ÇİFT DİZİLERİN

İDEAL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Feyza KOÇ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT DİZİLERİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Feyza KOÇ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Feyza KOÇ tarafından hazırlanan "Çift Dizilerin İdeal Yakınsaklığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 11/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

Başkan : Doç. Dr. Murat PEKER
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15/07/2014

Feyza KOÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT DİZİLERİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Feyza KOÇ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER

Bu çalışma, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı için ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremlerin yanında, yoğunluk ve tek dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiştir. Üçüncü bölümde, tek dizilerde $\mathcal{I}-$yakınsaklık, $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Çalışmamızın dördüncü bölümü, çift dizilerle ilgili bazı tanım ve teoremleri ve çift dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramlarını içermektedir. Beşinci bölümde, çift dizilerde ideal ve ideal yakınsaklık, çift dizilerde $\mathcal{I}-$yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2^*-$yakınsaklık, $(AP2)$ özelliği ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremler verilmiştir. Bunların yanında regüler anlamda ideal yakınsaklık ve ideal Cauchy anlatılmıştır.

2014, v+76 sayfa

Anahtar Kelimeler : Çift diziler, $\mathcal{I}-$yakınsaklık, $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık, Regüler yakınsaklık, Cauchy dizi

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

IDEAL CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES

Feyza KOÇ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Yurdal SEVER

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter includes definitions of necessary concepts and some theorems. And density and statistically convergent of single sequences are given. In the third chapter $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*-$convergent of single sequences are given and relationship between these convergence are explained. The fourth chapter includes some definitions and theorems related to double sequences and statistically convergent of double sequences. The fifth chapter of this thesis involve ideal and ideal convergent and $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}_2^*-$convergent of double sequences and $(AP2)$ property and some theorems related to these concepts. Also convergence of double sequences in regular sense and ideal Cauchy are given.

2014, v+76 pages

Key Words : Double sequences, $\mathcal{I}-$convergence, $\mathcal{I}^*-$convergence, Regular convergence, Cauchy sequence

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın

Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER'e

ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN'a ve ayrıca tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan eşim Muhammet Salih Koç'a ve eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Feyza KOÇ

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
c	Yakınsak diziler uzayı
$x = (x_n)$	Reel sayıların bir dizisi
$d(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\mathcal{I}$	$\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
$\mathcal{I}_2$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
L_x	$x = (x_n)$ dizisinin limit noktalarının kümesi
Γ_x	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
Λ_x	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
$\mathcal{I}(\Gamma_x)$	$x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}-$yığılma noktalarının kümesi
$\mathcal{I}(\Lambda_x)$	$x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}-$limit noktalarının kümesi
$st - \lim x$	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{I} - \lim x$	$x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}-$limiti
$x = (x_{mn})$	Reel sayıların bir çift dizisi
$st_2 - \lim x_{mn}$	$x = (x_{mn})$ çift dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn}$	$x = (x_{mn})$ çift dizisinin $\mathcal{I}-$limiti
L_x^2	$x = (x_{mn})$ dizisinin tüm Pringsheim noktalarının kümesi
$\mathcal{I}_2(\Lambda_x)$	$x = (x_{mn})$ dizisinin tüm limit noktalarının kümesi
$\mathcal{M}_u$	Sınırlı çift dizilerin uzayı
Ω	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün çift dizilerin uzayı
C_p	Pringsheim yakınsak çift dizilerin uzayı
C_{bp}	Prigsheim yakınsak ve sınırlı çift dizilerin uzayı
C_r	Regüler yakınsak çift dizilerin uzayı
C_e	e yakınsak çift dizilerin uzayı
$r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$	Regüler anlamda $(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})-$yakınsaklık

1 GİRİŞ

Reel sayılarda iyi bilinen yakınsaklık kavramından farklı olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Steinhaus (1949) tarafından tanımlanmış olup ilerleyen yıllarda Fast (1953) tarafından çalışılmıştır. İlerleyen yıllarda ise Fridy (1985;1993) Rath ve Tripathy (1994) istatistiksel Cauchy dizileri üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra bu yakınsaklık türü Mursaleen ve Edely (2003) tarafından çift dizilere taşınmıştır. İlerleyen yıllarda ise Çakan ve Altay (2006) çift dizilerde istatistiksel limit supremum ve limit infimum kavramlarını incelemişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklığın pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğuna ilişkin olması ve doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümelerinin ailesinin bir ideal oluşturmasından yola çıkarak istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olan "ideal yakınsaklık" kavramı ortaya çıkmıştır.

İdeal yakınsaklık kavramı ilk olarak tek indisli dizilerde Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmıştır. Çalışmalarında $\mathcal{I}^*-$ yakınsaklık kavramı ve (AP) özelliğini tanımlamışlardır. İlerleyen yıllarda ise Kostyrko vd. (2005) $\mathcal{I}-\limsup$, $\mathcal{I}-\liminf$, ve $\mathcal{I}-$ limit noktalarını çalışmışlardır.

Çift dizilerde Das vd. (2008) bazı ideal çeşitlerini, $\mathcal{I}-$ yakınsaklık $\mathcal{I}^*-$ yakınsaklık ve $(AP2)$ özelliklerini tanımlamışlardır. Çalışmalarında bu kavramlarla ilgili teoremlere yer vermişlerdir.

Tek diziler için yapılan çalışmalar Das ve Malik (2008) ve Gürdal ve Şahiner (2008) tarafından çift dizilere taşınmıştır.

Benzer şekildeki çalışmalar Kumar (2007), Triphaty, Triphaty (2005) tarafından da yapılmıştır.

Çift dizilerde $\mathcal{I}_2-$ yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2-$ Cauchy kavramlarını Pringsheim anlamının yanısıra regüler anlamları Dündar (2010) tarafından çalışılmıştır.

Boos vd. (1997) ise çift dizilerde $e-$, $be-$ ve $c-$ yakınsaklığı tanımlamışlardır. Zelster (2001) bu yakınsaklık çeşitlerinin topolojik uzaylarını incelemiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilecek ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak birtakım özelliklerden bahsedilecektir.

2.1 Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Dizi $x = x_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir (Balcı 1997).

Tanım 2.1.2 $x = (x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

olacak biçimde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $x = (x_n)$ dizisi $\alpha \in \mathbb{R}$ noktasına *yakınsaktır* denir ve,

$$\lim x_n = \alpha \quad \text{veya} \quad (x_n) \to \alpha$$

ile gösterilir (Kreyszig 1989).

Tanım 2.1.3 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $K = \{x : \ | x - a |< \varepsilon,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesine *a sayısının ε komşuluğu* denir.

Tanım 2.1.4 Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 2.1.5 Her $\varepsilon > 0$ için $\{n : \ |x_n - x_0| < \varepsilon\}$ yani x_0 sayısının her ε komşuluğunda (x_n) dizisinin x_0 haricinde sonsuz tane elemanı varsa $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin *yığılma noktası* denir. Burada x_0 dizinin terimi olmak zorunda değildir.

Tanım 2.1.6 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x = x_n$ dizisi verilsin. $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k(n) = k_n$ dizisi(fonksiyonu) bir artan dizi olmak üzere $x \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir *alt dizisi* denir ve

$$(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1997).

Tanım 2.1.7 (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti α ise bu α noktasına (x_n) dizisinin bir *limit noktası* denir (Balcı 1997).

Tanım 2.1.8 Boş olmayan bir X kümesi ile $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlansın.

(1) $\rho(x, y) \geq 0$

(2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetri özelliği)

(4) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

Bu durumda bu ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X, ρ) ikilisine de bir *metrik uzay* denir (Kreyszig 1989).

Tanım 2.1.9 (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir. X deki her (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaksa yani, $x_n \to x \in X$ ise (X, ρ) metrik uzayına *tam metrik uzay* denir (Kreyszig 1989).

Tanım 2.1.10 X bir küme τ, X in alt kümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi olsun.

(1) $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$ dır.

(2) τ ailesinin sonlu sayıda elemanlarının ara kesiti τ ya aittir.

(3) τ nun herhangi sayıda elemanlarının birleşimi τ ya aittir.

Bu takdirde τ ya X üzerinde bir *topoloji*, (X, τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir. τ ailesinin her bir elemanına da *açık* denir (Toeplitz and Köthe 1934).

Tanım 2.1.11 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus A$ açıksa A kümesine *kapalıdır* denir (Toeplitz and Köthe 1934).

Tanım 2.1.12 A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir (Toeplitz and Köthe 1934).

Tanım 2.1.13 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $\overline{A} = X$ ise A ya X kümesinde her yerde *yoğun küme* denir (Toeplitz and Köthe 1934).

Tanım 2.1.14 X bir küme, $A \subseteq X$ olmak üzere,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \quad , \quad x \in A \\ 0 \quad , \quad x \in (X \setminus A) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonuna A nın X deki *karakteristik fonksiyonu* denir.

Tanım 2.1.15 Boş olmayan bir X kümesi verilsin. $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$$

fonksiyonları eğer $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $x + 0 = x$ olacak şekilde bir $0 \in X$

4) $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir $-x \in X$ mevcut

5) $1.x = x$

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

şartları sağlanırsa, X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay* (*veya lineer vektör uzayı*) denir.

X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ iken, Y cümlesinin de X cümlesi üzerinde tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında lineer uzay olması için $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in Y$ alındığında $\lambda y_1 + y_2 \in Y$ sağlanması yeterlidir.

Tanım 2.1.16 Reel veya karmaşık $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı X alalım. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, biçimindeki fonksiyon aşağıdaki üç önermeyi sağlıyorsa $\|\cdot\|$ ye X üzerinde bir *norm* denir.

1) Her $x \in X,\ x \neq \theta$ için $\|x\| > 0$,

2) Her $\lambda \in \mathbb{K}$ ve $x \in X$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

3) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.17 X, bir E kümesinde tanımlanmış sınırlı fonksiyonlar uzayı olmak üzere,

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

normuna *supremum normu (sup-norm)* denir.

Tanım 2.1.18 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir.

2.2 Yoğunluk Kavramı

Bu kısımda ileriki bölümlerde kullanacağımız bazı yoğunluk çeşitlerinin tanımları verilecek ve örneklendirmeler yapılacaktır.

Tanım 2.2.1 A, $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesi, $A_n = \{k \leq n : k \in A\}$ ve $|A| = cardA$, A cümlesinin kardinalitesi olmak üzere

$$\underline{d}(A) = \liminf \frac{|A_n|}{n}$$

ve

$$\overline{d}(A) = \limsup \frac{|A_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla A cümlesinin *alt* ve *üst yoğunlukları* denir. Eğer $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$ ise $\left(\frac{|A_n|}{n}\right)$ dizisinin limitinin mevcut olması durumunda bu limite A cümlesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $d(A)$ şeklinde ifade edilir. Yani $d(A)$ eşitliklerinin sağlanması halinde $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu,

$$d(A) = \lim \frac{|A_n|}{n} = \lim \frac{1}{n}|\{k \leq n : k \in A\}|$$

dır.

Örnek 2.2.2 $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ çift doğal sayılar kümesi olsun. $\left(\frac{|A_n|}{n}\right)$ dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots$$

şeklindedir. Buradan;

$$d(A) = \lim \frac{|A_n|}{n} = \frac{1}{2}$$

dir.

Örnek 2.2.3 $A = \{1, 4, 5, 6, 13, 14, ..., 24, 49, 50, ..., 96, 193, 194, ...\}$ kümesi için $\left(\frac{|A_n|}{n}\right)$ dizisinin üst limitini oluşturan alt dizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, \cdots \to \frac{2}{3}$$

ve alt limitini oluşturan alt dizisi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, \cdots \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. O halde A kümesinin alt ve üst yoğunlukları mevcut olmasına rağmen, bu değerler birbirine eşit olmadığından yoğunluğu mevcut değildir.

Tanım 2.2.4 $A \subseteq \mathbb{N}$ t, s tam sayı ve $t \geq 0,\ s \geq 1$ olarak belirtilsin. $A \cap [t+1, t+s]$ kümesinin elaman sayısı $A(t+1, t+s)$ olarak belirlensin.

$$\alpha_s = \liminf_{t \to \infty} A(t+1, t+s)$$

ve

$$\alpha^s = \limsup_{t \to \infty} A(t+1, t+s)$$

olmak üzere,

$$\underline{U}(A) = \lim_{s \to \infty} \frac{\alpha_s}{s} \quad \text{ve} \quad \overline{U}(A) = \lim_{s \to \infty} \frac{\alpha^s}{s}$$

değerlerine sırasıyla A nın *alt* ve *üst düzgün yoğunlukları* denir. Eğer, $\underline{U}(A) = \overline{U}(A) = U(A)$ ise $U(A)$ sayısına A kümesinin *düzgün yoğunluğu* denir (Brown and Freedman 1990).

Tanım 2.2.5 $A \subseteq \mathbb{N}$ için,

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a}$$

ve

$$\overline{\delta}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a}$$

sayılarına sırasıyla A kümesinin *alt ve üst logaritmik yoğunluğu* denir.
Eğer,

$$\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = \delta(A)$$

ise,

$$\delta(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a \in A, a \leq n} \frac{1}{a}$$

sayısına A kümesinin *logaritmik yoğunluğu* denir (Halberstam and Roth 1966).

Yoğunluklar arasındaki ilişkiyi inceleyecek olursak, keyfi bir $A \subseteq \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq \underline{U}(A) \leq \underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A) \leq \overline{d}(A) \leq \overline{U}(A) \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır (Brown and Freedman 1990; Halberstam and Roth 1966).

Bu eşitsizlikten de görüleceği gibi, $U(A)$ mevcut ise $d(A)$ da mevcut ve $d(A) = U(A)$' dir. Eğer $d(A)$ mevcut ise $\delta(A)$ da mevcut ve $\delta(A) = d(A)$ dır. Ancak bu durumların tersi doğru değildir.

Bundan sonraki bölümlerde yoğunluk denilince doğal yoğunluk anlaşılacaktır.

Tanım 2.2.6 Her $\varepsilon > 0$ için

$$A = A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim \frac{1}{k}\left|\{n \leq k : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_n)$ dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x = \xi$ ile gösterilir (Steinhaus 1951).

Örnek 2.2.7 $x = (x_n)$ dizisini,

$$x_n = \begin{cases} n & , \quad n = k^2, \quad k \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$K = \{n : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, ...\}$$

olur ve K kümesinin doğal yoğunluğu $d(K) = 0$ dır. O halde $x = (x_n)$ dizisi $\xi = 0$ noktasına istatistiksel yakınsaktır. $st - \lim x_n = 0$ dır. Fakat bu dizinin ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonlu olmadığından yakınsak değildir.

Tanım 2.2.8 Herhangi bir J reel sayısı için,

$$d(\{n \in \mathbb{N} : x_n > J\}) = 1$$

ise (x_n) dizisi $+\infty$ a *istatistiksel ıraksaktır*,

$$d(\{n \in \mathbb{N} : x_n < J\}) = 1$$

ise (x_n) dizisi $-\infty$ a *istatistiksel ıraksaktır* denir (Tripathy 1998).

Tanım 2.2.9 (x_{n_k}) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. $K = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi (x_{n_k}) alt dizisinin indis kümesi olsun. Eğer $d(K) = 0$ ise (x_{n_k}) alt dizisine *seyrek alt dizi* veya *sıfır yoğunluklu alt dizi* denir. Eğer $d(K) > 0$ ise veya K kümesi doğal yoğunluğa sahip değilse (x_{n_k}) alt dizisine *seyrek olmayan alt dizi* veya *sıfır yoğunluğa sahip olmayan alt dizi* denir (Fridy 1993).

2.3 İdeal ve Filtre

Bu kısımda ideal ile filtre kavramlarından bahsedilecek, çeşitli ideal tanımları verilecek ve örneklendirmeler yapılacaktır.

Tanım 2.3.1 $X \neq \emptyset$ olmak üzere X in alt kümelerinin bir $S \subseteq 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \in S$,

ii) $A, B \in S$ ise $A \cup B \in S$ (toplamsallık)

iii) $A \in S$ ve $B \subseteq A$ ise $B \in S$ (kalıtsallık)

koşullarını sağlıyorsa X de bir *ideal* olarak adlandırılır ve eğer $X \notin S$ ise S ye X de bir *nontrivial(aşikar olmayan) ideal* denir (Kuratowski 1958).

Örnek 2.3.2 $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$ olsun. $\mathcal{I}_0$, $\mathbb{N}$ de boştan farklı en küçük nontrivial (aşikar olmayan) bir idealdir. Şimdi bunu gösterelim;

i) $\emptyset \in \mathcal{I}_0$,

ii) $\emptyset \in \mathcal{I}_0 \Rightarrow \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \mathcal{I}_0$,

iii) $\emptyset \in \mathcal{I}_0,\ \emptyset \subseteq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{I}_0$,

ve $\mathbb{N} \neq \emptyset$ olduğundan $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}_0$ olup $\mathcal{I}_0$, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) idealdir.

Şimdi $\mathcal{I}_0$ ın $\mathbb{N}$ de boştan farklı olduğunu gösterelim;

Kabul edelim ki; $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_0$ olacak şekilde bir $\mathcal{I}_1$, $\mathbb{N}$ de nontrivial (aşikar olmayan) ideal olsun. Bu durumda bir $A \subseteq N$ kümesi vardır öyle ki $A \in \mathcal{I}_0 \setminus \mathcal{I}_1$. Buradan $A \in \mathcal{I}_0$ ve $A \notin \mathcal{I}_1$ dir. $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$ olduğundan $A = \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathcal{I}_1$ olur ki; bu ise; $\mathcal{I}_1$ in $\mathbb{N}$ de nontrivial (aşikar olmayan) ideal olması ile çelişir. O halde $\mathcal{I}_0$, $\mathbb{N}$ de boştan farklı en küçük nontrivial (aşikar olmayan) bir idealdir.

Örnek 2.3.3 $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \mathbb{N}$ olsun. $\mathcal{I}_M = 2^M$ olarak alalım. Buradan $\mathcal{I}_M$, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) idealdir.

i) $\emptyset \in \mathcal{I}_M \quad (\emptyset \in 2^M)$,

ii) $A, B \in \mathcal{I}_M \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I}_M, \ (\mathcal{I}_M = 2^M)$,

iii) $A \in \mathcal{I}_M$ ve $B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{I}_M, \quad (\mathcal{I}_M = 2^M)$,

$M \neq \mathbb{N}$ olduğundan $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}_M$ olup $\mathcal{I}_M$, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) idealdir.

Tanım 2.3.4 $X \neq \emptyset$ olmak üzere X in alt kümelerinin boştan farklı bir $F \subseteq 2^X$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa; X de bir *filtredir.*

i) $\emptyset \notin F$,

ii) $A, B \in F$ iken $A \cap B \in F$,

iii) $A \in F$ ve $A \subseteq B$ iken $B \in F$ (Nagata 1974).

Şimdi bir önermeyle filtre ve ideal tanımları arasındaki ilişkiyi anlamaya çalışalım.

Lemma 2.3.5 $\mathcal{I}$, X in nontrivial (aşikar olmayan) ideali ve $X \neq \emptyset$ olmak üzere,

$$F(\mathcal{I}) = \{M \subset X : \exists A \in \mathcal{I} : M = X \setminus A\}$$

sınıfı, X üzerinde bir filtredir (Kostyrko *et al.* 2000).

İspat Filtrenin şartlarını sağladığını gösterelim,

i) $X \setminus X = \emptyset$ olduğu halde $X \notin \mathcal{I}$ olup $\emptyset \notin F(\mathcal{I})$ dir.

ii) $M_1, M_2 \in F(\mathcal{I}) \Rightarrow M_1 = X \setminus A, \quad M_2 = X \setminus B$ olacak şekilde $\exists A, B \in \mathcal{I}$ vardır. Buradan,

$$M_1 \cap M_2 = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B)$$

dir. $A \cup B \in \mathcal{I}$ olduğundan $M_1 \cap M_2 \in F(\mathcal{I})$ dir.

iii) $M_1 \in F(\mathcal{I})$ ve $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1 = X \setminus A$ olacak biçimde $\exists A \in \mathcal{I}$ vardır ve $M_2 = X \setminus B$ olacak şekilde $\exists B \in \mathcal{I}$ bulmalıyız.

$$M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow (X \setminus A) \subseteq (X \setminus B) \Rightarrow B \subseteq A$$

dır. $A \in \mathcal{I}$ olduğundan $B \in \mathcal{I}$ olup $M_2 \in F(\mathcal{I})$ dir.

Tanım 2.3.6 S, X de bir nontrivial (aşikar olmayan) ideal olmak üzere her bir $x \in X$ için $\{x\} \in S$ ise S ye X de bir *admissible (uygun) ideal* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Örnek 2.3.7 $\mathbb{N}$ in tüm sonlu alt kümelerinin sınıfını $\mathcal{I}_f$ ile gösterelim. $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir admissible(uygun) idealdir.

i) $\emptyset$ sonlu olduğundan $\emptyset \in \mathcal{I}_f$,

ii) $A, B \in \mathcal{I}_f \Rightarrow A$ ve B sonlu kümelerdir. İki sonlu kümenin birleşimi yine sonlu bir küme olacağından $A \cup B$ sonlu olup $A \cup B \in \mathcal{I}_f$ dir.

iii) $A \in \mathcal{I}_f$ ve $B \subseteq A \Rightarrow A$ sonlu bir küme ve sonlu bir kümenin alt kümeleri de sonlu olacağından $B \in \mathcal{I}_f$ dir.

$\mathbb{N}$, sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}_f$ dir. Bundan dolayı $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) idealdir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\}$ tek nokta kümesi sonlu bir küme olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}_f$ olup $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir admissible (uygun) idealdir (Kostyrko *et al.* 2000).

Örnek 2.3.8 $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$, $\mathbb{N}$ de bir ayrışım olsun. ($i \neq j$ için $D_i \cap D_j = \emptyset$). D_j nin,

$$D_j = \{2^{j-1}(2s-1): \ s = 1, 2, 3, ...\}, \quad (j = 1, 2, 3, ...)$$

şeklinde sonsuz kümeler olduğunu varsayalım.

$$J = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_p, \ p \in \mathbb{N}\}$$

kümesini tanımlayalım. Şimdi J nin $\mathbb{N}$ de bir admissible (uygun) ideal olduğunu gösterelim;

i) $\emptyset \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_p$, $p \in \mathbb{N}$ olduğundan $\emptyset \in J$ dir.

ii) $A, B \in J$ olsun. $A \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_r$ ve $B \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_s$, $r, s \in \mathbb{N}$ dir. $r < s$ olsun. O halde $A \cup B \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_r \cup D_{r+1} \cup ... \cup D_s$, $r, s \in \mathbb{N}$ olduğundan $A \cup B \in J$ dir.

iii) $A \in J$ ve $B \subseteq A$ olsun. Bu durumda $A \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_p$, $p \in \mathbb{N}$ dir. $B \subseteq A$ olduğundan $B \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_p$, $p \in \mathbb{N}$ olup $B \in J$ dir.

$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ olduğundan $\mathbb{N} \notin J$ dir. Bu durumda J, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) idealdir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_p$, $p \in \mathbb{N}$ olduğunda $\{n\} \in J$ olup J, $\mathbb{N}$ de bir admissible idealdir.

3 İDEAL YAKINSAKLIK

Daha önceki bölümde sözü geçen istatistiksel yakınsaklık kavramı bu bölümü anlamamıza yardımcı olacaktır. Bu bölümde öncelikle $\mathcal{I}-$yakınsaklık kavramı ile $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık kavramlarının tanımları, bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecek ve aralarındaki ilişkiden söz edilecektir.

3.1 $\mathcal{I}-$Yakınsaklık

Bu kısımda $\mathcal{I}-$yakınsaklık kavramının tanımı verilecek ve bazı yakınsaklık aksiyomlarının $\mathcal{I}$ benzerlerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1.1 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait ise, $x = (x_n)$ dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $\mathcal{I}-$*yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ şeklinde gösterilir. $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına da $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}-$*limiti* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Şimdi yakınsaklık kavramının bilinen aksiyomlarından hangilerinin $\mathcal{I}-$yakınsaklık çeşidi için sağlandığını inceleyelim. Bilinen birçok yakınsaklık aksiyomlarının $\mathcal{I}$ benzerleri şu şekildedir;

a) Her $x = \{\xi, \xi, \xi, ..., \xi, ...\}$ sabit dizisi ξ sayısına $\mathcal{I}-$yakınsaktır.

b) Yakınsak dizilerin $\mathcal{I}-$limiti tek olarak bellidir. Yani, eğer; $\mathcal{I} - \lim x = \xi$ ve $\mathcal{I} - \lim x = \eta$ ise $\xi = \eta$ dir.

c) Eğer $\mathcal{I} - \lim x = \xi$ ise x in her y alt dizisi için $\mathcal{I} - \lim y = \xi$ dir.

d) Eğer x dizisinin her alt dizisi ξ ye $\mathcal{I}-$yakınsak bir z alt dizisine sahipse, x dizisi ξ ye $\mathcal{I}-$ yakınsaktır.

Uyarı 3.1.2 Eğer bir $\mathcal{I}$ admissible (uygun) ideali sonsuz küme içermiyorsa, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin sınıfı ile çakışır ve $\mathcal{I}-$yakınsaklık $\mathbb{R}$ deki alışılmış yakınsaklığa denk olur. Bundan dolayı (c) aksiyomu sağlanır.

Teorem 3.1.3 X in en az iki noktası olduğunu düşünelim ve $\mathcal{I} \subset 2^X$ bir admissible (uygun) ideal olsun. Buradan,

i) $\mathcal{I}-$yakınsaklık (a), (b), ve (d) aksiyomlarını sağlar.

ii) Eğer $\mathcal{I}$ sonsuz bir küme içeriyorsa $\mathcal{I}-$yakınsaklık (c) aksiyomunu sağlamaz (Kostyrko *et al.* 2000).

İspat i) $\mathcal{I}-$yakınsaklığın (a) aksiyomunu sağladığını gösterelim:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) = \xi$ sabit bir dizi olsun. O halde,

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} = \{n : 0 \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olur. $\mathcal{I}$ nontrivial (aşikar olmayan) ideal olduğundan $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ olup x dizisi ξ ye $\mathcal{I}-$yakınsaktır.

$\mathcal{I}-$yakınsaklığın (b) aksiyomunu sağladığını gösterelim:

$\mathcal{I} - \lim x = \xi$, $\mathcal{I} - \lim x = \eta$ ve $\xi \neq \eta$ olsun. $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{|\ \xi - \eta|}{2}\right)$ olarak seçelim. $\mathcal{I} - \lim x = \xi$ ve $\mathcal{I} - \lim x = \eta$ olduğundan, sırasıyla

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$B(\varepsilon) = \{n : |x_n - \eta| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

dır. O halde,

$$\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| < \varepsilon\} \in F(\mathcal{I})$$

ve

$$\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon) = \{n : |x_n - \eta| < \varepsilon\} \in F(\mathcal{I})$$

dır. $\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) \cap \mathbb{N} \setminus B(\varepsilon) \in F(\mathcal{I})$ ve $\emptyset \notin F(\mathcal{I})$ olduğundan öyle bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki, $|x_m - \xi| < \varepsilon$ ve $|x_m - \eta| < \varepsilon$ dır.

$$\begin{aligned} |\xi - \eta| &= |(x_m - \eta) - (x_m - \xi)| \\ &\leq |\ x_m - \eta\ | + |\ x_m - \xi\ | \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Yani $|\xi - \eta| \leq 2\varepsilon$ bulunmuş olur. Ancak bu durum ε un seçimiyle çelişir. O halde $\xi = \eta$ dır.

$\mathcal{I}-$yakınsaklığın (d) aksiyomunu sağladığını gösterelim:

Kabul edelim ki; $\mathcal{I} - \lim x \neq \xi$ iken x in bir y alt dizisi vardır öyle ki y nin ξ ye $\mathcal{I}-$yakınsak hiçbir alt dizisi yoktur. $\mathcal{I} - \lim x \neq \xi$ olduğundan bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır öyle ki

$$A(\varepsilon_0) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon_0\} \notin \mathcal{I} \tag{3.1}$$

dır. Buradan $\mathcal{I}$ admissible (uygun) ideal olduğundan $A(\varepsilon_0)$ sonsuz bir kümedir.

$$A(\varepsilon_0) = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$$

olsun. $y_k = x_{n_k}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ olarak alırsak $y = y_k$, x in bir alt dizisidir ve (3.1) den dolayı

$$B(\varepsilon_0) = \{k : |y_k - \xi| \geq \varepsilon_0\} \notin \mathcal{I} \tag{3.2}$$

olur.

(3.2) den dolayı y nin hiçbir $z = (z_m) \quad (m = 1, 2, 3, ...)$ alt dizisi $\mathcal{I}-$yakınsak değildir. Eğer $\mathcal{I}-$yakınsak olsaydı $\{m : |z_m - \xi| \geq \varepsilon_0\} \in \mathcal{I}$ olurdu ki bu ise $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ olması ile çelişir. O halde (d) aksiyomu da sağlanır.

ii) Varsayalım ki; $A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz bir küme ve $\mathcal{I}$ ya ait olsun.

$$B = \mathbb{N} \setminus A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_k < m_{k+1} < \cdots\}$$

olarak alalım. B de sonsuz bir kümedir. (Eğer B sonlu bir küme olsaydı $\mathbb{N} \setminus B = A$ sonsuz olup $A \notin \mathcal{I}$ olur ki bu durumsa $A \in \mathcal{I}$ olması ile çelişir.)

$x = (x_n)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x_{n_k} = 0, \quad x_{m_k} = 1 \quad (k = 1, 2, 3, ...)$$

$\mathbb{N} \setminus B = A$ ve $A \in \mathcal{I}$ olduğundan $A(\varepsilon) = \{n : |x_n - 1| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olup $\mathcal{I} - \lim x_n = 1$ dir. Buradan $y = (x_{n_k})$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ X in sabit bir alt dizisidir. (a) aksiyomundan dolayı $\mathcal{I} - \lim y = 0$ dır. Bu durumda $\mathcal{I}-$yakınsaklık (c) aksiyomunu sağlamaz.

$\mathcal{I}-$Yakınsaklığın Temel Aritmetik Özellikleri

Bu kısımda alışılmış yakınsaklık için geçerli olan bazı aritmetik özellikleri $\mathcal{I}-$yakınsaklığın da sağladığını gösteren teoremi vereceğiz.

Teorem 3.1.4 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir nontrivial (aşikar olmayan) ideal olsun.

(i) Eğer $\mathcal{I}-\lim x_n = \xi$ ve $\mathcal{I}-\lim y_n = \eta$ ise $\mathcal{I}-\lim(x_n + y_n) = \xi + \eta$

(ii) Eğer $\mathcal{I}-\lim x_n = \xi$ ve $\mathcal{I}-\lim y_n = \eta$ ise $\mathcal{I}-\lim(x_n \cdot y_n) = \xi \cdot \eta$

(iii) Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir admissible (uygun) ideal ise $\lim x_n = \xi$ olması $\mathcal{I}-\lim x_n = \xi$ olmasını ifade eder (Kostyrko *et al.* 2000).

3.2 $\mathcal{I}^*-$Yakınsaklık

Bu kısımda $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık kavramı üzerinde durulacak ve daha önce bahsettiğimiz $\mathcal{I}-$yakınsaklık kavramı ile $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiden bahsedilecek, bir takım özellikler verilecektir.

Şimdi, istatistiksel yakınsaklık teorisinin iyi bilinen bir sonucunu vermekle başlayalım. $x = (x_m)$ reel sayı dizisinin ξ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $d(M) = 1$ ve $\lim x_{m_k} = \xi$ olacak biçimde $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\}$ kümesinin olmasıdır.

Bu sonuçtan yola çıkarak $\mathcal{I}-$yakınsaklığa paralel olan $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık kavramını inceleyelim.

Tanım 3.2.1 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde nontrivial (aşikar olmayan) bir ideal olmak üzere, X in elemanlarından oluşan bir $x = (x_m)$ dizisinin $\xi \in X$ sayısına $\mathcal{I}^*-$*yakınsak* olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{mk}, \xi) = 0$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in F(I)$ $\quad (N \setminus M \in \mathcal{I})$ kümesinin var olmasıdır. Bu durum $\mathcal{I}^* - \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$ ile gösterilir (Kostyrko *et al.* 2000).

Teorem 3.2.2 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir admissible(uygun) ideal olmak üzere, eğer $\mathcal{I}^*-\lim x_n = \xi$ ise $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ dir (Kostyrko *et al.* 2000).

Ancak dikkat edilmelidir ki $\mathcal{I}-$yakınsaklık ile $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık arasında bu ilişkinin tersi geçerli değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.2.3 $\mathcal{I} = J$ olsun. $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$, $\mathbb{N}$ de bir ayrışım olmak üzere $(D_i \cap D_j = \emptyset)$ $(j \neq i)$ ve

$$D_j = \{2^{j-1}(2s-1) : s = 1, 2, 3, ...\}, \quad (j = 1, 2, 3, ...)$$

şeklinde sonsuz kümeler olmak üzere

$$J = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_p,\ p \in \mathbb{N}\}$$

kümesini tanımlayalım. J, $\mathbb{N}$ de bir admissible (uygun) idealdir.

$x = (x_n)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_n = \frac{1}{j}, \ n \in D_j \quad (j = 1, 2, 3, ...).$$

Buradan, $\mathcal{I} - \lim x_n = 0$ dır. Şimdi $\mathcal{I}^* - \lim x_n = 0$ olmadığını gösterelim. Eğer $H \in \mathcal{I}$ ise öyle bir $p \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$H \subseteq D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_p$$

dir. Buradan,

$$\mathbb{N} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_p) \subseteq \mathbb{N} \setminus H$$

dır. Teorem 3.2.2 nin ispatındaki ifadeyi kullanarak,

$$D_{p+1} \subseteq \mathbb{N} \setminus H = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < ...\}$$

yazılabilir.

$$x_{m_k} = \frac{1}{p+1}, \quad m_k \in D_{p+1}$$

sonsuz çoklukta k lar için her terimi $\frac{1}{p+1}$ olan bir dizi olup $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{p+1}$ dir. Yani, $\lim x_n \neq 0$ olduğundan $\mathcal{I}^* - \lim x_n \neq 0$ olur (Kostyrko *et al.* 2000).

Teorem 3.2.4 (X, ρ) bir metrik uzay olsun.

(1) Eğer, X in bir yığılma noktası yoksa her $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible (uygun) ideali için $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık aynıdır.

(2) Eğer X, ξ şeklinde bir yığılma noktasına sahipse, $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible (uygun) ideali ile $\mathcal{I} - \lim y_n = \xi$ olacak şekilde X in elemanlarından oluşan bir (y_n) dizisi vardır, ancak $\mathcal{I}^* - \lim y_n$ yoktur.

Şimdi bir $\mathcal{I}$ ideali için $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*-$yakınsaklığın eşdeğer olması için gerekli ve yeterli şartları verelim.

Tanım 3.2.5 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible (uygun) ideal olmak üzere,
Eğer $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3, ...)$ ve $A_i \in \mathcal{I}$ ise her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \vartriangle B_i$ sonlu küme ve

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$$

olacak biçimde B_i kümeleri varsa $\mathcal{I}$ admissible (uygun) ideali (AP) *koşulunu* sağlar denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Uyarı 3.2.6 Bu tanımdaki $B_i \subseteq \mathbb{N} \quad (i = 1, 2, 3, ...)$ kümelerinin her biri $\mathcal{I}$ ya aittir.

Teorem 3.2.7 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideali (AP) özelliğine sahip ve (X, ρ) keyfi metrik uzay olsun. X in elemanlarından oluşan keyfi bir $x = (x_n)$ dizisi için $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ iken $\mathcal{I}^* - \lim x_n = \xi$ dir (Kostyrko *et al.* 2000).

İspat $\mathcal{I}$, (AP) özelliğini sağlasın. $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ olsun. O halde $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

dır. $n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq 1\}$$

ve

$$A_n = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n-1}\}$$

alalım. Açıkca $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olur. (AP) koşulu sağlandığından $j \in \mathbb{N}$ ve $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ ve $A_j \triangle B_j$ sonlu kümeler olacak şekilde $\{B_j\}$ kümelerinin bir dizisi vardır. $M = \mathbb{N} \setminus B$ iken $\lim\limits_{n \in M} x_n = \xi$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. $\eta > 0$ olsun. $\dfrac{1}{k+1} < \eta$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \eta\} \subset \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$$

dir. $A_i \triangle B_j, \; j = 1, 2, 3, ..., k+1$ sonlu bir küme olduğundan

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j\right) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j\right) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} \tag{3.3}$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n > n_0$ ve $n \notin B$ ise $n \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} B_j$ ve 3.3 den dolayı $n \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k+1} A_j$ dir. O halde $\rho(x_n, \xi) < \dfrac{1}{n+1} < \eta$ dir. Bu durumda $\lim\limits_{n \in M} x_n = \xi$ elde edilir.

Teorem 3.2.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible (uygun) ideal ve (X, ρ) uzayı en az bir yığılma noktasına sahip olsun. $x = (x_n)$, X in elemanlarından oluşan bir dizi ve her $\xi \in X$ olmak üzere, $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ olması durumunda $\mathcal{I}^* - \lim x_n = \xi$ oluyorsa $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahiptir.

İspat $\xi \in X$, X in bir yığılma noktası olsun. X in elemanlarından oluşan $\lim x_n = \xi$ şeklinde bir $x = (x_n)$ dizisi vardır ve $\big(\rho(x_n, \xi)\big)$ dizisi azalarak sıfıra gider. $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n = \rho(x_n, \xi)$ ve $\{A_n\}$, $\mathcal{I}$ da boştan farklı kümelerin bir ayrık ailesi olsun. $n \in A_j$ iken $y = x_j$ olan bir (y_n) dizisi tanımlansın. $\eta > 0$ olmak üzere $\varepsilon_m < \eta$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ seçelim. $A(\eta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ dir. Buradan $A(\eta) \in \mathcal{I}$ ve $\mathcal{I} - \lim y_n = \xi$ olur. Varsayımdan dolayı $\mathcal{I}^* - \lim y_n = \xi$ dır. Buradan $M = \mathbb{N} \setminus B = \{m_1 < m_2 < ...\}$ olacak biçimde $B \in \mathcal{I}$ kümesi vardır. Buradan da,

$$\lim y_{m_k} = \xi \tag{3.4}$$

olur. $j \in \mathbb{N}$ için $B_j = A_j \cap B$ şeklinde ifade edilsin. Her n için $B_j \in \mathcal{I}$ dır. Ayrıca $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j = B \cap \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \subset B$ dir. Buradan $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ ve $j \in \mathbb{N}$ dir. (3.4) den dolayı A_j, M kümesi ile ortak elemanlarının sonlu bir sayısına sahiptir. O halde $A_j \subset (A_j \cap B) \cup \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $A_j \vartriangle B_j = A_j \setminus B_j \subset \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ dır ve $A_j \vartriangle B_j$ sonlu bir kümedir. $j \in \mathbb{N}$ in keyfi olmasından dolayı $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahiptir.

Şimdi kısaca $\mathcal{I}-$yakınsaklığı koruyan fonksiyonlardan bahsedelim;

Tanım 3.2.9 (X, ρ) bir metrik uzay, $g : X \to X$ bir fonksiyon ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible (uygun) ideal olmak üzere X in elemanlarından oluşan her $x = (x_n)$ dizisi ve her $\xi \in X$ için $\mathcal{I} - \lim x_n = \xi$ iken $\mathcal{I} - \lim g(x_n) = g(\xi)$ oluyorsa g fonksiyonu X de $\mathcal{I}-$*yakınsaklığı koruyor* denir.

Teorem 3.2.10 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ keyfi bir admissible(uygun) ideal olsun. $g : X \to X$ fonksiyonunun X de $\mathcal{I}-$yakınsaklığı koruması için gerek ve yeter şart g nin X de sürekli olmasıdır.

3.3 $\mathcal{I}-$Limit Noktaları ve $\mathcal{I}-$Yığılma(Cluster) Noktaları

Bu bölümde istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktalarının $\mathcal{I}$ benzerlerini inceleyeceğiz. Öncelikle istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktalarının tanımlarını verelim.

$\xi \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için $\overline{d}(M) > 0$ ve $\lim x_{m_k} = \xi$ olacak biçimde bir $M = \{m_1, m_2, ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi varsa $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir. Her $\varepsilon > 0$ için $\overline{d}(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| < \varepsilon\}) > 0$ varsa $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin bir *istatistiksel yığılma noktası* denir.

Bu konsepti aşağıdaki yolla $\mathcal{I}-$yakınsaklığa genişletebiliriz (Kostyrko *et al.*, 2000).

Tanım 3.3.1 (X, ρ) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$, X in elemanlarından oluşan bir dizi olmak üzere,

a. $M \notin \mathcal{I}$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1, m_2, ...\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi bulunabiliyorsa $\xi \in X$ elemanına x in $\mathcal{I}-$*limit noktası* denir.

b. $\xi \in X$ elemanına X in $\mathcal{I}-$*yığılma (cluster) noktası* denmesi için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ olmasıdır.

X in tüm $\mathcal{I}-$yığılma noktalarının kümeleri $\mathcal{I}(\Gamma_x)$ ve tüm $\mathcal{I}-$limit noktalarının kümeleri $\mathcal{I}(\Lambda_x)$ ile gösterilir.

Teorem 3.3.2 $\mathcal{I}$ bir admissible(uygun) ideal olmak üzere, X in elemanlarından oluşan her bir $x = (x_n)$ dizisi için,

$$\mathcal{I}(\Lambda_x) \subset \mathcal{I}(\Gamma_x)$$

dir (Kostyrko *et al.* 2000).

İspat $\xi \in \mathcal{I}(\Lambda_x)$ olsun.

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0 \tag{3.5}$$

olacak şekide bir $M = \{m_1, m_2, ...\} \notin \mathcal{I}$ kümesi bulunabilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere, (3.5) den $\rho(x_{m_k}, \xi) < \varepsilon$ dur ve $k > k_0$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ elemanı vardır. Buradan $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \supset M \setminus \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ dır ve $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ dır. Bu ise $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_x)$ anlamına gelir.

Teorem 3.3.3 $\mathcal{I}$ bir admissible (uygun) ideal olsun.

(1) X in elemanlarından oluşan her $x = (x_n)$ için $\mathcal{I}(\Gamma_x)$ kümesi X de kapalıdır.

(2) (X, ρ) ayrılabilir metrik uzay olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $M_n \notin \mathcal{I}$ ve $M_n \subset \mathbb{N}$ olacak şekilde (M_n) kümelerinin ayrık bir dizisi olduğunu düşünelim. Her $F \subset X$ kapalı kümesi için $F = \mathcal{I}(\Gamma_x)$ olacak şekilde X in elemanlarından oluşan bir $x = (x_n)$ dizisi vardır (Kostyrko *et al.* 2000).

Şimdi alışılmış üst limit ve alt limit kavramlarının $\mathcal{I}$ benzerlerinden bahsedelim.

Tanım 3.3.4 Reel terimli bir $x = (x_n)$ sayı dizisi için

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \{n : x_n < a\} \notin \mathcal{I}\}$$

ve

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \{n : x_n > b\} \notin \mathcal{I}\}$$

olsun. Bir $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}-$üst limiti,

$$\mathcal{I} - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x & , \quad B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir. Benzer şekilde bir $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}-$alt limiti

$$\mathcal{I} - \liminf x = \begin{cases} \inf A_x & , \quad A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , \quad A_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklindedir (Demirci 2001).

Teorem 3.3.5 $\beta = \mathcal{I} - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \quad \text{ve} \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I} \tag{3.6}$$

dır. Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (3.6) gerçeklenirse $\beta = \mathcal{I} - \limsup x$ dir (Demirci 1997).

Teorem 3.3.6 $\alpha = \mathcal{I} - \liminf x$ sonlu ise ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \quad \text{ve} \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\} \in \mathcal{I} \tag{3.7}$$

dır. Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (3.7) gerçeklenirse $\alpha = \mathcal{I} - \liminf x$ dir (Demirci 1997).

İdeal yığılma noktası tanımı ile Teorem 3.3.5 ve Teorem 3.3.6 dan $\mathcal{I} - \limsup x$, x dizisinin en büyük ideal yığılma noktasıdır ve $\mathcal{I} - \liminf x$, x dizisinin en küçük ideal yığılma noktasıdır diyebiliriz.

Teorem 3.3.7 Reel değerli herhangi bir x dizisi için

$$\mathcal{I} - \liminf x \leq \mathcal{I} - \limsup x$$

dir (Demirci 2001).

Tanım 3.3.4 ve bu teoremin sonucu olarak herhangi bir x dizisi için

$$\liminf x \leq \mathcal{I} - \liminf x \leq \mathcal{I} - \limsup x \leq \limsup x$$

olduğu görülür.

Tanım 3.3.8 Bir $x = (x_n)$ dizisi için $\{n : |x_n| > B\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir B sayısı varsa, x dizisine $\mathcal{I}-$*sınırlıdır* denir (Demirci 2001).

Ayrıca $\mathcal{I}-$sınırlı bir x dizisi, $\mathcal{I}-\limsup x$ ve $\mathcal{I}-\liminf x$ değerlerinin sonlu olmasını gerektirir.

Teorem 3.3.9 $\mathcal{I}-$sınırlı bir x dizisinin $\mathcal{I}-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{I} - \liminf x = \mathcal{I} - \limsup x$$

olmasıdır (Demirci 2001).

4 ÇİFT DİZİLER

Bu bölümde ilk olarak çift dizi tanıtılarak özellikleri verilecektir. Ayrıca tek dizilerin aksine çift dizilerdeki birden fazla yakınsaklık çeşitleri olan Pringsheim anlamında yakınsaklık regüler anlamda yakınsaklık gibi temel bazı yakınsaklık çeşitlerinden bahsedilecektir. Diğer yakınsaklık çeşitleri olan $c-$, $be-$ ve $e-$ yakınsaklık çeşitleri ise Boos vd. (1997) ve Zelster (2001) tarafından çalışılmıştır. Bizde bu kısımda bu yakınsaklık çeşitlerinin tanımlarını vereceğiz.

4.1 Çift Dizilerde Yakınsaklık

Tanım 4.1.1 X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$$

$$(m, n) \to f(m, n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir *çift indisli dizi* denir (Altay 2002).

Bundan sonraki kısımlarda çift indisli dizi yerine çift dizi veya sadece dizi ifadesi kullanılacaktır.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde tablolaştırabiliriz. Kompleks veya reel terimli çift dizilerin cümlesi

$$\Omega = \left\{ x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu cümle $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için

$$\alpha x = (\alpha x_{mn}) \text{ ve } x + y = (x_{mn} + y_{mn})$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

$x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere, $\sup_{m,n} |x_{mn}| < \infty$ oluyorsa x çift dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesini $\mathcal{M}_u$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{M}_u = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{m,n} |x_{mn}| < \infty\}$$

şeklindedir. Bu uzay $\| \cdot \|_\infty$ normu ile Banach uzayı teşkil eder.

Tanım 4.1.2 Reel ya da kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi, eğer verilen her $\varepsilon > 0$ için, $m, n > N$ olduğunda, $|x_{mn} - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi $l \in \mathbb{C}$ sayısına *Pringsheim anlamında yakınsaktır* denir ve l sayısına da $x = (x_{mn})$ dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizi $P - \lim x_{mn} = l$ veya $\lim x_{mn} = l$ şeklinde gösterilir.

Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı;

$$C_p = \left\{x = (x_{mn}) \in \Omega \ : \ \exists l \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N \ni |x_{mn} - l| < \varepsilon\right\}$$

şeklinde ifade edilir (Altay 2002).

Tanımdan da görüleceği üzere Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi sınırlı olmayabilir.

Örnek 4.1.3 Reel terimli $x = (x_{mn})$ çift dizisi,

$$x_{mn} = \begin{cases} m & , \ n = 1 \text{ ise} \\ -n & , \ m = 1, \ n \geq 2 \text{ ise} \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\sup_{m,n} x_{mn} = +\infty$ ve $\inf_{m,n} x_{mn} = -\infty$ olduğu halde dizinin $P-$ limiti sıfırdır.

Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak ve sınırlı bir $x = (x_{mn})$ dizisine, l noktasına *Pringsheim anlamında sınırlı yakınsak dizi* denir. Bu şekildeki dizilerin cümlesi C_{bp} ile gösterilir. C_{bp} cümlesi,

$$C_{bp} = \{x = (x_{mn}) \in C_p : \|x\|_\infty = \sup_{m,n} |x_{mn}| < \infty\} = C_p \cap \mathcal{M}_u$$

şeklindedir ve bu uzay da $\|\cdot\|_\infty$ normu ile Banach uzayıdır.

Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak olmasının yanında $\lim_m x_{mn}$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\lim_n x_{mn}$, $(m \in \mathbb{N})$ limitleri mevcut olan x dizisine, l noktasına *regüler yakınsaktır* denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için $\lim_n \lim_m x_{mn}$ ve $\lim_m \lim_n x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittir. Regüler yakınsak dizilerin cümlesi, C_r ile gösterilir ve C_r cümlesi;

$$C_r = \{x = (x_{mn}) \in C_p \mid \forall m \in \mathbb{N} : (x_{mn})_m \in c \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_n \in c\}$$

şeklindedir. Regüler yakınsaklık kavramında, yakınsak her çift dizinin sınırlı olduğu kolaylıkla görülür.

Tek indisli c ve c_0 dizi uzaylarına karşılık gelen Pringsheim; sıfıra Pringsheim yakınsak ve regüler anlamda yakınsak çift dizilerin C_p, C_{0p} ve C_r uzaylarının bazı özellikleri Moricz (1991) tarafından incelendi.

Pringsheim anlamında yakınsaklıktan daha zayıf olan çift dizilerin a noktasına $e-$yakınsaklığı,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0, \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} : m > m_0 \Rightarrow |x_{mn} - a| \leq \varepsilon$$

şeklinde Boos vd. (1997) tarafından tanımlandı. $e-$yakınsak bir x dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\sup_m |x_{mn}|$ değeri sonlu ve $\lim_m x_{mn}$ var ise x dizisine sırasıyla *be−yakınsak* ve *c−yakınsak* denir. $c-$yakınsak bir x dizisi için, $\lim_n \lim_m x_{mn}$ vardır ve $e-$yakınsaklık limitine eşittir. Bu durumda $e-$yakınsak dizilerin cümlesi,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_e := &\Big\{x = (x_{mn}) \in \Omega : \ \exists a \in \mathbb{C}, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \exists m_n \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq m_n \implies |x_{mn} - a| < \varepsilon\Big\} \\ = &\Big\{x = (x_{mn}) \in \Omega : \ \exists a \in \mathbb{C} : \lim_n \overline{\lim}_m |x_{mn} - a| = 0\Big\}.\end{aligned}$$

şeklindedir. Tanımlardan $C_r \subsetneq C_p \subsetneq C_e$ olduğu çıkarımında bulunulabilir.

Şimdi Pringsheim anlamında yakınsak olmayan fakat $e-$yakınsak olan bir çift dizi örneği verelim.

Örnek 4.1.4 $x = (x_{mn})$ çift dizisi,

$$x_{mn} := \begin{cases} m \cdot n, & m = n, \\ 2, & m < n, \\ 1, & m > n. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu çift dizi Pringsheim anlamında yakınsak değil fakat $e-$yakınsaktır ve $e - \lim_{mn} x_{mn} = 1$ dır.

Genel olarak, bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin sınırlılığı, düzgün sınırlılık, yani $\sup_{m,n} |x_{mn}|$ ifadesinin sonlu olması anlamındadır. Bu; r ve $bp-$yakınsaklık için tabii bir sınırlılık tanımıdır ve yukarıda tanımlanan yakınsaklık çeşitlerinin kendilerine özgü sınırlılık tanımları vardır ve şu şekildedir;

Tanım 4.1.5 $x = (x_{mn})$ çift dizisi,

(a) Eğer, $\overline{\lim}_k \sup_{m,n \geq k} |x_{mn}| < \infty$ ise $P-$sınırlı,

(b) Eğer, $\overline{\lim}_n \overline{\lim}_m |x_{mn}| < \infty$ ise $e-$sınırlı,

(c) Eğer, $\sup_n \overline{\lim}_m |x_{mn}| < \infty$ ise $be-$sınırlı,

(d) Eğer, $\sup_n |\lim_m x_{mn}| < \infty$ ise $c-$sınırlıdır (Zeltser 2001).

Genel olarak gözönüne alınan çift dizi uzayları,

$$e^{kl}_{mn} = \begin{cases} 1 \quad , & (k,l) = (m,n) \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan e^{kl} dizilerinin gerdiği Φ uzayını kapsarlar.

Tanım 4.1.6 $x = (x_{mn})$ çift dizi olmak üzere verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n, p, q > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $x = (x_{mn})$ dizisine *Pringsheim anlamında Cauchy dizisi* denir (Altay 2002).

Teorem 4.1.7 $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olsun. Bu dizinin $P-$yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bir $P-$Cauchy dizisi olmasıdır.

Örnek 4.1.8 $x = (x_{mn}) = \left(\frac{n}{m+n}\right)$ çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değildir. Gerçekten de, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için yeterince büyük m, n $(m = n) \in \mathbb{N}$ sayıları ele alındıında

$$|x_{mn} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$$

olacaktır. Fakat $n = 2m$ olacak şekilde yeterince büyük $m, n \in \mathbb{N}$ sayıları ele alındığında ise

$$|x_{mn} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$$

olur. O halde $x = (x_{mn})$ dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değildir.

Örnek 4.1.9 $x = (x_{mn}) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ çift dizisi tanımlansın. Bu dizi Pringsheim anlamında 0 noktasına yakınsar. Aynı zamanda her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} x_{mn} = \frac{1}{n}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_{mn} = \frac{1}{m}$ olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} x_{mn}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} x_{mn}\right) = 0$$

elde edilir. O halde, $x = (x_{mn})$ dizisi 0 noktasına regüler yakınsaktır. Böylece bu dizi sınırlı bir dizidir.

Regüler yakınsaklığın Pringsheim anlamında yakınsaklıktan farkı, bir çift dizinin yakınsaklığının dizisinin sınırlılığını gerektirmesidir.

Tanım 4.1.10 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X,\ f(n, m) = x_{nm}$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ k(n) = k_n \ \text{ ve } \ r : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ r(m) = r_m$$

artan fonksiyonlar(diziler) olmak üzere

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ h(n, m) = (k(n), r(m))$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} f \circ h \ &: \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &(n, m) \to f \circ h(n, m) = x_{k_n r_m} \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{nm}) çift dizisinin bir *alt dizisi* denir (Altay 2002).

Örnek 4.1.11 Her m, n için $y_{mn} = 1$ ve $z_{km} = -1$ dizilerinin her ikisi de $x_{mn} = (-1)^{m+n}$ çift dizisinin alt dizileridir.

Çift dizilerde de tek dizilere benzer olarak yakınsak bir dizinin alt dizisi de aynı sayıya yakınsaktır. Burada sözünü ettiğimiz yakınsaklık türü, Pringsheim anlamında yakınsaklıktır.

Teorem 4.1.12 $x = (x_{mn})$ çift dizisi l noktasına Pringsheim anlamında yakınsak olsun. O halde $x = (x_{mn})$ çift dizisinin herhangi bir alt dizisi de l noktasına yakınsaktır.

Tanım 4.1.13 $x = (x_{mn})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_k(x) = \sup_{m,n \geq k} x_{mn} \quad \text{ve} \quad \beta_{k(x)} = \inf_{m,n \geq k} x_{mn}$$

olsun. Bu durumda, en az bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$\alpha_k(x) < \infty \quad \text{ve} \quad \beta_{k(x)} > -\infty$$

ise $x = (x_{mn})$ çift dizisi Pringsheim anlamında bir üst ve alt limite sahiptir denir. Buna göre, bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin *Pringsheim alt limiti,*

i) Eğer her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\beta_{k(x)} = -\infty$ ise, $P - \liminf x = -\infty$,

ii) Eğer bazı $k \in \mathbb{N}$ için $\beta_{k(x)} > -\infty$ ise,

$$P - \liminf x = \lim_{k \to \infty} \big(\inf_{m,n \geq k} x_{mn} \big) = \sup_k \beta_{k(x)}$$

şeklindedir. *Pringsheim üst limiti* ise

i) Eğer her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(x) = +\infty$ ise, $P - \limsup x = +\infty$,

ii) Eğer bazı $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(x) < +\infty$ ise,

$$P - \limsup x = \lim_{k \to \infty} \big(\sup_{m,n \geq k} x_{mn} \big) = \inf_k \alpha_k(x)$$

şeklinde tanımlanır (Patterson 1999).

Bir örnekle herhangi bir çift dizinin alttan ve üstten sınırsız olmasına rağmen, Pringsheim alt ve üst limitlerinin var olabileceğini gösterelim.

Örnek 4.1.14 $x = (x_{mn})$ çift dizisi

$$x_{mn} := \begin{cases} m, & n = 1, \\ -n, & m = 1, \\ (-1)^m, & m = n > 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\sup x_{mn} = +\infty$ ve $\inf x_{mn} = -\infty$ olmasına rağmen $k \geq 2$ için $\alpha_k(x) = 1$ ve $\beta_{k(x)} = -1$ olduğundan

$$P - \liminf x = -1 \quad \text{ve} \quad P - \limsup x = 1$$

olur.

Teorem 4.1.15 $x = (x_{mn})$ ve $y = (y_{mn})$ reel değerli iki çift dizi olmak üzere, bu dizilerin $P - \liminf$ ve $P - \limsup$ değerleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekildedir (Patterson 1999).

1) $P - \liminf x \leq P - \limsup x$,

2) $P - \lim x = L \Leftrightarrow P - \liminf x = P - \limsup x = L$,

3) $P - \limsup(-x) = -(P - \liminf x)$,

4) $P - \limsup(x + y) \leq P - \limsup x + P - \limsup y$,

5) $P - \liminf(x + y) \geq P - \liminf(x) + P - \liminf(y)$,

6) Eğer z, x çift dizisinin bir alt dizisi ise

$$P - \liminf x \leq P - \liminf z \leq P - \limsup z \leq P - \limsup x$$

dir.

Tanım 4.1.16 $m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa s_{mn} dizisine *monoton artan*, $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa (s_{mn}) dizisine *monoton azalandır* denir.

Teorem 4.1.17 Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna, azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti infimumuna eşittir.

Teorem 4.1.18 $x = (x_{mn})$ reel sayılarda bir çift dizi olsun. Bu durumda

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \alpha$$

dır ancak ve ancak

i) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki, her $m, n \geq k$ için $x_{mn} > \alpha - \varepsilon$ dur.

ii) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $k \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq k$ olacak şekilde m, n sayıları vardır öyleki $x_{mn} < \alpha + \varepsilon$ dur.

İspat

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_k \big(\inf_{m,n\geq k} x_{mn} \big) = \alpha$$

olsun. Çift dizilerde supremum tanımından, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{m,n\geq k} x_{mn} > \alpha - \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ve her $m, n \geq k$ için $x_{mn} > \alpha - \varepsilon$ elde ederiz. Bu ifade (i) ifadesinin ispatını gösterir.

Şimdi ise (ii) ifadesini ispatlayalım. Farzedelim ki (ii) ifadesi gerçeklenmesin. O halde, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $m, n \geq k_0$ için $x_{mn} \geq \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece,

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_k \big(\inf_{m,n\geq k} x_{mn} \big) \geq \alpha + \varepsilon$$

olur. Bu ifade ise $\alpha \geq \alpha + \varepsilon$ olur. Fakat bu doğru değildir. Çelişki elde edilmiş olur.

Tersine (i) ve (ii) ifadeleri sağlansın. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $m, n \geq k_0$ için $x_{mn} > \alpha - \varepsilon$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ve

$$\inf_{m,n\geq k_0} x_{mn} \geq \alpha - \varepsilon$$

dır. Böylece,

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_k(\inf_{m,n\geq k} x_{mn}) \geq \alpha - \varepsilon$$

olur. (ii) ifadesinden ise her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $x_{mn} < \alpha+\varepsilon$ olacak şekilde m, n vardır. Bu durumda, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\inf_{m,n\geq k} x_{mn} < \alpha + \varepsilon$$

ve

$$\liminf_{m,n\to\infty} x_{mn} = \sup_k(\inf_{m,n\geq k} x_{mn}) \leq \alpha + \varepsilon$$

elde edilir. O halde $\liminf\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = \alpha$ dır.

lim sup için ifade, benzer şekilde aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.1.19 $x = (x_{mn})$ reel sayılarda bir çift dizi olsun. $\limsup\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = \beta$ dır. Ancak ve ancak

i) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $k \in \mathbb{N}$ vardır öyleki, $\forall m, n > k$ için, $x_{mn} < \beta + \varepsilon$ olur.

ii) Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $k \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq k$ olacak şekilde m, n sayıları vardır öyleki $x_{mn} > \beta - \varepsilon$ olur.

4.2 Çift Seriler

Bu kısımda çift seriler hakkında bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.2.1 $x = (x_{mn})$ çift dizisini alalım. Şimdi,

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad ; \quad (m,n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan bir (s_{mn}) dizisi düşünelim. Bu durumda, $\Big((x_{mn}),(s_{mn})\Big)$ ikilisine bir *çift seri* denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir (Altay 2002).

Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına υ-yakınsak, yani

$$\upsilon-\lim_{m,n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s$$

ise $\Big((x_{mn}),(s_{mn})\Big)$ serisi υ-yakınsaktır ve serinin υ-toplamı s sayısıdır. Yakınsak olmayan seriye *ıraksak seri* denir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{mn} = s$ şeklinde gösterilir.

Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}$$

ile gösterilir. υ-yakınsak çift seri oluşturan dizilerin uzayı $\mathcal{CS}_\upsilon$ ile gösterilmektedir. Buna göre,

$$\mathcal{CS}_\upsilon = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \upsilon-\sum_{m,n} x_{mn} = \upsilon-\lim_{i,j}\sum_{m=1}^{i}\sum_{n=1}^{j} x_{mn} \text{ mevcut} \right\}$$

şeklindedir. Burada υ- çift dizilerde herhangi bir yakınsaklığı göstermektedir.

$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{mn}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} x_{mn}$ serilerine sıralı seriler denir. Sıralı seriler, aynı toplama sahip olmak zorunda değildir. Gerçekten $x = (x_{mn})$ çift dizisi için

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n+1, n = 1,2,... \\ -1 & , \quad m = n-1, n = 1,2,... \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{mn} = -1$ fakat $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} x_{mn} = 1$' dir.

Tanım 4.2.2 Eğer $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{mn}|$ serisi yakınsak ise, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_{mn}$ kompleks terimli serisine *mutlak yakınsaktır* denir.

Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesi $\mathcal{L}_u$ ile gösterilir. Yani;

$$\mathcal{L}_u = \left\{ x \in \Omega : \|x\|_1 = \sum_{m,n} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.3 Mutlak yakınsak bir çift seri yakınsaktır (Iyer 1985).

Teorem 4.2.4 Pozitif reel terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır (Iyer 1985).

Teorem 4.2.5 Reel terimli (a_{mn}) ve (b_{mn}) şeklinde iki dizi düşünelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq a_{mn} \leq b_{mn}$ ve $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{mn}$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ serisi de yakınsaktır ve

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn} \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}$$

eşitsizliği geçerlidir (Iyer 1985).

Yakınsak bir çift indisli serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin;

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad m = 1 \\ -1 & , \quad m = 2 \\ 0 & , \quad m \geq 3 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\sum\limits_{m,n} x_{mn}$ serisi yakınsak fakat kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir.

4.3 Çift Dizilerde Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde daha önce tek dizilerde bahsettiğimiz yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarının çift dizilerdeki karşılığı tanıtılacak, ilgili teorem ve özelliklerden bahsedilecektir.

$K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. $K(m,n)$, $\{(j,k) : \ (j,k) \in K, \ j \leq m, \ k \leq n\}$ kümesinin eleman sayısını göstermek üzere çift dizilerde yoğunluk aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.3.1 $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere K kümesinin *alttan asimptotik yoğunluğu*

$$\underline{\delta_2}(K) = \liminf_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn}$$

olur.

$\left(\dfrac{K(m,n)}{mn}\right)$ dizisinin Pringsheim anlamında limiti varsa K kümesinin *çift doğal yoğunluğu*

$$d_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn}$$

dır.

Örnek 4.3.2 $\{(j^2,k^2) : j,k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$d_2(K) = \lim_{m,n} \frac{K(m,n)}{mn} \leq \lim_{m,n} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

olur.

Tanım 4.3.3 Reel bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$d_2(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise $x = (x_{mn})$ çift dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st_2 - \lim x_{mn} = L$ şeklinde gösterilir (Mursaleen and Edely 2003).

Teorem 4.3.4 $x = (x_{mn})$ çift reel sayı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $K = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ m,n = 1,2,3,...\}$, $d_2(K) = 1$ ve

$$\lim_{m,n \in K} x_{mn} = L$$

olacak şekilde $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesinin var olmasıdır (Mursaleen and Edely 2003).

Teorem 4.3.5 $st_2 - \lim x_{mn} = L_1, \quad st_2 - \lim y_{mn} = L_2$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $st_2 - \lim(x_{mn} + y_{mn}) = L_1 + L_2$ dir.

ii) $st_2 - \lim(cx_{mn}) = cL_1$ dir (Mursaleen and Edely 2003).

Tanım 4.3.6 $x = (x_{mn})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık ve her $m, p \geq N, \ n, q \geq M$ için,

$$d_2\big(\{(m,n) : m \leq j, \ n \leq k, \ |x_{mn} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon), \ M = M(\varepsilon)$ sayıları varsa $x = (x_{mn})$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir (Mursaleen and Edely 2003).

Teorem 4.3.7 $x = (x_{mn})$ reel değerli bir çift dizi olsun. $x = (x_{mn})$ çift dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{mn})$ çift dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır (Mursaleen and Edely 2003).

Teorem 4.3.8 Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) $x = (x_{mn})$ çift dizisi L noktasına istatistiksel yakınsaktır.

b) $x = (x_{mn})$ çift dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

c) $x = (x_{mn})$ çift dizisinin bir $y = (y_{m_j n_k})$ alt dizisi vardır öyleki $\lim y_{m_j n_k} = L$ dir (Mursaleen and Edely 2003).

Teorem 4.3.9 Bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$x_{mn} = u_{mn} + v_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, ... \tag{4.1}$$

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{mn} = L \tag{4.2}$$

ve

$$\lim_{j,k\to\infty} \frac{1}{jk}\big|\{m \leq j, \ n \leq k : \ v_{mn} \neq 0\}\big| = 0 \tag{4.3}$$

olacak şekilde (u_{mn}) ve (v_{mn}) dizilerinin var olmasıdır (Moricz 2003).

Tanım 4.3.10 Herhangi reel değerli bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi verildiğinde istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit;

$$G_x = \left\{C \in \mathbb{R} : d_2(\{(j,k) : x_{mn} > C\}) \neq 0\right\}$$

ve

$$F_x = \left\{D \in \mathbb{R} : d_2(\{(j,k) : x_{mn} < D\}) \neq 0\right\}$$

olmak üzere, $x = (x_{mn})$ reel değerli çift dizisinin istatistiksel üst limiti;

$$st_2 - \limsup x = \begin{cases} \sup G_x & , \quad G_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad G_x = \emptyset \end{cases}$$

ve benzer şekilde $x = (x_{mn})$ dizisinin istatistiksel alt limiti;

$$st_2 - \liminf x = \begin{cases} \inf F_x & , \quad F_x \neq \emptyset \\ \infty & , \quad F_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklindedir (Çakan ve Altay 2006).

Teorem 4.3.11

a) $st_2 - \limsup x = \beta \Leftrightarrow$ Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$d_2\big(\{(m,n) : x_{mn} > \beta - \varepsilon\}\big) \neq 0$$

ve

$$d_2\big(\{(m,n) : x_{mn} > \beta + \varepsilon\}\big) = 0$$

dır.

b) $st_2 - \liminf x = \alpha \Leftrightarrow$ Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$d_2\big(\{(m,n) : x_{mn} < \alpha + \varepsilon\}\big) \neq 0$$

ve

$$d_2\big(\{(m,n) : x_{mn} < \alpha - \varepsilon\}\big) = 0$$

dır (Çakan ve Altay 2006).

Teorem 4.3.12 $x = (x_{mn})$ herhangi reel değerli çift dizi olsun.

$$st_2 - \liminf x \leq st_2 - \limsup x$$

dir (Çakan ve Altay 2006).

Teorem 4.3.13 $x = (x_{mn})$ dizisi st_2- sınırlı bir çift dizi olmak üzere $x = (x_{mn})$ dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st_2 - \liminf x = st_2 - \limsup x$$

olmasıdır (Çakan ve Altay 2006).

5 ÇİFT DİZİLERDE İDEAL VE İDEAL YAKINSAKLIK

Bu kısımda bir önceki bölümde bahsettiğimiz çift dizilerin, ideal yakınsaklığı üzerinde duracağız. İlk kısımda bahsi geçen tek dizilerdeki bazı özellik ve kavramların çift dizilerdeki karşılıklarını inceleyeceğiz. Genel olarak metrik uzaylarda ve çift dizilerde çalışacağımız için, $\mathbb{N}$ üzerindeki $\mathcal{I}$ ideali ile karıştırılmaması için $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerindeki bir ideali $\mathcal{I}_2$ ile göstereceğiz.

Tanım 5.0.14 $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde nontrivial (aşikar olmayan) bir ideal olsun. Eğer her bir $i,j\in\mathbb{N}$ için, $\{i,j\}\in\mathcal{I}_2$ oluyorsa $\mathcal{I}_2$ idealine *uygun ideal*, her bir $i\in\mathbb{N}$ için

$$\{i\}\times\mathbb{N}\ ve\ \mathbb{N}\times\{i\}\in\mathcal{I}_2$$

oluyorsa $\mathcal{I}_2$ idealine *kuvvetli bir uygun idealdir* denir (Das *et al.* 2008).

Bu çalışmamızda $\mathcal{I}_2$ ideali deyince akla kuvvetli uygun ideal gelmelidir.

Kuvvetli uygun idealin aynı zamanda bir uygun ideal olduğu açıkca görülebilir. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde,

$$\mathcal{I}_2^0=\big\{A\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:(\exists m(A)\in\mathbb{N})\quad(i,j\geq m(A)\Rightarrow(i,j)\notin A)\big\}$$

idealini alalım. $\mathcal{I}_2^0$ bir kuvvetli uygun idealdir. Bir $\mathcal{I}_2$ idealinin kuvvetli uygun ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}_2^0\subset\mathcal{I}_2$ kapsamasının geçerli olmasıdır (Das *et al.* 2008).

Tanım 5.0.15 $\mathcal{I}_2\subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve (X,ρ) bir metrik uzay olmak üzere, X uzayında bir $x=(x_{mn})$ çift dizisini alalım. Her $\varepsilon>0$ için

$$A(\varepsilon)=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\rho(x_{mn},L)\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}_2$$

oluyorsa $x=(x_{mn})$ çift dizisi $L\in X$ noktasına $\mathcal{I}_2-$*yakınsaktır* denir ve

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty}x_{mn}=L$$

ile gösterilir (Dems 2004).

Uyarı 5.0.16 Eğer $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathcal{I}_2^0$ olarak alınırsa, $\mathcal{I}_2$ yakınsaklık Pringsheim anlamında adi yakınsaklık ile çakışır ve eğer, $\mathcal{I}_2$ ideali

$$\mathcal{I}_2^{d_2} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d_2(A) = 0\}$$

olarak alınırsa, $\mathcal{I}_2^{d_2}$ yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa dönüşür (Das *et al.* 2008).

Tanım 5.0.17 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve (X, ρ) bir metrik uzay olmak üzere, X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisini alalım. Eğer bir $M \in F(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2$) için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} x_{mn} = L$$

oluyorsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2^*$*−yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ ile gösterilir (Das *et al.* 2008).

Teorem 5.0.18 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal ve (X, ρ) metrik uzayındaki bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için, eğer $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ ise o zaman $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ dir (Das *et al.* 2008).

İspat $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olduğundan, $M \in F(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2$) şeklinde bir M kümesi vardır ve

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L \tag{5.1}$$

dir. $\varepsilon > 0$ olsun. (5.1) den her m, n; $(m, n) \in M$ için, $\rho(x_{mn}, L) < \varepsilon$ ve $m, n \geq k_0$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L) \geq \varepsilon\} \\ &\subset H \cup \Big(M \cap \big((\{1, 2, ..., (k_0 - 1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1, 2, ..., (k_0 - 1)\})\big)\Big). \end{aligned}$$

$H \cup \Big(M \cap \big((\{1, 2, ..., (k_0 - 1)\} \times N) \cup (N \times \{1, 2, ..., (k_0 - 1)\})\big)\Big) \in \mathcal{I}_2$ olduğundan $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}_2$ dir. O halde $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ dir.

Teorem 5.0.19 (X, ρ) bir metrik uzay olsun.

i) $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal olmak üzere, eğer X in herhangi bir yığılma noktası yoksa $\mathcal{I}_2$ ve $\mathcal{I}_2^*-$ yakınsaklık birbiriyle çakışır.

ii) $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal ve $y = (y_{mn})$ bir çift dizi olmak üzere, eğer X in L şeklinde bir yığılma noktasına sahipse $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$ dir, fakat $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$ mevcut değildir (Das *et al.* 2008).

İspat i) $L \in X$ ve $\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn} = L$ olsun. O halde Teorem 5.0.18 gereği $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = L$ olduğunu göstermek yeterlidir. X bir yığılma noktasına sahip olmadığından,

$$B(L, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, L) < \varepsilon\} = \{L\}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır.
$\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn} = L$ olduğundan $\{(m, n) : \rho(x_{mn}, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$ dır. Bu durum ise,

$$\{(m, n) : \rho(x_{mn}, L) < \varepsilon\} = \{(m, n) : x_{mn} = L\} \in F(\mathcal{I}_2)$$

olduğunu gösterir. O halde $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = L$ dir.

ii) L, X in bir yığılma noktası olduğundan, tüm noktaları L den farklı olan ve L ye yakınsayan bir (z_j) dizisi mevcuttur öyleki $\{\rho(z_j, L)\}$ dizisi azalarak sıfıra yakınsar. $\{E_j\}$ sonsuz doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ de bir ayrışım olsun ve $\triangle_j = \{(m, n) : \min\{m, n\} \in E_j\}$ alalım. $\{\triangle_j\}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir ayrışım olur ve $\mathcal{I}_2 = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : A,\ \Delta_j$ nin sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır$\}$ bir kuvvetli uygun ideal olur.

$x_{mn} = z_j$ olması için gerek ve yeter şart, $(m, n) \in \triangle_j$ olmasıdır. $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n = \rho(z_n, L)$ olsun. $\eta > 0$ verilsin. $\varepsilon_\gamma < \eta$ olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{N}$ seçelim. O zaman

$$A(\eta) = \{(m, n) : \rho(x_{mn}, L) \geq \eta\} \subset \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup ... \cup \triangle_\gamma$$

olur. Bundan dolayı $A(\eta) \in \mathcal{I}_2$ ve $\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn} = L$ dir.

Şimdi $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = L$ olduğunu varsayalım. $M = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus H$ olacak şekilde $H \in \mathcal{I}_2$ vardır ve

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} x_{mn} = L$$

dir. $\mathcal{I}_2$ idealinin tanımından $H \subset \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup ... \cup \triangle_l$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ vardır ve diğer taraftan $\triangle_{l+1} \subset \mathbb{N} \setminus H = M$ dir. $\triangle_{l+1}$ in yapısından dolayı, herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{mn}, \xi) = \varepsilon_{l+1} > 0$ sağlacak şekilde sonsuz sayıda $(m,n) \in M$ ve $m,n \geq n_0$ olan (m,n) vardır. Bu ise

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} x_{mn} = L$$

olması ile çelişmektedir. $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = \rho$ ve $\rho \neq L$ için $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = \rho$ olur ki bu da çelişkidir.

Teorem 5.0.20 (X,ρ) bir metrik uzay ve $x = (x_{mn})$, X de bir çift dizi olmak üzere,

a) $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal olsun.
Eğer, $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ ise, $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$,

b) $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer,

(i) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$, $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = K$ ise,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty}(x_{mn} + y_{mn}) = (L+K),$$

(ii) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$, $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = K$ ise,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty}(x_{mn} . y_{mn}) = (L.K)$$

dır (Das *et al.* 2008).

Tanım 5.0.21 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}_2$ idealine ait her sayılabilir ve karşılıklı ayrık her $\{A_1, A_2, A_3, ...\}$ ailesi için,

$$A_n \triangle B_n \in \mathcal{I}_2^0 \;\; (n \in \mathbb{N})$$

(yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \triangle B_n$ kümesi, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır) ve

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}_2$$

şartlarını sağlayan sayılabilir $\{B_1, B_2, B_3, ...\}$ ailesi varsa, $\mathcal{I}_2$ ideali $(AP2)$ *şartını* sağlar denir (Das *et al.* 2008).

Eğer, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ $(AP2)$ şartını sağlıyorsa X deki herhangi bir $\{x_{mn}\}$ çift dizisi için $\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn} = \xi$ ise o zaman $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = \xi$ dir (Teorem 5.0.22 de görülebilir). Ancak bu durum tek diziler için farklıdır. Tek dizilerde $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*-$yakınsaklığın birbirine eşit olması için dizinin (AP) şartını sağlaması gerekmez. Örneğin Pringsheim anlamında yakınsaklığı sağlayan $\mathcal{I}_0$ idealini düşünelim. Burada açıkca görülür ki, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*-$yakınsaklık eşdeğerdir. Fakat burada $B_i = \{i\} \times \mathbb{N}$ cümlelerinin, $\mathcal{I}_0$ a ait olduğuna ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in birer ayrışımları olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den herbir B_i (veya bazı B_i lerin) yalnızca sonlu elemanlarını çıkarırsak sonuç kümesi $\mathcal{I}_0$ a ait olmaz. Bu da $\mathcal{I}_0$ idealinin (AP) özelliğini sağlamadığını gösterir.

Teorem 5.0.22 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir uygun ideal, (X, ρ) bir metrik uzay ve $x = (x_{mn})$, X in bir çift dizisi olsun. Eğer, bu $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) özelliğini sağlıyorsa

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L \text{ ise } \mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

önermesi geçerlidir (Das *et al.* 2008).

İspat $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) özelliğine sahip ve $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

dir.

$$A_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L) \geq 1\} \;\text{ ve } k \geq 2 \text{ için}$$

$$A_k = \left\{ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{k} \leq \rho(x_{mn}, L) < \frac{1}{k-1} \right\}$$

alalım. Açıkça görülür ki her bir $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in \mathcal{I}_2$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ dir. (AP2) özelliği gereği, her j için $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde, satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanan $A_j \triangle B_j$ ve $\{B_j\}$ dizisi vardır ve

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}_2$$

dir. Şimdi, $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus B$ için

$$\lim_{\substack{m,n \to \infty \\ (m,n) \in M}} x_{mn} = L$$

olduğunu ispatlayalım. $\eta > 0$ verilsin. $\frac{1}{k} < \eta$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ seçelim. O zaman

$$\{(m,n) : \rho(x_{mn}, L) \geq \eta\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

olur. $A_j \triangle B_j$, $j = 1, 2, ..., k$ satır ve sütünların sonlu bir bileşimi tarafından kapsandığından,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j \right) \cap \left\{ (m,n) : m \geq n_0 \wedge n \geq n_0 \right\}$$
$$= \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \right) \cap \left\{ (m,n) : m \geq n_0 \wedge n \geq n_0 \right\}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $m, n \geq n_0$ ve $(m,n) \notin B$ ise $(m,n) \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k} B_j$ dir. Dolayısıyla $(m,n) \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j$ olur. Bu ise $\rho(x_{mn}, L) \geq \frac{1}{k} < \eta$ anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.0.23 (X, ρ) en az bir yığılma noktasına sahip ve $x = (x_{mn})$, X in elemanlarından oluşan keyfi bir çift dizi olmak üzere, her bir $\xi \in X$ için, $\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn} = \xi$ iken $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = \xi$ ise, $\mathcal{I}_2$ ideali $(AP2)$ özelliğine sahiptir (Das *et al.* 2008).

İspat $\xi \in X$, X in bir yığılma noktası olsun. Bu durumda her bir k için $z_k \neq \xi$ olacak şekilde X in farklı elemanlarından oluşan bir $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır ve

$\xi = \lim_{k\to\infty} z_k$ ve $\{\rho(z_k,\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi azalarak sıfıra yakınsar. $k \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_k = \rho(z_k,\xi)$ alalım. $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{I}_2$ nın boştan farklı kümelerinin ayrık bir ailesi olsun. $x_{mn} = z_j$ $\big((m,n) \in A_j\big)$ ve $x_{mn} = \xi \quad \big((m,n) \notin A_j\big)$ (her bir j için) şeklinde bir $x = (x_{mn})$ dizisi tanımlayalım.

$\eta > 0$ olsun. $\varepsilon_k < \eta$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. O halde

$$A(\eta) = \{(m,n) : \rho(x_{mn},\xi) \geq \eta\} \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$$

olur. Bundan dolayı $A(\eta) \in \mathcal{I}_2$ dir ve bu yüzden $\mathcal{I}_2 - \lim x_{mn} = \xi$ dir. Varsayımımızdan dolayı $\mathcal{I}_2^* - \lim x_{mn} = \xi$ dir. O halde $M = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus B \in F(\mathcal{I}_2)$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{I}_2$ cümlesi vardır ve

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \xi \tag{5.2}$$

dir.

$j \in \mathbb{N}$ için $B_j = A_j \cap B$ alalım. O zaman her bir $j \in \mathbb{N}$ için $B_j \in \mathcal{I}_2$ olur. Diğer taraftan $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset B$ dır. Bu durumda $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}_2$ olur. Eğer $A_j \cap B$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ in satır ve sütunlarının sonlu bir birleşimi tarafından içerilmiyorsa, M, $m_k, n_k \to \infty$ iken $\{(m_k,n_k)\}$ elamanlarının bir sonlu dizisini içermelidir ve her $k \in \mathbb{N}$ için $x_{m_k n_k} = z_j \neq \xi$ olur bu ise (5.2) ile çelişkidir. Bundan dolayı $A_j \cap B$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ in satır ve sütunlarının sınırlı bir birleşimi tarafından içerilmelidir. Bu yüzden de $A_j \vartriangle B_j = A_j \setminus B_j = A_j \setminus B = A_j \cap M$ nin de sonlu satır ve sütunlar tarafından içerilmesi gerekir. Bu şartların sağlanması demek, $\mathcal{I}_2$ nin $(AP2)$ özelliğine sahip olması demektir.

Akla gelen bir diğer soru da (AP) ile $(AP2)$ arasındaki ilişkinin ne olduğudur. Açıkca görülmektedir ki, (AP) özelliğini sağlayan bir ideal $(AP2)$ özelliğini de sağlar. Fakat karşıtının doğru olmadığını $\mathcal{I}_0$ idealinde gördük. $\mathcal{I}_0$ ideali (AP) özelliğini sağlamıyorken $(AP2)$ özelliğini sağlar. Bundan dolayı çift dizilerde (AP) özelliğinin aslında $(AP2)$ den daha kuvvetli olduğu düşünülebilir. Diğer bir önemli ideal olan $\mathcal{I}_2^{d_2} = \{K \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} : d_2(K) = 0\}$ idealinin de $(AP2)$ özelliğini sağlaması fakat (AP) özelliğini sağlamaması bu duruma başka bir örnektir.

Teorem 5.0.24 Çift dizilerde $\mathcal{I}_2^{d_2}-$yakınsaklık, $\mathcal{I}_2^{*d_2}-$yakınsaklığı kapsar (Das *et al.* 2008).

İspat $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ ye $\mathcal{I}_2^{d_2}$ yakınsasın.

$$A_1 = \{(m,n) : |x_{mn} - \xi|\} \geq 1$$

ve

$$A_k = \{(m,n) : \frac{1}{k} \leq |x_{mn} - \xi| < \frac{1}{k-1}\}$$

olsun. Varsayımdan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $d_2(A_k) = 0$ olur. Ayrıca $p \in \mathbb{N}$ için $d_2(\bigcup_{k=1}^{p} A_k) = 0$ olduğu gözlenebilir. $p \in \mathbb{N}$, $n \geq T_p$ ve $m \geq T_p$ için,

$$\frac{1}{m.n}\Big|\{(j,k) : j \leq m \wedge k \leq n \wedge (j,k) \in \bigcup_{i=1}^{p} A_i\}\Big| < \frac{1}{p}$$

olacak şekilde bir T_p doğal sayısı alalım. Açıkca söyleyebiliriz ki $\{T_p\}$ dizisi artandır. $p \in \mathbb{N}$ için $C_p = \big\{(j,k) : T_p \leq \min\{j,k\} < T_{p+1}\big\}$, $D_p = C_p \cap \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ ve $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_p$ olsun. $d_2(D) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $\frac{1}{p} < \eta$ olacak şekilde, $\eta > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ varsa, o halde $(m,n) \in C_p$ için,

$$\big(\{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}\big) \cap D \subset \big(\{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}\big) \cap \bigcup_{i=1}^{p} A_i$$

mevcuttur. Bundan dolayı,

$$\frac{1}{m.n}\Big|\{(j,k) : j \leq m \wedge k \leq n \wedge (j,k) \in D\}\Big| < \frac{1}{p}$$

olan n ve m ler için, $d_2(D) = 0$ dır.

Aynı zamanda, $n \geq T_p$, $m \geq T_p$, $(m,n) \notin D$ için $|x_{mn} - \xi| < \frac{1}{p}$ dir. Dolayısıyla $x = (x_{mn})$, ξ ye $\mathcal{I}_2^{*d_2}-$yakınsaktır. Bundan dolayı $\mathcal{I}_2^{d_2}$, $(AP2)$ özelliğine sahiptir.

Şimdi, $\mathcal{I}_2^{d_2}$ nin (AP) özelliğini sağlamadığını gösterelim,

Öncelikle $\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p = \mathbb{N}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ in alt kümelerinden, sıfır yoğunluklu, $\{E_p\}$ dizisini alalım. $p \in \mathbb{N}$ için $A_p = E_p \times \mathbb{N}$ alalım. $d_2(A_p) = 0$ olduğu kolayca görülür. $\{B_p\}$, $card(A_p \vartriangle B_p) < \aleph_0$ olacak şekilde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in alt kümelerinden oluşan keyfi bir dizi olsun. O halde, $B_p \supset A_p \setminus F_p$ olacak şekilde sınırlı cümlelerin bir $\{F_p\}$ dizisi vardır. Şimdi, $d_2(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p) \neq 0$ $\Big($Aslında $\overline{d_2}\big(\bigcup_{p=1}^{\infty}(A_p \setminus F_p)\big) = \overline{d_2}\big(\bigcup_{p=1}^{\infty}(B_p)\big) = 1\Big)$ olduğunu göstermeliyiz. Keyfi bir m doğal sayısı alalım. Şimdi, her bir $\eta > 0$ için $n \geq m$ ve

$$\frac{1}{m.n}\Big|\{(j,k) : j \leq m \wedge k \leq n \wedge (j,k) \in \bigcup_{p=1}^{\infty}(A_p \setminus F_p)\}\Big| > 1 - \eta$$

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için önce, $(\bigcup_{p=1}^{\infty} E_i = \mathbb{N})$ $\bigcup_{i=1}^{p_0} E_i \supset \{1, 2, ..., m\}$ olduğundan olacak şekilde $p_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda, $\bigcup_{i=1}^{p_0} \supset \{1, 2, ..., m\} \times \mathbb{N}$ olur. Bundan dolayı,

$$\bigcup_{i=1}^{p_0}(A_i \setminus F_i) \supset \big(\{1, 2, ..., m\} \times \mathbb{N}\big) \setminus F$$

(F sonlu bir küme) dir. O halde her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\big(\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}\big) \;\cap\; & \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus F_i) \\ & \supset \big(\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}\big) \cap \bigcup_{i=1}^{p_0}(A_i \setminus F_i) \\ & \supset \big(\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}\big) \setminus F\end{aligned}$$

dir (F, n ye bağlı değil).

Yeterince büyük $n \in N$ için $(n \geq m)$,

$$\frac{1}{m.n}\Big|\big(\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}\big) \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus F_i)\Big| > 1 - \eta$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu ise, $\overline{d_2}(\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p) = 1$ dolayısıyla $\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p \notin \mathcal{I}_2^{d_2}$ anlamına gelir. Bu da $\mathcal{I}_2^{d_2}$ nin (AP) özelliğini sağlamadığını gösterir.

Tanım 5.0.25 $x = (x_{mn})$ reel veya kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere, $\{(m, n) : |x_{mn}| > M\} \in \mathcal{I}_2$ olacak şekilde bir reel $M > 0$ sayısı varsa, $x = (x_{mn})$ dizisi $\mathcal{I}_2-$*sınırlıdır* denir (Das and Malik 2008).

$\mathcal{I}_2-$yakınsak olan bir çift dizinin sınırlı olmak zorunda olmadığını örneklendirirsek; $\mathcal{I}_2$ idealini $\mathcal{I}_2^0$ ideali olarak alalım. $x = (x_{mn})$ çift dizisini

$$x_{mn} = \begin{cases} m & , \quad n = 1 \\ 1 & , \quad n \neq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak, $x = (x_{mn})$ dizisinin sınırsız, fakat $\mathcal{I}_2^0 - \lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty} x_{mn} = 1$ olduğu görülür.

Tanım 5.0.26 $x = (x_{mn})$ bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn} - x_{st}| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon)$, $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $x = (x_{mn})$ dizisine $\mathcal{I}_2-$*Cauchy dizisi* denir (Triphaty and Triphaty 2005).

Tanım 5.0.27 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ birer gerçek ideal olsun. Bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi, eğer l noktasına $\mathcal{I}_2-$yakınsak ve her $\varepsilon > 0$ için

i) Herbir $n \in \mathbb{N}$ ve bazı $L_n \in \mathbb{C}$ için $\{m \in \mathbb{N} : |x_{mn} - L_n| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ ve

ii) Herbir $m \in \mathbb{N}$ ve bazı $K_m \in \mathbb{C}$ için $\{n \in \mathbb{N} : |x_{mn} - K_m| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$

ise $x = (x_{mn})$ dizisi *regüler ideal yakınsaktır* denir ve $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I}) - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$ ile gösterilir (Triphaty and Triphaty 2005).

Tanım 5.0.28 (X, ρ) bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvveetli uygun ideal ve $x = (x_{mn})$, X uzayında bir çift dizi olsun.
$\beta \in X$ olmak üzere bir $M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $M \notin \mathcal{I}_2$ için

$$P - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \beta \quad \big((m,n) \in M\big)$$

oluyorsa, β noktasına $x = (x_{mn})$ dizisinin bir $\mathcal{I}_2-$*limit noktasıdır* denir (Das and Malik 2008).

Bir $x = (x_{mn})$ dizisinin tüm Pringsheim limit noktaları kümesi ve $\mathcal{I}_2$ limit noktaları kümesi sırasıyla L_x^2 ve $\mathcal{I}_2(\Lambda_x)$ ile gösterilir. Şimdi L_x^2 ve $\mathcal{I}_2(\Lambda_x)$ kavramlarının birbirlerinden son derece farklı olduklarını aşağıda bir örnekle açıklayalım.

Örnek 5.0.29 $\mathcal{I}_2^{d_2} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ d_2(A) = 0\}$ olsun. $x = (x_{mn})$ dizisini

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{m=n} \\ n & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Burada $L_x^2 = \{1\}$ olduğu ancak $\mathcal{I}_2-$limit noktasının olmadığı görülür. Yani $\mathcal{I}_2(\Lambda_x) = \infty$ dur.

Tanım 5.0.30 (X, ρ) bir metrik uzay ve $x = (x_{mn})$, X uzayında bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{(m, n); \rho(x_{mn}, \alpha) < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

oluyorsa $\alpha \in X$ elemanına $x = (x_{mn})$ dizisinin $\mathcal{I}_2-$*yığılma noktası* denir.

Bir $x = (x_{mn})$ dizisinin tüm $\mathcal{I}_2-$yığılma noktaları kümesi $\mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ ile gösterilir. Şimdi $\mathcal{I}_2(\Lambda_x)$ ile $\mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Teorem 5.0.31 $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olsun. (X, d) uzayındaki herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için $\mathcal{I}_2(\Lambda_x) \subset \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ kapsaması geçerlidir.

İspat $\alpha \in \mathcal{I}_2(\Lambda_x)$ olsun. Bu durumda

$$P - \lim_{j_m, j_n} x_{j_m j_n} = \alpha \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $M = \{(j_m, j_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; j, k \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}_2$ kümesi vardır. $\varepsilon > 0$ olsun. (5.3) den $j_m \geq n_0$, $j_n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ve $d(x_{j_m j_n}, \alpha) < \varepsilon$ dur. O halde

$$\{(m, n) : d(x_{mn}, \alpha) < \varepsilon\} \supset M \setminus \{(j_m, j_n), j_m \leq (n_0 - 1) \text{ veya } j_n \leq (n_0 - 1)\}$$

dır. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$\{(m, n) : d(x_{mn}, \alpha) < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

olur. Bu ise $\alpha \in \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ anlamına gelir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.0.32 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal olsun. Bu durumda,

i) (X,d) deki herbir $x=(x_{mn})$ çift dizisi için, $\mathcal{I}_2(\Gamma_x)$, X de kapalıdır.

ii) (X,d) ayrılabilir bir metrik uzay olmak üzere, $A_k \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ve $A_k \notin \mathcal{I}_2$; $k \in N$ olacak şekilde (A_k) de α diye ayrışabilen bir dizi bulunabilir. Her bir kapalı $P \subset X$ kümesi için $P = \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ olacak şekilde $x=(x_{mn})$ çift dizisi mevcuttur.

5.1 $\mathcal{I}_2-$Alt ve Üst Limit

Tek dizilerde $\mathcal{I}-$limit supremum ve infimum kavramlarının tanım ve bir takım özelliklerini önceki bölümde vermiştik. Bu kısımda tek dizilerdeki bu kavramların çift dizilerdeki karşılıklarından söz edeceğiz.

Tanım 5.1.1 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal olsun. Reel değerli $x = (x_{mn})$ dizisi için,

$$B_x = \{b \in \mathbb{R}; \{(m,n); x_{mn} > b\} \notin \mathcal{I}_2\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \mathbb{R}; \{(m,n); x_{mn} < a\} \notin \mathcal{I}_2\}$$

olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_2-$limit supremum ve $\mathcal{I}_2-$limit infumum aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{I}_2 - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x & , \quad B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad B_x = \emptyset \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x = \begin{cases} \sup A_x & , \quad A_x \neq \emptyset \\ \infty & , \quad A_x = \emptyset \end{cases}$$

Eğer $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2^0$ alınırsa, $\mathcal{I}_2-$limit supremum ve $\mathcal{I}_2-$limit infimum, $P-$limit supremum ve $P-$limit infimum Patterson (1999) ile çakışır.

Teorem 5.1.2 $\beta = \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} \Leftrightarrow \varepsilon > 0$ için,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

dir (Gürdal ve Şahiner 2008).

İspat Öncelikle gerekliliği gösterelim;

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\beta + \varepsilon > \beta$ olduğundan, $(\beta + \varepsilon) \notin \{t : M_t \notin \mathcal{I}_2\}$ ve $\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} > \beta + \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$ dir. Benzer şekilde, $\beta - \varepsilon < \beta$ olduğundan, $\beta - \varepsilon < t' < \beta$ ve $t' \in \{t : M_t \notin \mathcal{I}_2\}$ olacak şekilde bir t' vardır. Bundan dolayı

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} > t^{'}\} \notin \mathcal{I}_2$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} > \beta - \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

dir. Şimdi yeterliliği ispatlayalım;

$\varepsilon > 0$ ve $(\beta+\varepsilon) \notin \{t : M_t \notin \mathcal{I}_2\}$ ve $\mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} \leq \beta + \varepsilon$ dır. Diğer yandan $\mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} \geq \beta - \varepsilon$ olduğunu biliyoruz. Bu da demektir ki $\mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} = \beta$ dır. Gösterilmek istenilen gösterilmiştir.

Teorem 5.1.3 $\alpha = \mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn} \Leftrightarrow \varepsilon > 0$ için,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} < \alpha + \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} < \alpha - \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

dir (Gürdal ve Şahiner 2008).

Teorem 5.1.4 Reel değerli her $x = (x_{mn})$ dizisi için

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn} \leq \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn}$$

eşitsizliği geçerlidir (Gürdal ve Şahiner 2008).

İspat Herhangi reel değerli bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için üç olası durum söz konusudur.

1) $\mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} = +\infty$. Bu durumda

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn} \leq \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn}$$

olduğu açıktır.

2) $\mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} = -\infty$. Bu durumda,

$$t \in R \Rightarrow M_t \in \mathcal{I}_2 \;\text{ ve }\; t \in R \Rightarrow M^t \notin \mathcal{I}_2$$

dir. Böylece,

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn} = \inf\{t : M^t \notin \mathcal{I}_2\} = \inf R = -\infty$$

ve

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn} \leq \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn}$$

olur.

3) $-\infty < \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} < +\infty$. Bu durumda ise,

$$\beta = \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn}$$

olacak şekilde bir $\beta \in R$ vardır. Herhangi bir $t \in R$ için,

$$\beta < t \Rightarrow M_t \in \mathcal{I}_2 \text{ ve } M^t \notin \mathcal{I}_2$$

dir. Bu ise

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn} = \inf\{t : M^t \notin \mathcal{I}_2\} \leq \beta$$

anlamına gelir.

Teorem 5.1.5 Reel değerli her $x = (x_{mn})$ dizisi için,

$$P - \liminf x \leq \mathcal{I}_2 - \liminf x$$

eşitsizliği geçerlidir (Das and Malik 2008).

İspat Eğer $P - \liminf x = -\infty$ ise $P - \liminf x \leq \mathcal{I}_2 - \liminf x$ olduğu açıktır. Şimdi $P - \liminf x = \alpha > -\infty$ olsun. O zaman, $\alpha_k = \inf\{x_{mn}; n \geq k\}$ olmak üzere $\alpha = \sup_k \alpha_k$ dir. Bundan dolayı,

$$\{(m,n); x_{mn} < \alpha_k\} \subset \{(m,n), m \leq (k-1) \quad \text{ya da} \quad n \leq (k-1)\}$$

dir. $\mathcal{I}_2$, kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$\{(m,n), m \leq (k-1) \quad \text{ya da} \quad n \leq (k-1)\} \in \mathcal{I}_2$$

dir. Bu yüzden $\{(m,n); x_{mn} < \alpha_k\} \in \mathcal{I}_2$ dir.

Şimdi $A_x = \{\alpha \in \mathbb{R}; \{(m,n); x_{mn} < \alpha\} \notin \mathcal{I}_2\}$ olmak üzere $\beta = \mathcal{I} - \liminf x = \inf A_x$ alalım. $\beta < \alpha_k$ iken $\beta \leq \alpha' < \alpha_k$ olacak şekilde bir $\alpha' \in A_x$ bulunabilir. Ancak,

$$\{(m,n); x_{mn} < \alpha'\} \subset \{(m,n); x_{mn} < \alpha_k\} \in \mathcal{I}_2$$

dir. Bu durumda $\alpha^{'} \notin A_x$ olur ki bu da çelişkidir. Tüm k lar için $\beta \geq \alpha_k$ dir. O halde,

$$\alpha \leq \beta, \quad \text{yani} \quad P - \liminf x \leq \mathcal{I}_2 - \liminf x$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathcal{I}_2 - \limsup x \leq P - \limsup x$$

olduğu gösterilebilir. Bu iki sonucu ve Teorem 5.1.4 ü kullanarak istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 5.1.6 Reel değerli $x = (x_{mn})$ çift dizisinin Pringsheim anlamında $\mathcal{I}_2-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart,

$$\mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} = \mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn}$$

olmasıdır (Gürdal ve Şahiner 2008).

İspat Gerekliliği ispatlayalım; $L = \mathcal{I}_2 - \lim x_{mn}$ olsun. O halde,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{mn} > L + \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{mn} < L - \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

dir. Herhangi bir $t \geq L + \varepsilon$ ve $t^{'} < L - \varepsilon$ için, M_t ve $M^{t^{'}}$ cümleleri $\mathcal{I}_2$ ye aittir. Bu durumda

$$\sup\{t : M_t \notin \mathcal{I}_2\} \leq L + \varepsilon \quad \text{ve} \quad \inf\{t^{'} : M^{t^{'}} \notin \mathcal{I}_2\} \geq L - \varepsilon$$

sonuçlarını çıkarabiliriz. O halde $L = \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} = \mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn}$ olur.

Yeterliliği ispatlayalım; $\varepsilon > 0$ ve $L = \mathcal{I}_2 - \limsup x_{mn} = \mathcal{I}_2 - \liminf x_{mn}$ olsun.

$$\begin{aligned}\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\} \quad \subseteq \quad & \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{mn} > L + \varepsilon\} \\ & \cup \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{mn} < L - \varepsilon\}\end{aligned}$$

olduğundan $L = \mathcal{I}_2 - \lim x_{mn}$ sonucuna varırız.

Şimdi bir sonraki teoremin ispatında bize yardımcı olacak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 5.1.7 Bir reel veya kompleks terimli $x = (x_{mn})$ dizisi alalım ve her reel $G > 0$ olsun.

$$\{(m,n); x_{mn} \leq G\} \in \mathcal{I}_2$$

veya

$$\{(m,n); x_{mn} \geq -G\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğunda $x = (x_{mn})$ dizisi ∞ (*veya* $-\infty$) a $\mathcal{I}_2-$*yakınsaktır* denir (Das and Malik 2008).

Teorem 5.1.8 Eğer $\mathcal{I}_2 - \limsup x = p$ ise o zaman $x = (x_{mn})$ nın p ye $\mathcal{I}_2-$yakınsak olan bir alt dizisi vardır (Das and Malik 2008).

İspat $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal ve $\emptyset \in \mathcal{I}_2$ olduğundan, m, n; $\mathbb{N}$ nin sınırsız alt kümelerinde değiştiğinde $x = (x_{mn})$ sabit olmayan çift dizisini (x_{mn}) ler birbirinden farklı olacak şekilde seçecegiz,
p nin üç olasılığı vardır;

i) $p = -\infty$

ii) $p = \infty$

iii) $-\infty < p < \infty$

Şimdi bu olası durumları inceleyelim;

i) $p = -\infty$ olduğunda $B_x = \emptyset$ olur. O halde herhangi bir $M > 0$ için, $\{(m,n); x_{mn} \geq -M\} \in \mathcal{I}_2$ olur. Bu da gösterir ki $\mathcal{I}_2 - \lim x = -\infty$ olur.

ii) $p = \infty$ olduğunda $B_x = \mathbb{R}$ olur. Bundan dolayı herhangi bir $b \in \mathbb{R}$ için,

$$\{(m,n); x_{mn} > b\} \notin \mathcal{I}_2$$

olur. $x_{k_1 j_1}$, $x = (x_{mn})$ nın keyfi bir elemanı ve

$$A_{k_1 j_1} = \{(m,n) : x_{mn} > x_{k_1 j_1} + 1\}$$

olsun. O zaman $A_{k_1j_1} \notin \mathcal{I}_2$ olur. Bu yüzden $A_{k_1j_1} \neq \emptyset$ dir ve $k_2 > k_1,\ \ j_2 > j_1$ olacak şekilde bir $(k_2, j_2) \in A_{k_1j_1}$ vardır. Aksi halde,

$$A_{k_1j_1} \subset \{(m,n) :\ m \leq k_1 \text{ veya } n \leq j_1\} \in \mathcal{I}_2$$

olur ki bu da çelişkidir.

Bu şekilde işlemler yapılarak, tüm $n > 1$ için $x_{k_nj_n} > x_{k_{n-1}j_{n-1}} + 1$ eşitsizliğini sağlayan $x' = (x_{k_nj_n})$ alt dizisi elde edilebilir. O zaman, $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan herhangi bir $L > 0$ için,

$$\{(k_n, j_n) : x_{k_nj_n} \leq L\} \in \mathcal{I}_2$$

olur. Bundan dolayı, $\mathcal{I}_2 - \lim x' = \infty$ dur.

iii) $-\infty < p < \infty$ olduğunda Teorem 5.1.2 ve Teorem 5.1.3 den $\{(m,n) : x_{mn} > p - 1\} \notin \mathcal{I}_2$ olduğunu söyleyebiliriz. O halde

$$\{(m,n) : x_{mn} > p - 1\} \neq \emptyset$$

dir. Şimdi,

$$x_{k_1j_1} \leq p + \frac{1}{2} \text{ için } \{(m,n) : x_{mn} > p - 1\}$$

en az bir (k_1, j_1) elamanı vardır. Aksi halde

$$\{(m,n) : x_{mn} > p - 1\} \subset \{(m,n) :> p + \frac{1}{2}\} \in \mathcal{I}_2$$

olur ki bu da bir çelişkidir. Bundan dolayı,

$$p - 1 < x_{k_1j_1} \leq p + \frac{1}{2} < p + 1$$

dir. Şimdi $k_2 > k_1,\ j_2 > j_1$ ve $p - \frac{1}{2} < x_{k_2j_2} < p + \frac{1}{2}$ şartlarını sağlayacak şekilde $x = (x_{mn})$ den bir $x_{k_2j_2}$ elemanı seçelim. Bu durumda $x_{mn} > p - \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayacak $m > k_1,\ n > j_1$ olacak şekilde en az bir (m,n) bulabiliriz. Aksi halde,

$$\left\{(m,n) : x_{mn} > p - \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{m \leq k_1 \text{ veya } n \leq j_1\right\} \in \mathcal{I}_2$$

olur ki bu da Teorem 5.1.2 ve Teorem 5.1.3 e göre çelişkidir. O halde,

$$A'_{k_1j_1} = \left\{(m,n) : \; m > k_1, \quad n > j_1 \text{ ve } x_{mn} > p - \frac{1}{2}\right\} \neq \emptyset$$

dir. Şu halde iddia ediyoruz ki, $x_{mn} < p + \dfrac{1}{2}$ olacak şekilde en az bir $(m,n) \in A'_{k_1j_1}$ vardır. Aksi halde,

$$A'_{k_1j_1} \subset \left\{(m,n) : x_{mn} \geq p + \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{(m,n) : x_{mn} \geq p + \frac{1}{4}\right\}$$

dir. Teorem 5.1.2 ve Teorem 5.1.3 den

$$\left\{(m,n) : x_{mn} \geq p + \frac{1}{4}\right\} \in \mathcal{I}_2$$

dir. O halde $A'_{k_1j_1} \in \mathcal{I}_2$ dir. Tekrar görüyoruz ki,

$$\left\{(m,n) : x_{mn} > p - \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{m \leq k_1 \text{ veya } n \leq j_1\right\} \cup A'_{k_1j_1}$$

olur ve $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan, sağ tarafları birleştirdiğimizde $\left\{(m,n) : x_{mn} > p - \dfrac{1}{2}\right\} \in \mathcal{I}_2$ elde ederiz ki bu da Teorem 5.1.2 ve Teorem 5.1.3 e göre çelişkidir. O halde iddiamızı göstermiş olduk. Şimdi $m = k_2$ ve $n = j_2$ alalım. Böylece,

$$p - \frac{1}{2} < x_{k_2j_2} < p - \frac{1}{2}$$

olacak şekilde $k_2 > k_1, \; j_2 > j_1$ vardır. Bu şekilde devam edilirse, herbir n için,

$$p - \frac{1}{n} < x_{k_nj_n} < p - \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $k_n > k_{n-1}, \; j_n > j_{n-1}$ olacak şekilde x in bir $x' = (x_{k_nj_n})$ alt dizisi bulunabilir. Bu x' dizisi p ye $P-$yakınsaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.9 $\mathcal{I}_2-\liminf x = j$ olmak üzere $x = (x_{mn})$ çift dizisinin j ye yakınsak olan bir alt dizisi vardır (Das and Malik 2008).

Şimdi vereceğimiz örnek çift dizilerde $\mathcal{I}_2-$limit noktası ile $\mathcal{I}_2-$limit supremum un son derece farklı kavramlar olduğunu gösterir.

Örnek 5.1.10 $\mathcal{I}_2^{d_2} = \{A \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} : d_2(A) = 0\}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde non-trivial (aşikar olmayan) bir ideal olsun.

$$A_p = \{2^{p-1}(2k-1):\ k\in\mathbb{N}\},\ p = 1, 2, ...$$

olmak üzere, açıkca görülür ki; $A_p \cap A_q = \emptyset$ $(p \neq q)$ dir. Şimdi, $D_{pq} = A_p \times A_q$ alalım.

$$D_{pq} \cap D_{rs} = \emptyset\ \big((p, q) \neq (r, s)\big)$$

ve

$$d_2(D_{pq}) = \frac{1}{2^p 2^q} \quad (p, q = 1, 2, ...)$$

dir. $x_{mn} = 1 - \dfrac{1}{pq}$, $(m, n) \in D_{pq}$ $\quad (p, q = 1, 2, ...)$ şeklinde bir çift dizi tanımlayalım. $(1 - \dfrac{1}{pq})$ nun herbir değeri $x = (x_{mn})$ dizisinin bir $\mathcal{I}_2^{d_2}-$limit noktasıdır. Bu durumda $\mathcal{I}_2-$limit supremum tanımından $\mathcal{I}_2^{d_2} - \limsup x = 1$ dir.

Şimdi $x = (x_{mn})$ dizisinin $\mathcal{I}_2^{d_2}-$limit noktasının 1 olmadığını gösterelim;
$M \notin \mathcal{I}_2^{d_2}$ ve $M = \{(m_j, m_k):\ j, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olacak şekilde bir M vardır. ve

$$\lim_{m_j, m_k} x_{m_j, m_k} = 1 \tag{5.4}$$

dir. $x = (x_{mn})$ dizisinin tanımından ve (5.4) den

$$M \cap D_{pq} = \{(j, k) : j \leq r \text{ ya da } k \leq r\}, \quad (p, q = 1, 2, ...)$$

olacak şekilde $r \in \mathbb{N}$ vardır.
$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{p,q=1}^{\infty} D_{pq}$ olduğunda her bir k için,

$$\begin{aligned} M &= \left(\bigcup_{p,q=1}^{k} (D_{pq}\cap M)\right) \bigcup \left(\bigcup_{p=1}^{k}\bigcup_{q=k+1}^{\infty} (D_{pq}\cap M)\right) \\ &\qquad \bigcup \left(\bigcup_{q=1}^{k}\bigcup_{p=k+1}^{\infty} (D_{pq}\cap M)\right) \bigcup \left(\bigcup_{p,q=k+1}^{\infty} (D_{pq}\cap M)\right) \end{aligned}$$

dir. Şimdi,

$$E_p = \bigcup_{q=k+1}^{\infty} (D_{pq}\cap M), \quad E_q = \bigcup_{p=k+1}^{\infty} (D_{pq}\cap M) \quad \text{ve} \quad \bigcup_{p,q=k+1}^{\infty} (D_{pq}\cap M)$$

seçtiğimizde,

$$d_2(M) \leq \sum_{p,q=1}^{k} d_2(M \cap D_{pq}) + \sum_{p=1}^{k} d_2(E_p) + \sum_{q=1}^{k} d_2(E_q) + d_2(E)$$

dir. $E_p \subset \{(s,q) : q,\ 2^k$ nın katı$\}$ olduğundan, $d_2(E_p) \leq 2^{-k}$ dır. Benzer şekilde, $d_2(E_q) \leq 2^{-k}$ ve $d_2(E) \leq 2^{-2k}$ dır. Bu eşitsizlikten dolayı, her bir $k = 1, 2, ...$ için $d_2(M) = 0$ olduğu görülür. Bu ise $M \notin \mathcal{I}_2^{d_2}$ olduğundan dolayı çelişkidir. Böylece 1, $x = (x_{mn})$ çift dizisinin bir $\mathcal{I}_2^{d_2}-$limit noktası değildir.

Böylelikle $x = (x_{mn})$ çift dizisinde $\mathcal{I}_2^{d_2} = 1$ iken, $\mathcal{I}_2^{d_2}-$limit noktasının olmadığını görürüz (Das and Malik 2008).

Teorem 5.1.11 $x = (x_{mn})$ reel değerli sınırlı bir çift dizi olmak üzere;

$$\mathcal{I}_2 - \limsup x = \max \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$$

dir (Das and Malik 2008).

İspat $\mathcal{I}_2 - \limsup x = a$ olsun. $a' = a$ olacak şekilde bir a' sayısı aldığımızda,

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \{(m,n) : x_{mn} > b\} \notin \mathcal{I}_2\}$$

olmak üzere, $a = \sup B_x$ olur. Şimdi $a < a' - \varepsilon < a'$ eşitsizliğini sağlayan ε seçelim. $a' - \varepsilon \notin B_x$ olduğundan,

$$\{(m,n) : x_{mn} > a' - \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2\}$$

şeklindedir. $\mathcal{I}_2-$yığılma noktası tanımından $a' \notin \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ dır. Böylece a dan daha büyük olan hiçbir sayı x çift dizisinin $\mathcal{I}_2-$yığılma noktası olamaz.

Şimdi $a \in \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $\mathcal{I}_2-$limit supremum tanımından, $a - \varepsilon < r \leq a$ olacak şekilde bir $r \in B_x$ vardır. O halde,

$$\{(m,n) : x_{mn} > r\} \notin \mathcal{I}_2\} \tag{5.5}$$

$a + \dfrac{\varepsilon}{2} \notin B_x$ olduğundan,

$$\{(m,n) : x_{mn} > a + \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{I}_2\} \tag{5.6}$$

(5.5) ve (5.6) den

$$\{(m,n) : |x_{mn} - a| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2\} \quad \text{ve} \quad a \in \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$$

dir.

Teorem 5.1.12 $x = (x_{mn})$ reel değerli sınırlı bir çift dizi olmak üzere;

$$\mathcal{I}_2 - \liminf x = \min \mathcal{I}_2(\Gamma_x)$$

dir (Das and Malik 2008).

5.2 Regüler Anlamda İdeal Yakınsaklık ve İdeal Cauchy

Çift dizilerde Pringsheim anlamda ve regüler anlamda $\mathcal{I}_2$ ile $\mathcal{I}_2^*-$yakınsaklık çeşitlerini ve Cauchy ile ilgili kavramları Dündar (2010) doktora tezinde çalışmıştır.

Teorem 5.2.1 (X,ρ) lineer bir metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $(AP2)$ özelliğine sahip kuvvetli bir uygun ideal olsun. $x = (x_{mn})$, X uzayının bir çift dizisi ve $L \in X$ alalım. θ, X uzayının sıfır vektörünü göstermek üzere, aşağıdaki şartlar denktir.

i) $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$,

ii) $x = y + z$ olacak biçimde

$$\text{suppz} = \big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\big\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0$$

şartlarını yerine getiren $y = (y_{mn})$ ve $z = (z_{mn})$ dizileri X uzayında bulunabilir.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olmak üzere, $\mathcal{I}_2$ ideali $(AP2)$ şartını sağlayan kuvvetli bir uygun ideal olduğundan Teorem 5.0.22 gereği bir $M \in F(\mathcal{I}_2)$ (yani, $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2$) için,

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} \rho(x_{mn}, L) = 0$$

olur. Her $m,n \in \mathbb{N}$ için,

$$y_{mn} = \begin{cases} x_{mn} & , \quad (m,n) \in M \\ L & , \quad (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \end{cases} \tag{5.7}$$

ve

$$z_{mn} = x_{mn} - y_{mn}, \quad m,n \in \mathbb{N} \tag{5.8}$$

olacak şekilde, (y_{mn}) ve (z_{mn}) dizileri alalım. Bu durumda (5.7) eşitliğinden,

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0$$

ve

$$\big\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{mn} \neq y_{mn}\big\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan ve (5.8) den,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

sağlanır ve tekrar (5.8) den

$$x = y + z$$

bulunabilir. Böylelikle istenilen gösterilmiştir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $x = y + z$ olacak şekilde

$$\text{suppz} = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0$$

şartlarını yerine getiren $y = (y_{mn})$ ve $z = (z_{mn})$ dizileri X uzayında bulunabilsin. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çarpımının bir alt cümlesi,

$$M = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} = \theta\}$$

olsun.

$$\text{suppz} = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

olmasından dolayı, $M \in F(\mathcal{I}_2)$ ve $(m,n) \in M$ için, $x_{mn} = y_{mn}$ olup

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} \rho(x_{mn}, L) = 0$$

bulunabilir. Bu takdirde,

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

olur. Bu durumda Teorem 5.0.18 den biliyoruz ki ,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

olur. İspat tamamlanmıştır.

Sonuç 5.2.2 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, kuvvetli uygun idealini ve (X, ρ) metrik uzayını alalım. $x = (x_{mn})$, X uzayının bir çift dizisi ve $L \in X$ olmak üzere,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0 \quad ve \quad \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

olmak üzere,

$$x_{mn} = y_{mn} + z_{mn} \tag{5.9}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $y = (y_{mn})$ ve $z = (z_{mn})$ dizilerinin X uzayında bulunabilmesidir

İspat $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ kabulümüz olsun. $z = (z_{mn})$ dizisi (5.8) eşitliği ve $y = (y_{mn})$ dizisi (5.7) eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

ve $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal olduğundan dolayı,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

olur. Teorem 5.0.20 ve (5.8) den

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

olur. Aksine,

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0 \quad ve \quad \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

olmak üzere, (5.9) eşitliğini alalım. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal olduğundan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

olup Teorem 5.0.20 ve (5.9) dan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

bulunur.

Dikkat edilmelidir ki, Teorem 5.2.1 in ispatında, eğer (ii) sağlanırsa, bu durumda $\mathcal{I}_2$ idealinin $(AP2)$ özelliğini sağlamasına gerek yoktur. Gerçekten de, $\mathcal{I}_2$, $(AP2)$ özelliğine sahip olmayan bir ideal olsun ve

$$x_{mn} = y_{mn} + z_{mn}, \quad \lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0 \quad ve \quad \sup pz \in \mathcal{I}_2 \tag{5.10}$$

alalım. $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan dolayı,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

ve $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \rho(z_{mn}, 0) \geq \varepsilon\} \subset \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

dir. O halde,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

olup (5.10) dan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

bulunur.

Tanım 5.2.3 (X,ρ) lineer bir metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal olmak üzere, X uzayının bir $x = (x_{mn})$ dizisini alalım.

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için (m,n), $(s,t) \in M$ ve $m,n,s,t > k_0 = k_0(\varepsilon)$ alındığında,

$$\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \in F(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus M \in \mathcal{I}_2$) cümlesi ve $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcutsa $x = (x_{mn})$ çift dizisi X uzayında $\mathcal{I}_2^*-$*Cauchy dizisidir* denir.

Teorem 5.2.4 (X,ρ) lineer bir metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal olmak üzere, eğer X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2^*-$Cauchy dizisi ise $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisidir.

İspat $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2^*-$Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ sayısı için (m,n), $(s,t) \in M$ ve $m,n,s,t > k_0 = k_0(\varepsilon)$ alındığında,

$$\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \in F(\mathcal{I}_2)$ yani $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2$ cümlesi bulunabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{st}) \geq \varepsilon\} \\ &\subset H \cup \Big[M \cap \big((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\})\big)\Big] \end{aligned}$$

bulunabilir. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal olduğundan dolayı,

$$H \cup \Big[M \cap \big((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\})\big)\Big] \in \mathcal{I}_2$$

olup, idealin tanımından dolayı $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}_2$ olduğu görülebilir. Bu ise, $x = (x_{mn})$ dizisinin bir $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir.

Teorem 5.2.5 (X, ρ) lineer bir metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal olmak üzere, eğer X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2-$yakınsak ise $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisidir.

İspat L noktasına $\mathcal{I}_2-$yakınsak olan bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi alalım. O halde $\varepsilon > 0$ için

$$A\big(\frac{\varepsilon}{2}\big) = \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \rho(x_{mn}, L) \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\} \in \mathcal{I}_2$$

olur. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal olduğundan boştan farklı ve $F(\mathcal{I})$ sınıfına ait

$$A^c\big(\frac{\varepsilon}{2}\big) = \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \rho(x_{mn}, L) < \frac{\varepsilon}{2}\big\}$$

cümlesinin varlığından söz edilebilir. $A(\frac{\varepsilon}{2})$ cümlesine ait olmayan k, l sayıları için,

$$\rho(x_{kl}, L) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Şimdi,

$$B(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ \rho(x_{mn}, x_{kl}) \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayalım ve

$$B(\varepsilon) \subset A\big(\frac{\varepsilon}{2}\big)$$

olduğunu ispatlayalım.

$(m,n) \in B(\varepsilon)$ alalım. O halde $(k,l) \notin A(\frac{\varepsilon}{2})$ için,

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq \rho(x_{mn}, x_{kl}) &\leq \rho(x_{mn}, L) + \rho(x_{kl}, L) \\ &< \rho(x_{mn}, L) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\frac{\varepsilon}{2} < \rho(x_{mn}, L)$$

ve dolayısıyla $(m,n) \in A(\frac{\varepsilon}{2})$ olduğu anlamına gelir. Buna göre

$$B(\varepsilon) \subset A(\frac{\varepsilon}{2})$$

kapsamasından söz edilebilir.

$A(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{I}_2$ olduğundan ve idealin tanımından dolayı $B(\varepsilon) \in \mathcal{I}_2$ dir. O halde $x = (x_{mn})$ çift dizisi bir $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisidir.

Teorem 5.2.6 (X, ρ) lineer bir metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ $(AP2)$ şartını sağlayan kuvvetli uygun bir ideal iken, $\mathcal{I}_2^*-$Cauchy dizisi ile $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizi kavramları çakışır.

İspat Bir dizinin $(AP2)$ şartına ihtiyaç duymadan $\mathcal{I}_2^*-$Cauchy dizisi ise $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisi olduğunu daha önce gösterdik. Şimdi bu durumun tersini gösterelim;
$x = (x_{mn})$, $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisi olsun. Tanımdan, her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \ \rho(x_{mn}, x_{st}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesini sağlayan $s = s(\varepsilon)$, $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayılarının varlığından söz edilebilir. $s_i = s(\frac{1}{i})$, $t_i = t(\frac{1}{i})$ olmak üzere,

$$P_i = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \ \rho(x_{mn}, x_{s_i t_i}) \leq \frac{1}{i}\}, \quad (i = 1, 2, ...)$$

olsun. $i = 1, 2, ...$ için $P(i) \in F(\mathcal{I}_2)$ olduğu açıkca görülebilir. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli bir uygun ideal olduğundan, her bir $i = 1, 2, ...$ için $P \setminus P_i$ cümleleri sonlu adette satır ve sütunlardan oluşan ve $P \in F(\mathcal{I}_2)$ olan bir $P \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ in varlığından söz edilebilir.
$\varepsilon > 0$ ve $j > \dfrac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ alalım. Eğer, $(m,n), (s,t) \in P$ ise bu durumda $P \setminus P_i$ sonlu satır ve sütundan ibaret olan bir cümle olduğundan, $m, n, s, t > k(j)$ iken $(m,n), (s,t) \in P_j$ olacak şekilde $k = k_j$ sayısının varlığından söz edilebilir. O halde, tüm $m, n, s, t > k(j)$ için,

$$\rho(x_{mn}, x_{s_j t_j}) < \frac{1}{j}, \qquad \rho(x_{st}, x_{s_j t_j}) < \frac{1}{j}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece $m, n, s, t > k(j)$ için,

$$\begin{aligned} \rho(x_{mn}, x_{st}) &\leq \rho(x_{mn}, x_{s_j t_j}) + \rho(x_{st}, x_{s_j t_j}) \\ &< \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için, $(m, n), (s, t) \in P$ ve $m, n, s, t > k(\varepsilon)$ olduğunda

$$\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $k = k(\varepsilon)$ bulunabilir. Bu ise $x = (x_{mn}) \in X$ dizisinin $\mathcal{I}_2^*-$Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 5.2.7 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ birer gerçek ideal olsun. Bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi, eğer l noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsak ve her $\varepsilon > 0$ için,

i) Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve bazı $L_n \in \mathbb{C}$ için,

$$\{m \in \mathbb{N} : |x_{mn} - L_n| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2,$$

ii) Her bir $m \in \mathbb{N}$ ve bazı $K_m \in \mathbb{C}$ için,

$$\{m \in \mathbb{N} : |x_{mn} - K_m| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

şartları sağlanıyor ise, $x = (x_{mn})$ dizisine *regüler yakınsaktır* denir ve

$$r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I}) - \lim_{m,n\longrightarrow\infty} x_{mn} = l$$

ile gösterilir.

Tanım 5.2.8 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ birer gerçek ideal olsun. (X, ρ) metrik uzayından alınan bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} \quad ((m,n) \in M)$$

her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m\to\infty} x_{mn} \quad (m \in M_1)$$

her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_{mn} \quad (n \in M_2)$$

şeklindeki limitler var olacak şekilde $M \in F(\mathcal{I}_2)$ ve $M_1, M_2 \in F(\mathcal{I})$ cümleleri bulunabiliyorsa $x = (x_{mn})$ çift dizisine *regüler* $\mathcal{I}_2^*-$*yakınsaktır* denir ve $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.2.9 (X, ρ) lineer metrik uzay, $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde uygun bir ideal olmak üzere, X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)-$yakınsak ise $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})-$ yakınsaktır.

İspat X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi L noktasına $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)-$yakınsak olsun. O zaman $x = (x_{mn})$ dizisi L noktasına $\mathcal{I}_2^*-$yakınsaktır. Bu durumda Teorem 5.0.18 den biliyoruz ki $x = (x_{mn})$ dizisi $\mathcal{I}_2-$yakınsaktır. $x = (x_{mn})$ dizisi $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)-$yakınsak olduğundan, her bir her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m\to\infty} x_{mn} \quad (m \in M_1)$$

her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_{mn} \quad (n \in M_2)$$

şeklindeki limitler var olacak şekilde $M_1, M_2 \in F(\mathcal{I})$ cümleleri bulunabilir. O halde $\varepsilon > 0$ için $m \in M_1$ iken, her $m \geq m_0$ için $\rho(x_{mn}, L_n) < \varepsilon$, $(n \in \mathbb{N})$ ve $n \in M_2$ olduğunda, $n \geq n_0$ için $\rho(x_{mn}, K_m) < \varepsilon$, $(m \in \mathbb{N})$ olacak şekilde $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ ve $L_n, K_m \in X$ elemanları vardır. Buradan, $H_1 = \mathbb{N} \setminus M_1$, $\quad H_2 = \mathbb{N} \setminus M_2 \in \mathcal{I}$ için,

$$A_1(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L_n) \geq \varepsilon\} \subset H_1 \cup \{1, 2, ..., (m_0 - 1)\}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, K_m) \geq \varepsilon\} \subset H_2 \cup \{1, 2, ..., (n_0 - 1)\}, \quad (m \in \mathbb{N})$$

şeklindeki kapsamalardan söz edilebilir. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan,

$$H_1 \cup \{1, 2, ..., (m_0 - 1)\} \in \mathcal{I} \text{ ve } H_2 \cup \{1, 2, ..., (n_0 - 1)\} \in \mathcal{I}$$

ve bundan dolayı,

$$A_1(\varepsilon) \in \mathcal{I} \quad ve \quad A_2(\varepsilon) \in \mathcal{I}$$

dır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Tanım 5.2.10 (X, ρ) lineer metrik uzay, $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde gerçek birer ideal olmak üzere, X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi düşünelim. Eğer $x = (x_{mn})$ dizisi $\mathcal{I}_2-$Cauchy ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$A_1(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{k_n n}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{ml_m}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}, \quad (m \in \mathbb{N})$$

önermelerini sağlayan $k_n = k_n(\varepsilon)$, $\quad l_m = l_m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ şeklindeki değerler mevcut ise, $x = (x_{mn})$ dizisine *regüler anlamda* $\mathcal{I}_2-$*Cauchy dizisi* denir ve $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})-$Cauchy şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.2.11 (X, ρ) lineer bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde bir gerçek ideal olmak üzere, X uzayında bir $x = (x_{mn})$ dizisi düşünelim. Her $\varepsilon > 0$ için (m, n), $\quad (s, t) \in M$ ve $m, n, s, t > N = N(\varepsilon)$ iken, $\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$,

$m \in M_1$ sayıları için

$$\rho(x_{mn}, x_{k_n n}) < \varepsilon, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ve $n \in M_2$ sayıları için

$$\rho(x_{mn}, x_{ml_m}) < \varepsilon, \quad (m \in \mathbb{N})$$

eşitsizliklerini sağlayan $M \in F(\mathcal{I}_2)$ ve $M_1, M_2 \in F(\mathcal{I})$ kümeleri bulunabiliyorsa ve $s = s(\varepsilon)$, $\quad t = t(\varepsilon)$, $\quad k_n = k_n(\varepsilon)$, $\quad l_m = l_m(\varepsilon)$ ve $N(\varepsilon)$ sayıları varsa, $x = (x_{mn})$ dizisine *regüler anlamda* $\mathcal{I}_2^*-$*Cauchy dizisi* denir ve $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)-$Cauchy şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.2.12 (X,ρ) lineer bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde uygun bir ideal olmak üzere, X uzayında bir $x=(x_{mn})$ dizisi için $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)-$Cauchy dizisi ise $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})-$Cauchy dizisidir.

İspat $x=(x_{mn})$ dizisi bir $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)-$Cauchy dizisi olsun. O halde $x=(x_{mn})$ dizisi bir $\mathcal{I}_2^*-$Cauchy dizisidir. Bu durumda $x=(x_{mn})$ dizisinin bir $\mathcal{I}_2-$Cauchy dizisi olduğunu Teorem 5.2.4 de gösterdik.
$x=(x_{mn})$ dizisi bir $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)-$Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon>0$ için $m\in M_1$, $n\in M_2$ ve $m,n>N=N(\varepsilon)$ olduğu takdirde,

$$\rho(x_{mn},x_{k_nn})<\varepsilon,\quad (n\in\mathbb{N}),$$

ve

$$\rho(x_{mn},x_{ml_m})<\varepsilon,\quad (m\in\mathbb{N})$$

eşitsizliklerini sağlayan $M_1,M_2\in F(\mathcal{I})$ cümleleri vardır ve $k_n=k_n(\varepsilon)$, $l_m=l_m(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ sayıları bulunabilir. Buradan, $H_1=\mathbb{N}\setminus M_1$, $H_2=\mathbb{N}\setminus M_2\in\mathcal{I}$ için,

$$A_1(\varepsilon)=\{m\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},x_{k_nn})\geq\varepsilon\}\subset H_1\cup\{1,2,...,(N-1)\},\quad (n\in\mathbb{N})$$

ve

$$A_2(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},x_{ml_m})\geq\varepsilon\}\subset H_2\cup\{1,2,...,(N-1)\},\quad (m\in\mathbb{N})$$

şeklindeki kapsamalardan söz edilebilir. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan,

$$H_1\cup\{1,2,...,(N-1)\}\in\mathcal{I}$$

ve

$$H_2\cup\{1,2,...,(N-1)\}\in\mathcal{I}$$

olur ve bundan dolayı,

$$A_1(\varepsilon)\in\mathcal{I}\quad ve\quad A_2(\varepsilon)\in\mathcal{I}$$

dır. Bu ise $x=(x_{mn})$ dizisinin bir $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})-$Cauchy dizisi olduğunu anlamına gelir.

Teorem 5.2.13 (X,ρ) lineer bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde uygun bir ideal olmak üzere, X uzayında bir $x=(x_{mn})$ dizisi için $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})-$yakınsak ise $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})-$Cauchy dizisidir.

İspat $x=(x_{mn})$ dizisi $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})-$yakınsak olsun. Bu durumda $x=(x_{mn})$ dizisinin $\mathcal{I}_2-$yakınsak iken $\mathcal{I}_2-$Cauchy olduğunu Teorem 5.2.5 de gösterdik.

$x=(x_{mn})$ dizisi $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})-$yakınsak olduğundan, her $\varepsilon>0$ için,

i) Herbir $n\in\mathbb{N}$ ve bazı $L_n\in X$ için

$$A_1\big(\frac{\varepsilon}{2}\big)=\big\{m\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},L_n)\geq\frac{\varepsilon}{2}\big\}\in\mathcal{I},$$

ii) Herbir $m\in\mathbb{N}$ ve bazı $K_m\in X$ için

$$A_2\big(\frac{\varepsilon}{2}\big)=\big\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},K_m)\geq\frac{\varepsilon}{2}\big\}\in\mathcal{I}$$

önermeleri geçerlidir. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan,

i) $A_1^c(\frac{\varepsilon}{2})=\{m\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},L_n)<\frac{\varepsilon}{2}\},\quad(n\in\mathbb{N})$

ii) $A_2^c(\frac{\varepsilon}{2})=\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},K_m)<\frac{\varepsilon}{2}\},\quad(m\in\mathbb{N})$

cümleleri boştan farklıdır ve $F(\mathcal{I})$ sınıfına aittir. $n\in\mathbb{N}$ için $A_1(\frac{\varepsilon}{2})$ cümlesine ait olmayan ve pozitif olmayan k_n sayısı için,

$$\rho(x_{k_nn},L_n)<\frac{\varepsilon}{2},\quad(n\in\mathbb{N})$$

olur. Şimdi $k_n=k_n(\varepsilon)$ olmak üzere, her bir $n\in\mathbb{N}$ için

$$B_1(\varepsilon)=\{m\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},x_{k_nn})\geq\varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak,

$$B_1(\varepsilon)\subset A_1(\frac{\varepsilon}{2})$$

olduğunu ispatlarsak, $m\in B_1(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda, $k_n\notin A_1(\frac{\varepsilon}{2})$ için

$$\begin{aligned}\varepsilon\leq\rho(x_{mn},x_{k_nn}) &\leq \rho(x_{mn},L_n)+\rho(x_{k_nn},L_n)\\ &< \rho(x_{mn},L_n)+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\frac{\varepsilon}{2}<\rho(x_{mn},L_n)$$

ve dolayısıyla $m \in A_1(\frac{\varepsilon}{2})$ olduğunu gösterir. Buna göre,

$$B_1(\varepsilon) \subset A_1(\frac{\varepsilon}{2})$$

kapsaması geçerlidir. Benzer şekilde, $m \in \mathbb{N}$ için $A_2(\frac{\varepsilon}{2})$ cümlesine ait olmayan pozitif l_m sayısı için

$$\rho(x_{ml_m}, K_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (m \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Buradan, $l_m = l_m(\varepsilon)$ olmak üzere her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$B_2(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{ml_m}) \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak,

$$B_2(\varepsilon) \subset A_2(\frac{\varepsilon}{2})$$

kapsamasının geçerliliğinden söz edilebilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

6 KAYNAKLAR

Altay, B. (2002). Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları. Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

Balcı, M. (1997). Matematik Analiz cilt 2, Ankara.

Boos, J., Leiger, T. and Zeller, K. (1997). Consistency theory for SM-methods. *Acta Mathematica Hungarhungarica,* **76**: 83–116.

Brown, T.C. and Freedman, A.R. (1990). The uniform density of sets of integers and Fermat's last theorem. *Comptes Rendus Mathematiques des I'Academie des Sciences*, **11**: 1–6.

Çakan, C. and Altay, B. (2006). Statistical boundedness and statistical core of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **317**: 690-697

Das, P., Kostyrko, P., Wilczyński, W. and Malik, P. (2008). $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergence of double sequences. *Mathematica Slovaca,* **58**: (5), 605–620.

Das, P. and Malik, P. (2008). On extremal $\mathcal{I}$-limit points of double sequences. *Tatra Mountains Mathematical Publications,* **40**: 91–102.

Demirci, K. (2001). I-limit superior and limit inferior. *Mathematical Communications,* **6**: 165–172.

Dems, K. (2004/2005). On I-Cauchy sequence. *Real Analysis Exchange,* **30**: 123–128.

Dündar, E. (2010). Çift Dizilerin $\mathcal{I}-$Yakınsaklığı Üzerine. Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicae,* **2**: 241.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence. *Analysis* **5**: 301–313.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**: 3625–3631.

Fridy, J.A. (1993). Statistical limit points. *Proceedings of the American Mathematical Society,* **118**: 1187–1192.

Gürdal, M. and Şahiner, A. (2008). Extremal $\mathcal{I}_2$-limit points of double sequences. *Applied Mathematics E-Notes,* **2**: 131–137.

Halberstam, H. and Roth, K.F. (1966). Sequences I. Oxford, Clarendon Press, 290s., London.

Iyer, V. G. (1985). Mathematicel Analysisi, Tata McGraw-Hill, 3rd Edition.

Kostyrko, P. , Šalát, T. and Wilczyński, W. (2000). $\mathcal{I}-$ convergence. *Real Analysis Exchange,* **26(2)**: 669–686.

Kreyszig, E. (1989). Introductory Functional Analysis with Applications Wiley Clossics' Library Edition Published.

Kumar, V. (2007). On I and I^*-convergence of double sequences, *Mathematical Communications,* **12**: 171–181.

Kuratwski, C. (1958). Topologie I. PWN Warszawa.

Maddox, I.J. (1970). Elements of Functional Analysis. Cambridge University Pres.

Móricz, F. (1991). Extensions of the space c and c_0 from single to double sequences. *Glasnik Math*, **26**(46): 67–73.

Móricz, F. (2003). Statistical convergence of multiple sequences, Archiv der Mathematik (Basel), **81**: 82–89.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H. (2003). Statistical convergence of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **288**: 223–231.

Nagata, J. (1974). Modern Genel Topology. North-Holland Publishing Company Amsterdam-London

Patterson, R.F. (1999). Double sequences core theorems. *International Journal of Mathematics and mathematical Sciences*, **22**: 785–793.

Rath, D. and Tripaty, B. C. (1994). On statistically convergence and statistically Cauchy sequences. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, **25**: (4) 381–386.

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq Mathematics,* **2**: 73–74

Toeplitz, O. and Köthe, G. (1934). Lineare Räume mit unendlich Vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **171**: 193–226.

Tripathy, B.C. (1998). On statistical convergent sequences. *Bull. Cal. Math.Soc.*, 20-31.

Tripathy, B. and Tripathy, B. C. (2005). On $\mathcal{I}-$ convergent double sequences. *Soochow Journal of Mathematics,* **31**: 549–560.

Zeltser, M. (2001). Investigation of Double Sequences Spaces by Soft and Hard Analytical Methods. Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis, Tartu.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Feyza KOÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	YOZGAT, 24/03/1988
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	:	0 546 453 99 33, feyza_gundogar@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Afyon Anadolu Öğretmen Lisesi, 2002–2006
Lisans	:	Marmara Üniversitesi, 2006–2011
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2011–2014

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

M.E.B. Gaziantep, Yahya Kemal Beyatlı Lisesi, 2012–2013

M.E.B. Bilecik, Ertuğrul Gazi Anadolu Lisesi, 2013-...