_{i=1}^n g_r(x_i) \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\} \sum_{i=1}^n g_s(x_i) \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}}{\{\sum_{i=1}^n \exp\{-\sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_i)\}\}^2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_s} &= -E(g_r(X) g_s(X)) + E(g_r(X)) E(g_s(X)) \\ &= -Cov(g_r(X) g_s(X)); \quad r = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.30 ve 2.32 Eşitliklerinden,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var[g_1(X)] & \dots & Cov[g_1(X) g_m(X)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[g_m(X) g_1(X)] & \dots & Var[g_m(X)] \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

bulunan matris varyans-kovaryans matrisinin tersidir. Varyans-kovaryans matrisi pozitif tanımlı simetrik olduğu için bu matrisin determinanti 0'dan farklıdır. Çünkü her simetrik A matrisi D köşegen matrisi olmak üzere, $Q' A Q = D$ olacak biçimde ortogonal bir Q vardır. Burada D matrisinin köşegen elemanları A'nın özdeğerleridir. A pozitif tanımlı olduğu için özdeğerleri de pozitifdir. Dolayısıyla $|Q' A Q| = |Q'| |A| |Q| = |A| = |D| = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ lar A'nın özdeğerleridir.

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)} \neq 0. \quad (2.34)$$

Kapalı fonksiyonun varlık teoremine göre Jacobian sıfırdan farklı olduğu için $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ lar a_1, a_2, \dots, a_m lar yardımıyla ifade edilir. Böylece $f^{-1}(a) = \lambda$ vardır denilebilir (Kantar 2006).

2.6 Varyans-Kovaryans Matrisinin Alternatif Türevleri

Varyans-Kovaryans matrisinin maksimum entropi için iki alternatif yolu vardır. Bunlardan birincisi maksimum entropi formülü 2.28 ve 2.29 ile doğrudan ilişkilidir. Hessian matrisini $k=1,2,\dots,K$ olmak üzere analog-enformasyon matrisi Eşitlik 2.36 olarak gösterilebilir. Hessian matrisi ise Eşitlik 2.35 deki gibi tanımlanır.

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{p_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{p_K} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$I(\hat{p}) = -E(H(\hat{p})) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{p_k} \mathbf{1}\mathbf{1}' \quad (2.36)$$

Burada bilinmeyen p_k 'nin $\mathbf{1}'$ K-boyutlu birim vektörü ve $I(\hat{p})$ analog-enformasyon matrisidir. Taylor serisi yaklaşımı veya uyum teoremi kullanılarak $I(\hat{p})$ enformasyon matrisi genel λ , $I(\hat{\lambda})$ dönüştürülür

$$\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\lambda}}\right) I(\hat{p}) \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\lambda}}\right)' = I(\hat{\lambda}) \quad (2.37)$$

Burada bilinmeyen $\hat{\lambda}_m$ 'nin enformasyon matrisi elde edilir. Eşitlik 2.37'de verilen matristen 2.38 Eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum_k \frac{1}{\hat{p}_k} \left(\frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{\lambda}_m} \right)^2 &= \sum_k \frac{1}{\hat{p}_k} \left[\hat{p}_k x_{mk} - \hat{p}_k \sum_k \hat{p}_k x_{mk} \right]^2 \\
&= \sum_k \frac{1}{\hat{p}_k} \left[\hat{p}_k^2 x_{mk}^2 - 2\hat{p}_k^2 x_{mk} \sum_k \hat{p}_k x_{mk} + \hat{p}_k^2 \left(\sum_k \hat{p}_k x_{mk} \right)^2 \right] \\
&= \sum_k \hat{p}_k x_{mk}^2 - 2 \left(\sum_k \hat{p}_k x_{mk} \right)^2 + \sum_k \hat{p}_k \left(\sum_k \hat{p}_k x_{mk} \right)^2 \\
&= \sum_k \hat{p}_k x_{mk}^2 - \left(\sum_k \hat{p}_k x_{mk} \right)^2 \equiv Var(x_m) = I(\lambda_m) \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Diğer bir yaklaşım ise, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 'ler ile ilgili Eşitlik 2.39'de $\Omega(\lambda)$ 'nin konveksliği araştırılarak x 'in varyans-kovaryans matrisi geliştirilmiştir.

$$\Omega(\hat{\lambda}) = \sum_{k=1}^K \exp \left[- \sum_{t=1}^T \hat{\lambda}_t f_t(x_k) \right] \tag{2.39}$$

Eşitlik 2.39 düzenlenerek Eşitlik 2.40 elde edilir.

$$\exp(\lambda_0) \equiv \Omega(\hat{\lambda}) = \sum_{k=1}^K \left[- \sum_{t=1}^T \hat{\lambda}_t f_t(x_t) \right] \tag{2.40}$$

2.40 Eşitliğinin λ_m 'ye göre iki defa diferansiyeli alınırsa 2.41 Eşitliği oluşur.

$$\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial^2 \lambda_t^2} = E[f_t^2(X)] - \{E[f_t(X)]\}^2 = Var[f_t(X)] \tag{2.41}$$

Benzer olarak $r \neq t$ için λ_t ve λ_r ye göre iki defa diferansiyellenirse Eşitlik 2.42 elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \lambda_r \partial \lambda_r} &= E[f_r(X)f_t(X)] - E[f_t(X)]E[f_r(X)] \\ &= Cov[f_n(X), f_t(X)].\end{aligned}\tag{2.42}$$

Sonuç olarak varyans-kovaryans matrisi Eşitlik 2.43'de görüldüğü gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}H(\lambda) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \lambda_1^2} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \lambda_T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(f_1(X)) & \cdots & Cov(f_1(X), f_T(X)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(f_1(X), f_T(X)) & \cdots & Var(f_T(X)) \end{bmatrix} \\ &\equiv Var[f(x)]\end{aligned}\tag{2.43}$$

Varyans-kovaryans matrisi pozitif tanımlı olup λ_0 çarpanı $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ ye göre konvektir (Golan et all. 1996).

2.7 Bir Kısıtlı MaxEnt Dağılımı

1,2,...,n değerlerini p_1, p_2, \dots, p_n olasılıkları ile alan X rassal değişkeni için,

$$H(x) = - \sum_{x \in R} p_i \ln(p_i)\tag{2.44}$$

entropi fonksiyonunu yalnızca,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1\tag{2.45}$$

kısıtı altında maksimize eden olasılık dağılımı bulunmak istensin. Lagrange fonksiyonu 2.46 Eşitliği şeklinde yazılabilir.

$$L \equiv - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) \quad (2.46)$$

Eşitliğin p_1, p_2, \dots, p_n 'lere göre türevi alınıp sifra eşitlenirse 2.47 Eşitliği elde edilir.

$$-1 - \ln p_i - \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.47)$$

Buradan,

$$p_i = \exp(-1 - \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.48)$$

2.48 Eşitliği bulunur. Bu olasılık değerlerinin verilen kısıtta yerine yazılmasıyla,

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.49)$$

2.49 sonucuna ulaşılır. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ doğal kısıtının dışında başka herhangi bir bilgi verilmemesi durumuna, belirsizliği maksimum olan tekdüze dağılımın elde edildiği görülür (Değirmenci 2011).

2.8 İki Kısıtlı MaxEnt Dağılımı

μ bir kısıt değeri olmak üzere, X kesikli rassal değişkeninin maksimum entropi olasılık dağılımı bulunmak istensin.

$$H(x) = - \sum_{x \in R} p_i \ln(p_i) \quad (2.50)$$

Entropi fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.51)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n p_i g_i = \mu \quad i = 1, 2, \dots, n; p_i \geq 0 \quad (2.52)$$

2.51 ve 2.52 kısıtları altında maksimize edilsin. Lagrange yardımcı fonksiyonu 2.53 Eşitliği ile yazılabilir.

$$L \equiv - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n g_i p_i - \mu \right) \quad (2.53)$$

2.53 Eşitliğinin p_i 'lere göre kısmi türevi alındığında 2.54 Eşitliği elde edilir.

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = - \left(\ln p_i + \frac{1}{p_i} p_i \right) - \lambda_0 - g_{1i} \lambda_1 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.54)$$

Bu eşitliğin sol tarafı sıfıra eşitlenerek,

$$\ln p_i = -1 - \lambda_0 - g_{1i} \lambda_1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.55)$$

2.55 Eşitliği elde edilir. Buradan 2.56 Eşitliğine ulaşılır.

$$p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - g_{1i}\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

Burada, $a = e^{-1-\lambda_0}$ ve $b = e^{-\lambda_i}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$p_i = ab^{g_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.57)$$

2.57 Eşitliği ile ifade edilebilir. Bu eşitlik 2.51 kısıtında yerine yazılırsa 2.58 ve 2.59 Eşitliği elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n ab^{g_i} = 1 \quad (2.58)$$

$$a = \frac{1}{\sum_{i=1}^n b^{g_i}} \quad (2.59)$$

Bu değer 2.57 Eşitliğinde yerine yazıldığında 2.60 Eşitliği elde edilir.

$$p_i = \frac{b^{g_i}}{\sum_{i=1}^n b^{g_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.60)$$

Böylelikle, p_i 'ler tek bir değişken b 'ye bağlı olarak ifade edilmiş olur. Bu olasılık değerleri 2.52 kısıtında yerine yazılırsa 2.61 Eşitliğine ulaşılır.

$$\frac{\sum_{i=1}^n g_i b^{g_i}}{\sum_{i=1}^n b^{g_i}} = \mu \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.61)$$

2.61 Eşitliği kullanılarak MaxEnt dağılımına ulaşılır (Değirmenci 2011).

2.9 Üç Kısıtlı MaxEnt Dağılımı

p_1, p_2, \dots, p_n olasılıkları ile X rassal değişkenine bağlı MaxEnt dağılımını bulmak için 2.44 Eşitliğindeki entropi fonksiyonunu 2.62 ve 2.63 kısıtları altında maksimize edilmektedir.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.62)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i g_{1i} = \mu_1 \quad (2.63)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i g_{2i} = \mu_2 \quad (2.64)$$

Üç kısıtlı çözüm için Lagrange fonksiyonu eşitlik 2.65'deki gibi oluşturulur.

$$L \equiv - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n p_i g_{1i} - \mu_1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i g_{2i} - \mu_2 \right) \quad (2.65)$$

Bu eşitliğin p_i 'lere göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiği zaman 2.67 Eşitliği elde edilir.

$$\ln p_i = -1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.66)$$

buradan,

$$p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.67)$$

2.67 Eşitliği 2.63 kısıtında yerine yazılırsa 2.69 Eşitliği elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i}) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.68)$$

$$\exp(-1 - \lambda_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \exp(-\lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i})} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.69)$$

Burada 2.69 eşitliğini 2.67 eşitliğinde yerine yazıldığında Eşitlik 2.71 elde edilir.

$$p_i = \frac{\exp(-\lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i})}{\sum_{i=1}^n \exp(-\lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i})} \quad (2.70)$$

Aynı şekilde bu olasılık değerleri 2.64 Eşitliğinde yerine yazıldığında 2.71 Eşitliğine ulaşılır.

$$\frac{\sum_{i=1}^n g_i \exp(-\lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i})}{\sum_{i=1}^n \exp(-\lambda_1 g_{1i} - \lambda_2 g_{2i})} = \mu \quad (2.71)$$

Elde edilen bu eşitlikten MaxEnt dağılımına ulaşılır (Değirmenci 2011).

İki ve üç kısıt altında MaxEnt dağılımı ile ilgili Örnek 5 aşağıda açıklanmıştır.

Örnek 5: Çizelge 2.5'te dört farklı gözleme sahip X rassal değişkeninin aldığı değerler verilmektedir. Bu gözlemler için iki kısıt altında ve üç kısıt altında elde edilen entropi dağılımlarının hesaplanması ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Çizelge 2.5 X rassal değişkeninin değerleri

X	x_1	x_2	x_3	x_4
	3	7	10	12

p_1, p_2, p_3, p_4 , X değerlerinin olasılıklarını, μ ortalama değeri ifade etmektedir ve

moment fonksiyonu $g_1(x) = x = \mu$ olarak alınmıştır.

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \\ 3p_1 + 7p_2 + 10p_3 + 12p_4 &= 8 \end{aligned} \quad (2.72)$$

2.12 Eşitliği kullanılarak p_1, p_2, p_3, p_4 değerleri Eşitlik 2.73 ile ifade edilmiştir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 3\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 7\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 10\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 12\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Buradan, 2.61 Eşitliğinin düzenlenmesi ve çözümü ile $\lambda_0 = 1.3863$ ve $\lambda_1 = -7,80E-18$ olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerlerin yerine yazılması ile Çizelge 2.6'da MaxEnt dağılımı elde edilmiştir.

Çizelge 2.6 X değerlerine bağlı olarak iki kısıt altında incelenen MaxEnt Dağılımı

p_1	0.2500
p_2	0.2500
p_3	0.2500
p_4	0.2500

Çizelge 2.6, incelendiğinde kısıt olarak sıfır etrafındaki birinci moment olan aritmetik ortalama dikkate alındığında tüm gözlem değerleri için seçilme olasılığı 0,25 olarak elde edilmiştir.

Aynı şekilde $g_1 = x = \mu_1$ ve $g_2 = x^2 = \mu_2$ moment fonksiyonları için üç kısıt altında yapılan çözümde 2.63, 2.64 ve 2.65 Eşitlikleri kullanılmış ve 2.74 Eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \\
3p_1 + 7p_2 + 10p_3 + 12p_4 &= 8 \\
9p_1 + 49p_2 + 100p_3 + 144p_4 &= 75.5
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Yine 2.12 Eşitliği kullanılarak p_1, p_2, p_3, p_4 değerleri Eşitlik 2.75 ile ifade edilmiştir.

$$\left. \begin{aligned}
p_1 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 3\lambda_1 - 9\lambda_2} \\
p_2 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 7\lambda_1 - 49\lambda_2} \\
p_3 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 10\lambda_1 - 100\lambda_2} \\
p_4 &= e^{-\lambda_0 - \lambda_1 x} = e^{-\lambda_0 - 12\lambda_1 - 144\lambda_2}
\end{aligned} \right\} \tag{2.75}$$

Elde edilen bu değerler verilen kısıtlarda yerine yazılması ve 2.72, 2.73 eşitliklerinin düzenlenmesi ve çözümü ile $\lambda_0 = 0.5618$, $\lambda_1 = -7,80E-18$ ve $\lambda_2 = 0.0141$ olarak elde edilmiştir. Hesaplanan bu değerlerin 2.75 Eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 2.7 ile verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir.

Çizelge 2.7 X değerlerine bağlı olarak üç kısıt altında incelenen MaxEnt dağılımı

p_1	0.5020
p_2	0.2851
p_3	0.1386
p_4	0.0744

Çizelge 2.7, incelendiğinde kısıt olarak sıfır etrafındaki birinci moment olan aritmetik ortalamanın yanında ikinci bir kısıt olan sıfır etrafındaki ikinci moment yani kareli ortalama da dikkate alındığında gözlem değerleri için elde edilen entropi dağılımına göre seçilme olasılıkların farklı olduğu görülmektedir.

3. MATERYAL VE METOT

Çalışmanın bu bölümünde MaxEnt dağılımı ile ilgili uygulamalar sonucunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Yapılan uygulamalarda iki ve üç kısıt için maksimum entropi dağılımı incelenmiştir. Uygulama kısmında kullanılan veriler Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğünden alınmıştır. Kullanılan veriler Türkiye'deki 7 coğrafi bölgeye ait son 43 yıldaki sıcaklık değerleri olup bu değerlerin ortalaması alınarak Türkiye için de son 43 yılın ortalama sıcaklığı elde edilmiştir. İlgili veri seti için sıcaklık ortalamalarına ilişkin gözlemlenen olasılıklar hesaplanmış, hesaplanan bu değerler $\ln(x)$ ve $\ln(x^2)$ moment kısıtlarına bağlı olarak hesaplanan MaxEnt dağılımı ile karşılaştırılmıştır. Daha sonra elde edilen entropi dağılımına bağlı olasılıklara karşı gelen frekanslar ile gerçek frekanslar arasındaki uyum Ki-Kare testi ile incelenmiştir. İki dağılım arasındaki uyumun bir ifadesi olan belirlilik katsayısı (R^2) değeri ve elde edilen bulgular ilgili tablolarda sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Ki-Kare Kriteri:

Ki-Kare (χ^2) testi gözlenen değerler (G) ile beklenen değerler (B) arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı temeline dayanır. Ki-Kare testinde niteliksel olarak belirtilen veriler kullanılır. Ayrıca, ölçümle belirtilen sürekli değişkenler de belli bir dereceden az veya çok olarak nitelendirilerek Ki-Kare testi uygulanabilir. Ki-Kare değeri sıfır ile artı sonsuz arasında değerler alır (Güngör ve Bulut 2008). Ki-Kare test istatistiği eşitlik 3.1'de görüleceği üzere hesaplanabilir.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(G - B)^2}{B} \quad (3.1)$$

Belirlilik Katsayısı (R^2)

X ve Y olarak ifade edilen iki değişken arasındaki ilişki miktarı hakkında bilgi veren korelasyon katsayısının karesi olan belirlilik katsayısı (R^2), eşitlik 3.2’de görüldüğü gibi hesaplanabilir.

$$R^2 = \left(\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}} \right)^2 \quad (3.2)$$

4. BULGULAR

Çalışmanın bu bölümünde yapılan analizler sonucunda her bir coğrafi bölge ve Türkiye geneline ilişkin sıcaklık değerleri ve sıcaklıklar için elde edilen gerçek ve entropi dağılımına bağlı olasılıklar aşağıda sunulmaktadır.

Marmara bölgesi;

Marmara bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Marmara bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
13.3-13.56	6
13.56-13.99	13
13.99-14.42	13
14.42-14.85	3
14.85-15.28	6
15.28-15.72	2

Marmara Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$13.34p_1 + 13.77p_2 + 14.20p_3 + 14.63p_4 + 15.06p_5 + 15.5p_6 = 14.16 \quad (4.1)$$

4.1 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.2 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 13.34\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 13.77\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 14.20\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 14.63\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 15.06\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 15.5\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlenme sonucunda $\lambda_0 = -4.7844$ ve $\lambda_1 = 2.3745$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.2 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlenme yapılmıştır.

Çizelge 4.2 Marmara bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
13.34	6	0.1395	0.1993	8.5699
13.77	13	0.3023	0.1839	8.9077
14.20	13	0.3023	0.1710	7.3530
14.63	3	0.0697	0.1593	6.8499
15.06	6	0.1395	0.1487	6.3041
15.5	2	0.0465	0.1389	5.9727

$\chi_h^2 = 13.2172 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7844$ ve $R^2=0.276$ olarak hesaplanmıştır.

Marmara bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7844 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0465 ile 0.3023 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1389 ile

0.1993 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 13,34 sıcaklık değerinde altı yıl geğerilmesi olasılığı 0.1395 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1993'tür. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değerleri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “H₀: İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Marmara bölgesi için üç kısıt altında çözümleme yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlikleri kullanarak 4.3 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 13.34p_1 + 13.77p_2 + 14.20p_3 + 14.63p_4 + 15.06p_5 + 15.5p_6 &= 14.16 \\ (13.34)^2p_1 + (13.77)^2p_2 + (14.20)^2p_3 + (14.63)^2p_4 + (15.06)^2p_5 + (15.5)^2p_6 &= 200.87 \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Eşitlik 4.3'de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.4 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 13.34\lambda_1 - (13.34)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 13.77\lambda_1 - (13.77)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 14.20\lambda_1 - (14.20)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 14.63\lambda_1 - (14.63)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 15.06\lambda_1 - (15.06)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 15.5\lambda_1 - (15.5)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.4)$$

Elde edilen 4.4 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.0076$, $\lambda_1 = 2.3745$ $\lambda_2 = -0.8498$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.3 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$, $g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.3 Marmara bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
13.34	6	0.1395	0.1754	7.5422
13.77	13	0.3023	0.1717	7.3831
14.20	13	0.3023	0.1681	7.2283
14.63	3	0.0697	0.1648	7.0864
15.06	6	0.1395	0.1616	6.9488
15.5	2	0.0465	0.1585	6.8155

$\chi_h^2 = 15.0855 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7912$ ve $R^2 = 0.304$ olarak hesaplanmıştır.

Marmara bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7912 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0697 ile 0.3023 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1585 ile 0.1754 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 13,34 sıcaklık değerinde altı yıl geçirilmesi olasılığı 0.1395 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1754'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Akdeniz bölgesi;

Akdeniz bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları çizelge 4.4 de verilmiştir.

Çizelge 4.4 Akdeniz bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
15.63-16.05	5
16.05-16.47	8
16.47-16.89	8
16.89-17.31	14
17.31-17.73	7
17.73-18.19	1

Akdeniz Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.5366 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$15.84p_1 + 16.26p_2 + 16.68p_3 + 17.1p_4 + 17.52p_5 + 17.96p_6 = 2.82 \quad (4.5)$$

4.5 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.69 formülünden 4.6 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 15.84\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 16.26\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 16.68\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 17.1\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 17.52\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 17.96\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlenme sonucunda $\lambda_0 = -0.3462$ ve $\lambda_1 = 0.7567$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.5 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlenme yapılmıştır.

Çizelge 4.5 Akdeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
15.84	5	0.1162	0.1748	7.5164
16.26	8	0.1860	0.1713	7.3659
16.68	8	0.1860	0.1681	7.2283
17.1	14	0.3255	0.1649	7.0907
17.52	7	0.1627	0.1619	6.9617
17.96	1	0.0232	0.1589	6.8327

$\chi_h^2 = 12.6912 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7912$ ve $R^2 = 0.036$ olarak hesaplanmıştır.

Akdeniz bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7912 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3255 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1619 ile 0.1748 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 15,84 sıcaklık değerinde beş yıl geçirilmesi olasılığı 0.1162 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1748'dir. Elde edilen entropi dağılımın gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Akdeniz bölgesi için üç kısıt altında çözümlene yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.85 ve 2.86 Eşitlikleri elde edilmiştir. Bu eşitlikleri kullanarak 4.7 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 15.84p_1 + 16.26p_2 + 16.68p_3 + 17.1p_4 + 17.52p_5 + 17.96p_6 &= 2.82 \\ (15.84)^2p_1 + (16.26)^2p_2 + (16.68)^2p_3 + (17.1)^2p_4 + (17.52)^2p_5 + (17.96)^2p_6 &= 5.64 \end{aligned} \right\} (4.7)$$

Eşitlik 4.3'de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.8 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 15.84\lambda_1 - (15.84)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 16.26\lambda_1 - (16.26)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 16.68\lambda_1 - (16.68)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 17.1\lambda_1 - (17.1)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 17.52\lambda_1 - (17.52)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 17.96\lambda_1 - (17.96)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Elde edilen 4.4 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.0007$, $\lambda_1 = 0.7567$, $\lambda_2 = -0.0610$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.6 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$, $g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.6 Akdeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
15.84	5	0.1395	0.1735	7.4605
16.26	8	0.3023	0.1706	7.3358
16.68	8	0.3023	0.1679	7.2197
17.1	14	0.0697	0.1652	7.1036
17.52	7	0.1395	0.1627	6.9961
17.96	1	0.0465	0.1602	6.8886

$\chi_h^2 = 12.6849 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7914$ ve $R^2 = 0.035$ olarak hesaplanmıştır.

Akdeniz bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7914 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0465 ile 0.3023 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1602 ile 0.1735 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 15,84 sıcaklık değerinde beş yıl geçirilmesi olasılığı 0.1395 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1735'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

İç Anadolu bölgesi;

İç Anadolu bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.7 İç Anadolu bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
8.17-8.71	1
8.71-9.25	7
9.25-9.79	12
9.79-10.33	17
10.33-10.87	4
10.87-11.46	2

İç Anadolu Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$8.44p_1 + 8.98p_2 + 9.52p_3 + 10.06p_4 + 10.6p_5 + 11.14p_6 = 2.28 \quad (4.9)$$

4.9 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.10 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 8.44\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 8.98\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 9.52\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 10.06\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 10.6\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 11.14\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = 0.1096$ ve $\lambda_1 = 0.7399$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.8 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlene yapılmıştır.

Çizelge 4.8 İç Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
8.44	1	0.0232	0.1849	7.9507
8.98	7	0.1627	0.1766	7.5938
9.52	12	0.2790	0.1692	7.2756
10.06	17	0.3953	0.1624	6.9832
10.6	4	0.0930	0.1562	6.7166
11.14	2	0.0465	0.1506	6.4758

$\chi_h^2 = 27.7511 > \chi_{5;0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7893$ ve $R^2 = 0.005$ olarak hesaplanmıştır.

İç Anadolu bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7893 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3953 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen

olasılıkların 0.1506 ile 0.1849 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 8,44 sıcaklık değerinde bir yıl geçirilmesi olasılığı 0.0232 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1849’dur. Elde edilen entropi dağılımın gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

İç Anadolu bölgesinin üç kısıt altında çözümü yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik kullanarak 4.11 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 8.44p_1 + 8.98p_2 + 9.52p_3 + 10.06p_4 + 10.6p_5 + 11.14p_6 &= 2.28 \\ (8.44)^2p_1 + (8.98)^2p_2 + (9.52)^2p_3 + (10.06)^2p_4 + (10.6)^2p_5 + (11.14)^2p_6 &= 4.56 \end{aligned} \right\} (4.11)$$

Eşitlik 4.11’de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.12 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 8.44\lambda_1 - (8.44)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 8.98\lambda_1 - (8.98)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 9.52\lambda_1 - (9.52)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 10.06\lambda_1 - (10.06)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 10.6\lambda_1 - (10.6)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 11.14\lambda_1 - (11.14)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.12)$$

Elde edilen 4.12 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.1435, \lambda_1 = 0.7399, \lambda_2 = 0.0558$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.9 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x, g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.9 İç Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
8.44	1	0.0232	0.1878	8.0754
8.98	7	0.1627	0.1781	7.6583
9.52	12	0.2790	0.1695	7.2885
10.06	17	0.3953	0.1617	6.9531
10.6	4	0.0930	0.1547	6.6521
11.14	2	0.0465	0.1483	6.3769

$\chi_h^2 = 27.8802 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7885$ ve $R^2 = 0.006$ olarak hesaplanmıştır.

İç Anadolu bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7885 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3953 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1483 ile 0.1878 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 8,44 sıcaklık değerinde bir yıl geçirilmesi olasılığı 0.0232 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1878'dir. Elde edilen entropi dağılımın gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Doğu Anadolu bölgesi;

Doğu Anadolu bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları Çizelge 4.10 de verilmiştir.

Çizelge 4.10 Doğu Anadolu bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
7.16-7.77	1
7.77-8.25	2
8.25-8.73	5
8.73-9.21	3
9.21-9.69	12
9.69-10.17	20

Doğu Anadolu Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$7.46p_1 + 8.014p_2 + 8.49p_3 + 8.97p_4 + 9.45p_5 + 9.81p_6 = 2.23 \quad (4.13)$$

4.13 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.14 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 7.46\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 8.01\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 8.49\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 8.97\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 9.45\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 9.81\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = -1.4160$ ve $\lambda_1 = 1.4906$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.11 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlene yapılmıştır.

Çizelge 4.11 Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
7.46	1	0.0232	0.2061	8.8623
8.01	2	0.0465	0.1854	7.9722
8.49	5	0.1162	0.1700	7.3100
8.97	3	0.0697	0.1566	6.7338
9.45	12	0.2790	0.1449	6.2307
9.81	20	0.4651	0.1370	5.891

$\chi_h^2 = 53.3826 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7818$ ve $R^2 = 0.676$ olarak hesaplanmıştır.

Doğu Anadolu bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7818 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile

0.4651 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.137 ile 0.2061 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 7,46 sıcaklık değerinde bir yıl geğerilmesi olasılığı 0.0232 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.2061'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değerine ilgili Ki-Kare tablo değerine olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, "H₀: İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir" şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Doğu Anadolu bölgesi için üç kısıt altında çözümlene yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik kullanarak 4.15 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 7.46p_1 + 8.01p_2 + 8.49p_3 + 8.97p_4 + 9.45p_5 + 9.81p_6 &= 2.23 \\ (7.46)^2p_1 + (8.01)^2p_2 + (8.49)^2p_3 + (8.97)^2p_4 + (9.45)^2p_5 + (9.81)^2p_6 &= 4.46 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

Eşitlik 4.15'de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.16 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 7.46\lambda_1 - (7.46)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 8.01\lambda_1 - (8.01)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 8.49\lambda_1 - (8.49)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 8.97\lambda_1 - (8.97)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 9.45\lambda_1 - (9.45)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 9.81\lambda_1 - (9.81)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.16)$$

Elde edilen 4.16 eşitliklerinden çözümlenerek $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = 0.0359$, $\lambda_1 = 1.102E - 16$, $\lambda_2 = 0.4074$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.12 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 =$

$\ln x, g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.12 Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
7.46	1	0.0232	0.1877	8.0711
8.01	2	0.0465	0.1771	7.6153
8.49	5	0.1162	0.1689	7.2627
8.97	3	0.0697	0.1615	6.9445
9.45	12	0.2790	0.1548	6.6564
9.81	20	0.4651	0.1501	6.4543

$\chi_h^2 = 45.9992 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7888$ ve $R^2 = 0.696$ olarak hesaplanmıştır.

Doğu Anadolu bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7888 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.4651 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1501 ile 0.1877 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 7,46 sıcaklık değerinde bir yıl geçirilmesi olasılığı 0.0232 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1877'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Ege bölgesi;

Ege bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları çizelge 4.13 de verilmiştir.

Çizelge 4.13 Ege bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
13.64-14.09	4
14.09-14.54	11
14.54-14.99	18
14.99-15.44	2
15.44-15.89	6
15.89-16.34	2

Ege Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$13.86p_1 + 14.31p_2 + 14.76p_3 + 15.21p_4 + 15.66p_5 + 16.11p_6 = 14.77 \quad (4.17)$$

4.17 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.18 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 13.86\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 14.31\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 14.76\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 15.21\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 15.66\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 16.11\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = -4.9072$ ve $\lambda_1 = 2.4789$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.14 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlene yapılmıştır.

Çizelge 4.14 Ege bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
13.86	4	0.0930	0.2000	8.6000
14.31	11	0.2558	0.1847	7.9421
14.76	18	0.4186	0.1711	7.3573
15.21	2	0.0465	0.1588	6.8284
15.66	6	0.1395	0.1477	6.3511
16.11	2	0.0465	0.1377	5.9211

$\chi_h^2 = 25.0632 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7832$ ve $R^2 = 0.094$ olarak hesaplanmıştır.

Ege bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7832 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0465 ile 0.4186 arasında

değiştığı gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1377 ile 0.2 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 13,86 sıcaklık değerinde dört yıl geçirilmesi olasılığı 0.0930 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.2'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “H₀: İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Ege bölgesi için üç kısıt altında çözümlene yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik kullanarak 4.19 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 13.86p_1 + 14.31p_2 + 14.76p_3 + 15.21p_4 + 15.66p_5 + 16.11p_6 &= 14.77 \\ (13.86)^2p_1 + (14.31)^2p_2 + (14.76)^2p_3 + (15.21)^2p_4 + (15.66)^2p_5 + (16.11)^2p_6 &= 218.50 \end{aligned} \right\} (4.19)$$

Eşitlik 4.19'de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.20 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 13.86\lambda_1 - (13.86)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 14.31\lambda_1 - (14.31)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 14.76\lambda_1 - (14.76)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 15.21\lambda_1 - (15.21)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 15.66\lambda_1 - (15.66)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 16.11\lambda_1 - (16.11)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.20)$$

Elde edilen 4.20 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.0051$, $\lambda_1 = 2.4789$ $\lambda_2 = -0.9073$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.15 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 =$

$lnx, g_2 = lnx^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, lnx, lnx^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.15 Ege bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
13.86	4	0.0930	0.1753	7.5379
14.31	11	0.2558	0.1716	7.3788
14.76	18	0.4186	0.1681	7.2283
15.21	2	0.0465	0.1648	7.0864
15.66	6	0.1395	0.1616	6.9488
16.11	2	0.0465	0.1586	6.8198

$\chi_h^2 = 26.6764 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7912$ ve $R^2 = 0.108$ olarak hesaplanmıştır.

Ege bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7912 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0465 ile 0.4186 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1586 ile 0.1753 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 13,86 sıcaklık değerinde dört yıl geçirilmesi olasılığı 0.0930 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1753'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Karadeniz bölgesi;

Karadeniz bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları Çizelge 4.16 de verilmiştir.

Çizelge 4.16 Karadeniz bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
11.12-11.69	4
11.69-12.26	14
12.26-12.83	14
12.83-13.4	9
13.4-13.97	1
13.97-14.57	1

Karadeniz Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$11.40p_1 + 11.97p_2 + 12.56p_3 + 13.11p_4 + 13.68p_5 + 14.27p_6 = 9.17 \quad (4.21)$$

4.21 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.22 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 11.40\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 11.97\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 12.56\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 13.11\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 13.68\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 14.27\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = 1.7729$ ve $\lambda_1 = 0.0074$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.17 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlene yapılmıştır.

Çizelge 4.17 Karadeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
11.40	4	0.0930	0.1668	7.1724
11.97	14	0.3255	0.1667	7.1681
12.56	14	0.3255	0.1667	7.1681
13.11	9	0.2093	0.1666	7.1638
13.68	1	0.0232	0.1666	7.1638
14.27	1	0.0232	0.1665	7.1595

$\chi_h^2 = 25.4993 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7729$ ve $R^2 = 0.181$ olarak hesaplanmıştır.

Karadeniz bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7729 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3255 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1665 ile 0.1668 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 13,34 sıcaklık değerinde dört yıl geçirilmesi olasılığı 0.0930 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1668'dir. Elde edilen entropi dağılımın gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Karadeniz bölgesi için üç kısıt altında çözümlene yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik kullanarak 4.23 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 11.40p_1 + 11.97p_2 + 12.56p_3 + 13.11p_4 + 13.68p_5 + 14.27p_6 &= 9.17 \\ (11.40)^2p_1 + (11.97)^2p_2 + (12.56)^2p_3 + (13.11)^2p_4 + (13.68)^2p_5 + (14.27)^2p_6 &= 146.56 \end{aligned} \right\} (4.23)$$

Eşitlik 4.23'de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.24 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 11.40\lambda_1 - (11.40)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 11.97\lambda_1 - (11.97)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 12.56\lambda_1 - (12.56)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 13.11\lambda_1 - (13.11)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 13.68\lambda_1 - (13.68)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 14.27\lambda_1 - (14.27)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.24)$$

Elde edilen 4.24 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.0119, \lambda_1 = 0.0074, \lambda_2 = 0.3504$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.18 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x, g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.18 Karadeniz bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
11.40	4	0.0930	0.1806	7.7658
11.97	14	0.3255	0.1745	7.5035
12.56	14	0.3255	0.1686	7.2498
13.11	9	0.2093	0.1636	7.0348
13.68	1	0.0232	0.1587	6.8241
14.27	1	0.0232	0.1540	6.6220

$\chi_h^2 = 24.0284 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.070$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7903$ ve $R^2 = 0.231$ olarak hesaplanmıştır.

Karadeniz bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7903 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3255 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1540 ile 0.1806 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 11,40 sıcaklık değerinde dört yıl geçirilmesi olasılığı 0.0930 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1806'dır. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Güney Doğu Anadolu bölgesi;

Güney Doğu Anadolu bölgesinin son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları Çizelge 4.19 de verilmiştir.

Çizelge 4.19 Güney Doğu Anadolu bölgesine ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
14.57-15.25	2
15.25-15.93	5
15.93-16.61	12
16.61-17.29	19
17.29-17.97	4
17.97-18.66	1

Güney Doğu Anadolu Bölgesi için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$14.91p_1 + 15.59p_2 + 16.27p_3 + 16.95p_4 + 17.63p_5 + 18.31p_6 = 16.60 \quad (4.25)$$

4.25 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.26 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 14.91\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 15.5\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 16.27\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 16.95\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 17.63\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 18.31\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = -5.9165$ ve $\lambda_1 = 2.7522$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.20 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$ kullanılmıştır yani $(1, \ln x)$ iki kısıt altında çözümlene yapılmıştır.

Çizelge 4.20 Güney Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
14.91	2	0.0465	0.2187	9.4041
15.59	5	0.1162	0.1934	8.3162
16.27	12	0.2790	0.172	7.3960
16.95	19	0.4418	0.1537	6.6091
17.63	4	0.0930	0.1379	5.9297
18.31	1	0.0232	0.1243	5.3449

$\chi_h^2 = 37.4085 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7732$ ve $R^2 = 0.007$ olarak hesaplanmıştır.

Güney Doğu Anadolu bölgesi için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7732 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.4418 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1243 ile 0.2187 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 14,91 sıcaklık değerinde iki yıl geçirilmesi olasılığı 0.0465 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.2187'dir. Elde edilen entropi dağılımın gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, " H_0 : İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık

dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Güney Doğu Anadolu bölgesi için üç kısıt altında çözümleme yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik kullanarak 4.27 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 14.91p_1 + 15.59p_2 + 16.27p_3 + 16.95p_4 + 17.63p_5 + 18.31p_6 &= 16.60 \\ (14.91)^2p_1 + (15.59)^2p_2 + (16.27)^2p_3 + (16.95)^2p_4 + (17.63)^2p_5 + (18.31)^2p_6 &= 276.13 \end{aligned} \right\} (4.27)$$

Eşitlik 4.27’de verilen p_i değerleri 2.67 formülünden 4.28 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 14.91\lambda_1 - (14.91)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 15.59\lambda_1 - (15.59)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 16.27\lambda_1 - (16.27)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 16.95\lambda_1 - (16.95)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 17.63\lambda_1 - (17.63)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 18.31\lambda_1 - (18.31)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.28)$$

Elde edilen 4.28 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.1088$, $\lambda_1 = 2.7522$ $\lambda_2 = -1.0374$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.21 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x$, $g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.21 Güney Doğu Anadolu bölgesine ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
14.91	2	0.0465	0.1788	7.6884
15.59	5	0.1162	0.1735	7.4605
16.27	12	0.2790	0.1685	7.2455
16.95	19	0.4418	0.1639	7.0477
17.63	4	0.0930	0.1596	6.8628
18.31	1	0.0232	0.1556	6.6908

$\chi_h^2 = 34.4444 > \chi_{5;0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7906$ ve $R^2 = 0.001$ olarak hesaplanmıştır.

Güney Doğu Anadolu bölgesi için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7906 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.4418 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1556 ile 0.1788 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 14,91 sıcaklık değerinde iki yıl geçirilmesi olasılığı 0.0465 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1788'dir. Elde edilen entropi dağılımın gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Türkiye geneli;

Türkiye geneli için son 43 yıla ait sıcaklık değerleri için gözlenen frekansları Çizelge 4.22 de verilmiştir.

Çizelge 4.22 Türkiye geneline ait son 43 yılın sıcaklık değerlerinin gözlenen frekansları

Sıcaklık	f_g
10.23-10.94	6
10.94-11.65	17
11.65-12.36	15
12.36-13.07	3
13.07-13.78	1
13.78-14.53	1

Türkiye geneline ait ortalama sıcaklıklar için Max. Entropi dağılımını elde ederken ilk olarak 2.51 ve 2.52 kısıtları ve 2.53 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.61 Eşitliği elde edilmiştir ve bu eşitlikten λ_0, λ_1 Lagrange çarpanları hesaplanmıştır.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$10.58p_1 + 11.29p_2 + 12p_3 + 12.71p_4 + 13.42p_5 + 14.15p_6 = 11.65 \quad (4.29)$$

4.29 Eşitliğinde verilen p_i değerleri 2.56 formülünden 4.30 eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 10.58\lambda_1} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 11.29\lambda_1} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 12\lambda_1} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 12.71\lambda_1} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 13.42\lambda_1} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 14.15\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Bu kısıtlar altında yapılan çözümlene sonucunda $\lambda_0 = -3.2053$ ve $\lambda_1 = 1.991$ elde edilmiştir. Elde edilen bu değerlerin $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinde yerine yazılması ile Çizelge 4.23 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = x$ kullanılmıştır yani $(1, x)$ iki kısıt altında çözümlene yapılmıştır.

Çizelge 4.23 Türkiye geneline ait sıcaklık değerleri için iki kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
10.58	6	0.1395	0.2208	9.4944
11.29	17	0.3953	0.1939	8.3377
12	15	0.3488	0.1716	7.3788
12.71	3	0.0697	0.1530	6.5790
13.42	1	0.0232	0.1372	5.8996
14.15	1	0.0232	0.1235	5.3105

$\chi_h^2 = 2127.67 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan dolayı H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7721$ ve $R^2 = 0.335$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye geneli için iki kısıt altında genel entropi değeri 1.7721 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3953 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.153 ile

0.2208 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 10,58 sıcaklık değerinde altı yıl geçirilmesi olasılığı 0.1395 iken, iki kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.2208'dir. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değerine olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, "H₀: İki kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir" şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

Türkiye geneli için üç kısıt altında çözümleme yaparken 2.62, 2.63, 2.64 kısıtları ve 2.65 Lagrange fonksiyonu kullanılarak 2.71 Eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik kullanarak 4.31 kısıtları yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1 \\ 10.58p_1 + 11.29p_2 + 12p_3 + 12.71p_4 + 13.42p_5 + 14.15p_6 &= 11.65 \\ (10.58)^2p_1 + (11.29)^2p_2 + (12)^2p_3 + (12.71)^2p_4 + (13.42)^2p_5 + (14.15)^2p_6 &= 136.36 \end{aligned} \right\} (4.31)$$

Eşitlik 4.31'de verilen p_i değerleri 2.76 formülünden 4.32 Eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\lambda_0 - 10.58\lambda_1 - (10.58)^2\lambda_2} \\ p_2 &= e^{-\lambda_0 - 11.29\lambda_1 - (11.29)^2\lambda_2} \\ p_3 &= e^{-\lambda_0 - 12\lambda_1 - (12)^2\lambda_2} \\ p_4 &= e^{-\lambda_0 - 12.71\lambda_1 - (12.71)^2\lambda_2} \\ p_5 &= e^{-\lambda_0 - 13.42\lambda_1 - (13.42)^2\lambda_2} \\ p_6 &= e^{-\lambda_0 - 14.15\lambda_1 - (14.15)^2\lambda_2} \end{aligned} \right\} (4.32)$$

Elde edilen 4.31 eşitliklerinden çözüm yapılarak $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanları elde edilmiştir. $\lambda_0 = -0.0212, \lambda_1 = 1.991, \lambda_2 = -0.6378$ olarak bulunmuştur. Bu çarpanlar $p_i = \exp(-1 - \lambda_0 - \lambda_1 g_{ri} - \lambda_2 g_{ri}^2)$ Eşitliğinde yerine yazılarak Çizelge 4.24 de verilen MaxEnt dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca moment fonksiyonu olarak $g_1 = \ln x, g_2 = \ln x^2$ kullanılmıştır. Yani $(1, \ln x, \ln x^2)$ kısıtı altında çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.24 Türkiye geneline ait sıcaklık değerleri için üç kısıt altındaki MaxEnt dağılımı

Sıcaklık	f_g	Gözlenen Olasılık Değerleri	MaxEnt Dağılımı Değerleri	f_e
10.58	6	0.1395	0.1963	8.4409
11.29	17	0.3953	0.1768	7.6024
12	15	0.3488	0.1692	7.2756
12.71	3	0.0697	0.1623	6.9789
13.42	1	0.0232	0.1561	6.7123
14.15	1	0.0232	0.1502	6.4586

$\chi_h^2 = 32.2666 > \chi_{5,0.05}^2 = 11.0705$ olduğundan H_0 red edilir. Entropi değeri $H=1.7964$ ve $R^2 = 0.210$ olarak hesaplanmıştır.

Türkiye geneli için üç kısıt altında genel entropi değeri 1.7964 olarak hesaplanmakla birlikte, ilgili sıcaklık değerleri için gözlenen olasılıkların 0.0232 ile 0.3488 arasında değiştiği gözlemlenirken, MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıkların 0.1502 ile 0.1963 arasında değiştiği gözlemlenmektedir. Tablo incelendiğinde, 10,58 sıcaklık değerinde altı yıl geçirilmesi olasılığı 0.1395 iken, üç kısıt altındaki maksimum entropi dağılımından elde edilen değerlere göre bu olasılık 0.1963'dür. Elde edilen entropi dağılımının gözlenen olasılık dağılımına uygunluğu incelenecek olursa, Ki-Kare hesap değeri ilgili Ki-Kare tablo değeri olan 11.07 değerinden büyük olduğundan, “ H_0 : Üç kısıtlı entropi dağılımı, gözlenen olasılık dağılımına uygunluk göstermektedir” şeklindeki sıfır hipotezi red edilir.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Entropi üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda hemen hemen her bilim dalının içerisine girmiş ve artan bir trend göstermektedir. Doğada gerçekleşen birçok olay aslında matematiksel bir kalıba uymakta, istatistiki açıdan ise bir dağılım özelliği taşımaktadır. İlgilenilen bir olayın uyduğu dağılım biçimini bilmek araştırmacıya büyük fayda sağlayarak olay hakkında ayrıntılı bilgi edinmesine olanak sağlar. Entropi kavramı da bu açıdan oldukça önemli olup ilgilenilen bir olaya ilişkin maximum belirsizlik ya da minimum belirliliği açıklamada etkin bir yöntemdir.

MaxEnt dağılımı entropi çeşitleri arasında en temel dağılımlardan biridir. Bu güne kadar MaxEnt dağılımı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda elde edilen veriler gerek bu dağılıma uydurulmuş gerekse de başka bir dağılımla karşılaştırma yapılarak en iyi sonuca ulaşılmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmada Meteoroloji Genel Müdürlüğünden alınan Türkiye geneli ve yedi coğrafi bölge için son 43 yılın sıcaklık değerlerine ait MaxEnt dağılımı elde edilerek gözlemlenen frekanslar ile MaxEnt dağılımından elde edilen olasılıklara karşı gelen frekanslar arasındaki uyum Ki-Kare ve R^2 kriterlerine göre incelenmiştir.

Maximum Entropi değeri bakımında Türkiye geneli ve coğrafi bölgeler incelendiğinde, Türkiye geneli için üç kısıt altında hesaplanan MaxEnt dağılımına ait entropi değerinin 1,7964 olarak en yüksek entropiye sahip olduğu, en düşük entropi değerinin ise yine Türkiye geneli için iki kısıt altında hesaplanan MaxEnt dağılımından 1.7721 olarak hesaplandığı görülmektedir. R^2 kriteri bakımından benzer değerlendirme yapıldığında ise uyumun en yüksek çıktığı bölge, 0,696 değeri ile Doğu Anadolu bölgesi olup, bu değer üç kısıt altında hesaplanan MaxEnt dağılımından elde edilen frekanslar ile gözlenen gözlenen frekanslar için elde edilmiştir. En düşük R^2 değeri ise 0,001 değeri ile Güney Doğu Anadolu bölgesi olup, bu değer de üç kısıt altında hesaplanan MaxEnt dağılımından elde edilen frekanslar ile gözlenen gözlenen frekanslar için elde edilmiştir.

Çalışmadan elde edilen sonuçlara göre iki ve üç kısıt altında hesaplanan maksimum entropi dağılımına ait olasılıklara karşı gelen frekanslar ile gözlemlenen frekanslar arasında Ki-Kare kriterine göre bir uyum olmadığı belirlenmiştir. Kısıt sayısının arttırılmasına bağlı olarak MaxEnt Dağılımından elde edilen olasılıklara ait frekanslar ile gözlemlenen frekanslar arasında bir uyum söz konusu olabilir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda kısıt sayısının arttırılması ve yeniden çözümlene yapılması planmaktadır.

6. KAYNAKLAR

Cover T.M. Thomas J.A. (1991). Elements of Information Theory, Academic Press, Stanford University.

Değirmenci İ. (2011). Entropi Ölçümleri ve Maksimum Entropi İlkesi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi.

Golan A., Judge G., Miller D. (1996). Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data, John Willey and Sons, New York, USA.

Güngör M., Bulut Y. (2008). Ki-Kare Testi Üzerine, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Doğu Anadolu Bölgesi Araştırmaları, Fırat Üniversitesi.

Jaynes E.T. (1957). Information Theory and Statistical Mechanics, *Reprinted from The Physical Review* **106(4)**: 620-630.

Jaynes E.T. (1957). Information Theory and Statistical Mechanics 2, *Reprinted from The Physical Review* **108(2)**: 171-190.

Kantar M. Y. (2006). Entropi Optimizasyon Metodlarıyla Rassal Değişkenlerin Dağılımlarının İncelenmesi, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi.

Kapur J.N., Kesavan H.K. (1992). Entropy Optimization Principles with Applications, Academic Press, New York, USA.

Ocakçı M., Bostancı S.H. (2009). Kent Silüetlerine İlişkin Tasarım Niteliklerinin Entropi Yaklaşımı ile Değerlendirilmesi, *İTÜ dergisi/a*, **2**: 27-36.

Orkan A.L. (1992). Bilişim Teorisi, Marmara Üniversitesi.

Özkul S. (2001). Su Kalitesi Gözlem Ağlarının Entropi Yöntemi ile Değerlendirilmesi, Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, *Türk J. Engin. Environ. Sci*, **25**: 435-452

Penfield P. (2003). Principle of Maximum Entropy, Massachusetts Institute of Technology.

Shannon C.E.(1948). A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, **Vol. 27**, pp. 379–423, 623–656, July, October, 1948.

Usta İ. (2009). Moment Kısıtlarına Dayalı Genelleştirilmiş Entropi Yöntemleri, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi.

Wu X. (2003). Calculation of Nex-Entropy Densities with Application to Income Distribution, *Journal of Econometrics* **115**: 347-354.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice ÇİÇEK
Doğum Yeri ve Yılı : Alaca / 17.10.1989
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) : cicekh00@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)

Lise : Alaca Mehmet Çelik Anadolu Lisesi (2003-2007)
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2007-2011)
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2011-)