TERSLENEBİLİR HALKALAR VE GENİŞLETİLMİŞ TERSLENEBİLİR HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Faruk Volkan ALTINBAŞ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TERSLENEBİLİR HALKALAR VE GENİŞLETİLMİŞ TERSLENEBİLİR HALKALAR

Faruk Volkan ALTINBAŞ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2015

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12/06/2015

Faruk Volkan ALTINBAŞ

TEZ ONAY SAYFASI

Faruk Volkan ALTINBAŞ tarafından hazırlanan "Terslenebilir Halkalar ve Genişletilmiş Terslenebilir Halkalar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 12.06.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'n-da YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Sait Halıcıoğlu

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim Erol
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TERSLENEBİLİR HALKALAR VE
GENİŞLETİLMİŞ TERSLENEBİLİR HALKALAR

F. Volkan ALTINBAŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez çalışması için gerekli olan kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, terslenebilir halka sınıfı tanıtılarak bazı özellikleri incelenmiştir. Buna ek olarak terslenebilir halkaların diğer halka sınıflarıyla olan ilişkileri araştırılmıştır. Son olarak dördüncü bölüm, bazı genişletilmiş terslenebilir halka sınıfı örneklerine ve bunların karakterizasyonlarına ayrılmıştır.

2015, v+73 sayfa

Anahtar Kelimeler : (Genişletilmiş) Terslenebilir halka, inmiş halka, yarıdeğişmeli halka, polinom halkası, matris halkası, aşikar genişleme.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

REVERSIBLE RINGS AND EXTENDED REVERSIBLE RINGS

F.Volkan ALTINBAŞ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis consists of four basic chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter introduces preliminaries, definitions of concepts and necessary theorems that will be required for this thesis. In the third chapter, by int-roducing reversible rings, some properties of these rings are investigated. In addition, relationships between reversible rings and other rings are examined. Finally, the fourth section is devoted to examples of some generalized reversible rings and the characterizations of these rings.

2015, v+73 pages

Key Words : (Extended) Reversible ring, reduced ring, semicommutative ring, polynomial ring, matrix ring, trivial extension.

TEŞEKKÜR

Tez konusundaki çalışmalarımda ve düzenlemelerimde bana yardımcı olan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA'ya bana ayırdığı zaman ve verdiği bilgiler için teşekkürü bir borç bilirim.

Beni engin bilgileriyle aydınlatan, benim yüksek lisans yapmama vesile olan ve benden yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Muhittin BAŞER'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, geçirdiğim iki sene boyunca gerek maddi gerek manevi gerekse sabır konusunda her zaman yanımda olan aileme ve özellikle eşim Özlem ALTINBAŞ'a ve de enerji kaynağım, doğacak olan çocuğuma çok teşekkür ediyorum.

F.Volkan ALTINBAŞ

Afyonkarahisar, 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

TEZ ONAY SAYFASI

ÖZET . . . . **i**

ABSTRACT . . . . **ii**

TEŞEKKÜR . . . . **iii**

İÇİNDEKİLER . . . . **iv**

SİMGELER DİZİNİ . . . . **v**

1 GİRİŞ 1

2 TEMEL KAVRAMLAR 5

2.1 Genel Tanımlar 5

2.2 Polinom Halkaları 7

2.3 Matris Halkaları 8

2.4 Klasik Sağ Kesirler Halkası 9

2.5 Bazı Halka Sınıfları 11

3 TERSLENEBİLİR HALKALAR 15

3.1 Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri 15

3.2 Terslenebilir Halkaların Genişlemeleri 26

4 BAZI TERSLENEBİLİR HALKA SINIFLARI 35

4.1 α-Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri 35

4.2 Kuvvetli Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri 52

4.3 Zayıf Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri 58

4.4 Merkezi Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri 60

KAYNAKLAR **70**

ÖZGEÇMİŞ **73**

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
α	R'nin bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R'nin bir α endomorfizmasının genişletilmişi
$C(R)$	Bir R halkasının merkezi
E_{ij}	Matris birimleri
$l_R(X)$	X'in sol sıfırlayanı
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
M_R	Sağ R modül
$r_R(X)$	X'in sağ sıfırlayanı
$P(R)$	R'nin asal radikali
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[\| x \|]$	R üzerindeki kuvvet serileri halkası
$R[x;\alpha]$	R'nin skew polinom halkası
$R[\| x;\alpha \|]$	R üzerindeki skew kuvvet seriler halkası
$R[x;\alpha,\delta]$	R halkasının Ore genişlemesi
$R(+)_h M$	R halkasının M modülü ile Nagata genişlemesi
$T(R,M) = R(+)M$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$T_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası
(x^n)	x^n tarafından üretilen ideal

1. GİRİŞ

Matematiğin Cebir dalının çalışma alanlarından biri de halka kuramıdır. Genel olarak bir halkanın yapısı ve özellikleri incelenirken o halkanın değişmeli olup olmadığı önem taşımaktadır. Bu anlamda literatürde yapılan çalışmalar değişmeli olan ve değişmeli olmayan halkalar üzerindeki çalışmalar olarak ayrılmaktadırlar. Çünkü değişmeli olan ve değişmeli olmayan halkalar üzerinde bir takım özellikler ya da tanımlar tamamen farklılık göstermektedir. Bir halkanın kesir cisimlerinin inşa edilmesinde değişmeli halkalar için sıfır bölen bulunmaması koşuluna gerek vardır. Fakat genel halkalarda, bölümlü halkaların alt halkalarını karakterize etmek için başka türlü koşullara ihtiyaç duyulur. Değişmeli bir halkada iki elemanın çarpımı sıfır iken, bu elemanların yerleri değiştirilse de sonuç yine sıfır olur. Fakat değişmeli olmayan bir halkada bu özellik sağlanmaz. Bu bakımdan hem değişmeli halkaları hem de sıfır bölen bulundurmayan halkaları kapsayan bir halka sınıfının tanımlanması doğal olarak ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe halkalar, birimli halka olarak alınacaktır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, tez çalışması için gerekli olan bazı temel kavramların tanımlarının ve özelliklerinin verilmesini takiben, tez çalışmasının üçüncü bölümünde ise terslenebilir halka sınıfının tanıtımına yer verilmiştir. Cohn (1999), $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $ba = 0$ özelliğini sağlayan halkaları *terslenebilir (reversible)* olarak adlandırmıştır. Anderson ve Camillo (1998) bu halka sınıfı için ZC_2 gösterimini kullanarak özelliklerini incelemiştir. Krempa ve Niewieczerzal (1977), C_0 adı altında bu halka sınıfını çalışmıştır. Tarihsel olarak; terslenebilir halkalarla ilgili en eski bilinen sonuçlardan bazıları (o yıllarda bu halka sınıfı tanımlanmamış olmasına rağmen) Habeb (1990)'e dayanır.

Terslenebilir halka sınıfının ilişkili olduğu bir takım halka sınıfı bulunmaktadır. Bunlardan bazıları şu şekildedir: Her $r, s, t \in R$ için $rst = 0$ iken $rts = 0$ oluyorsa R'ye *simetrik (symmetric) halka* denir (Lambek 1971). Anderson ve Camillo (1999) bu halka sınıfı için ZC_3 gösterimini kullanmıştır. Bir R halkasının simetrik olması için gerek ve yeter koşul n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere $r_1r_2\cdots r_n = 0$ iken σ; $\{1, 2, \cdots, n\}$ kümesinin herhangi bir permütasyonu olmak üzere $r_{\sigma(1)}r_{\sigma(2)}\cdots r_{\sigma(n)} = 0$ olmasıdır (Krempa 1977). Bu sonucu Anderson ve Camillo (1998) bağımsız olarak ispatlamışlardır. Her $a \in R$ için $r_R(a)$ sağ sıfırlayanı R'nin bir ideali oluyorsa R halkası *yarıdeğişmeli (semicommutative)* olarak adlandırılır (Shin 1973). İnmiş (reduced) (yani sıfırdan farklı sıfırüslü eleman bulundurmayan) halkalar simetriktir (Anderson and Camillo 1999). Değişmeli halkaların simetrik ve simetrik halkaların terslenebilir olduğu açıktır. Ayrıca terslenebilir halkalar yarıdeğişmelidir (Lambek 1971). Bu gerektirmelerin karşıtlarının doğru olmadığını gösteren örnekler bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde; terslenebilir halkaların özellikleri, yarıdeğişmeli halkalarla ilişkisi ve terslenebilir halka örneklerini de içine alan bu halka sınıfının bazı genişlemeleri incelenecektir. Bir halkanın terslenebilir olma özelliğinin polinom halkasına taşınamadığı gösterilecektir. Terslenebilir bir halkanın bazı genişlemelerinin terslenebilir olması için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Dördüncü bölümde; genel olarak genişletilmiş terslenebilir halka sınıflarına bazı örnekler verilmiştir. İlk olarak R halkasının bir α endomorfizması kullanılarak terslenebilir halka kavramı genişletilmiştir. Bir R halkası inmiş iken $R[x]$ polinom halkası inmiştir, fakat $R[x;\alpha]$ skew polinom halkası inmiş değildir. Böylece skew polinom halkası inmiş olan yeni bir halka sınıfının tanımlanması doğal olarak ortaya çıkmıştır. Öncelikle Krempa (1996), $a \in R$ olmak üzere $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ özelliğini sağlayan R'nin bir α endomorfizmasını *katı* olarak adlandırılmıştır. Sonra Hong vd. (2000) katı bir α endomorfizması var olan R halkası *α-katı* olarak adlandırılmıştır. Ayrıca R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olmasıdır (Hong *et al.* 2003).

Dördüncü bölümün birinci kısmında; R halkasının bir endomorfizması α olmak üzere Başer vd. (2009) α-katı halkaların bir genellemesi ve terslenebilir halkaların bir genişlemesi olarak α-terslenebilir halka kavramını tanımlamışlardır. Aynı çalışmada bu halka sınıfının özellikleri araştırılmış ve bazı karakterizasyonları verilmiştir. Bundan başka Rege ve Chhawchharia (1997), $R[x]$'deki herhangi $f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkasını *Armendariz* olarak adlandırmışlardır. Bir halkanın Armendariz olma özelliği Anderson ve Camillo (1998) gereğince polinom halkasına taşınabilirken $R[x; \alpha]$ skew polinom halkasına taşınamamaktadır. Bundan dolayı skew polinom halkası üzerinde Armendarizlik özelliği tanımlanarak iki yeni halka sınıfı daha inşa edilmiştir. Hong vd. (2003) $R[x; \alpha]$'daki herhangi $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ ve $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ polinomları için $p(x)q(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ ($a_ib_j = 0$) oluyorsa R halkasını *α-skew Armendariz* (*α-Armendariz*) olarak adlandırmışlardır. Ayrıca Başer vd. (2009) α-terslenebilir halkaların genelleştirilmiş Armendariz halkalarla ilişkileri de incelenmiştir.

Dördüncü bölümün ikinci kısmında güçlü terslenebilir halkalar tanıtılmaktadır. Terslenebilir bir R halkası üzerindeki polinom halkası terslenebilir olmak zorunda değildir (Kim and Lee 2003). Böylece polinom halkası terslenebilir olan halkalara ; $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ iken $g(x)f(x) = 0$ oluyorsa R'ye güçlü terslenebilir halka tanımı Yang ve Liu (2008) tarafından terslenebilir halkaların yeni bir genişlemesi olarak tanımlanmıştır.. Güçlü terslenebilir halka sınıfının özellikleri ve genişlemelerinin de güçlü terslenebilir olup olmadığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümün üçüncü kısmında; genişletilmiş terslenebilir halkalara bir başka örnek olan ve Liang ve Gang (2007) tarafından tanımlanan zayıfça terslenebilir halkalar incelenmektedir. Bir R halkası; $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $Rbra$, R'nin bir nil sol ideali (denk olarak; $braR$, R'nin bir nil sağ ideali) oluyorsa, *zayıf terslenebilir* olarak adlandırılır. Burada zayıfça terslenebilir halkaların genişlemelerinin de zayıfça terslenebilir olup olmadığı ya da hangi koşullar altında zayıfça terslenebilir olabilecekleri araştırılmıştır.

Son olarak; terslenebilir halkaların bir başka genellemesi olan merkezi terslenebilir halkalar, Köse vd. (2014) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: herhangi $a, b \in R$

için $ab = 0$ iken ba merkezi (yani her $r \in R$ için $bar = rba$) oluyorsa R halkası *merkezi terslenebilir* olarak adlandırılır. Bu çalışmaya göre terslenebilir halkalar merkezi terslenebilir, merkezi terslenebilir halkalar ise zayıfça terslenebilirdir. Bu gerektirmelerin karşıtlarının doğru olmadığını gösteren bazı örneklere yer verilmiştir. Böylece merkezi terslenebilir halka sınıfının, terslenebilir ve zayıfça terslenebilir halka sınıflarının arasında kalan bir halka sınıfı olduğu gösterilmiştir. Bir halkanın merkezi terslenebilir olma özelliğinin, o halkanın Armendariz olması koşulu altında, polinom halkasına ve Laurent polinom halkasına taşındığı ispatlanmıştır. Aynı zamanda merkezi terslenebilir bir halkanın Dorroh genişlemesinin de merkezi terslenebilir olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması için gerekli olan temel kavramlar ve bu kavramların bazı özellikleri ve gerektirmeleri verilecek. Sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır. Bu bölümde temel kaynak olarak Anderson ve Fuller (1992) ve Hungerford (2000) kullanılacaktır. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe R birimli bir halkadır. Halkanın toplamaya göre birim elemanı 0 ve çarpmaya göre birim elemanı 1 ile gösterilecektir.

2.1. Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 Bir R halkasında sıfırdan farklı bir a elemanına; sırasıyla $ab = 0$ ($ba = 0$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir b elemanı varsa sırasıyla bir *sol* (*sağ*) *sıfır bölen* denir. R'nin bir elemanı hem sol hem de sağ sıfır bölen ise bu eleman *sıfır bölen* olarak adlandırılır. Sıfır bölen içermeyen bir halkaya *tam halka (domain)* denir. $1_R \neq 0_R$ olmak üzere birimli, değişmeli olan bir tam halka, *tamlık bölgesi (integral domain)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 R bir halka ve, R halkasının bir I ideali ve bir α endomorfizması için; $r \in R$ olmak üzere $r^2 \in I$ iken $r \in I$ oluyorsa I'ya bir *yarıasal ideal*, $\alpha(I) \subseteq I$ oluyorsa I'ya bir α*-ideal*, $\alpha^{-1}(I) = \{a \in R \ : \ \alpha(a) \in I\} = I$ oluyorsa I'ya bir α*-değişmez ideal* denir.

Önerme 2.1.3 Her α-değişmez ideal bir α-idealdir.

İspat Gerçekten I bir α-değişmez ideal olsun. $b \in \alpha(I)$ alalım. Bu durumda $b = \alpha(a)$ olacak şekilde $a \in I$ vardır. I ideali α-değişmez olduğundan $I = \alpha^{-1}(I)$ ve buradan da $a \in \alpha^{-1}(I)$ olup $\alpha(a) = b \in I$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha(I) \subseteq I$ olduğundan I bir α-idealdir.

Tanım 2.1.4 Bir R halkasının bir I ideali için $R/I = \{r + I \ : \ r \in R\}$ kümesine *R'nin I'ya göre bölüm halkası* (ya da *R'nin homomorfik görüntüsü*) denir.

α bir R halkasının bir endomorfizması ve I; R'nin bir α-ideali ise her $a \in R$ için α endomorfizması; $\bar{\alpha}(a + I) = \alpha(a) + I$ ile tanımlanarak bir $\bar{\alpha} : R/I \to R/I$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.1.5 R bir halka ve P de R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. R'nin A, B idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P'ye R'nin bir *asal ideali* denir. R'nin tüm asal ideallerinin arakesitine R'nin *asal radikali* denir ve $P(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 Her bir $i \in I$ için R_i birer halka olmak üzere bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte

$$\{(a_i)_{i \in I} \ : \ a_i \in R_i\}$$

kümesine R_i'lerin direkt çarpımı denir ve $\prod_{i \in I} R_i$ ile gösterilir.
Her bir $i \in I$ için R_i'nin bir α_i endomorfizması yardımıyla, her $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_i$ için $\bar{\alpha}((a_i)_{i \in I}) = (\alpha_i(a_i))_{i \in I}$ ile $\prod_{i \in I} R_i$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizması tanımlanabilir.

Tanım 2.1.7 R bir halka ve ${}_R M_R$ bir bimodül olsun. R'nin M ile *aşikar genişlemesi* (trivial extension) olarak adlandırılan $R(+)M$ kümesi;

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ile tanımlanan işlemlerle bir halkadır. Bu halka $T(R, M)$ ile gösterilir. Bu halka aynı zamanda $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki matrislerin halkasına izomorftur. Yani

$$T(R, M) = R(+)M \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M \right\}$$

biçimindedir.
R'nin bir α endomorfizması, her $(a, b) \in T(R, R)$ için $\bar{\alpha}(a, b) = ((\alpha(a), \alpha(b)))$ biçiminde tanımlanarak $T(R, R)$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.1.8 R değişmeli bir halka, $h : R \to R$ bir halka endomorfizması ve M bir R-modül olsun. *R ile M'nin Nagata genişlemesi* olarak adlandırılan $R \oplus M$ kümesi

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, h(r_1) m_2 + r_2 m_1)$$

ile tanımlı işlemlerle (değişmeli olmayan) bir halka yapısındadır. Bu halka $R(+)_h M$ ile gösterilir.

Özel olarak h halkanın birim endomorfizması olarak alınırsa

$$R(+)_h M = R(+)M = T(R, M)$$

olduğu açıktır.

2.2. Polinom Halkaları

R bir halka olmak üzere R üzerindeki $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ biçimindeki tüm polinomların kümesi; polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır ve bu halka $R[x]$ ile gösterilir.
R'nin bir α endomorfizması; her $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in R[x]$ için $\bar{\alpha}(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{m} \alpha(a_i) x^i$ biçiminde tanımlanarak $R[x]$'in bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.1 R bir halka olmak üzere

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halka R üzerindeki *kuvvet serileri halkası (formal power series ring)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 R bir halka olmak üzere

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i : a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir}) \right\}$$

kümesi polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır ve bu halka *Laurent polinomlar halkası* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3 R bir halka; α, R'nin bir endomorfizması ve δ, R'nin bir α-türevi olsun. R halkasının $R[x; \alpha, \delta]$ *Ore genişlemesi*; polinomların bilinen toplama ve herhangi bir $a \in R$ için

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Eğer δ, R'nin sıfır endomorfizması ise, bu durumda $R[x; \alpha, 0]$ yerine $R[x; \alpha]$ yazılır ve bu halka *endomorfizma* *tipinin bir Ore genişlemesi* (ya da *skew polinom halkası*) olarak adlandırılır. Diğer bir ifadeyle $R[x;\alpha]$ kümesi polinomlardaki bilinen toplama işlemi ve

$$xa = \alpha(a)x$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır.

Özel olarak α, R'nin birim endomorfizması ve δ, R'nin sıfır endomorfizması olarak alınırsa $R[x;I_R,0] = R[x]$ olacağı açıktır.

2.3. Matris Halkaları

Bu bölümde bir R halkasından elde edilen bazı özel tipteki matris halkaları tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1 R bir halka olmak üzere R üzerindeki $n\times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi, matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre toplamsal birimi $n\times n$ tipindeki sıfır matrisi, çarpımsal birimi ise $n\times n$ tipindeki birim matris olan bir halkadır. Burada sıfır matrisi 0 ile birim matrisi ise I_n ile gösterilecektir. R üzerindeki $n\times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası

$$M_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} \ : \ a_{ij} \in R\}$$

ile gösterilecektir. R üzerindeki $n\times n$ tipindeki tüm üst üçgensel matrislerin halkası ise

$$T_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} \ : \ a_{ij} \in R \ \text{ ve } \ i > j \ \text{ iken } \ a_{ij} = 0\}$$

ile gösterilecektir.

R'nin bir α endomorfizması; her $[a_{ij}]_{n\times n} \in M_n(R)$ (ya da her $[a_{ij}]_{n\times n} \in T_n(R)$) için $\bar{\alpha}([a_{ij}]_{n\times n}) = [\alpha(a_{ij})]_{n\times n}$ biçiminde tanımlanarak $M_n(R)$'nin (ya da $T_n(R)$) bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.3.2 Herhangi bir R halkası üzerinde i. satır j. sütunundaki bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrise, *matris birimi (matrix unit)* denir ve E_{ij} ile gösterilir. Örneğin herhangi bir R halkası üzerindeki tüm 2×2 tipindeki matris birimleri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.3 Herhangi bir R halkası için $n = 2k \geq 2$ pozitif bir çift tam sayı olmak üzere

$$V_n(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} RE_{i,j} + \sum_{j=1}^{k-1} RE_{j,k} + RI_n$$

ve $n \geq 2$ pozitif bir tam sayı ve $k = [n/2]$ (yani; $n = 2k$'daki k değeri ve $n = 2k + 1$'deki k değeri) olmak üzere

$$U_n(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} RE_{i,j} + \sum_{j=k+2}^{n} RE_{k+1,j} + RI_n$$

matris halkaları tanımlıdır.
R'nin bir α endomorfizması; her $[a_{ij}]_{n\times n} \in V_n(R)$ (ya da her $[a_{ij}]_{n\times n} \in U_n(R)$) için

$$\bar{\alpha}([a_{ij}]_{n\times n}) = [\alpha(a_{ij})]_{n\times n}$$

biçiminde tanımlanarak $V_n(R)$'nin (ya da $U_n(R)$'nin) bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

2.4. Klasik Sağ Kesirler Halkası

Tanım 2.4.1 R bir halka olsun. $s \in R$ olmak üzere her $0 \neq r \in R$ için $rs \neq 0$ ve $sr \neq 0$ ise s'ye *düzenli (regular) eleman* denir. Başka bir ifadeyle bir $r \in R$ için $rs = 0$ veya $sr = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa s'ye *düzenli (regular) eleman* denir.

Bir halkanın birimi düzenli eleman iken sıfırı düzenli eleman değildir.

Önerme 2.4.2 Bir R halkasının tersinir elemanları düzenlidir.

İspat R bir halka ve $s \in R$ tersinir eleman olsun. $r \in R$ olmak üzere $rs = 0$ olduğunu kabul edelim. s tersinir olduğundan $rss^{-1} = 0s^{-1}$ olur. Buradan $r = 0$ olup s düzenlidir.

Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasında 2 düzenli elemandır fakat tersinir değildir. Bundan başka; bir tamlık bölgesinde sıfırdan farklı her eleman düzenlidir.

Tanım 2.4.3 R bir halka olmak üzere R'deki çarpma işlemine göre birimli ve birleşmeli olan bir alt kümesi S olmak üzere;

(i) $\nu : R \to Q$ homomorfizması her $s \in S$ için $\nu(s)$ tersinir olacak şekilde vardır.

(ii) Q'nun her elemanı $s \in S$ ve $r \in R$ için $[\nu(s)]^{-1}\nu(r)$ formundadır.

özellikleri sağlanırsa Q halkasına *R'nin S'ye göre kesirler halkası (quotient ring)* denir.

Lemma 2.4.4 $S = \{r \in R \ : \ r \text{ düzenli eleman}\}$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı bir alt monoididir.

İspat $r_1, r_2 \in S$ alalım. $r_1r_2 \in S$ yani $r_1r_2$nin düzenli olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $r(r_1r_2) = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $(rr_1)r_2 = 0$ olup r_2 düzenli eleman olduğundan $rr_1 = 0$dır. r_1 düzenli eleman olduğundan $r = 0$ bulunur. Benzer olarak $(r_1r_2)r = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $r_1(r_2r) = 0$ olup r_1 düzenli olduğundan $r_2r = 0$ olur. r_2 düzenli eleman olduğundan $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $r_1r_2 \in S$ bulunur. $1_R \in S$ ve S'de birleşme özelliği var olduğundan S, R'nin çarpımsal kapalı alt monoididir. $\square$

Tanım 2.4.5 $S = \{r \in R \ : \ r \text{ düzenli eleman}\}$ olmak üzere birebir olan $\varphi : R \to Q$ dönüşümü varsa Q'ya R'nin *klasik sağ kesirler halkası* (classical right quotient ring) denir.

α bir R halkasının bir endomorfizması; b düzenli olmak üzere $a, b \in R$ olacak şekildeki herhangi $ab^{-1} \in Q$ için $\bar{\alpha}(ab^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)^{-1}$ biçimde tanımlanarak Q'nun bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.4.6 S, R'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa S'ye bir *dominator (ya da Ore küme)* denir.

(i) Herhangi $s_1 \in S$ ve $r_1 \in R$ için $s_2r_1 = r_2s_1$ olacak şekilde $s_2 \in S$ ve $r_2 \in R$ vardır.

(ii) $r \in R$ ve $s \in S$ için $rs = 0$ ise $s'r = 0$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır.

Önerme 2.4.7 Eğer R halkası, S'ye göre klasik sağ (sol) kesir halkasına sahipse S Ore kümedir.

2.5. Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda terslenebilir halkalarla ilişkileri olan bazı halka sınıflarının tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 2.5.1 R bir halka, α; R'nin bir endomorfizması ve $a \in R$ olmak üzere $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ özelliğini sağlayan α endomorfizması Krempa (1996) tarafından bir *katı (rigid)* endomorfizma olarak adlandırılır. Hong vd. (2000) bir R halkasının bir katı α endomorfizması varsa R halkasını α-*katı* olarak adlandırılmışlardır.

Tanım 2.5.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa a elemanı *sıfırüslü (nilpotent)* olarak adlandırılır. Bu özelliği sağlayan en küçük n doğal sayısına da a elemanının *sıfırüslülük göstergesi (nilpotency index)* denir. Değişmeli bir R halkasının her bir elemanı sıfırüslü olan bir N idealine *nil ideal* denir (Anderson and Fuller 1992).

Tanım 2.5.3 Bir R halkasının sıfırdan farklı sıfırüslü elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R'ye *inmiş (reduced)* halka denir. İnmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğu açıktır.

Uyarı 2.5.4 α bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R halkası α-katı ise R halkası inmiştir. Gerçekten; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(a^2) = 0$ olduğundan $0 = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(a)\alpha(a)\alpha(\alpha(a))) = a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a))$ bulunur. R halkası α-katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve tekrar kabulden $a = 0$ elde edilir.

Tanım 2.5.5 $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *simetrik* (symmetric) olarak adlandırılır (Lambek 1971). Anderson ve Camillo (1999), simetrik halkalar için ZC_3 gösterimini kullanarak bu halka sınıfının özelliklerini incelemiştir.

Önerme 2.5.6 Her inmiş halka simetriktir (Shin 1973).

İspat R bir halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu eşitlik sağdan b ile çarpılırsa $abcb = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bcba = 0$ bulunur. Son eşitlik sağdan c ile çarpılırsa $bcbac = 0$ elde edilir. R terslenebilir olduğundan $cbacb = 0$ olur. Bu durumda $(cba)^2 = cbacba = 0$ ve R inmiş olduğundan $cba = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $acb = 0$ bulunur. Böylece R simetriktir.

Fakat simetrik olup da, inmiş olmayan halka sınıfları da vardır. Bununla birlikte değişmeli halkaların simetrik olduğu açıktır.

Tanım 2.5.7 $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkası *yarıdeğişmeli (semicommutative)* olarak adlandırılır (Shin 1973). Bir R halkasının yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ sağ sıfırlayan (ya da $l_R(a)$ sol sıfırlayan) kümesinin R'nin bir ideali olmasıdır. Shin (1973) yarıdeğişmeli halkalar için *SI özelliğine* sahip halkalar adını da kullanmıştır. Yarıdeğişmeli halkalar aynı zamanda Habep (1990) tarafından *zero insertive* olarak çalışılmıştır.

Önerme 2.5.8 R halkası inmiş ise yarıdeğişmelidir.

İspat Gerçekten; R inmiş olsun. R'nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $abr = 0$ olsun. Önerme 2.5.6 gereğince her inmiş halka simetrik olduğundan $arb = 0$ elde edilir. Böylece $aRb = 0$, yani R halkası yarıdeğişmelidir.

Tanım 2.5.9 Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *özüslü (idempotent)* denir. Birimli bir halka her zaman 0 ve 1 özüslü elemanlarına sahiptir. R halkasının bir e özüslü elemanı R'nin merkezinde ise, yani her $a \in R$ için, $ae = ea$ oluyorsa e özüslü elemanı *merkezi özüslü (central idempotent)* olarak adlandırılır (Anderson and Fuller 1992).

Tanım 2.5.10 Bir R halkasının tüm özüslü elemanları merkezi ise R halkasına *abelyan halka* denir.

Önerme 2.5.11 Her yarıdeğişmeli halka abelyan halkadır.

İspat R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1-e) = 0$'dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $eR(1-e) = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ bulunur. Buradan $ere = er$ elde edilir. Diğer taraftan $(1-e)e = 0$'dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $(1-e)Re = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir

$r \in R$ için $(1-e)re = 0$ bulunur. Buradan $ere = re$ elde edilir. Sonuç olarak herhangi bir $r \in R$ için $er = re$ olduğundan e özüslü elemanı merkezidir, yani R halkası abelyandır.

Uyarı 2.5.12 Yukarıda tanımları verilen halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Fakat genel olarak bu gerektirmelerin herbirinin karşıtının doğru olmadığını gösteren örnekler bulunmaktadır.

R α-katı$\Rightarrow$ R inmiş$\Rightarrow$ R simetrik$\Rightarrow$ R terslenebilir $\Rightarrow$ R yarıdeğişmeli$\Rightarrow$ R abelyan

Tanım 2.5.13 R bir halka ve $a \in R$ olsun. $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkası *yarıasal (semiprime)* olarak adlandırılır. Yarıasal halkaların sınıfının, inmiş halkaların sınıfı tarafından kapsandığı çok açıktır.

Tanım 2.5.14 R bir halka olmak üzere R'nin boştan farklı her alt kümesinin sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $\emptyset \neq X \subseteq R$ alt kümesi için $r_R(X) = eR$ (ya da $l_R(X) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *Baer* olarak adlandırılır (Kaplansky 1968).

Tanım 2.5.15 R bir halka olmak üzere R'nin her bir sağ (ya da sol) ideali bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $\emptyset \neq I \trianglelefteq R$ ideali için $r_R(I) = eR$ (ya da $l_R(X) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *quasi-Baer* olarak adlandırılır (Clark 1967).

Tanım 2.5.16 R bir halka olmak üzere R'nin her bir temel sağ ideali projektif ya da denk olarak R'nin her bir elemanının sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $a \in R$ elemanı için $r_R(a) = eR$ (ya da $l_R(a) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *sağ principally projective* (*p.p.*) (ya da *sol p.p.*) olarak adlandırılır. R halkası hem sağ *p.p.* hem de sol *p.p.* ise kısaca *p.p.-halka* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.17 R bir halka olmak üzere R'nin her bir temel sağ (ya da sol) idealinin sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir özüslü eleman tarafından üretiliyorsa, yani $\emptyset \neq I \lhd R$ temel sağ (ya da sol) ideali için $r_R(I) = eR$ (ya da $l_R(I) = Rf$) olacak şekilde bir

$e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası bir *sağ principally quasi-Baer* (ya da kısaca *sağ (ya da sol) p.q.-Baer*) olarak adlandırılır. R halkası hem sağ $p.q$-Baer hem de sol $p.q$-Baer ise kısaca *p.q-Baer halka* olarak adlandırılır (Birkenmeier *et al.* 2001).

Uyarı 2.5.18 Baer halkaların $p.p.$-halka olduğu açıktır. Bundan başka abelyan sağ (sol) $p.p.$-halkalar inmiş halkalardır.

Tanım 2.5.19 R bir halka olmak üzere herhangi $a \in R$ için $a^2 = 0$ iken $a \in C(R)$ oluyorsa R halkası *merkezi inmiş (central reduced)* olarak adlandırılır (Agayev *et al.* 2009).

Tanım 2.5.20 Bir R halkasının tüm tersinir elemanları merkezi ise, R halkası *tersinir merkezi (unit central)* olarak adlandırılır (Khurono *et al.* 2010).

Tanım 2.5.21 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. $ab = 1$ iken $ba = 1$ oluyorsa R halkası *direkt olarak sonlu (directly finite)* olarak adlandırılır (Agayev *et al.* 2009).

Tanım 2.5.22 Herhangi $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken herbir $r \in R$ için arb, R'nin bir özüslü elemanı oluyorsa R halkası *zayıf yarıdeğişmeli* (*weakly semicommutative*) olarak adlandırılır (Liang *et al.* 2007).

3. TERSLENEBİLİR HALKALAR

Bu bölümde ilk olarak Kim ve Lee (2003) makalesi esas alınarak terslenebilir halka sınıfı tanıtılacak ve yarıdeğişmeli halkaların sınıfı ile ilişkilerinden bahsedilecektir. Daha sonra terslenebilir halkaların bazı özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenecektir.

3.1. Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri

Habeb (1990), $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkasını *sıfır değişmeli (zero commutative)* olarak adlandırmıştır. Cohn (1999), bu özelliği sağlayan halkaları *terslenebilir (reversible)* adı altında incelemiştir. Terslenebilir halkalar aynı zamanda Anderson ve Camillo (1999) *sıfır çarpımlar değişir (zero products commute)* özelliğine sahip halkalar olarak (ZC_2 gösterimiyle) çalışmışlardır. Ayrıca Krempa ve Niewieczerzal (1977) bu özelliği sağlayan halkalara C_0 *halka* adını vermişlerdir. Bu tezde terslenebilir halka ifadesi kullanılacaktır. Öncelikle aşağıdaki örnekte, terslenebilir halka kavramına neden ihtiyaç duyulduğu ifade edilmiştir.

Örnek 3.1.1

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R'nin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları için $AB = 0$ iken $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olup, herhangi bir halkanın terslenebilirliği sağlamak zorunda olmadığı görülür.

Tanım 3.1.2 R bir halka olmak üzere her bir $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkası *terslenebilir (reversible)* olarak adlandırılır.

Kim ve Lee (2003), aşağıdaki önermeyi ispatlayarak terslenebilir ve yarıdeğişmeli halkalar arasındaki ilişkiyi göstermişlerdir.

Önerme 3.1.3 R bir inmiş halka olsun.

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad : \quad a, b, c, d \in R \right\}$$

yarıdeğişmeli bir halkadır.

İspat $S_3(R)$'nin $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$ elemanları (a_1, b_1, c_1, d_1) ve (a_2, b_2, c_2, d_2) biçiminde yazılabilir. Şimdi $S_3(R)$'nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. $(a_1, b_1, c_1, d_1).(a_2, b_2, c_2, d_2) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$a_1a_2 = 0 \tag{3.1}$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$a_1d_2 + d_1a_2 = 0 \tag{3.4}$$

eşitlikleri elde edilir. Önerme 2.5.8 gereğince R inmiş olduğundan R yarıdeğişmelidir. Dolayısıyla (3.1) eşitliğinden $a_1Ra_2 = 0$ olur. (3.2) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa $a_1b_2a_2 + b_1a_2a_2 = 0$ olur. Buradan $a_1b_2a_2 \in a_1Ra_2 = 0$ olup $b_1a_2a_2 = 0$ bulunur. R inmiş (yani terslenebilir) olduğundan $a_2b_1a_2 = 0$ dır. $(b_1a_2)^2 = 0$ olur ki R inmiş olduğundan $b_1a_2 = 0$ olur. (3.2)'de yerine yazarsak $a_1b_2 = 0$ olur. Bu durumda R'nin yarıdeğişmeli olduğu kullanılarak $b_1Ra_2 = 0$ ve $a_1Rb_2 = 0$ bulunur. Benzer şekilde (3.4) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa $a_1d_2a_2 + d_1a_2a_2 = 0$ olup, buradan $d_1a_2 = 0$ bulunur. Bu ifade (3.4)'te yerine yazılırsa, $a_1d_2 = 0$ olur. R yarıdeğişmeli olduğundan $d_1Ra_2 = 0$ ve $a_1Rd_2 = 0$ bulunur. Şimdi (3.3) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa $a_1c_2a_2 + b_1d_2a_2 + c_1a_2a_2 = 0$ olup, $a_1Ra_2 = 0$ ve $b_1Ra_2 = 0$ olduğundan $c_1a_2 = 0$ olur. Bu ifade (3.3)'te yerine yazılırsa,

$$a_1c_2 + b_1d_2 = 0 \tag{3.5}$$

bulunur. (3.5) eşitliği sağdan d_2 ile çarpılırsa $a_1c_2d_2 + b_1d_2d_2 = 0$ olup, $a_1Rd_2 = 0$ olduğundan $b_1d_2 = 0$ olur. Bu ifade (3.5)'te yerine yazılırsa, $a_1c_2 = 0$ olur. R yarıdeğişmeli olduğundan $b_1Rd_2 = 0$ ve $a_1Rc_2 = 0$ olur. Sonuç olarak her $(r, s, t, u) \in S_3(R)$ için,

$$\begin{aligned}(a_1,b_1,c_1,d_1).(r,s,t,u).(a_2,b_2,c_2,d_2) =&(a_1ra_2, a_1rb_2+a_1sa_2+b_1ra_2, a_1rc_2+a_1sd_2\\ &+b_1rd_2+a_1ta_2+b_1ua_2+c_1ra_2, a_1rd_2\\ &+a_1ua_2+d_1ra_2)=0.\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $S_3(R)$'nin keyfi bir $\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ elemanı için,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}=0$$

olduğundan $S_3(R)$ yarıdeğişmelidir. $\square$

Ayrıca $n \geq 2$ olmak üzere

$$S_n(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \quad : \quad a, a_{ij} \in R\right\}$$

halkası tanımlanabilir. Önerme 3.1.3 temel alınarak, $n \geq 4$ için $S_n(R)$'nin yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 3.1.4 R bir halka olsun.

$$S_4(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad : \quad a, a_{ij} \in R\right\}$$

halkasını ele alalım. $S_4(R)$ halkasının iki elemanı için,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

iken,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan $S_4(R)$ yarıdeğişmeli değildir. Benzer şekilde $n \geq 5$ için, $S_n(R)$'nin yarıdeğişmeli olmadığı gösterilebilir.

Lambek (1971) tarafından ifade edilen, Kim ve Lee (2003) tarafından yeniden ispatlanan terslenebilir ve yarıdeğişmeli halkalar arasındaki ilişkinin gösterildiği aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.5 Terslenebilir halkalar yarıdeğişmelidir.

İspat $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve her $r \in R$ için $bar = 0$ olup tekrar R'nin terslenebilir olduğu kullanılarak $arb = 0$ elde edilir. Böylece $aRb = 0$ olduğundan R yarıdeğişmelidir. □

Kim ve Lee (2003), Lemma 3.1.5'in karşıt ifadesinin doğru olmadığını, Önerme 3.1.3 gereğince aşağıdaki örneği vererek göstermiştir.

Örnek 3.1.6 R inmiş bir halka olmak üzere Önerme 3.1.3 gereğince

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası yarıdeğişmelidir. Fakat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ iken

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan $S_3(R)$ terslenebilir değildir. □

Aşağıdaki önerme Kim ve Lee (2003) tarafından ispatlanmış olup terslenebilir bir halkaya örnek teşkil eder.

Önerme 3.1.7 R bir inmiş halka olmak üzere, R'nin aşikar genişlemesi terslenebilirdir.

İspat R'nin inmiş bir halka olduğunu kabul edelim. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buradan $ac = 0 = ad + bc$ olup R inmiş olduğundan terslenebilir olup $ca = 0$ ve buradan $0 = cad + cbc = cbc$ bulunur. Bu durumda $(bc)^2 = bcbc = 0$ olup R inmiş olduğundan $bc = 0$ ve buradan $ad = 0$ elde edilir. Böylece R terslenebilir olduğundan

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0$$

olup $T(R,R)$ terslenebilirdir. □

Önerme 3.1.7 gereğince inmiş bir halkanın aşikar genişlemesi terslenebilirdir. Fakat Kim ve Lee (2003) tarafından verilen aşağıdaki örnekten görüleceği gibi terslenebilir bir halkanın aşikar genişlemesi terslenebilir olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.8 Reel sayılar kümesi üzerindeki $\mathbb{H}$ (Hamilton) quaterniyonlar halkasını göz önüne alalım. $\mathbb{H}$'nin inmiş olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla Önerme 3.1.7 gereğince $R = T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ aşikar genişlemesi terslenebilirdir. Fakat $S = T(R,R)$ olarak adlandırılırsa S terslenebilir değildir. Gerçekten,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

iken

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan S yarıdeğişmeli değildir. Böylece Lemma 3.1.5 gereğince S terslenebilir değildir. □

Lemma 3.1.9 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R terslenebilirdir.

(ii) Herbir $S \subseteq R$ için $r_R(S) = l_R(S)$'dir.

(iii) Herbir $a \in R$ için $r_R(a) = l_R(a)$'dır.

(iv) Herhangi $\emptyset \neq A, B \subseteq R$ için, $AB = 0$ iken $BA = 0$'dır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) R terslenebilir ve $S \subseteq R$ olduğunu kabul edelim. $x \in r_R(S)$ alalım. Bu durumda $Sx = 0$'dır. Her $s \in S$ için $sx = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $xs = 0$ bulunur. Buradan $xS = 0$ olduğundan $x \in l_R(S)$ olup $r_R(S) \subseteq l_R(S)$ bulunur. Benzer şekilde $l_R(S) \subseteq r_R(S)$ olduğu gösterilir. Böylece $r_R(S) = l_R(S)$ elde edilir. $\square$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Kabul edelim ki $S \subseteq R$ için $r_R(S) = l_R(S)$ olsun. Özel olarak $S = \{a\} \subset R$ için $r_R(a) = l_R(a)$ olduğu açıktır. $\square$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Her bir $a \in R$ için $r_R(a) = l_R(a)$ ve $\emptyset \neq A, B \subseteq R$ olmak üzere

$$AB = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i | a_i \in A, b_i \in B\} = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi $a \in A, b \in B$ için $ab = 0$'dır. Buradan $b \in r_R(a) = l_R(a)$ olup kabulden $ba = 0$'dır. Böylece $BA = 0$ olduğu açıktır. $\square$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Herhangi $\emptyset \neq A, B \subseteq R$ için, $AB = 0$ iken $BA = 0$ olduğunu kabul edelim. R'nin terslenebilir olduğunu gösterelim. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ altkümeleri için $AB = 0$ olup kabulden $ba \in BA = 0$ olduğundan R terslenebilirdir. $\square$

Lemma 3.1.10 Terslenebilir halkaların sınıfı, direkt çarpımlar ve althalkalar altında kapalıdır (Kim and Lee 2003).

İspat Her bir $i \in I$ için R_i terslenebilir bir halka olmak üzere,

$$\prod_{i\in I} R_i = \{(a_i)_{i\in I} | a_i \in R_i\}$$

terslenebilir olduğunu gösterelim. $(a_i)_{i\in I}$,$(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i$ için, $(a_i)_{i\in I}.(b_i)_{i\in I} = 0$ olsun. $(a_i.b_i)_{i\in I} = (0)_{i\in I}$. Her $i \in I$ için $a_i b_i = 0$ olup, R_i terslenebilir olduğundan $b_i a_i = 0$ olur. Buradan $(b_i.a_i)_{i\in I} = (0)_{i\in I}$ yani $(b_i)_{i\in I}.(a_i)_{i\in I} = 0$ bulunur. Böylece $\prod R_i$ terslenebilirdir.

R terslenebilir ve $S \leq R$ olsun. S'nin terslenebilir olduğunu gösterelim. $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 s_2 = 0$ olsun. $S \leq R$, $s_1, s_2 \in R$ ve R terslenebilir olduğundan $s_2 s_1 = 0$ elde edilir. □

Kim ve Lee (2003) bir halkanın asal radikalini kullanarak o halkanın terslenebilir olması için aşağıdaki gibi bir karakterizasyon vermişlerdir.

Önerme 3.1.11 R bir halkası ve R'nin asal radikali $P(R)$ ile gösterilsin. $P(R)^2 = 0$ ve $\{a, b\} \nsubseteq P(R)$ olmak üzere R halkasının herhangi $\{a, b\}$ altkümesi için $ab = 0$ iken $ba = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R terslenebilirdir.

İspat Gerçekten R halkasının a ve b elemanları için $ab = 0$ olsun. Eğer $\{a, b\} \nsubseteq P(R)$ ise kabulden $ba = 0$ olup R terslenebilirdir. Eğer $\{a, b\} \subseteq P(R)$ ise $P(R)^2 = 0$ olduğundan $ba = 0$ olup R'nin terslenebilir olduğu açıktır. □

Kim ve Lee (2003), Önerme 3.1.11'deki koşulların fazladan olmadığını, aşağıdaki örnekleri vererek göstermişlerdir.

Örnek 3.1.12 Bir halkanın terslenebilir olması için $P(R)^2 = 0$ olması fazladan bir koşul değildir. Hatta $n \geq 3$ için $P(R)^n = 0$ olsa bile R terslenebilir olmayabilir. Gerçekten S bir bölümlü halka olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in S \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R'nin asal radikali $P(R) = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup, $P(R)^3 = 0$ olmasına rağmen $P(R)^2 \neq 0$'dır. Ayrıca Örnek 3.1.6 gereğince R terslenebilir değildir. $\square$

Örnek 3.1.13 Bir halkanın terslenebilir olması için $\{a, b\} \nsubseteq P(R)$ olmak üzere $ab = 0$ iken $ba = 0$ olma koşulu da fazladan değildir. Gerçekten, S bir yarıasal halka olmak üzere,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in S \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R'nin asal radikali $P(R) = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $P(R)^2 = 0$ olur. Fakat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $B \notin P(R)$ olduğundan, $\{A, B\} \nsubseteq P(R)$'dir.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iken,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olup R terslenebilir değildir. $\square$

Örnek 3.1.14 Önerme 3.1.11'deki koşulların her ikisi de kaldırılırsa halka terslenebilir olmaz. Gerçekten D inmiş bir halka ve $S = D \oplus D = \{(d_1, d_2) \ : \ d_1, d_2 \in D\}$ olmak üzere,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} (d_1, d_2) & (d_3, d_4) & (d_5, d_6) \\ 0 & (d_1, d_2) & (d_7, d_8) \\ 0 & 0 & (d_1, d_2) \end{pmatrix} \ : \ (d_i, d_j) \in S \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R halkasının asal radikali $P(R) = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $P(R)^2 \neq 0$'dır. Ayrıca $Y = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & 0 \\ 0 & (1,0) & 0 \\ 0 & 0 & (1,0) \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $Y \notin P(R)$ olduğundan $\{X, Y\} \nsubseteq P(R)$'dir. Bununla birlikte

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & 0 \\ 0 & (1,0) & 0 \\ 0 & 0 & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

iken

$$YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (0,1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R terslenebilir değildir. $\square$

Örnek 3.1.15 Önerme 3.1.11'in karşıtı genelde doğru değildir. Gerçekten n bir pozitif tamsayı olmak üzere 2^n modülüne göre tamsayıların halkası $R = \mathbb{Z}_{2^n}$ olsun. R'nin değişmeli olduğu açıktır. Bundan dolayı R terslenebilirdir. Fakat R'nin asal radikali $P(R) = \{0, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ biçiminde olup $P(R)^n = 0$ olmasına rağmen $i \leq n-1$ için $P(R)^i \neq 0$. $\square$

Bir R halkasının sıfırdan farklı bir I öz ideali ve R/I bölüm halkası terslenebilir iken R'nin terslenebilir olmasından şüphe edilebilir. Fakat Kim ve Lee (2003) aşağıdaki örneği vererek bu şüphenin doğruluğunu göstermişlerdir.

Örnek 3.1.16 S bir bölümlü halka olmak üzere Örnek 3.1.12'deki terslenebilir olmayan

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \; : \; a, b, c, d \in S \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. $a \neq 0$ olmak üzere R'nin $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ biçimindeki her eleman terslenebilir olduğundan sıfırdan farklı tüm öz idealleri aşağıdaki biçimdedir.

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ idealini göz önüne alalım. I_1 idealinde aşağıdaki biçimde iki elemanın çarpımı

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan I_1 terslenebilir değildir.

j=2,3,4 için I_j'nin elemanlarının sıfırüslülük göstergeleri 2 olduğundan I_j ideallerinin terslenebilir olduğu açıktır. Şimdi

$$\begin{aligned} R/I_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + I_2 \ : \ a,b,c,d \in S \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I_2 \ : \ a,b,c,d \in S \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + I_2 \ : \ a,d \in S \right\} \end{aligned}$$

bölüm halkasını göz önüne alalım.R/I_2'nin terslenebilir olduğunu gösterelim.

$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} + I_2$, $\bar{\beta} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} + I_2 \in R/I_2$ için

$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{0}$ olsun. Bu durumda

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} + I_2\right)\left(\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} + I_2\right) = I_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1x_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ 0 & 0 & x_1x_2 \end{pmatrix} + I_2 = I_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1x_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ 0 & 0 & x_1x_2 \end{pmatrix} \in I_2$$

olduğundan $x_1x_2 = 0$ ve $x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ bulunur. Burada iki durum söz konusudur.

1.Durum: $x_1 \neq 0$ ise S bölümlü halka olduğundan $x_2 = 0$ ve $y_2 = 0$ bulunur.

2.Durum: $x_2 \neq 0$ ise S bölümlü halka olduğundan $x_1 = 0$ ve $y_1 = 0$ bulunur. Böylece,

$$\bar{\beta}\bar{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} + I_2\right)\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} + I_2\right) = \bar{0}$$

olur. Dolayısıyla R/I_2 terslenebilirdir. Benzer olarak R/I_3 ve R/I_4 bölüm halkalarının da terslenebilir olduğu yukarıdaki biçimde gösterilebilir. □

Kim ve Lee (2003), halkanın ideali üzerindeki koşulu güçlendirerek halkanın terslenebilir olması için aşağıdaki gibi bir karakterizasyon vermişlerdir.

Önerme 3.1.17 Bir R halkasının uygun bir I ideali için R/I bölüm halkası terslenebilir bir halka olsun. I inmiş ise, bu durumda R terslenebilirdir.

İspat I inmiş ve R/I terslenebilir olsun. R'nin terslenebilir olduğunu gösterelim. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ab \in I$ ve buradan $(a + I)(b + I) = I$ olup R/I terslenebilir olduğundan $(b + I)(a + I) = I$ olur. Buradan $ba + I = I$ olup $ba \in I$ bulunur. $(ba)^2 = baba = 0$ ve I inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Sonuç olarak R terslenebilirdir. □

3.2. Terslenebilir Halkaların Genişlemeleri

Bu bölümde terslenebilir bir R halkasının bazı genişlemelerinin terslenebilir olup olmadığı, ya da hangi koşullar altında terslenebilir olacağı incelenecektir.

Önerme 3.2.1 Bir R halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) R halkasının terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul e, R'nin bir merkezi özüslü elemanı olmak üzere eR ve $(1-e)R$ halkalarının terslenebilir olmasıdır.

(ii) R'nin merkezi düzgün elemanlarının çarpımsal kapalı bir alt kümesi $\triangle$ olmak üzere R'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\triangle^{-1}$ R'nin terslenebilir olmasıdır.

İspat *(i)* $(\Rightarrow)$ R terslenebilir olsun. Terslenebilir halkalar, alt halkalar altında kapalı olduğundan eR ve $(1 - e)R$'nin terslenebilir olduğu açıktır.
$(\Leftarrow)$ eR ve $(1 - e)R$ terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu eşitlik soldan e ile çarpılıp e'nin merkesi özüslü olma özelliği kullanılırsa $(ea)(eb) = 0$ elde edilir. eR terslenebilir olduğundan $(eb)(ea) = 0$ olup $eba = 0$ bulunur. Diğer yandan $(1 - e)ab = 0$ için $(1 - e)^2ab = 0$ olup buradan $((1 - e)a)((1 - e)b) = 0$ bulunur. $(1 - e)R$ terslenebilir olduğundan $((1 - e)b)((1 - e)a) = 0$ olduğundan $(1 - e)ba = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $ba = eba + (1 - e)ba = 0 + 0 = 0$ olduğundan R terslenebilirdir. □
(ii) $(\Leftarrow)$ $\triangle^{-1}$ R terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $ab = 1^{-1}ab = 0$ olduğundan $(1^{-1}a)(1^{-1}b) = 0$ olup kabulden $(1^{-1}b)(1^{-1}a) = 0$ bulunur. Buradan $1^{-1}ba = 0$ olacağından $ba = 0$ elde edilir. Böylece R terslenebilirdir.
$(\Rightarrow)$ R terslenebilir olsun. $u^{-1}a, v^{-1}b \in \triangle^{-1}$ R için $(u^{-1}a)(v^{-1}b) = 0$ olsun. Bu durumda $(u^{-1}v^{-1})ab = 0$ ve buradan $(vu)^{-1}ab = 0$ olup $ab = 0$ bulunur. R ters-

lenebilir olduğundan $ba = 0$ bulunur. $(uv)^{-1}ba = 0$ olacağından $(v^{-1}u^{-1})ba = 0$ olup $(v^{-1}b)(u^{-1}a) = 0$ elde edilir. Bu durumda $\triangle^{-1}$ R terslenebilirdir. $\square$

Önerme 3.2.2

(i) R simetrik bir halka ve I, R'de bir sıfırlayan olacak şekilde bir ideal olsun. Bu durumda R/I terslenebilirdir.

(ii) R terslenebilir ve S tam halka ise, $D = R \times S$ Dorroh genişlemesi terslenebilirdir.

(iii) R değişmeli bir tam halka ve σ, R'nin bir monomorfizması olsun. Bu durumda R'nin R ve σ ile Nagata genişlemesi terslenebilirdir.

İspat *(i)* R simetrik bir halka ve $J \subseteq R$ olmak üzere $I = r_R(J)$ olacak şekilde I, R'nin bir ideali olsun. $a + I, b + I \in R/I$ olmak üzere $(a + I)(b + I) = I$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $ab + I = I$ olup $ab \in I$ bulunur. $I = r_R(J)$ olduğundan $Jab = 0$'dır. Yani her $c \in J$ için $cab = 0$ olup R simetrik olduğundan $cba = 0$ ve buradan $Jba = 0$ olur. $ba \in r_R(J) = I$ olduğundan $(b + I)(a + I) = I$ olup R/I terslenebilirdir. $\square$

(ii) R terslenebilir ve S bir tam halka olsun. $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D = R \times S$ olmak üzere $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1, s_1s_2) = (0, 0)$$

olup $r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = 0$ ve $s_1s_2 = 0$ bulunur. S bir tam halka olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ olmalıdır. Burada iki durum sözkonusudur.

1.durum: $s_1 = 0$ ise, $r_1r_2 + s_2r_1 = 0$ olur. Buradan $r_1(r_2 + s_2) = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $(r_2 + s_2)r_1 = 0$ elde edilir. Böylece

$$(r_2, s_2)(r_1, s_1) = (r_2r_1 + s_2r_1 + s_1r_2, s_2s_1) = (0, 0)$$

olduğundan D terslenebilirdir.

2.durum: $s_2 = 0$ ise, $r_1r_2 + s_1r_2 = 0$ olur. Buradan $(r_1 + s_1)r_2 = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $r_2(r_1 + s_1) = 0$ elde edilir. Böylece

$$(r_2, s_2)(r_1, s_1) = (r_2r_1 + s_2r_1 + s_1r_2, s_2s_1) = (0, 0)$$

olduğundan D terslenebilirdir. $\square$

(iii) R değişmeli bir tam halka ve σ, R'nin bir monomorfizması olsun. $N = R \oplus M$ Nagata genişlemesinin terslenebilir olduğunu gösterelim. $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in N$ olmak üzere $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $r_1 r_2 = 0$ ve $\sigma(r_1)m_2 + r_2 m_1 = 0$ bulunur. R bir tam halka olduğundan $r_1 = 0$ veya $r_2 = 0$ olmalıdır. Burada iki durum sözkonusudur.

1.durum: $r_1 = 0$ ise, bu durumda $r_2 m_1 = 0$ olup buradan $r_2 = 0$ veya $m_1 = 0$ bulunur. Böylece $(r_2, m_2)(r_1, m_1) = (r_2 r_1, \sigma(r_2)m_1 + r_1 m_2) = (0, 0)$ olduğundan N terslenebilirdir.

2.durum: $r_2 = 0$ ise, bu durumda $\sigma(r_1)m_2 = 0$ olup buradan $\sigma(r_1) = 0$ veya $m_2 = 0$ bulunur. σ monomorfizma olduğundan $r_1 = 0$ veya $m_2 = 0$'dır. Böylece $(r_2, m_2)(r_1, m_1) = (r_2 r_1, \sigma(r_2)m_1 + r_1 m_2) = (0, 0)$ olduğundan N terslenebilirdir. $\square$

Önerme 3.2.2 (iii)'den R halkası değişmeli inmiş iken de bu özelliğin sağlanıp sağlanmadığından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.3 D karakteristiği 0 olan bir tam halka olmak üzere bileşensel toplama ve çarpma işlemlerine göre $R = D \oplus D$ halkasını göz önüne alalım.

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd) = (ca, bd) = (c, d)(a, b)$$

olduğundan R değişmelidir. Ayrıca $(a, b) \in R$ için $((a, b))^2 = (a^2, b^2) = (0, 0)$ iken D domain olduğundan $a = 0$ ve $b = 0$ ve buradan $(a, b) = (0, 0)$ olduğundan R inmiştir. Fakat $(0, 0) \neq (1, 0), (0, 1) \in D$ için $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$ olduğundan R bir tam halka değildir.

Şimdi $\sigma((a, b)) = (b, a)$ ile tanımlı $\sigma : R \longrightarrow R$ endomorfizmasını göz önüne alalım. σ'nın monomorfizma olduğu açıktır. Ayrıca R'nin R ve σ ile Nagata genişlemesi $N = R \oplus R = \{((a, b), (c, d)) \ : \ (a, b), (c, d) \in R\}$ terslenebilir değildir. Gerçekten, $((0, 1)(0, 1))((1, 0)(0, 1)) = ((0, 1)(1, 0), \sigma((0, 1))(0, 1) + (1, 0)(0, 1)) = ((0, 0), (0, 0))$'dır. Fakat,

$((1, 0)(0, 1))((0, 1)(0, 1)) = ((1, 0)(0, 1), \sigma((1, 0))(0, 1) + (0, 1)(0, 1)) = ((0, 0), (0, 2))$ $\neq 0$ olur. $\square$

Aşağıda bir R halkasının polinom halkasına taşınabilen bazı özellikleri ifade edilmiştir.

- R halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ polinom halkasının değişmeli olmasıdır.
- R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ polinom halkasının inmiş olmasıdır.
- R halkasının Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ polinom halkasının Armendariz olmasıdır.
- R halkasının abelyan olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ polinom halkasının abelyan olmasıdır.

Yukarıdaki özellikler göz önüne alındığında R halkası terslenebilir iken $R[x]$ polinom halkasının terslenebilir olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 3.2.4 $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ olmak üzere $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$ sıfır sabit terimli polinomların serbest cebiri olsun. A birimsiz bir halkadır. $\mathbb{Z}_2 + A$'nın

$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2,$$
$$a_0rb_0, a_2rb_2, b_0a_0, b_0a_1 + b_1a_0, b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0, b_1a_2 + b_2a_1,$$
$$b_2a_2, b_0ra_0, b_2ra_2, (a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2),$$
$$(b_0 + b_1 + b_2)r(a_0 + a_1 + a_2), r_1r_2r_3r_4$$

elemanları tarafından üretilen I idealini göz önüne alalım. $A^4 \in I$ olduğu açıktır. $R = \mathbb{Z}_2 + A/I$ olsun. $R[x] = (\mathbb{Z}_2 + A)/I[x]$ olur. $(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + a_2b_2x^4 \in I[x]$ olur. Fakat $(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0cb_0 + (a_0cb_1 + a_1cb_0)x + (a_0cb_2 + a_1cb_1 + a_2cb_0)x^2 + (a_1cb_2 + a_2cb_1)x^3 + (a_2cb_2)x^4 \notin I[x]$. olduğundan $R[x]$ yarıdeğişmeli değildir. Bundan dolayı $R[x]$ terslenebilir değildir.

Şimdi R'nin terslenebilir olduğunu gösterelim. $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ bilinmeyenlerinin herbir çarpımına monomial, n tane çarpımının sayısına monomialin derecesi denir. $H_n = \{n.\text{dereceden tüm monomiallerin lineer kombinasyonu}\}$ kümesi sonludur. Ayrıca R'nin I ideali homogeneous, yani $r_i \in H_i$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{s} r_i \in I$ iken $r_i \in I$'dir.

İddia 1: $f_1, g_1 \in H_1$ olmak üzere $f_1g_1 \in I$ ise, bu durumda $g_1h_1 \in I$'dır.
I'nın tanımından sadece aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$$(f_1 = a_0, g_1 = b_0)$$

$$(f_1 = a_2, g_1 = b_2)$$

$$(f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2)$$

$$(f_1 = b_0, g_1 = a_0)$$

$$(f_1 = b_2, g_1 = a_2)$$

$$(f_1 = b_0 + b_1 + b_2, g_1 = a_0 + a_1 + a_2)$$

Yine I'nın tanımı kullanılarak bu iddianın doğru olduğu görülür.
İddia 2: $f, g \in A$ olmak üzere $fg \in I$ ise, bu durumda $gf \in I$'dır.
$i \geq 4$ için $Hi \subseteq I$ olduğundan uygun $f_1, g_1 \in H_1$, $f_2, g_2 \in H_2$, $f_3, g_3 \in H_3$ ve $f_4, g_4 \in I$ için $f = f_1+f_2+f_3+f_4$ ve $g = g_1+g_2+g_3+g_4$ yazılırsa $h \in I$ olmak üzere $fg = f_1g_1+f_1g_2+f_2g_1+h$ biçiminde olur. $fg \in I$ olduğundan $f_1g_1+f_1g_2+f_2g_1+h \in I$ olur. I homogeneous olduğundan $f_1g_1 \in I$, $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$'dır. *İddia1* den dolayı $g_1f_1 \in I$ olduğu açıktır. $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$ olduğundan,

$$f_1 = a_0 \ , \ g_1 = b_0 \tag{3.6}$$

$$f_1 = a_2 \ , \ g_1 = b_2 \tag{3.7}$$

$$f_1 = a_0 + a_1 + a_2 \ , \ g_1 = b_0 + b_1 + b_2 \tag{3.8}$$

$$f_1 = b_0 \ , \ g_1 = a_0 \tag{3.9}$$

$$f_1 = b_2 \ , \ g_1 = a_2 \tag{3.10}$$

$$f_1 = b_0 + b_1 + b_2 \ , \ g_1 = a_0 + a_1 + a_2 \tag{3.11}$$

durumları sözkonusudur. s ve t, 1.dereceden keyfi monomialler olmak üzere (3.7)'den $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$ olduğundan $g_1f_2 + g_2f_1 \in I$ elde edilir. Benzer olarak (3.8) ve (3.9) için ispat yapılır. (3.10), (3.11), (3.12) durumları için simetri kullanılarak istenen elde edilir. Sonuç olarak $gf = g_1f_1 + g_1f_2 + g_2f_1 + k \in I$ bulunur.
Şimdi R'nin terslenebilir olduğunu göstermek için $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ve $g', h' \in A$ olmak üzere $g = \alpha + g', h = \beta + h' \ \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $\overline{g}\overline{h} = \overline{0}$ olduğunu kabul edelim. Bu

durumda $(g+I)(h+I)=I$ dan $gh+I=I$ olup $gh\in I$ bulunur. Buradan

$$gh=(\alpha+g')(\beta+h')=\alpha\beta+\alpha h'+g'\beta+g'h'\in I$$

bulunur. I homogeneous olduğundan $\alpha\beta\in I$'dır. Böylece $\alpha\beta=\overline{0}$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2$ olduğundan) olmak zorundadır. Bu durumda $\alpha=\overline{0}$ veya $\beta=\overline{0}$ olması gibi iki durum sözkonusudur.

1.durum: $\alpha=\overline{0}$ ise, bu durumda $g'\beta+g'h'\in I$ ve I homogeneous olduğundan $g'\beta\in I$ ve $g'h'\in I$ elde edilir. $\beta=\overline{0}$ olursa $g'h'\in I$ olup yukarıda ifade edilen İddia2'den dolayı $h'g'\in I$'dır. $\beta=\overline{1}$ olursa $g'\in I$ ve $g'h'\in I$ olup yine İddia2'den dolayı $h'g'\in I$'dır. Sonuç olarak $hg=(\beta+h')(\alpha+g')=\beta\alpha+\beta g'+h'\alpha+h'g'\in I$ olduğundan $hg+I=I$ ve buradan $(h+I)(g+I)=I$ yani $\overline{h}\overline{g}=\overline{0}$. Böylece R terslenebilirdir. $\square$

2.durum: $\beta=\overline{0}$ ise, 1.duruma benzer olarak R halkasının terslenebilir olduğu kolayca görülür. $\square$

Yukarıda $R=\mathbb{Z}_2+A/I$ halkası terslenebilir ilen $R[x]$ polinom halkasının terslenebilir olmadığı gösterilmiş olur. Aynı örnekten; $(\mathbb{Z}_2+A)[x]$ halkasının (bir tam halka olduğundan) terslenebilir olduğu fakat $(\mathbb{Z}_2+A)[x]/I[x]=R[x]$ bölüm halkasının terslenebilir olmadığı görülür.

Lemma 3.2.5 R herhangi bir halka olmak üzere $R[x]$'in terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x;x^{-1}]$'in terslenebilir olmasıdır.

İspat ($\Leftarrow$) Terslenebilir halkalar alt halkalar altında kapalı olduğundan açıktır.
($\Rightarrow$) $\triangle=\{1,x,x^2,x^3,\cdots\}$ kümesi $R[x]$'in çarpımsal kapalı bir alt kümesi olduğundan $\triangle^{-1}R[x]=R[x;x^{-1}]$ olup kabulden $R[x]$ terslenebilir olduğundan Önerme 3.2.1(ii) gereğince $\triangle^{-1}R[x]=R[x;x^{-1}]$ terslenebilirdir. $\square$

Önerme 3.2.6 R bir halka ve $Z(R)$, R'nin sıfırdan farklı düzgün elemanlarından oluşan sonsuz bir alt halkayı kapsasın. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R terslenebilirdir.

(ii) $R[x]$ terslenebilirdir.

(iii) $R[x;x^{-1}]$ terslenebilirdir.

İspat Lemma 3.2.5'den $(ii) \iff (iii)$ olduğu açıktır. Lemma 3.1.10 gereğince $(ii) \Rightarrow (i)$ ve $(iii) \Rightarrow (i)$ açıktır. Verilen koşullar altında $R[x]$, R'nin bir alt direkt çarpımı olup Lemma 3.1.10 gereğince $(i) \Rightarrow (ii)$ açıktır. □

Aşağıda ispatsız olarak verilen önerme, Armendariz halkalar üzerinde terslenebilir halkaların bir karakterizasyonunu içermektedir.

Önerme 3.2.7 R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R terslenebilirdir.

(ii) $R[x]$ terslenebilirdir.

(iii) $R[x;x^{-1}]$ terslenebilirdir.

Önerme 3.2.8 R bir halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. R inmiş ise, bu durumda $R[x]/(x^n)$ bölüm halkası terslenebilirdir.

İspat R inmiş bir halka olmak üzere $S = R[x]/(x^n)$ olsun. $n = 1$ ise $S \cong R$ ve R inmiş olduğundan S'nin terslenebilir olduğu açıktır. $n = 2$ ise $S = R[x]/(x^2) \cong T(R,R)$ olup Önerme 3.1.7 gereğince S'nin terslenebilir olduğu açıktır. Şimdi $n \geq 3$ olduğunu kabul edelim. $\bar{x} = x + (x^n)$ olmak üzere, $\bar{f} = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \cdots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}, \bar{g} = b_0 + b_1\bar{x} + b_2\bar{x}^2 + \cdots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} \in S$ için $\bar{f}\bar{g} = 0$ olsun. $i + j \geq n$ olmak üzere her i, j için $\bar{f}\bar{g} = 0$ olduğundan $a_i b_j \bar{x}^{i+j} = 0$ olduğu açıktır. Bundan dolayı $i + j < n$ durumu için ispat yapmak yeterlidir. $\bar{f}\bar{g} = 0$ olduğundan

$$a_0b_0 = 0 \tag{3.12}$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \tag{3.13}$$

$$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \tag{3.14}$$

$$\vdots$$

$$a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_0 = 0 \tag{3.15}$$

eşitlikleri elde edilir. R'nin inmiş olduğunu kullanarak (3.12) eşitliğinden $b_0a_0 = 0$ bulunur. (3.13) eşitliği soldan b_0 ile çarpılır ve R'nin inmiş olduğu kullanılırsa $a_1b_0 = 0$ olur ve (3.13)'de yerine yazılarak $a_0b_1 = 0$ elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse $i + j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ olmak üzere her i, j için $a_ib_j = 0$ bulunur. Buradan R inmiş olduğundan terslenebilir olup $b_ja_i = 0$ ve buradan $b_ja_i\bar{x}^{i+j} = 0$ elde edilir. Böylece

$$\bar{g}\bar{f} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} b_ja_i\bar{x}^{i+j} = 0$$

olup S terslenebilirdir. □

Aşağıdaki teorem bir halkanın terslenebilir olma özelliğinin klasik sağ kesirler halkasına taşınabildiğini göstermektedir.

Teorem 3.2.9 R bir sağ Ore halka ve Q, R'nin klasik sağ kesirler halkası olsun. R'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul Q'nun terslenebilir olmasıdır.

İspat ($\Leftarrow$) Terslenebilir halkalar alt halkalar altında kapalı olduğundan ispat açıktır.
($\Rightarrow$) R'nin terslenebilir olduğunu kabul edelim. $\alpha\beta = 0$ olacak şekilde $\alpha = ab^{-1}$, $\beta = cd^{-1} \in Q$ alalım. Kabulden $bc_1 = cb_1$, $b^{-1}c = c_1b_1^{-1}$ olacak şekilde $b_1 \in R$ düzgün olmak üzere $b_1, c_1 \in R$ vardır. Dolayısıyla $0 = \alpha\beta = ab^{-1}cd^{-1} = ac_1b_1^{-1}d^{-1}$ ve buradan $ac_1 = 0$ olur. Daha sonra a ve d için $ad_1 = da_1$ ve $d^{-1}a = a_1d_1^{-1}$ olacak şekilde $d_1 \in R$ düzgün olmak üzere $a_1, d_1 \in R$ vardır. R terslenebilir (ve böylece yarıdeğişmeli) olduğundan, $c_1a = 0$ olup $0 = abc_1 = acb_1$ ve buradan $ac = 0$ bulunur. Bu durumda $ca = 0$ olup $0 = ad_1c = da_1c$ olduğundan $a_1c = 0$ ve dolasıyla $ca_1 =$ elde edilir. Sonuç olarak $\beta\alpha = cd^{-1}ab^{-1} = ca_1d_1^{-1}b^{-1} = 0$ olup Q terslenebilirdir. □

Aşağıdaki lemma, R halkasının yarıasal olması durumunda inmiş, simetrik, terslenebilir ve yarıdeğişmeli olma özelliklerinin çakıştığını ifade eder.

Lemma 3.2.10 R yarıasal bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R inmiştir.

(ii) R simetriktir.

(iii) R terslenebilirdir.

(iv) R yarıdeğişmelidir.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ olduğu açıktır. $(iv) \Rightarrow (i)$ olduğunu göstermek yeterlidir. R yarıdeğişmeli olsun. $a \in R$ olmak üzere $0 = a^2$ olduğunu kabul edelim. Kabulden $aRa = 0$ olur. R yarıasal olduğundan $a = 0$ olup R inmiş olur. $\square$

4. BAZI TERSLENEBİLİR HALKA SINIFLARI

4.1. α-Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri

Başer vd. (2009) α-katı halkaların bir genellemesi ve terslenebilir halkaların bir genişlemesi olarak α-terslenebilir halkaları tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir. Aynı zamanda α-terslenebilir halkaların bazı karakterizasyonlarını vererek diğer halka sınıflarıyla aralarındaki ilişkileri araştırmışlardır. Tez çalışmasının bu bölümünde Başer vd. (2009) esas alınarak α-terslenebilir halkaların özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 4.1.1 $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $b\alpha(a) = 0$ (ya da $\alpha(a)b = 0$) oluyorsa bir R halkasının bir α endomorfizması; *sağ* (ya da *sol*) *terslenebilir* olarak adlandırılır. R halkasının bir sağ (sol) terslenebilir α endomorfizması var ise R halkası *α-terslenebilir* olarak adlandırılır.

Uyarı 4.1.2 R bir halka ve α R'nin bir homomorfizması olmak üzere,

(i) R terslenebilir halka ise 1_R, R'nin birim endomorfizması olmak üzere R bir yanlı 1_R-terslenebilirdir.

(ii) R sağ α-terslenebilir bir halka ve $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde S, R'nin bir alt halkası ise S sağ α-terslenebilirdir.

Aşağıdaki örnek α-terslenebilir olmanın sağ yada sol simetrik olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.3

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R'nin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları için $AB = 0$ iken $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan R terslenebilir değildir.

(i) $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlı $\alpha : R \longrightarrow R$ endomorfizmasını göz önüne alalım. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda $aa' = 0$ olup $\mathbb{Z}$ terslenebilir olduğundan

$$B\alpha(A) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece R sağ α-terslebilirdir. Fakat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ iken

$$\alpha(B)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R sol α-terslenebilir değildir. □

(ii) $\beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ile tanımlı $\beta : R \longrightarrow R$ endomorfizmasını göz önüne alalım. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda $cc' = 0$ olup $\mathbb{Z}$ terslenebilir olduğundan

$$\beta(B)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c'c \end{pmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece R sol β-terslebilirdir. Fakat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ iken

$$B\beta(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R sağ β-terslenebilir değildir. □

Uyarı 4.1.4 R herhangi bir tamlık bölgesi ve α, R'nin herhangi bir endomorfizması ise, R'nin α-terslenebilir olduğu açıktır. Fakat bu ifadenin karşıtı Örnek 4.1.3 (i) gereğince doğru değildir. Ayrıca aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi R değişmeli inmiş bir halka ise R sağ α-terslenebilir olmayabilir.

Örnek 4.1.5 Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını göz önüne alalım. R'nin değişmeli ve inmiş (dolayısıyla terslenebilir) olduğu açıktır. Şimdi $\alpha((\bar{a},\bar{b})) = (\bar{b},\bar{a})$ ile tanımlı $\alpha : R \longrightarrow R$ otomorfizmasını göz önüne alalım. $a = (\bar{1},\bar{0}), b = (\bar{0},\bar{1}) \in R$ için $ab = 0$ iken $b\alpha(a) = (\bar{0},\bar{1})(\bar{0},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{1}) \neq 0$ olduğundan R sağ α-terslenebilir değildir. □

Örnek 4.1.3 ve Örnek 4.1.5 gereğince bir halkanın terslenebilir ve sağ α-terslenebilir olması birbirini gerektirmez. Bununla birlikte aşağıdaki önermede terslenebilir bir halkanın α-terslenebilir olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Önerme 4.1.6 R terslenebilir bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R α-terslenebilirdir.

(ii) R sağ α-terslenebilirdir.

(iii) $a, b \in R$ olmak üzere herhangi negatif olmayan n tamsayısı için $ab = 0$ iken $aR\alpha^n(b) = 0$ ve $\alpha^n(a)Rb = 0$'dır.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$ ve $(iii) \Rightarrow (i)$ açıktır. $(ii) \Rightarrow (iii)$ R terslenebilir bir halka olsun. Kabul edelim ki R sağ α-terslenebilir olsun. $a, b \in R$ olmak üzere, $ab = 0$ iken $aR\alpha(b) = 0$ ve $\alpha(a)Rb = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $ab = 0$ olduğundan R sağ α-terslenebilir ve terslenebilir olduğundan $b\alpha(a) = 0$ ve $ba = 0$'dır. Buradan herhangi bir $r \in R$ için $b\alpha(a)r = 0$ ve $bar = 0$ olup kabulden $\alpha(a)rb = 0$ ve $ar\alpha(b) = 0$ bulunur. Böylece $\alpha(a)Rb = 0$ ve $aR\alpha(b) = 0$ olup ispat tamamlanır. □

Önerme 4.1.7 Bir R halkasının bir monomorfizması α olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) R'nin sağ α-terslenebilir olması için gerek yeter koşul $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ iken $ba = 0$ olmasıdır.

(ii) Eğer R sağ α-terslenebilir ise, R yarıdeğişmelidir.

(iii) R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul R'nin yarıasal ve sağ α-terslenebilir olmasıdır.

İspat (i) R sağ α-terslenebilir olmak üzere $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ olduğunu kabul edelim. Kabulden $\alpha(b)\alpha(a) = 0$'dır. Buradan $\alpha(ba) = 0$ olup α monomorfizma olduğundan $ba = 0$ bulunur. Karşıt olarak $a\alpha(b) = 0$ iken $ba = 0$ olduğunu kabul edip R'nin sağ α-terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda $0 = \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ olup kabulden $b\alpha(a) = 0$ elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki R sağ α-terslenebilir olsun. R'nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ alalım. Kabulden $b\alpha(a) = 0$'dır. Bu durumda herhangi $r \in R$ için $rb\alpha(a) = 0$ olup kabulden $0 = \alpha(a)\alpha(rb) = \alpha(arb)$ ve buradan α monomorfizma olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ olup R yarıdeğişmelidir.

(iii) R'nin α-katı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Hong vd.(2000) gereğince R inmiştir. Ayrıca R'nin yarıasal olduğu açıktır. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$b\alpha(a)\alpha(b\alpha(a)) = b\alpha(ab)\alpha^2(a) = 0$$

olup kabulden $b\alpha(a) = 0$ bulunur.

Karşıt olarak R yarıasal ve sağ α-terslenebilir olsun. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan herhangi $r \in R$ için $ra\alpha(a) = 0$ olup R sağ α-terslenebilir olduğundan $\alpha(a)\alpha(ra) = \alpha(ara) = 0$'dır. α monomorfizma olduğundan $ara = 0$ olup $aRa = 0$ bulunur. R yarıasal olduğundan $a = 0$ elde edilir. $\square$

Örnek 4.1.7 (ii) şıkkında α, birim endomorfizması alınarak Lambek (1971) tarafından ifade edilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8 Terslenebilir halkalar yarıdeğişmelidir.

Uyarı 4.1.9 Önerme 4.1.7(ii)'nin karşıtının doğru olmadığı Örnek 4.1.5 gereği açıktır. Ayrıca Önerme 4.1.7'nin (i) ve (ii) şıklarında "α bir monomorfrizma" olması koşulu Örnek 4.1.3 gereğince fazladan bir koşul değildir. Gerçekten; Örnek 4.1.3 (i)'deki R halkası ve α endomorfizması göz önüne alındığında R sağ α-terslenebilirdir. Burada α'nın monomorfizma olmadığı kolayca görülebilir.

R halkasının $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ elemanları için $AB = 0$ iken

$$0 \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \in ARB$$

olduğundan $ARB \neq 0$'dır. R yarıdeğişmeli olmadığından Önerme 4.1.7(ii)'nin karşıtı doğru değildir. Aynı zamanda

$$B\alpha(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olmasına rağmen $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan Önerme 4.1.7(i)'nin de karşıtının sağlanmadığı görülür.

Önerme 4.1.7(iii) ile ilgili olarak R'nin yarıasal olması koşulu fazladan olmadığı aşağıda verilen örneğin (i) şıkkından görülebilir. Yani sağ α-terslenebilir olan fakat yarıasal olmayan bir R halkasının bir otomorfizması α olmak üzere R'nin α-katı olmadığı görülür. Aşağıdaki örneğin (ii) şıkkından ise, monomorfizma olması koşulu kaldırılırsa Önerme 4.1.7(iii)'ün doğru olmadığı görülür. Yani α monomorfizma olmayacak şekilde α-katı olmayan bir değişmeli R tam halkası vardır.

Örnek 4.1.10 (i) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ halkasını ve

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözöne alalım. α'nın bir otomorfizma olduğu açıktır. R'nin sağ α-terslenebilir olduğu kolayca görülebilir. Fakat R halkası yarıasal değildir. Böylece R α-katı değildir.

(ii) Bir F cismi üzerindeki $R = F[x]$ polinom halkasını ve $\alpha(f(x)) = \alpha(a)$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını göz önüne alalım. α'nın monomorfizma olduğu kolayca görülebilir. R'nin bir değişmeli tam halka (yani inmiş ve buradan yarıasal) olduğu açıktır. R bir tam halka olduğundan herhangi bir α endomorfizması için R sağ α-terslenebilirdir. Fakat Hong vd.(2003) gereğince R α-katı değildir.

Aşağıdaki önerme bir halkanın sağ α-terslenebilir olması için bazı karakterizasyonlar içerir.

Önerme 4.1.11 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R sağ α-terslenebilirdir.

(ii) Her bir $S \subseteq R$ için $r_R(S) \subseteq l_R(\alpha(S))$'dir.

(iii) Her bir $a \in R$ için $r_R(a) \subseteq l_R(\alpha(a))$ olur.

(iv) Herhangi boştan farklı $A, B \subseteq R$ alt kümeleri için $AB = 0$ iken $B\alpha(A) = 0$'dır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) R sağ α-terslenebilir olsun. $a \in r_R(S)$ alalım. Bu durumda $Sa = 0$ olup, her $s \in S$ için $sa = 0$'dır. Kabulden $a\alpha(s) = 0$ olup $a\alpha(S) = 0$ elde edilir. Böylece $a \in l_R(\alpha(S))$ olup $r_R(S) \subseteq l_R(\alpha(S))$'dir.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) $S = \{a\}$ olduğu göz önüne alındığında ispat açıktır.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Her bir $a \in R$ için $r_R(a) \subseteq l_R(\alpha(a))$ olsun. Boştan farklı $A, B \subseteq R$ altkümeleri için $AB = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi $a \in A$ ve $b \in B$ için $ab = 0$ olup $b \in r_R(\alpha(a))$ bulunur. Kabulden $b\alpha(a) = 0$ olup

$$\left\{ \sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} b\alpha(a) \right\} = B\alpha(A) = \{0\}$$

elde edilir.
(iv) $\Rightarrow$ (i) $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ olarak alınırsa (iv)'den R'nin sağ α-terslenebilir olduğu açıktır. $\square$

Örnek 4.1.5 ve Örnek 4.1.10(i) gereğince inmiş ve sağ α-terslenebilir halkaların sınıfı birbirinden bağımsızdır. Fakat aşağıdaki teoremde de görüleceği gibi bir halka hem inmiş hem de sağ α-terslenebilir olduğu durumda α-skew Armendariz halkalar karakterize edilmiş olur.

Teorem 4.1.12 R bir halka olsun. O zaman

(i) Eğer R bir inmiş ve sağ α-terslenebilir halkası ise, R α-skew Armendariz'dir.

(ii) Eğer Bir R halkasının $R[x;\alpha]$ skew polinom halkası terslenebilir ise, R'de α-terslenebilirdir.

İspat (i) R inmiş ve sağ α-terslenebilir bir halka olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

için $p(x)q(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $k = 0, 1, ..., m+n$ için

$$\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j) = 0$$

elde edilir. Her i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $i + j = k$ üzerinde tümevarım uygulayalım.

$k = 0$ için $i = 0, j = 0$ olup $a_0 b_0 = 0$ olduğu açıktır. $k = i + j \leq s$ olmak üzere $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğunu kabul edelim. $k = i + j = s + 1$ için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğunu gösterelim. $p(x)q(x) = 0$ olduğunu kullanarak x^{s+1}'li terimin katsayısından;

$$a_0 b_{s+1} + a_1\alpha(b_s) + \cdots + a_s\alpha^s(b_1) + a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = 0 \tag{4.1}$$

elde edilir. Bu ifade sağdan $\alpha^{s+1}(b_0)$ ile çarpılırsa;

$$a_0 b_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) + a_1\alpha(b_s)\alpha^{s+1}(b_0) + \cdots + a_s\alpha^s(b_1)\alpha^{s+1}(b_0) + a_{s+1}(\alpha^{s+1}(b_0))^2 = 0 \tag{4.2}$$

olur. Tümevarım kabulünden $i = 0, 1, \cdots, s$ için $a_i\alpha^i(b_0) = 0$ olur. Önerme 4.1.6(iii) gereği $a_i R\alpha^{s+1}(b_0) = 0$ bulunur. Böylece

$$a_0 b_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = a_1\alpha(b_s)\alpha^{s+1}(b_0) = \cdots = a_s\alpha^s(b_1)\alpha^{s+1}(b_0) = 0$$

olduğu (4.2) eşitliğinde kullanılarak

$$a_{s+1}(\alpha^{s+1}(b_0))^2 = 0$$

elde edilir. R'nin inmiş olduğu kullanılarak $a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = 0$ olduğu görülür. Bu ifade (4.1)'de yerine yazılırsa;

$$a_0 b_{s+1} + a_1\alpha(b_s) + \cdots + a_s\alpha^s(b_1) = 0 \tag{4.3}$$

bulunur. Benzer olarak (4.3) eşitliği sağdan $\alpha^s(b_1)$ ile çarpılırsa $a_s(\alpha^s(b_1))^2 = 0$ ve buradan $a_s\alpha^s(b_1) = 0$ olur. Bu şekilde devam edilerek

$$a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = a_s\alpha^s(b_1) = \cdots = a_0 b_{s+1} = 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak tümevarım prensibi gereğince her i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğundan R α-skew Armendarizdir.

(ii) $R[x;\alpha]$'nın terslenebilir olduğunu kabul edelim. R'nin α-terslenebilir olduğunu göstermek için $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ alalım. Bu durumda $R[x;\alpha]$'daki $p = a$ ve $q = bx$ polinomları için $pq = 0$ olup kabulden $0 = qp = bxa = b\alpha(a)x$ ve buradan $b\alpha(a) = 0$ olduğundan R α-terslenebilirdir. □

Hong vd.(2003) tarafından ifade edilmiş olan aşağıdaki sonuç, Teorem 4.1.12'nin bir sonucu olarak daha basitçe ifade edilmektedir.

Sonuç 4.1.13 Eğer R bir α-katı halka ise o zaman R, α-skew Armendariz'dir.

İspat Kabul edelim ki R α-katı bir halka olsun. Bu durumda Önerme 4.1.7(iii)'den R halkası sağ α-terslenebilirdir. Ayrıca R α-katı olduğundan inmiş ve buradan terslenebilirdir. Böylece Teorem 4.1.12(i) gereğince R'nin α-skew Armendariz olduğu açıktır. □

Uyarı 4.1.14 (i) Teorem 4.1.12(i)'de "R bir α-skew Armendariz halkadır." ifadesi yerine Örnek 4.1.10(ii) gereğince "R bir α-Armendariz halkadır" ifadesi getirilemez. Gerçekten $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı α endomorfizmasıyla birlikte $R = F[x]$ halkası α-terslenebilir ve inmiştir. Fakat Hong vd.(2006) gereğince R α-Armendariz değildir.

(ii) Teorem 4.1.12(i)'de "R bir inmiş halka" ifadesi fazladan bir koşul değildir. Gerçekten Örnek 4.1.10(i)'deki R halkası sağ α-terslenebilirdir. Fakat inmiş değildir. Bundan dolayı $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \in R[x;\alpha]$ polinomu için $p^2 = 0$, fakat

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R α-skew Armendariz değildir.

Sonuç 4.1.15 R, α-Armendariz olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $R[x;\alpha]$ terslenebilirdir.

(ii) R α-terslenebilirdir.

(iii) R sağ α-terslenebilirdir.

(iv) R terslenebilirdir.

İspat $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Hong vd.(2006) gereği açıktır.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ α-terslenebilir halkaların tanımından açıktır.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ Kabul edelim ki R sağ α-terslenebilir ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $b\alpha(a) = 0$ olduğundan Hong vd.(2006) gereğince $ba = 0$ olup R terslenebilirdir. $\square$

Huh vd.(2002) ve Örnek 4.1.10(ii) gereğince sağ α-terslenebilir halkaların sınıfı ile α-Armendariz halkaların sınıfı birbirinden bağımsızdır.
Kim ve Lee(2003) tarafından önerme olarak ifade edilmiş aşağıdaki sonuç, α yerine birim endomorfizma alındığında Sonuç 4.1.15'den direkt olarak elde edilir.

Sonuç 4.1.16 R Armendariz bir halka olsun. R'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in terslenebilir olmasıdır.

Uyarı 4.1.17 Örnek 4.1.10(ii)'den dolayı, Teorem 4.1.12(ii)'nin karşıtı sağlanmaz. Aynı zamanda Sonuç 4.1.15'deki "R'nin α-Armendariz" olması koşulu da fazladan değildir. Gerçekten terslenebilir olan $R = F[x]$ halkasını ve $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı α endomorfizmasını göz önüne alalım. $A = R[T;\alpha] = F[x][T;\alpha]$ olmak üzere, $p = xT$, $q = x \in A$ polinomları için

$$pq = xTx = x\alpha(x)T = x.0.T = 0$$

fakat,

$$qp = xxT = x^2T \neq 0$$

olduğundan $R[T;\alpha]$ terslenebilir değildir. Aynı zamanda $p = xT \in R[T;\alpha]$ alalım.

$$p^2 = xTxT = x\alpha(x)T^2 = 0$$

fakat $xx = x^2 \neq 0$ olduğundan $R[T;\alpha]$ α-Armendariz değildir. Böylece Sonuç 4.1.15 deki R'nin α-Armendariz olması koşulu ortadan kaldırıldığında verilen denklikler sağlanmaz.

Teorem 4.1.18 R sağ α-terslenebilir bir halka olsun.

(i) α; R'nin bir monomorfizması ise, $\alpha(1) = 1$'dir.

(ii) $\alpha(1) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul herhangi $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olmasıdır.

(iii) $\alpha(1) = 1$ ise, R abelyandır ve $R[x;\alpha]$'nın tüm özüslü elemanlarının kümesi ile R'nin tüm özüslü elemanlarının kümesi aynıdır.

İspat (i) Kabul edelim ki R sağ α-terslenebilir bir halka ve α bir monomorfizma olsun. $(1-\alpha(1))\alpha(1) = 0$ dır. Burada R sağ α-terslenebilir olduğundan

$$\alpha(1)\alpha(1-\alpha(1)) = 0$$

olup $\alpha(1)(\alpha(1) - \alpha^2(1)) = 0$ ve buradan α monomorfizma olduğundan $\alpha(1) = 1$ bulunur. □

(ii) $\alpha(1) = 1$ olduğunu kabul edelim. $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $(1-e)e = 0$ ve $e(1-e) = 0$ olur. R sağ α-terslenebilir olduğundan $e\alpha(1-e) = 0$ ve $(1-e)\alpha(e) = 0$ olup $e(1-\alpha(e)) = 0$ ve buradan $e - e\alpha(e) = \alpha(e) - e\alpha(e) = 0$'dır. Böylece $\alpha(e) = e$ bulunur. Diğer taraftan $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olduğu kabul edilip e yerine $1 \in R$ alınırsa ispat açıktır. □

(iii) Kabul edelim ki R sağ α-terslenebilir ve $\alpha(1) = 1$ olsun. $e^2 = e \in R$ olmak üzere R'nin abelyan olduğunu yani her $r \in R$ için $er = re$ olduğunu gösterelim. $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$ olup her $r \in R$ için $e(1-e)r = 0$ ve $(1-e)er = 0$'dır. R sağ α-terslenebilir olduğundan $(1-e)r\alpha(e) = 0$ ve $er\alpha(1-e) = 0$ olup (ii) gereğince $er = re$ bulunur. Böylece R abelyandır.

Şimdi $R[x;\alpha]$ ile R'nin özüslü elemanlarının kümesinin aynı olduğunu gösterelim.

$f^2 = f$ olacak şekilde $f(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n \in R[x;\alpha]$ alalım. Bu durumda

$$e_0^2 = e_0 \tag{4.4}$$

$$e_0e_1 + e_1\alpha(e_0) = e_1 \tag{4.5}$$

$$e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2\alpha^2(e_0) = e_2 \tag{4.6}$$

$$\vdots$$

$$e_0e_n + e_1\alpha(e_{n-1}) + \cdots + e_n\alpha^n(e_0) = e_n \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.4) eşitliğinden e_0; R'nin bir özüslü elemanı olup R abelyan olduğundan e_0 merkezidir ve $\alpha(e_0) = e_0$ olur. Bu durumda

$$2e_0e_1 = e_1 \tag{4.8}$$

$$e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) = e_2 \tag{4.9}$$

$$\vdots$$

$$e_0e_n + e_1\alpha(e_{n-1}) + \cdots + e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1) + e_ne_0 = e_n \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.8) eşitliği sağ taraftan $(1 - e_0)$ ile çarpılırsa $e_1(1 - e_0) = 0$ bulunur. Buradan $e_1 = e_1e_0$ ve (4.8) eşitliği kullanılarak $e_1 = 0$ elde edilir. (4.9) eşitliğinden $2e_0e_2 = e_2$ olur. Bu ifade sağdan $(1 - e_0)$ ile çarpılırsa $e_2(1 - e_0) = 0$ olup $e_2 = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek her $i \geq 1$ için $e_i = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $f(x) = e_0 = e_0^2 \in R$'dir. Ayrıca R abelyan olduğundan $R[x;\alpha]$ abelyandır. □

Sonuç 4.1.19 $\alpha(1) = 1$ olmak üzere R sağ α-terslenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R α-Armendarizdir.

(ii) Herhangi $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1 - e)R$ α-Armendarizdir.

(iii) Uygun bir $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1 - e)R$ α-Armendarizdir.

İspat Hong vd. (2006) ve Teorem 4.1.18(ii)'den direkt olarak elde edilir. □

Başer vd. (2009) aşağıda verilen önermede farklı sağ α-terslenebilir halka örneklerine yer vermişlerdir.

Önerme 4.1.20 (i) $\alpha(e) = e$ ve $\alpha(1-e) = 1-e$ olmak üzere e, bir R halkasının merkezi özüslü elemanı ise, eR ve $(1-e)R$'nin sağ α-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R'nin sağ α-terslenebilir olmasıdır.
(ii) $\alpha(1) = 1$ olacak şekilde bir sağ α-terslenebilir bir halka ve S bir tam halka ise, R'nin S ile D Dorroh genişlemesi $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir.

İspat (i) eR ve $(1-e)R$ sağ α-terslenebilir iken R'nin sağ α-terslenebilir olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki eR ve $(1-e)R$ sağ α-terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $eab = 0$ ve $(1-e)ab = 0$ olup kabulden $b\alpha(ea) = 0$ ve $b\alpha((1-e)a) = 0$ bulunur. Bu durumda

$$0 = b\alpha(ea) = b\alpha(e)\alpha(a) = be\alpha(a) = eb\alpha(a)$$

ve

$$0 = b\alpha((1-e)a) = b\alpha(1-e)\alpha(a) = b(1-e)\alpha(a) = (1-e)b\alpha(a)$$

olur. Böylece

$$b\alpha(a) = eb\alpha(a) + (1-e)b\alpha(a) = 0 + 0 = 0$$

olduğundan R sağ α-terslenebilirdir.
(ii) Kabul edelim ki $\alpha(1) = 1$ olmak üzere R sağ α-terslenebilir ve S bir tam halka olsun. $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = 0$ ve $s_1s_2 = 0$ bulunur. Bu durumda S bir tam halka olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ olmalıdır. $s_1 = 0$ ise, $r_1r_2 + s_2r_1 = 0$ olup $r_1(r_2 + s_2) = 0$ ve buradan R sağ α-terslenebilir olduğundan

$$(r_2 + s_2)\alpha(r_1) = r_2\alpha(r_1) + s_2\alpha(r_1) = 0$$

olur. Böylece

$$(r_2, s_2)\bar{\alpha}((r_1, s_1)) = (r_2, s_2)(\alpha(r_1), s_1) = (r_2\alpha(r_1) + s_1r_2 + s_2\alpha(r_1), s_2s_1) = 0$$

olduğundan D Dorroh genişlemesi $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir. Diğer taraftan $s_2 = 0$ ise $r_1r_2 +$ $s_1r_2 = 0$ olup $(r_1 + s_1)r_2 = 0$ ve buradan R sağ α-terslenebilir olduğundan

$$r_2\alpha(r_1 + s_1) = r_2\alpha(r_1) + r_2s_1 = 0$$

olur. Böylece

$$(r_2, s_2)\bar{\alpha}((r_1, s_1)) = (r_2, s_2)(\alpha(r_1), s_1) = (r_2\alpha(r_1) + s_1r_2 + s_2\alpha(r_1), s_1s_2) = 0$$

olduğundan D Dorroh genişlemesi $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir. $\square$

Önerme 4.1.20(ii)'de "$\alpha(1) = 1$" koşulu kaldırıldığında önermenin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 4.1.21 $\mathbb{R} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını, $\alpha((a, b)) = (0, b)$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını göz önüne alalım. $\alpha((1, 1)) = (0, 1) \neq (1, 1)$ olduğu açıktır. Bundan başka $((1, 0), -1)((1, 0), 0) = ((1, 0)(1, 0) + 0.(1, 0) + (-1)(1, 0), (-1).0) = 0$ olur. Fakat $((1, 0), 0)\bar{\alpha}((1, 0), -1) = ((1, 0), 0)(\alpha(1, 0), -1) = ((1, 0), 0)((0, 0), -1) = ((-1, 0), 0) \neq 0$ olduğundan R'nin $\mathbb{Z}$ ile $D = R\times\mathbb{Z}$ Dorroh genişlemesi $\bar{\alpha}$-terslenebilir değildir.

Kim ve Lee (2003) gereğince inmiş bir halkanın aşikar genişlemesi terslenebilirdir. Fakat Başer vd. (2009) aşağıdaki örneği vererek α-terslenebilir bir R halkasının aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-terslenebilir olmadığını göstermişlerdir.

Örnek 4.1.22 Örnek 4.1.10(i)'deki sağ α-terslenebilir olan

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$$

halkasını ve

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını göz önüne alalım.$T(R, R)$'deki

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

elemanları için $AB = 0$ fakat;

$$B\bar{\alpha}(A) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan $T(R, R)$ $\bar{\alpha}$-terslenebilir değildir.

Önerme 4.1.23 R inmiş bir halka olsun. Eğer R halkası α-terslenebilir ise $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir. (Başer *et al.* 2009)

İspat Kabul edelim ki R inmiş ve α-terslenebilir bir halka olsun. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ bulunur. R inmiş olduğundan $ca = 0$ olur. $0 = ad + bc = c(ad + bc) = cad + cbc$ olup burada $(bc)^2 = 0$ yani $bc = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $ad = 0$ olur. R α-terslenebilir olduğundan $c\alpha(a) = 0$, $c\alpha(b) = 0$ ve $d\alpha(a) = 0$ bulunur. Sonuç olarak

$$B\bar{\alpha}(A) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \bar{\alpha} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha(a) & c\alpha(b) + d\alpha(a) \\ 0 & c\alpha(a) \end{pmatrix} = 0$$

olduğundan $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir.

Sonuç 4.1.24 R inmiş bir halka ise $T(R,R)$ terslenebilirdir. (Kim and Lee 2003)

Başer vd.(2009) R halkası α-katı olsa bile $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-terslenebilir olmadığını aşağıdaki örneği vererek göstermişlerdir.

Örnek 4.1.25 R halkasının α-katı olduğunu kabul edelim. Hong vd.(2000)'de α-katı bir halkanın α endomorfizması için $e^2 = e \in R$ olmak üzere $\alpha(e) = e$ ve özel olarak $\alpha(1) = 1$ özelliğini sağladığını belirtmişlerdir. $S_3(R)$'deki

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemanları için $AB = 0$'dır. Fakat $B\bar{\alpha}(A) = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-terslenebilir değildir. $\square$

Terslenebilir bir halkanın homomorfik görüntüsü terslenebilir olmak zorunda değildir (Hong *et al.* 2005). R halkasının sıfırdan farklı herhangi bir sağ α-terslenebilir I öz ideali için R/I $\bar{\alpha}$-terslenebilir iken R'nin α-terslenebilir olmasından şüphe edilebilir. Fakat Başer vd. (2009) tarafından verilen aşağıdaki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 4.1.26 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = 0$ fakat

$$B\alpha(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R α-terslenebilir değildir. R halkasının sıfırdan farklı öz idealleri;

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. I, J ve K'nın sağ α-terslenebilir oldukları kolayca görülebilir. Ayrıca R/I ve R/J bölüm halkaları tam halka ve $R/I \cong F$ ve $R/J \cong F$ olduğundan $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir. K idealine karşılık gelen

$$R/K = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in F\right\}$$

bölüm halkası inmiştir. R/K üzerindeki $\bar{\alpha}$ birim endomorfizma olur. Böylece R/K $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir. □

Başer vd.(2009) I ideali üzerindeki koşulu güçlendirerek aşağıdaki önermeyi vermişlerdir.

Önerme 4.1.27 $\alpha(I) \subseteq I$ olmak üzere bir R halkasının uygun bir I ideali için R/I sağ α-terslenebilir olsun. Eğer I (birimsiz bir halka olarak) α-katı ise R sağ α-terslenebilirdir.

İspat $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ab \in I$ olup $ab + I = I$ ve buradan $(a+I)(b+I) = I$ bulunur. Kabulden R/I $\bar{\alpha}$-terslenebilir olduğundan $(b+I)\bar{\alpha}(a+I) = (b+I)(\alpha(a)+I) = I$ yani $b\alpha(a) \in I$ olur. Bu durumda

$$b\alpha(a)\alpha(b\alpha(a)) = b\alpha(a)\alpha(b)\alpha^2(a) = b\alpha(ab)\alpha^2(a) = 0$$

olup I α-katı olduğundan $b\alpha(a) = 0$ elde edilir. Böylece R sağ α-terslenebilirdir.

Sonuç 4.1.28 Bir R halkasının uygun bir I ideali için R/I terslenebilir bir halka olsun. Eğer I inmiş ise, R terslenebilirdir.

İspat $\alpha = 1_R$ birim endomorfizma olarak alınırsa ispat açıktır. $\square$

Teorem 4.1.29 R bir halka olsun.

(i) $R[x]$'in sağ $\bar{\alpha}$-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$'in sağ $\bar{\alpha}$-terslenebilir olmasıdır.

(ii) R Armendariz bir halka ise, R'nin sağ α-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in sağ $\bar{\alpha}$-terslebilir olmasıdır.

(iii) R inmiş bir halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. R sağ α-terslenebilir ve $\alpha(1) = 1$ ise, $R[x]/(x^n)$ sağ $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir.

İspat (i) Gerek koşulu göstermek yeterlidir. Bunun için $R[x]$'in sağ $\bar{\alpha}$-terslenebilir olduğunu kabul edelim. $f(x)g(x) \in R[x; x^{-1}]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_1(x)g_1(x) = 0$ olmak üzere $R[x]$'de $f_1(x) = f(x)x^n$, $g_1(x) = g(x)x^n$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı vardır. $R[x]$ sağ α-terslenebilir olduğundan $g_1(x)\bar{\alpha}(f_1(x)) = 0$ olur. Böylece $g(x)\alpha(f(x)) = x^{-2n}g_1(x)\bar{\alpha}(f_1(x)) = 0$ olup $R[x; x^{-1}]$ sağ α-terslenebilirdir.

(ii) Kabul edelim ki R Armendariz olsun. $R[x]$ sağ α-terslenebilir iken R'nin sağ α-terslenebilir olduğu açıktır. Şimdi R'nin sağ α-terslenebilir olduğunu kabul edelim.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$$

için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R Armendariz olduğundan her i ve j için $a_i b_j = 0$'dır. R sağ α-terslenebilir olduğundan $b_j\alpha(a_i) = 0$ olur. Böylece $g(x)\bar{\alpha}(f(x)) = 0$ olup $R[x]$

sağ α-terslenebilirdir.

(iii) Kabul edelim ki $\alpha(1) = 1$ olmak üzere R inmiş ve sağ α-terslenebilir bir halka olsun. $S = R[x]/(x^n)$ diyelim. $n = 1$ ise $S \cong R$ olup ispat açıktır. $n = 2$ ise $S = R[x]/(x^2) \cong T(R, R)$ olup Önerme 4.1.23 gereğince S sağ α-terslenebilirdir. Şimdi kabul edelim ki $n \geq 3$ olsun. $\bar{x} = x + (x^n)$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{x}^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \bar{x}^j \in S$$

için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Eğer $i + j \leq n - 1$ ise $f(x)g(x) = 0$ olduğundan

$$a_0 b_0 = 0 \tag{4.11}$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \tag{4.12}$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \tag{4.13}$$

$$\vdots$$

$$a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + \cdots + a_{n-3} b_1 + a_{n-2} b_0 = 0 \tag{4.14}$$

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 = 0 \tag{4.15}$$

eşitlikleri elde edilir. R'nin bir inmiş halka olması için gerek ve yeter koşul herhangi $a, b \in R$ için $ab^2 = 0$ iken $ab = 0$ olması kullanılarak ve inmiş halkalar yarı değişmeli olduğundan (4.11) ve (4.12) eşitlikleri sağdan b_0 ile çapılırsa $0 = a_0 b_1 b_0 + a_1 b_0 b_0 = a_1 {b_0}^2$ ve buradan,

$$a_1 b_0 = a_0 b_1 = 0 \tag{4.16}$$

bulunur. (4.11) ve (4.16) kullanılarak (4.13) sırasıyla b_0 ve b_1 ile çarpılınca $0 = a_0 b_2 = a_1 b_1 = a_2 b_0$ elde edilir. $i + j = 0, 1, \cdots, n - 2$ için $a_i b_j = 0$ olup (4.14) b_0 ile çarpılınca $0 = a_{n-1} b_0 b_0$ ve buradan $a_{n-1} b_0 = 0$ olur. Böylece,

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. (4.17)'de b_1 ile çarpılınca $a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-3} b_2 = 0$ olup tüm $i + j = n - 1$ olan i ve j için $a_i b_j = 0$ olur. Buradan tüm $i + j \leq n - 1$ olan i ve j için $a_i b_j = 0$ olup R sağ α-terslenebilir ve inmiş olduğundan her t tamsayısı için $b_j \alpha^t(a_i) = 0$ olur. $g\bar{\alpha}(f) = 0$ olduğundan, S sağ $\bar{\alpha}$-terslenebilirdir.

Yukarıdaki teoremin (iii) şıkkında α yerine birim endomorfizma alındığında, Kim ve Lee (2003) tarafından elde edilen aşağıdaki sonuç daha basit olarak ispatlanır.

Sonuç 4.1.30 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda herhangi bir n pozitif tamsayısı için $R[x]/(x^n)$ terslenebilirdir.

4.2. Kuvvetli Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri

Kim ve Lee (2003) bir R halkası terslenebilir iken $R[x]$ polinom halkasının terslenebilir olmadığını Örnek 3.2.4 ile ifade etmişlerdir. Yang ve Liu (2008) polinom halkası terslenebilir olan bir halkayı kuvvetli terslenebilir olarak adlandırmış ve aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

Tanım 4.2.1 R bir halka olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x), g(x) \in R[x]$ polinomları için $g(x)f(x) = 0$ oluyorsa R'ye *kuvvetli terslenebilir* denir.

Herhangi kuvvetli terslenebilir bir halkanın terslenebilir olduğu açıktır. Fakat Örnek 3.2.4 gereği bu ifadenin karşıtı doğru değildir. Kuvvetli terslenebilir halkaların sınıfı althalkalar ve direkt çarpımlar altında kapalıdır. Ayrıca herhangi inmiş bir halka hem kuvvetli terslenebilirdir hem de simetriktir. Fakat kuvvetli terslenebilir halkaların sınıfı ile simetrik halkaların sınıfının birbirinden bağımsız olduğunu Tang ve Liu (2005) aşağıdaki iki örneği vererek göstermişlerdir.

Örnek 4.2.2 D değişmeli bir halka olmak üzere $F = D < a, b, c >$ serbert cebirini göz önüne alalım.

$$I = (FaF)^2 + (FbF)^2 + (FcF)^2 + FabcF + FbcaF + FcabF \subseteq F$$

olmak üzere $R = F/I$ olsun. $abc \in I$ fakat $cba \notin I$ olduğundan R simetrik değildir. Diğer taraftan $F[x] = D[x] < a, b, c >$ serbest cebir olmak üzere $R[x] \cong F[x]/I[x]$ ve $D[x]$'in değişmeli tam halka olduğu açıktır. Böylece $R[x]$ terslenebilirdir. Sonuç olarak R kuvvetli terslenebilirdir.

Örnek 4.2.3 Örnek 3.2.4'de $R[x] \cong ((Z_2 + A)/I)[x]$ olduğundan R kuvvetli terslenebilir değildir. Fakat R simetriktir. Bunu göstermek için $fgh \in I$ olacak şekilde

$f, g, h \in Z_2 + A$ alalım. $fhg \in I$ olduğunu görmeliyiz. R lokal terslenebilir bir halka olduğundan genelliği bozmaksızın $f+I$, $g+I$ ve $h+I$ elemanlarının tersinir olmadığını kabul edebiliriz. Böylece bu elemanlar R'nin A/I maksimal idealine ait olurlar. $i = 1, 2, 3, 4$ için $f_i, g_i, h_i \in H_i$ olmak üzere

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$

yazalım. Bu durumda
$fgh \in I$ iken $f_1g_1h_1 \in I$ olur. Burada $i, j = 0, 1, 2$ için $\{a_i, b_i\} \subseteq \{f_1, g_1, h_1\}$ ya da $\{a_0 + a_1 + a_2, b_0 + b_1 + b_2\} \subseteq \{f_1, g_1, h_1\}$ olup $f_1h_1g_1 \in I$ $fhg \in I$ olur. Sonuç olarak R simetriktir. □

Önerme 4.2.4 R bir halka, e; R'nin bir merkezi özüslü elemanı ve Δ; R'nin tüm merkezi düzenli elemanlarından oluşan çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R kuvvetli terslenebilirdir.

(ii) eR ve $(1-e)R$ kuvvetli terslenebilirdir.

(iii) $\Delta^{-1}R$ kuvvetli terslenebilirdir.

İspat $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Kuvvetli terslenebilir halkaların sınıfı alt halkalar ve direkt çarpımlar altında kapalı olduğundan ispat açıktır.
$(iii) \Rightarrow (i)$ İspat açıktır.
$(i) \Rightarrow (iii)$ R kuvvetli terslenebilir olsun.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} u_i^{-1} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} v_i^{-1} b_j x^j \in \Delta^{-1}R[x]$$

için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$F(x) = (u_m u_{m-1} u_{m-2} \cdots u_1 u_0) f(x), G(x) = (v_n v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_1 v_0) g(x) \in R[x]$$

için $F(x)G(x) = 0$ olup R kuvvetli terslenebilir olduğundan $G(x)F(x) = 0$ olur. Böylece her $i = 0, 1, 2, \cdots, m$ ve $j = 0, 1, 2, \cdots, n$ için $u_i v_j$ düzgün merkezi olduğundan $g(x)f(x) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\Delta^{-1}R$ kuvvetli terslenebilirdir. □

Önerme 4.2.5 R; kuvvetli terslenebilir halkaların bir alt direkt toplamı olsun. Bu durumda R, kuvvetli terslenebilirdir.

İspat $I_\alpha(\alpha \in \bigwedge)$; R/I_α kuvvetli terslenebilir ve $\bigcap_{\alpha\in\bigwedge} I_\alpha = 0$ olacak şekilde R'nin idealleri olsun. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$$

alalım. Bu durumda $f(x)g(x) = 0 \in I_\alpha$ olup $\bar{f}(x) = f(x) + I$, $\bar{g}(x) = g(x) \in (R/I_\alpha)[x]$ için $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$ olup kabulden $\bar{g}(x)\bar{f}(x) = \bar{0}$ yani $g(x)f(x) \in I_\alpha$ olur.Böylece $k = 0, 1, 2, \cdots, m + n$ için

$$\sum_{i+j=k} b_j a_i \in I_k$$

olur. $\bigcap_{\alpha\in\bigwedge} I_\alpha = 0$ olduğundan

$$\sum_{i+j=k} b_j a_i = 0$$

bulunur. Sonuç olarak $g(x)f(x) = 0$ olup R kuvvetli terslenebilirdir. □

Anderson ve Camillo (1998), bir halkanın Armendariz olma özelliğinin $R[x]$ polinom halkasına taşındığını göstermişlerdir. Ayrıca inmiş bir halkanın polinom halkasının da inmiş olduğu kolayca görülür. Fakat terslenebilir bir halkanın polinom halkasının terslenebilir olmadığı Örnek 3.2.4 gereğince açıktır. Bir halkanın kuvvetli terslenebilir olma özelliğinin bazı polinom halkalarına taşındığı aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.6 α, bir R halkasının endomorfizması olmak üzere aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(i) R kuvvetli terslenebilirdir.

(ii) $R[x]$ kuvvetli terslenebilirdir.

(iii) $R[x; x^{-1}]$ kuvvetli terslenebilirdir.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$ $i = 0, 1, \cdots, p$ ve $j = 0, 1, \cdots, q$ için

$$f_i = \sum_{s=0}^{m_i} a_s^i x^s, g_j = \sum_{t=0}^{n_j} b_t^j x^t \in R[x]$$

olacak şekilde $f(y) = f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + \cdots + f_p y^p$, $g(y) = g_0 + g_1 y + \cdots + g_q y^q \in R[x][y]$ polinomları için $f(y)g(y) = 0$ olduğunu kabul edelim. Sıfır polinomunun derecesi 0 olmak üzere $k = der(f_0) + der(f_1) + \cdots + der(f_p) + der(g_0) + der(g_1) + \cdots + der(g_q)$ olsun. Bu durumda

$$f(x^k) = f_0 + f_1 x^k + \cdots + f_p x^{pk}$$

ve

$$g(x^k) = g_0 + g_1 x^k + \cdots + g_q x^{qk}$$

$R[x]$'de iki polinom olup f_i(sırasıyla g_j)'nin katsayıları ile $f(x^k)$ (sırasıyla $g(x^k)$)'nın katsayıları aynıdır. $f(y)g(y) = 0$ olduğundan $f(x^k)g(x^k) = 0$ bulunur. R kuvvetli terslenebilir olduğundan $g(x^k)f(x^k) = 0$ olup buradan $g(y)f(y) = 0$ elde edilir. Böylece $R[x]$ kuvvetli terslenebilirdir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $R[x]$ kuvvetli terslenebilir olsun. Önerme 4.2.4 gereğince $\Delta^{-1}R[x]$ kuvvetli terslenebilirdir. Lemma 3.2.5 gereğince $\Delta^{-1}R[x] = R[x; x^{-1}]$ olduğundan $R[x; x^{-1}]$'in kuvvetli terslenebilir olduğu açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$ İspat açıktır.

Sonuç 4.2.7 R kuvvetli terslenebilir bir halka ve $\{x_\alpha\}$, R üzerinde değişmeli olan bilinmeyenlerin herhangi bir kümesi olsun. Bu durumda $R[\{x_\alpha\}]$'nın herhangi bir alt halkası kuvvetli terslenebilirdir.

R halkası terslenebilir iken Önerme 3.2.6 gereğince R kuvvetli terslenebilir olur. Kuvvetli terslenebilir olan fakat inmiş olmayan bir başka halka örneği aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.2.8 R bir halka n herhangi bir pozitif tamsayı olsun. Eğer R inmiş ise, $R[x]/(x^n)$ bölüm halkası kuvvetli terslenebilirdir.

İspat R inmiş bir halka olsun. Önerme 3.2.8 gereğince $R[x]/(x^n)$ terslenebilirdir. Ayrıca Anderson ve Camillo (1998) gereğince $R[x]/(x^n)$ Armendarizdir. Sonuç olarak $R[x]/(x^n)$ kuvvetli terslenebilirdir.

Sonuç 4.2.9 R inmiş bir halka ise, $T(R,R)$ aşikar genişlemesi kuvvetli terslenebilirdir.

İspat Önerme 4.2.8'de $n = 2$ alınırsa $R[x]/(x^2) \cong T(R,R)$ olup R inmiş iken $T(R,R)$'nin kuvvetli terslenebilir olduğu açıktır. □

R halkası kuvvetli terslenebilir iken Örnek 3.1.8 gereği $T(R,R)$ aşikar genişlemesi kuvvetli terslenebilir değildir. Ayrıca sıfırdan farklı kuvvetli terslenebilir herhangi bir I ideali için R/I kuvvetli terslenebilir iken R'nin kuvvetli terslenebilir olduğundan şüphe edilebilir. Fakat R halkası yarıdeğişmeli olsa bile aşağıdaki örnek bu şüpheyi ortadan kaldırır.

Örnek 4.2.10 S bir bölümlü halka olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a,b,c,d \in S \right\}$$

halkası Örnek 3.1.6 gereği terslenebilir olmadığından kuvvetli terslenebilir değildir. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri sadece

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde olup I_1 ideali Örnek 3.1.6 gereğince kuvvetli terslenebilir değildir. $j = 2,3,4$ için I_j ideallerinin sıfırüslülük göstergeleri 2 olduğundan kuvvetli terslenebilir oldukları açıktır. Bununla birlikte

$$R/I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + I_2 \ : \ x,w \in S \right\}$$

bölüm halkası için

$$\varphi\left(\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x & w \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\varphi : R/I_2 \to T(S,S)$ dönüşümünün bir halka homomorfizması olduğu kolayca görülür. Bu durumda $R/I_2 \cong T(S,S)$ olup Sonuç 4.2.9 gereğince R/I_2 kuvvetli terslenebilirdir. R/I_3 bölüm halkası içinde benzer bir yol izlenir. Son olarak $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $(R/I_4)[x]$'deki

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} \bar{a_i} & \bar{b_i} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a_i} & \bar{c_i} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{a_i} \end{pmatrix} x^i, \; g(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} \bar{u_j} & \bar{v_j} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{u_j} & \bar{w_j} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{u_j} \end{pmatrix} x^j$$

polinomlarını alalım.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m a_i x^i & \sum_{i=0}^m b_i x^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^m a_i x^i & \sum_{i=0}^m c_i x^i \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^m a_i x^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^n u_j x^j & \sum_{j=0}^n v_j x^j & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^n u_j x^j & \sum_{j=0}^n w_j x^j \\ 0 & 0 & \sum_{j=0}^n u_j x^j \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir.

$$(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{n} u_j x^j) = 0$$

olup S bir bölümlü halka olduğundan $\sum_{i=0}^m a_i x^i = 0$ yada $\sum_{j=0}^n u_j x^j = 0$ bulunur. Böylece $g(x)f(x) = 0$ bulunur. Sonuç olarak R/I_4 kuvvetli terslenebilirdir. $\square$

Bölüm halkası kuvvetli terslenebilir olan bir halkanın ideali üzerindeki koşul güçlendirilerek halkanın kuvvetli terslenebilir olduğu aşağıdaki önermede gösterilmiştir.

Önerme 4.2.11 Bir R halkasının bir I ideali için R/I bölüm halkasının kuvvetli terslenebilir olduğunu kabul edelim. Eğer I inmiş ise, R kuvvetli terslenebilirdir.

İspat $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun.

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + I)x^i, \; \bar{g}(x) = \sum_{j=0}^{n} (b_j + I)x^j \in (R/I)[x]$$

olup $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$ bulunur. R/I terslenebilir olduğundan $\bar{g}(x)\bar{f}(x) = \bar{0}$ olup buradan $g(x)f(x) + I = I$ yani $g(x)f(x) \in I$ elde edilir. $[g(x)f(x)]^2 = 0$ olup I inmiş olduğundan $g(x)f(x) = 0$ yani R kuvvetli terslenebilirdir.

Bir R halkasının sağ Ore olması için gerek ve yeter koşul R'nin Q klasik sağ kesirler halkasının var olmasıdır. R'nin inmiş (terslenebilir) olması için gerek yeter koşul Q'nun inmiş (terslenebilir) olmasıdır. Bundan hareketle kuvvetli terslenebilir halkalar için benzer bir sonuç aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.12 Bir R halkasının Q klasik sağ kesirler halkasınn var olduğunu kabul edelim. Bu durumda R'nin kuvvetli terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul Q'nun kuvvetli terslenebilir olmasıdır.

4.3. Zayıf Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri

Liang ve Gang (2007), terslenebilir halkaların bir genellemesi olan zayıf (weakly) terslenebilir halka sınıfını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 4.3.1 Bir R halkası $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $Rbra$; R'nin bir nil sol ideali (denk olarak, $braR$; R'nin bir nil sağ ideali) oluyorsa *zayıf terslenebilir* olarak adlandırılır.

Zayıf terslenebilir halkaların sınıfı althalkalar ve direkt toplamlar altında kapalıdır.

Önerme 4.3.2 R bir halka, R/I zayıf terslenebilir olacak şekilde I, R'nin bir ideali olsun. Eğer $I \subseteq nil(R)$ ise R zayıf terslenebilirdir.

İspat R/I zayıf terslenebilir ve $I \subseteq nil(R)$ olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\bar{a} = a + I$, $\bar{b} = b + I \in R/I$ olmak üzere $\bar{a}\bar{b} = (a + I)(b + I) = ab + I = I$ olup R/I zayıf terslenebilir olduğundan her $r \in R/I$ için $(R/I)bra$, R/I'nın bir nil sol idealidir. Yani her $\bar{r_1} \in R/I$ için $(\bar{r_1}\bar{b}\bar{r}\bar{a})^n = I$ olacak şekilde $n \in N$ vardır. Buradan $(r_1bra)^n \in I \subseteq nil(R)$ olup $Rbra$, R'nin bir nil sol ideealidir. Böylece R zayıf terslenebilirdir. □

Teorem 4.3.3 Kabul edelim ki S ve T birer halka ve M bir (S, T) bimodül olsun.

$$\begin{pmatrix} S & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

halkasının zayıf terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul S ve T'nin zayıf terslenebilir olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ R zayıf terslenebilir olsun. $S \cong \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq R$ ve zayıf terslenebilir halkalar alt halkalar altında kapalı olduğundan S'nin zayıf terslenebilir olduğu açıktır. Benzer olarak T zayıf terslenebilirdir.

($\Leftarrow$) S ve T zayıf terslenebilir olsun.

$$I = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd R$$

ideali için $R/I \cong S \times T$ zayıf terslenebilir olur. Önerme 4.3.2 gereğince R'nin zayıf terslenebilir olduğu açıktır. $\square$

n üzerinde tümevarım uygulanarak Teorem 4.3.3'ün bir direkt sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.3.4 Bir R halkasının zayıf terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi $n \in N$ için $T_n(R)$ halkasının zayıf terslenebilir olmasıdır.

Sonuç 4.3.5 Bir R halkasının zayıf terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin zayıf terslenebilir olmasıdır.

Sonuç 4.3.6 Bir R halkasının zayıf terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $R[x]/(x^n)$ halkasının zayıf terslenebilir olmasıdır.

Terslenebilir halkaların zayıf terslenebilir olduğu açıktır. Fakat aşağıdaki örnek gereğince bu ifadenin karşıtı doğru değildir.

Örnek 4.3.7 S bir zayıf terslenebilir halka olsun. Bu durumda Önerme 4.3.4 gereğince,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} \in S \right\}$$

halkası zayıf terslenebilirdir. Fakat

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

iken

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan T terslenebilir değildir. Ayrıca T'nin yarıdeğişmeli olmadığı açıktır. S zayıf terslenebilir bir halka olsun. Bu durumda Örnek 3.1.4 gereğince $T_n(R)$'nin bir alt halkası

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \quad : \quad a, a_{ij} \in R \right\}$$

halkası terslenebilir değildir. Fakat Önerme 4.3.4 gereğince $S_n(R)$ zayıf terslenebilirdir. Kolayca görülebilir ki $n = 4$ için $S_4(R)$ yarıdeğişmeli değildir. $n \geq 5$ için de $S_n(R)$'nin yarıdeğişmeli olmadığı açıktır.

Önerme 4.3.4'de $T_n(R)$ halkası yerine $M_n(R)$ halkasının getirilemeyeceği aşağıdaki örnekle açıktır.

Örnek 4.3.8 R zayıf terslenebilir bir halka olmak üzere $n = 2$ için $M_2(R)$ zayıf terslenebilir değildir. Gerçekten,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

iken

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin nil(M_2(R))$$

olur. $n > 2$ iken $M_n(R)$'nin zayıf terslenebilir olmadığı benzer şekilde gösterilebilir.

4.4. Merkezi Terslenebilir Halkalar ve Özellikleri

Köse vd. (2014) terslenebilir halkaların bir genellemesi olan merkezi terslenebilir halkaları, halkanın merkezini kullanarak, aşağıdaki biçimde tanımlamışlardır.

Tanım 4.4.1 R bir halka olmak üzere herhangi $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba \in C(R)$ oluyorsa R halkası *merkezi terslenebilir* olarak adlandırılır.

Değişmeli, inmiş, merkezi inmiş, simetrik ve terslenebilir halkalar merkezi terslenebilir halkalara birer örnektir. Merkezi terslenebilir bir halkanın terslenebilir olmadığı aşağıdaki örnekte görülür.

Örnek 4.4.2 R değişmeli inmiş bir halka olmak üzere

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası Örnek 3.1.6 gereği yarıdeğişmeli değildir. Bu yüzden terslenebilir değildir. Şimdi $S_3(R)$'nin merkezi terslenebilir olduğunu gösterelim.

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda Önerme 3.1.3'de de ifade edildiği gibi; $(a_1, b_1, c_1, d_1).(a_2, b_2, c_2, d_2) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$a_1a_2 = 0 \tag{4.18}$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \tag{4.19}$$

$$a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0 \tag{4.20}$$

$$a_1d_2 + d_1a_2 = 0 \tag{4.21}$$

eşitlikleri elde edilir. R değişmeli olduğundan $a_2a_1 = 0$ olur. (4.2) eşitliği soldan a_2 ile çarpılırsa $a_2b_1a_2 = 0$ olup $(b_1a_2)^2 = 0$ ve buradan R imiş olduğundan $b_1a_2 = 0$ bulunur. Bu ifade (4.2)'de yerine yazılırsa $a_1b_2 = 0$ bulunur. Benzer olarak (4.4) eşitliği soldan a_2 ile çarpılarak yukarıdaki metod ile $d_1a_2 = 0$ ve buradan $a_1d_2 = 0$ elde edilir. (4.3) eşitliği soldan a_2 ile çarpılarak yukarıdaki benzer şekilde öncelikle $c1_a2 = 0$ bulunur. Bu ifade (4.3)'te yerine yazılarak

$$a_1c_2 + b_1d_2 = 0 \tag{4.22}$$

bulunur. (4.5) eşitliği sağdan a_1 ile çarpılarak $a_1c_2 = 0$ ve buradan $b_1d_2 = 0$ bulunur. Sonuç olarak,

$$BA = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup BA'nın $S_3(R)$'nin merkezinde olduğu kolayca görülür. Böylece $S_3(R)$ merkezi terslenebilirdir.

Aşağıdaki önerme, merkezi terslenebilir halkaların hangi koşullar altında terslenebilir olacağını ifade eder.

Önerme 4.4.3 R halkası merkezi terslenebilir olsun. Eğer R aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa R terslenebilirdir.

(i) R yarıasal bir halkadır.

(ii) R sağ (sol) $p.p.$ bir halkadır.

(iii) R sağ (sol) $p.q.$ Baer halkadır.

İspat R'nin merkezi terslenebilir olduğunu kabul edelim. R'nin terslenebilir olduğunu göstermek için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ alalım. Bu durumda kabulden ba, R'nin merkezindedir.
(i) R yarıasal bir halka ise, ba R'nin merkezinde olduğundan $baRba = 0$ olup R yarıasal olduğundan $ba = 0$ olur. Böylece R terslenebilirdir.
(ii) R sağ $p.p.$ ise, bu durumda $a \in R$ için $r_R(a) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. $ab = 0$ olduğundan $b \in r_R(a) = eR$ olup $b = eb$ yazılabilir. Diğer taraftan $e = e1 \in eR = r_R(a)$ olduğundan $ae = 0$ bulunur. ba, R'nin merkezinde olduğundan $ba = eba = bae = b0 = 0$ olur. Böylece R terslenebilirdir.
(iii) İspatı (ii)'ye benzer olarak yapılır. □

Sonuç 4.4.4 R merkezi terslenebilir bir halka ise, bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R, bir sağ $p.p.$-halkadır.

(ii) R, bir sol $p.p.$-halkadır.

(iii) R, bir sağ $p.q.$-Baer halkadır.

(iv) R bir sol $p.q.$-Baer halkadır.

Sonuç 4.4.5 Merkezi terslenebilir halkalar için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

(i) Merkezi terslenebilir halkalar sonlu direkt toplamlar ve althalkalar altında kapalıdır.

(ii) e; R'nin bir merkezi özüslü elemanı olmak üzere eR ve $(1-e)R$'nin merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R'nin merkezi terslenebilir olmasıdır.

Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi bir merkezi terslenebilir halkanın homomorfik görüntüsü merkezi terslenebilir olmak zorunda değildir.

Örnek 4.4.6 D bölümlü halka, $R = D[x, y]$ ve $xy \neq yx$ olmak üzere $I = (xy)$ olsun. R bir tam halka olduğundan merkezi terslenebilirdir. Diğer yandan $x+I, y+I \in R/I$ için $(x+I)(y+I) = xy+I = I$'dır. Fakat $(y+I)(x+I) = yx+I$ elemanı R/I'nın merkezinde değildir. Çünkü enaz bir $y+I \in R/I$ için $xy \neq yx$ olduğundan $(yx+I)(y+I) \neq (y+I)(yx+I)$'dır. Böylece R/I merkezi terslenebilir değildir.

Yukarıdaki örnekte merkezi terslenebilir bir halkanın herhangi bir ideale göre bölüm halkasının merkezi terslenebilir olmadığı gösterilmiştir. Fakat tersinir merkezi bir halkanın bir I nil idealine göre bölüm halkasının merkezi terslenebilir olduğu aşağıdaki lemmada ifade edilmiştir.

Lemma 4.4.7 R bir tersinir merkezi halka olmak üzere eğer I; R'nin bir nil ideali ise, o zaman R/I bölüm halkası merkezi terslenebilirdir.

İspat $(a+I)(b+I) = 0+I$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. $ab \in I$ ve buradan n bir pozitif tamsayı olmak üzere $(ab)^n = 0$ olur. Bu ifade soldan b, sağdan a ile çarpılarak $(ba)^{n+1} = 0$ elde edilir. Buradan $1-ba$ tersinir ve bu sebeple merkezi olur. Bundan dolayı keyfi bir $r \in R$ için $rba = bar$'dır. Sonuç olarak $(b+I)(a+I)$, R/I'da merkezidir. □

Aşağıdaki örnek, bir R halkasının bir I ideali için R/I merkezi terslenebilir iken R halkasının merkezi terslenebilir olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 4.4.8 F bir cisim olmak üzere, $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. R'nin bir $I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ idealini göz önüne alalım. R/I'nın merkezi terslenebilir olduğu açıktır. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$ olur. Ancak $c_1 \neq c_3$ olmak üzere $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \in R$ için $CBA \neq BAC$ oluğundan R merkezi terslenebilir değildir.

Lemma 4.4.9 Bir R halkasının bir I ideali için R/I merkezi terslenebilir halka ve I inmiş ise R halkası merkezi terslenebilirdir.

İspat R/I merkezi terslenebilir ve I inmiş olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R/I'da $(a + I)(b + I) = I$ olur. Kabulden $(b + I)(a + I) = ba + I$, R/I'nın merkezindedir. Yani her $r + I \in R/I$ için $(ba + I)(r + I) = (r + I)(ba + I)$ olup $bar + I = rba + I$ ve buradan $bar - rba \in I$ bulunur.$I(bar - rba) = 0$ olduğundan $(bar - rba)^2 = 0$ olur. I inmiş olduğundan $bar = rba$ olur ve böylece R merkezi terslenebilirdir. □

Teorem 4.4.10 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki gerektirmeler vardır.

$$R \text{ terslenebilir} \Rightarrow R \text{ merkezi terslenebilir} \Rightarrow R \text{ zayıf terslenebilir}$$

İspat İlk gerektirmenin doğru olduğu açıktır. Şimdi ikinci gerektirme için R'nin merkezi terslenebilir olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $a(br) = 0$ olup kabulden bra, R'nin merkezindedir. Yani her $s \in R$ için $sbra = bras$ olur. Buradan $(sbra)^2 = sbrasbra = s(bras)bra = ssbr(ab)ra = 0$ olur. Böylece $Rbra$, R'nin bir nil ideali olduğundan R zayıf terslenebilirdir. □

Aşağıdaki örnek ikinci gerektirmenin karşıtının doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.4.11 R bir zayıf terslenebilir bir halka olsun.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \; : \; a, b, c, d, e, f \in R \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. Liang ve Gang (2007) gereğince S halkası zayıf terslenebilirdir.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in S$$

için $AB = 0$ olur, fakat $BA = A$ olduğundan S merkezi değildir.

Terslenebilir halkaların abelyan olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Buna ek olarak aşağıdaki lemmada merkezi terslenebilir halkaların da abelyan olduğu ifade edilmiştir.

Lemma 4.4.12 R merkezi terslenebilir bir halka olsun. Bu durumda R abelyandır.

İspat $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $(1-e)(er-ere) = 0$ ise $(er-ere)(1-e) = er - ere$ merkezidir. Ayrıca e'nin tanımı gereği $er - ere = 0$'dir. Benzer şekilde $re - ere = 0$ bulunur. Sonuç olarak R abelyandır. □

Aşağıdaki Örnek Lemma 4.4.12'nin karşıtının genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.4.13

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; : \; a \equiv d(mod2), \quad b \equiv c \equiv 0(mod2) \right\}$$

halkasının ele alalım. R'nin $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ özüslü elemanları için R abelyandır. Şimdi R'nin $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları için $AB = 0$ olur. Fakat $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$ için BA merkezi değildir. Böylece R merkezi terslenebilir değildir.

Sonuç 4.4.14 Her merkezi terslenebilir halka, direkt olarak sonludur.

İspat Lemma 4.4.12 gereğince merkezi terslenebilir halkalar abelyan ve her abelyan halka direkt olarak sonlu olduğundan ispat açıktır. □

Her terslenebilir halkanın yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Aşağıdaki lemmada merkezi terslenebilir halkaların zayıf yarıdeğişmeli olduğu gösterilmiştir.

Lemma 4.4.15 Her merkezi terslenebilir halka zayıf yarıdeğişmelidir.

İspat $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Burada ba merkezidir. $(arb)^2 = (arb)(arb) = ar(ba)rb = a(ba)rrb = 0$ ve buradan her $r \in R$ için arb özüslü olur. Sonuç olarak R zayıf yarıdeğişmeli olduğu görülür. □

Sonuç 4.4.16 R bir sağ $p.p$-halka olsun. Bu durumda R merkezi terslenebilir ise R yarıdeğişmelidir.

İspat Önerme 4.4.3(ii) gereğince açıktır. □

Bir halkanın tam halka olması için gerek ve yeter koşul halkanın asal ve terslenebilir olmasıdır. Aşağıdaki önermede buna benzer bir sonuç elde edilmiştir.

Lemma 4.4.17 Bir R halkasının asal ve merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R'nin bir tam halka olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R halkası asal ve merkezi terslenebilir olsun. R'nin tam halka olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan her $r \in R$ için $abr = 0$ olup kabulden bra, R'nin merkezindedir. Yani her $s \in R$ için $(bra)s = sbra$'dır. Özel olarak $s = b$ alınırsa $brab = b^2ra = 0$ olup herhangi $t \in R$ için $b^2rat = 0$ ve kabulden $bratb$ R'nin merkezindedir. R asal olduğundan $a = 0$ yada $b = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Shin (1973) her terslenebilir halkanın 2-primal olduğunu göstermiştir. Köse vd. (2014) aşağıdaki teoremi vererek bu ifadeyi direkt olarak ispatlamışlardır.

Teorem 4.4.18 R bir merkezi terslenebilir halka ise, bu durumda R 2-primaldir. Bu ifadenin karşıtı R'nin yarıasal olması durumunda doğrudur.

İspat R bir merkezi terslenebilir halka olsun. $P(R)$, R'nin bir nil ideali olduğundan $P(R) \subseteq N(R)$ olduğu açıktır. Ters kapsama için $a \in N(R)$ alalım. Bu durumda $a^n = 0$ olacak şekilde $n \in N$ vardır. Kabul edelim ki $a \notin Q$ olacak şekilde bir Q asal ideali var olsun. R merkezi terslenebilir olduğundan a merkezidir. Herhangi $r_{n-1}, r_{n-2}, ..., r_2, r_1 \in R$ için $ar_{n-1}ar_{n-2}r_{n-1}a...ar_2ar_1a = r_{n-1}r_{n-2}...r_2r_1a^n = 0$ bulunur. Her P asal ideali için $ar_{n-1}(ar_{n-2}a...ar_2ar_1a) \in P(R)$'dir. Kabulden $a \notin Q$ olduğundan $ar_{n-2}a...ar_2ar_1a \in P(R)$ olur. Benzer şekilde $ar_{n-3}a...ar_2ar_1a \in P(R)$ bulunur. Bu prosedür devam ettirilerek $ar_1a \in P(R)$ elde edilir. Buradan $a \in P(R) \subseteq Q$ bulunur ki bu durum $a \notin Q$ kabulu ile çelişir. Böylece $a \in P(R)$ olup $N(R) = P(R)$ olur. Karşıt olarak R halkası yarıasal ve 2-primal olsun. Bu durumda R halkası yarıasal olduğundan $P(R) = 0$'dır. R 2-primal olduğundan $P(R) = N(R) = 0$ olup buradan R halkası inmiştir. Bundan dolayı R merkezi terslenebilirdir. □

R halkasının inmiş olduğu durumda R'nin aşikar genişlemesinin terslenebilir olduğu Önerme 3.1.7'de ifade edilmişti. Köse vd.(2014) buna benzer bir sonucu aşağıdaki biçimde vermişlerdir.

Önerme 4.4.19 R bir merkezi inmiş halka iken R'nin aşikar genişlemesi merkezi terslenebilirdir.

İspat $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ bulunur. Kabulden R merkezi inmiş olduğundan ca merkezidir. Böylece $(ad)^3 = (-bc)(ad)(-bc) = b(ca)dbc = bdbcac = 0$ olup R merkezi inmiş olduğundan ad merkezidir. Benzer olarak bc merkezidir. Ayrıca $(da)^4 = 0$ ve $(cb)^4 = 0$ olduğundan da ve cb merkezi olup $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{pmatrix}$ merkezi olur. Böylece $T(R,R)$ merkezi terslenebilirdir. □

S, bir R halkasının merkezi düzgün elemanlarından oluşan çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere R'nin S ile lokalizasyonu $S^{-1}R$ olsun. R'nin merkezi terslenebilir olmasının $S^{-1}R$'e taşınabildiği aşağıdaki önermede ifade edilmiştir.

Önerme 4.4.20 Bir R halkasının merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $S^{-1}R$'nin merkezi terslenebilir olmasıdır.

İspat R halkası merkezi terslenebilir olsun. $a, b \in R$ ve $r, s \in S$ olmak üzere $r^{-1}a, s^{-1}b \in S^{-1}R$ için $r^{-1}as^{-1}b = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(rs)^{-1}ab = 0$ olup $ab = 0$ elde edilir. Kabulden ba merkezidir. Yani her $c \in R$ için $cba = bac$ olur. Bu durumda her $t^{-1}c \in S^{-1}R$ için $(t^{-1}c)(s^{-1}b)(r^{-1}a) = (s^{-1}b)(r^{-1}a)(t^{-1}c)$ olduğundan $s^{-1}br^{-1}a$, $S^{-1}R$'nin merkezindedir. Böylece $S^{-1}R$ merkezi terslenebilirdir. Karşıt olarak R, $S^{-1}R$'nin bir alt halkası olduğundan ispat açıktır. $\square$

Sonuç 4.4.21 Bir R halkasının $R[x]$'in merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$ halkasının merkezi terslenebilir olmasıdır.

İspat Önerme 4.4.20'de R halkası yerine $R[x]$ polinom halkası, R'nin S alt kümesi yerine de $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ kümesi alınırsa $S^{-1}R[x] = R[x; x^{-1}]$ olduğundan ispat açıktır. $\square$

Köse vd.(2014), bir R halkasının merkezi terslenebilir olma özelliğinin Armendarizlik koşulu altında bazı polinom halkalarına taşındığını aşağıdaki teoremde ifade etmişlerdir.

Teorem 4.4.22 R Armendariz bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R merkezi terslenebilirdir.

(ii) $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.

(iii) $R[x; x^{-1}]$ merkezi terslenebilirdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) R Armendariz ve merkezi terslenebilir olsun. $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. R Armendariz olduğundan her i, j için $a_ib_j = 0$ olup R merkezi terslenebilir olduğundan b_ja_i, R'nin merkezindedir. Böylece $g(x)f(x)$, $R[x]$'in merkezinde olup $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sonuç 4.4.21'den açıktır. $\square$

Önerme 4.4.23 Bir R halkasının merkezi terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $D(R,Z)$ Dorroh genişlemesinin merkezi terslenebilir olmasıdır.

İspat R merkezi terslenebilir olmak üzere $(r_1,n_1),(r_2,n_2)\in D(R,Z)$ için $(r_1,n_1)(r_2,n_2)=0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $r_1r_2+n_1r_2+n_2r_1=0$ ve $n_1n_2=0$ olup Z tamlık bölgesi olduğundan $n_1=0$ veya $n_2=0$ bulunur. $n_1=0$ ise, $r_1r_2+n_2r_1=r_1(r_2+n_2)=0$ ve R merkezi terslenebilir olduğundan $(r_2+n_2)r_1$; R'nin merkezindedir. Böylece $(r_2,n_2)(r_1,n_1)=(r_2r_1+n_2r_1,0)=((r_2+n_2)r_1,0)$ merkezi olup $D(R,Z)$ merkezi terslenebilirdir. $n_2=0$ durumunda ise benzer ispat yapılarak $D(R,Z)$'nin merkezi terslenebilir olduğu görülür. $\square$

KAYNAKLAR

Anderson F. W. and Fuller K. R. (1992). Rings and categories of modules. Graduate texts in mathematics, Sprinter-Werlag, New York.

Anderson, D. D. and Camillo, V. (1998). Armendariz rings and Gaussian rings. *Communications in Algebra*, **26(7)**: 2265-2272.

Anderson, D. D. and Camillo, V. (1999). Semigroups and rings whose zero products commute. *Communications in Algebra*, **27(6)**: 2847-2852.

Agayev N, Gngrolu G., Harmanc A. ve Halcolu S. (2009). Abelian modules. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **78(2)**: 235244.

Armendariz, E. P. (1974). A note on extensions of Baer and p.p.-rings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **18**: 470-473.

Baser, M., Hong, C. Y. and Kwak, T. K. (2009). On extended reversible rings. *Algebra Colloquium*, **16(1)**: 37-48. Birkenmeier G. F. (2001). Principally quasi-Baer rings. *Communications in Algebra*, **29(2)**: 639-660.

Clark W. E. (1967). Twisted matrix units semigroup algebras. *Duke Mathematical Journal*, **34**: 417-423.

Cohn, P.M. (1999). Reversible rings. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **31**: 641-648.

Goodearl, K.R. (1979). Von Neumann regular rings. Pitman, London-San Francisco Melbourne.

Habeb J. M. (1990). A note on zero commutative and duo rings. *Mathematical Journal of Okayama University*, **32**: 73-76.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p.-rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **151(3)**: 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2003). On skew Armendariz rings. *Communications in Algebra*, **31**: 103-122.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2005). Extensions of generalized reduced ring. Algebra Colloquium, **12(2)**: 229-240.

Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A. (2002). Armendariz rings and semicommutative rings. *Communications in Algebra*, **30(2)**: 751-761.

Hungerford T. (2000). Algebra. Graduate Texts in Mathematics, Sprinter, New York.

Kaplansky I. (1968). Rings of operators. University of Chicago, New York.

Khurana, D., Marks G. and Srivastava, A. (2010). On unit-central rings. *Advances in ring theory, Trends in Mathematics*, 205-212.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings. *Journal of Algebra*, **223**: 477-488.

Kim, N. K. and Lee, Y. (2003). Extension of reversible rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **185**: 207-223.

Krempa, J. and Niewieczerzal D. (1977). Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings. *Bulletin de l'Academie polonaise des sciences: Serie des sciences mathematiques, astronomiques et physiques*, **25**: 851-856.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium*, **3(4)**: 289-300.

Kose, H., Ungur, B., Halicioglu, S. and Harmanci, A. (2014). A generalization of reversible rings. *Iranian Journal of Science and Technology IJST*, **38(1)**: 43-48.

Lambek J. (1971). On the representation of modules by shaves of factor modules. *Canadian Mathematical Bulletin*, **14(3)**: 359-368.

Lee, T.K. and Zhou Y. (2004). Reduced modules, rings, Modules, algebras and Abelian groups. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York.

Liang Z. and Gang Y. (2007). On weakly reversible rings. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **76(2)**: 189 192.

McConnell, J.C., Robson J.C. (1987). Noncommutative Noetherian Rings. Wiley, New York.

Nagata, M. (1962). Local rings. Interscience, New York.

Rege, M. and Chhawchharia, S. (1997). Armendariz rings. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, **73**: 14-17.

Shin, G. (1973). Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, **184**: 43-60.

Yang, G. and Liu Z.K.(2008). On strongly reversible rings. *Taiwanese Journal Of Mathematics*, **12(1)**: 129-136.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel;

Adı Soyadı	: F.VolkanALTINBAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	: MANİSA/Turgutlu,1989
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel)	: 0 554 232 14 56
İletişim (e-posta)	:altinbasvolkan@gmail.com

Eğitim Durumu;

Lise	: Turgutlu Anadolu Lisesi	, 2003-2007
Lisans	: Pamukkale Üniversitesi	, 2007-2013
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi	, 2013-2015

Çalıştığı Kurum ve Yıl;

Turgutlu Uğur Dershaneleri , 2013-2015

Yayınları(SCI ve diğer);

...

Diğer Konular;

...