FUZZY TOPOLOJİK GRUPLARIN TERS LİMİTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kadir GÜNEŞ

DANIŞMAN

Yard. Doç. Dr. Enver Önder USLU

MATEMATİK

Ocak 2012

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUZZY TOPOLOJİK GRUPLARIN TERS LİMİTLERİ

Kadir GÜNEŞ

DANIŞMAN
Yard. Doç. Dr. Enver Önder USLU

MATEMATİK

Ocak 2012

TEZ ONAY SAYFASI

Kadir GÜNEŞ tarafından hazırlanan "Fuzzy Topolojik Grupların Ters Limitleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinini ilğili maddeleri uyarınca 13/01/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **: Yard. Doç. Dr. Enver Önder USLU**

Başkan	**:** Yard.Doç.Dr. Enver Önder Uslu ..AKÜ Fen Edebiyat Fakültesi,	İmza
Üye	**:** Yard.Doç.Dr. Ali AYTEKİN ..Ü. …………Fakültesi,	İmza
Üye	**:** Yard.Doç.Dr. Alper ODABAŞ ..Ü. …………Fakültesi,	İmza

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….

Enstitü Müdürü

(Ünvanı, Adı ve Soyadı)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY TOPOLOJİK GRUPLARIN TERS LİMİTLERİ

Kadir GÜNEŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Enver Önder USLU

Bu tez 3 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fuzzy küme, fuzzy alt grup, fuzzy normal alt grup, fuzzy topolojik uzay kavramı tanıtılarak fuzzy küme özellikleri fuzzy kümelerdeki işlemler ve fuzzy grup, fuzzy topolojik uzay yapıları araştırılmıştır. İkinci bölümde fuzzy topolojik gruplar incelenmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy topolojik grupların ters limitleri incelenmiştir.

Ocak 2012, 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: fuzzy küme, fuzzy normal alt grup, fuzzy topolojik uzay, fuzzy topolojik grup, fuzzy inverse limit

ABSTRACT

M.Sc Thesis

THE INVERSE LİMİTS OF FUZZY TOPOLOGİCAL GROUPS

Kadir GÜNEŞ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Yard. Doç. Dr. Enver Önder USLU

This thesis consist of 3 parts. In the first part structures of fuzzy sets, fuzzy subgroup, fuzzy normal subgroup, fuzyy topological spaces have been introduced and fuzzy set operations which is defined on fuzzy sets, fuzzy subgroup, fuzyy topological spaces have been given. In the second part, fuzzy topological groups have been investigated. In the third part, the inverse limits of fuzzy topological groups have been investigated

December 2011, 52 pages

Key Words: fuzzy set, fuzzy normal subgroup , fuzyy topological space , fuzzy topological group, fuzzy inverse limit

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tez danışmanım

Yard. Doç. Dr. Enver Önder USLU ‘ya

şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen eşim Gülhan GÜNEŞ’ e ve bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Kadir GÜNEŞ
AFYONKARAHİSAR, 2012

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\overset{o}{A}$	A fuzzy alt kümesinin içi
$\overline{A}$	A fuzzy alt kümesinin kapanışı
A'	A fuzzy alt kümesinin tümleyeni
suppA	A fuzzy alt kümesinin dayanağı
α_μ	Fuzzy nokta
μ_A	A fuzzy alt kümesinin üyelik fonksiyonu
f^*	Sabit fuzzy küme

0.GİRİŞ

1965 yılına kadar matematikte hep klasik küme kavramı kullanılıyordu. Yani bir önerme ya kesinlikle doğrudur ya da kesinlikle yanlıştır. Fakat 1965 de Zadeh' in Fuzzy Kümeleri adlı makalesinin yayınlanmasından sonra kümelerde bir kesinlik kavramının bulunamayacağı ortaya konuldu. Buna göre bir önermenin doğruluk değerleri vardır. Örneğin hava sıcak yada soğuk dediğimizde bir kesinlik söz konusudur. Fakat hava ılık denildiğinde bu kesinlik ortadan kalkar. Kısacası günlük hayatımızda kesinliğin ortadan kalktığı durumlarda fuzzy mantık kavramları bu durumların matematiksel olarak incelenebilmesini sağlar.

1968yılındaC.L.Chang fuzzy mantık kavramlarını genel topolojik uzay kavramları üzerinde inceleyerek , fuzzy topolojik uzaylara taşıdı.

1971yılında Rosenfeld grup yapılarını fuzzy mantık kavramları ile birleştirerek fuzzy grup kavramını tanımladı.

1974yılındaWongtarafındanfuzzynoktatanımı yapıldı.

1979 da Foster fuzzy topolojik grup kavramını tanımlayarak bazı yapıların fuzzy mantıkla nasıl gösterildiğini anlatmıştır.

1984'de Liang ve Hai "Fuzzy Topological Groups" fuzzy topolojik gruplar üzerindeki pek çok yapıyı tanımlayarak daha sonra yayınlanacak olan pek çok makale için bir kaynak olmuştur. Sonraki tarihlerde fuzzy metrik uzay kavramı , fuzzy bağıntı kavramı gibi pek çok kavram tanımlanarak günümüze kadar gelinmiştir.

Bu tezde ilk önce fuzzy küme kavramı incelenmiş ve daha sonra fuzzy grup , fuzzy topolojik uzay kavramları ele alınmış, ikinci bölümde birinci bölümden yararlanılrak fuzzy topolojiik grup yapıları çalışılmış, son bölümde ise fuzzy topolojik uzayların ters limitleri ile ilgili incelemeler yapılmıştır.

1. FUZZY KÜMELER

Bu bölümde kullandığımız temel referanslar (Zadeh), (Liang M.J.,Hai Y.C),(Chon) ve (George J. Klir, Bo Yuan) dır.

1.1.Fuzzy kümeler Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: X boştan farklı bir küme ve $I = [0,1]$ aralığı olmak üzere X üzerinde

$$\mu_f : X \to I$$

üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$f = \{\left(x, \mu_f(x)\right) : x \in X, \mu_f \in I\}$$

kümesine X üzerinde bir fuzzy alt küme denir ve f ile gösterilir. Burada $\mu_f(x)$, f fuzzy kümesindeki x elemanının üyelik derecesini göstermektedir.

Bu durumda $\mu_f(x)$ değeri 1 e ne kadar yaklaşırsa f alt fuzzy kümesinde x in üyelik derecesi o kadar yüksek olacaktır. Benzer şekilde $\mu_f(x)$ değeri sıfıra ne kadar yaklaşırsa f alt fuzzy kümesinde x in üyelik derecesi o kadar düşük olacaktır. Yani $\mu_f(x)$ değerinin sıfıra ya da 1 e yaklaşması x elemanının f fuzzy kümesine o kadar ait olması anlamına gelir.

Eğer X kümesi sonlu ise

$$f = \{\frac{\mu_f(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_f(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_f(x_i)}{x_i}$$

eğer X kümesi sonlu değil ise

$$f = \int_x \frac{\mu_f(x)}{x}$$

şeklinde de gösterilir.

f fuzzy alt kümesinde x in tek değerli olduğu durumlarda yani

$$f = (x_1) \text{ ve } \mu_f(x_1) \in [0,1]$$

olduğu durumlarda

$$f = \left\{ \left(x_1, \mu_f(x_1) \right) : \mu_f(x_1) \in I \right\}$$

kümesine fuzzy alt tek nokta kümesi denir.

Örnek 1.1.1: f={(x_1,0.5),(x_2, 0.3), (x_3, 0.03), (x_4, 0.7), (x_5, 0.9), (x_6, 1)}

bir fuzzy alt kümesi için ; $\mu_f(x_1) = 0.5, \mu_f(x_2) = 0.3, \mu_f(x_3) = 0.03,$

$\mu_f(x_4) = 0.7, \mu_f(x_5) = 0.9, \mu_f(x_6) = 1$

Burada x_6, f fuzzy alt kümesine üyelik derecesi tam olan bir eleman iken , x_3, f fuzzy alt kümesine üyelik derecesi en az olan elemandır. Dolayısıyla f fuzzy alt kümesine üyelik derecessi en küçük olan eleman x_3 tür.

Tanım 1.1.2: X boştan farklı bir küme ve f bir fuzzy alt küme olsun. Eğer her $x \in X$,

$$\mu_f(x) = 1$$

oluyorsa f fuzzy alt kümesine normal fuzzy alt küme denir. Eğer f fuzzy alt kümesi normal fuzzy alt küme değilse bu durumda $max\mu_f(x) < 1$ dir. Bu kümeyi normalleştirmek için

$$\frac{\mu_f(x)}{max\mu_f(x)}$$

dönüşümü uygulanır. Yani

$$\mu_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{max\mu_n(x)}$$

dönüşümü ile tanımlı n bir normal fuzzy alt kümedir.

Tanım 1.1.3: X üzerinde boş fuzzy alt kümesi her $x \in X$ $için$

$$\mu_f(x) = 0$$

şeklinde tanımlanan $\mu_f\!: X \rightarrow I$ tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümesine boş fuzzy alt küme denir, ve $f = \emptyset$ ile gösterilir. Benzer şekilde

$$\mu_f(x) = 1$$

ise $f = X$ tir.

Küme teorisinde bilinen $'' \subseteq '' , '' ='', '' \cup '', '' \cap ''$ işlemleri fuzzy kümelerde $'' \leq '','' ='','' \vee '','' \wedge ''$ işaretleri kullanılarak tanımlanır.

Tanım 1.1.4: X boştan farklı bir küme olsun. f ile g , X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_f(x) = \mu_g(x)$$

ise f ve g ye eşit fuzzy alt kümeler denir.

Tanım 1.1.5: X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_F(x) \leq \mu_G(x)$$

ise g fuzzy alt kümesi f fuzzy alt kümesini kapsar denir veya başka bir ifade ile f fuzzy alt kümesi , g fuzzy alt kümesinin bir alt kümesidir denir ve

$$f \leq g$$

ile gösterilir.

f fuzzy alt kümesi, g fuzzy alt kümesinin alt kümesi ve $f \neq g$ olduğunda f fuzzy alt kümesine, g fuzzy alt kümesinin özalt kümesi denir ve $f < g$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.2: $Q = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ olmak üzere

$$f = \{(a_1, 0.3), (a_2, 0), (a_3, 0.4), (a_4, 0.9), (a_5, 0.1)$$

$$g = \{(a_1, 0.7), (a_2, 0.3), (a_3, 0.6), (a_4, 1), (a_5, 0.2)\}$$

fuzzy alt kümeleri olsun her $x \in X$ için $\mu_f(x) < \mu_g(x)$ olduğundan f , g nin fuzzy özalt kümesidir.

Tanım 1.1.6: f ve f' fuzzy kümeleri için eğer;

$$\mu_{f'}(x) = 1 - \mu_f(x)$$

ise veya

$$\mu_{f'}(x) + \mu_f(x) = 1$$

ise f' fuzzy kümesine f fuzzy kümesinin tümleyeni denir.

Tanım 1.1.7: X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için her $x \in X$ için

$$\mu_t(x) = \min\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen t fuzzy alt kümesine f ile g fuzzy alt kümelernin kesişimi denir. Bu işlem;

$$\mu_t(x) = \mu_f(x) \wedge \mu_g(x) = \min\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$$

ile gösterilir, ve $t = f \wedge g$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.8: X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_s(x) = \max\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen s fuzzy alt kümesine f ile g fuzzy alt kümelernin birleşimi denir. Bu işlem;

$$\mu_s(x) = \mu_f(x) \vee \mu_g(x) = \max\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$$

ile gösterilir, ve $s = f \vee g$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.9: : X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{f-g}(x) = \min\{\mu_f(x), \mu_{g'}(x)\}$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $f - g$ fuzzy alt kümesine f ile g fuzzy alt kümelerinin farkı denir. O halde

$$f - g = \{x, \mu_{f-g}(x) : x \in X, \mu_{f-g}(x) \in I\}$$

ile gösterilir. Yani

$$f - g = \{(x, \min\{\mu_f(x), 1 - \mu_g(x)\}) : \mu_{f-g}(x) \in I\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Örnek 1.1.3: $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olsun.

$$f = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0), (x_3, 0.4), (x_4, 0.5), (x_5, 0.7)$$

$$g = \{(x_1, 1), (x_2, 0.3), (x_3, 0.9), (x_4, 0.6), (x_5, 0.8)$$

şeklindeki iki fuzzy alt kümesi veriliyor. Buna göre;

$$f \vee g = \{\left(x, \mu_{f\vee g}(x)\right) : x \in X, \mu_{f\vee g} = \max\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$$

$$= \{(x_1, 1), (x_2, 0.3), (x_3, 0.9), (x_4, 0.6), (x_5, 0.8)\}$$

olur.

$$f \wedge g = \{\left(x, \mu_{f\wedge g}(x)\right) : x \in X, \mu_{f\wedge g} = \min\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$$

$$= \{(x_1, 0.1), (x_2, 0), (x_3, 0.4), (x_4, 0.5), (x_5, 0.7)\}$$

olur.

$$f' = \left\{\left(x, \mu_{f'}(x)\right) : x \in X, \mu_{f'}(x) = 1 - \mu_f(x)\right\}$$

$$= \{(x_1, 0.9), (x_2, 1), (x_3, 0.6), (x_4, 0.5), (x_5, 0.3)\}$$

olur.

$g' = \left\{\left(x, \mu_{g'}(x)\right) : x \in X, \mu_{g'}(x) = 1 - \mu_g(x)\right\}$

$= \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.7), (x_3, 0.1), (x_4, 0.4), (x_5, 0.2)\}$

olur.

$f - g = \{x, \mu_{f-g}(x) : x \in X , \mu_{f-g}(x) \in I\}$

$= \{(x_1, 0.1), (x_2, 0), (x_3, 0.1), (x_4, 0.4), (x_5, 0.2)\}$

olur.

$g - f = \{x, \mu_{g-f}(x) : x \in X , \mu_{g-f}(x) \in I\}$

$= \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.3), (x_3, 0.6), (x_4, 0.5), (x_5, 0.3)\}$

olur.

Tanım 1.1.10: f bir fuzzy küme olsun. $r \in I$için

$$F_r = \{x \in X: \mu_F(x) \geq r\}$$

kümesine f fuzzy kümesinin r seviyeli elemanlarının kümesi denir. f fuzzy kümesinin güçlü r seviyeli elemanlarının kümesi ise

$$f_r = \{x \in X: \mu_f(x) > r\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.11: X boştan farklı bir küme olsun $0 < \propto < 1$ olacak şekilde X kümesi üzerinde en az bir $x \in X$ noktası için bir $\propto$ noktası varsa ve diğer bütün noktalarda sıfır değerini alan bir fuzzy alt kümeye X kümesinde bir fuzzy alt nokta denir ve $x_\propto$ ile gösterilir. Burada x noktası $x_\propto$ noktasının dayanağıdır.

Önerme1.1.1: X boştan farklı bir küme olsun ve f, g, t de bu küme üzerinde tanımlanan fuzzy alt kümeler olsun bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $F \wedge F = F$
2) $F \vee F = F$
3) $F \wedge X = F$
4) $F \vee \emptyset = F$
5) $F \wedge \emptyset = \emptyset$
6) $F \vee X = X$
7) $F \wedge G = F \wedge G$
8) $F \vee G = G \vee F$
9) $(F \vee G) \vee T = F \vee (G \vee T)$
10) $(F \wedge G) \wedge T = F \wedge (G \wedge T)$
11) $F \wedge (G \vee T) = (F \wedge G) \vee (F \wedge T)$ $\quad$ *de morgan kuralı* 1
12) $F \vee (G \wedge T) = (F \vee G) \wedge (F \vee T)$ $\quad$ *de morgan kuralı* 2
13) $(F \wedge G)' = F' \vee G'$ $\quad$ *de morgan kuralı* 3
14) $(F \vee G)' = F' \wedge G'$ $\quad$ *de morgan kuralı* 4
15) $(F')' = F$

Teorem 1.1.1 X kümesi boş kümeden farklı olmak üzere ve f bir fuzzy küme olmak üzere $F \wedge F' = \emptyset \; ve \; F \vee F' = X$ olmak zorunda değildir.

1.2.Fuzzy Kümelerde İşlemler

Tanım 1.2.1 X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{fg}(x) = \mu_f(x). \mu_g(x)$$

üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilen f ve g fuzzy alt kümelerinin cebirsel çarpımı;

$$fg = \{\left(x, \mu_{fg}(x)\right) : x \in X, \mu_{fg}(x) \in I\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.2 X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g

üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{f+g}(x) = \mu_f(x) + \mu_g(x) - \mu_f(x).\mu_g(x)$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen f ve g fuzzy alt kümelerinin cebirsel toplamı;

$$f + g = \{\left(x, \mu_{f+g}(x)\right): x \in X, \mu_{f+g}(x) \in I\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.2.1: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere

$f = \{(x_1, 0.5), (x_2, 1), (x_3, 0.7)\}$

$g = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.8), (x_3, 0.6)\}$

fuzzy alt kümelerinin cebirsel çarpımı ve cebirsel toplamı sırasıyla

$fg = \{(x_1, 0.15), (x_2, 1), (x_3, 0.42)\}$

$f + g = \{(x_1, 0.65), (x_2, 1), (x_3, 0.88)\}$

biçimindedir.

Teorem 1.2.1: f ve g iki fuzzy alt küme olmak üzere $fg \leq f \wedge g$ dir.

İspat: Her $x \in X$ için $\mu_{fg}(x) = \mu_f(x).\mu_g(x) \leq \min\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$ dir. bu durumda da $\mu_f(x).\mu_g(x) \leq \mu_{f\wedge g}(x)$ olduğu görülür. o halde $fg \leq f \wedge g$ dir.

Tanım 1.2.3: X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{f-g}(x) = \min\{\mu_f(x), 1 - \mu_g(x)\}$$

üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilen f ve g fuzzy alt kümelerinin cebirsel farkı

$$f - g = \{\left(x, \mu_{f-g}(x)\right): x \in X, \mu_{f-g}(x) \in I\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.4: X boştan farklı bir küme olsun. f ile g, X üzerinde sırasıyla μ_f ve μ_g üyelik fonksiyonları tarafından karakterize edilen fuzzy alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için

$$(f \vee g) - (f \wedge g)$$

fuzzy alt kümesine f ve g kümelerinin simetrik farkı denir. $f\Delta$g ile gösterilir.(zadeh)

Önerme1.2.1: X boştan farklı bir küme olsun ve f, g, t de bu küme üzerinde tanımlanan fuzzy alt kümeler olsun bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $fX = f$
2) $f + X = f$
3) $f\emptyset = \emptyset$
4) $f + \emptyset = f$
5) $fX = Xf$
6) $(fg)t = f(gt)$
7) $(f + g) + t = f + (g + t)$

1.3. FUZZY ALT GRUPLAR

Bu bölümde kullandığımız temel referanslar (J.N. Mordeson,K.R. Bhutani, A.Rosenfeld) dir.

Fuzzy Alt Gruplar Ve Özellikleri

Tanım 1.3.1: G bir grup olsun. f , G grubu üzerinde μ_f üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer ;

$$\forall x, y \in G \text{ , } \mu_f(xy) \geq \min\{\mu_f(x), \mu_f(y)\} \text{ ise}$$

f fuzzy kümesine G grubunun bir fuzzy alt grupoidi denir.

Önerme 1.3.1: f , G grubunun bir fuzzy alt grupoid olsun. Herhangi bir $k \in I$ için

$$f_k = \{x \in G : f(x) \geq k\}$$

kümesine G grubunun bir fuzzy k-seviye alt grupoidi denir.

İspat: $x, y \in f_k$ olsun. Bu durumda $f(x) \geq k$ ve $f(y) \geq k$ dır. f , G grubunun fuzzy alt grupoidi olduğu için

$$(xy) \geq \min \{\mu_f(x), \mu_f(y)\} \geq k$$

dır. Bu durumda

$$\mu_f(xy) \geq k$$

dir. Aynı zamanda $xy \in f_k$ olduğu görülür. Bu durumda f_k bir fuzzy seviye alt grupoididir.

Tanım 1.3.2: G bir grup ve her f , g, G grubundan alınan fuzzy kümeler olmak üzere $\forall x \in G$ için $''.''$ ve $''\ ^{-1}\ ''$ işlemlerini sırasıyla şöyle tanımayabiliriz;

$$f.g = \vee\{f(y) \wedge g(z): y, z \in G\ , y.z = x\}$$

$$f^{-1}(x) = f(x^{-1})$$

dir. f.g işlemine f ve g nin fuzzy çarpımı , f^{-1} işlemine de f nin tersi denir.

Teorem 1.3.1: f , g ve f_i $(i \in I)$, G grubu üzerinde fuzzy kümeler ve $a = \vee\{f(x): x \in G\}$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen ifadeler doğrudur;

1) $(f.g)(x) = \underset{y \in G}{\vee} \{f(y), g(y^{-1}x)\}$

   $= \underset{y \in G}{\vee} \{f(xy^{-1}), g(y)\}$

2) $(y_a.f)(x) = f((y^{-1}x)$

3) $(f^{-1})^{-1} = f$

4) $f \leq g \iff f^{-1} \leq g^{-1}$

5) $(f.g)^{-1} = g^{-1}.f^{-1}$dir

İspat: 1) $\forall x \in G$ $için$

$$(f.g)(x) = \vee\{f(y)\wedge g(y^{-1}x) :\ y(y^{-1}x) = x\}$$
$$= \vee\{f(xy^{-1})\wedge g(y) :\ (xy^{-1})y = x\}$$

2) $\forall x, y \in G\ için$

$$(a_y.f)(x) = \vee\{a_y(y)\wedge f(y^{-1}x) :\ y \in G, y(y^{-1}x) = x\}$$
$$= \vee\{a\wedge f(y^{-1}x) :\ y \in G, y(y^{-1}x) = x\}$$
$$= \vee\{\vee\{f(x): x \in G\}\wedge f(y^{-1}x) :\ y \in G, y(y^{-1}x) = x\}$$
$$= f(y^{-1}x)$$

3) $\forall x \in G\ için$

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f^{-1}(x^{-1}) = f((x^{-1})^{-1}) = f(x)$$

4) $\forall x \in G\ için$

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x^{-1}) \leq g(x^{-1})$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq g^{-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1} \leq g^{-1}$$

5) $\forall x \in Giçin$

$$(f.g)^{-1}(x) = (f.g)(x^{-1})$$
$$= \vee\{f(z^{-1})\wedge g(y^{-1}): y, z \in G\ , z^{-1}.y^{-1} = x^{-1}\}$$
$$= \vee\{g^{-1}(y)\wedge f^{-1}(z): y, z \in G\ , y.z = x\}$$
$$= (g^{-1}.f^{-1})(x)$$

Tanım 1.3.3: $f\ , G$ grubundan alınan bir fuzzy küme olsun. Eğer;

$$G_1)\ \forall x, y\ \in G\ için\ f(xy) \geq f(x)\wedge f(y)$$
$$G_2)\forall x \in G\ için\ f(x^{-1}) \geq f(x)$$

şartları sağlanıyorsa f ye G grubunun bir fuzzy alt grubu denir.

Tanım 1.3.4: f , G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun ve e, G grubunun etkisiz elemanı olsun. bu durumda;

$$f_e = \{x \in G : f(x) = f(e)\}$$

dir.

Önerme 1.3.2: f , G grubunun bir fuzzy kümesi ve $\mu_f : G \to I$, fnin karakteristik fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\mu_f \text{ , } G \text{ nin bir fuzzy alt grubudur} \Leftrightarrow f \text{ , } G \text{ nin bir alt grubudur.}$$

Önerme 1.3.3: f , G nin bir fuzzy alt grubu olsun ve e, G grubunun birim elemanı olsun . Bu durumda ;

1)$her\ x \in G$ için $f(x^{-1}) = f(x)$

2)$f(e) \geq f(x)$

İspat: f bir fuzzy alt grup olduğundan tanım gereği $\forall x \in G\ için\ f(x^{-1}) \geq f(x)$ dir. Buna göre

$$f(x) = f((x^{-1})^{-1}) \geq f(x^{-1}) \geq f(x) \text{dir.}$$

böylece $f(x^{-1}) = f(x)$ olduğu görülür.

$$f(e) = f(xx^{-1}) \geq \min\{f(x), f(x^{-1})\} = f(x) \text{dir}$$

böylece $f(e) \geq f(x)$ olduğu görülür.

Teorem 1.3.2: f nin G grubunun bir fuzzy alt grubu olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in G$ için

$$f(xy^{-1}) \geq f(x) \wedge f(y)$$

olmasıdır.

İspat: f , G nin fuzzy alt grubu ise her $x, y \in G$ için

$$f(xy^{-1}) \geq f(x) \wedge f(y^{-1}) \geq f(x) \wedge f(y) \text{ dir.}$$

böylece

$$f(xy) = f(xyyy^{-1}) \geq f(x) \wedge f(yy^{-1}y^{-1})$$
$$\geq f(x) \wedge f(yy^{-1}) \wedge f(y)$$
$$\geq f(x) \wedge f(y) \wedge f(y) \wedge f(y)$$
$$\geq f(x) \wedge f(y) \text{ dir.}$$

olup, buradan f , G grubunun bir fuzzy alt grubu denir.

Teorem 1.3.3: f , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda

$$\forall\, x, y \in G \; için \; f(x) \neq f(y) \; ise \; f(xy) = \min\{f(x), f(y)\} \; dir.$$

İspat: $f(x) < f(y)$ olsun.

$$f(x) = f(xyy^{-1}) \geq \min\{f(xy), f(y^{-1})\}$$
$$= \min\{f(\mathrm{xy}), \mathrm{f(y)}\}$$
$$= f(xy)$$
$$\geq \min\{f(x), f(y)\}$$
$$= f(x)$$

dir. Bu durumda $f(xy) = f(x) = \min\{f(x), f(y)\}$ olduğu görülür.

Teorem 1.3.4: G sonlu bir grup olsun. $f(xy) \geq f(x) \wedge f(y)$ ise f , G grubunun bir fuzzy grubudur.

İspat: $\forall x \in G$ $için$ G sonlu olduğundan x in pozitif kuvvetleri aynıdır. Bu durumda $m > n > 0$ tamsayıları için $x^m = x^n$ dir ve $x^{m-n} = e$, $e \in G$ dir. O halde $m - n - 1 \geq 0$ $dır$ ve $x^{-1} = x^{m-n-1}$ dir . böylece $f(x^{-1}) = f(x^{m-n-1}) \geq f(x)$ elde edilir. Bu durumda f , G sonlu grubunun bir fuzzy alt kümesidir.

Teorem 1.3.5: f; G grubu üzerinde bir fuzzy alt grup olsun.

$$\forall x, y \in G, f(xy^{-1}) = f(e) \Rightarrow f(x) = f(y) \text{dir.}$$

İspat: $f(xy^{-1}) = f(e)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$f(x) = f(xy^{-1}y) \geq \min\{f(xy^{-1}), f(y)\} \geq min\{f(e), f(y)\} = f(y)$ dir.

Aynı durum $f(y)$ için de geçerlidir. yani $f(x) \geq f(y) ve f(y) \geq f(x)$ olduğundan $f(x) = f(y)$dir.

Teorem 1.3.6: f , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. f nin dayanağı;

$$suppf = \{x \in G : f(x) > 0\}$$

G nin bir alt grubudur.

Teorem 1.3.7: f, G nin bir fuzzy alt grubu olsun ve S bir grup olsun. $\alpha: G \to S$ dönüşümü bir homomorfizm olsun. Bu durumda $\alpha(f)$, S grubunun bir fuzzy alt grubudur.

Teorem 1.3.8: G bir grup ve f , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Her

$$x, y \in G \text{ için } f(x) < f(y) \Rightarrow f(xy) = f(yx) = f(x) \text{ dir.}$$

İspat: $\forall x, y \in G$ $için$ $f(x) < f(y)$ olduğunu varsayalım. $f(xy) \geq f(x) \wedge f(y) = f(x) dir$.Bu durumda $f(xy) \geq f(x)$elde edilir. Diğer taraftan $f(x) = f(xyy^{-1}) \geq f(xy) \wedge f(y)$ olup $f(xy) \leq f(y)$ elde edilir. Sonuç olarak $f(xy) = f(x)$ bulunur. Benzer şekilde $f(yx) \geq f(y) \wedge f(x) = f(x)$ dir. Buradan $f(yx) \geq f(x)$ olup $f(x) = f(y^{-1}yx) \geq f(y) \wedge f(yx)$ dir. Bu durumda $f(yx) \leq f(y)$ dir.

Sonuç olarak $f(yx) = f(x)$ dir.

Teorem 1.3.9: Bir G grubunun fuzzy alt gruplarının keyfi kesişimi de bir fuzzy alt gruptur.

İspat: $\forall x, y \in G$ olsun ve her f_i , $i \in I$, G grubunun fuzzy alt grupları olsun.

$$\left(\bigcap_{i \in I} f_i\right)(xy^{-1}) = \bigwedge_{i \in I} f_i(xy^{-1}) \geq \left(f_i(x) \wedge f_i(y)\right)$$

$$= \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(x)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(y)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{i \in I} f_i\right)(x) \wedge \left(\bigcap_{i \in I} f_i\right)(y)$$

olduğundan $(\bigcap_{i\in I} f_i)$, G grubunun bir fuzzy alt grubudur.

Teorem 1.3.10: G bir grup ve G grubundan alınan herhangi iki fuzzy alt küme f ve g olsun . Bu durumda $f.g$ nin G grubunun bir fuzzy alt grubu olabilmesi için gerek ve yeter şart $f.g = g.f$ olmasıdır.

İspat: $f.g = g.f$ olsun .Bu durumda

$$(f.g).(f.g) = f.(v.f).v$$
$$= f.(f.g).g$$
$$= f.g \text{ dir.}$$
$$(f.g)^{-1} = (g.f)^{-1} = f^{-1}.g^{-1} \text{ dir.}$$

$f.g$, T grubunun bir bulanık alt grubu olsun. Bu durumda $f = f^{-1}\ ve\ g = g^{-1}$ dir

böylece $f.g = f^{-1}.g^{-1} = (g.f)^{-1} = g.f$ olduğu bulunur.

Teorem 1.3.11: G bir grup olsun ve f , G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda

f_e , G grubunun bir fuzzy alt grubudur.

İspat: $f_e = \{x \in G: f(x) = f(e)\}$, $x = e\ için\ f(x) = f(e), e \in f_e \neq \emptyset$ dir.

$$\forall x, y \in f_e, f(xy) \geq f(x) \wedge f(e) = f(e) \wedge f(e) = f(e),\ xy \in f_e, \text{ dir.}$$

$$\forall x \in f_e, f(x^{-1}) = f(x) = f(e) \quad ve\ x^{-1} \in f_e$$

dolayısıyla f_e **,** G grubunun bir fuzzy alt grubudur.

1.3.1 FUZZY NORMAL ALT GRUPLAR

Fuzzy Normal Alt Grup Yapıları

Tanım 1.3.1.1: f, G grubundan alınan bir fuzzy alt grup olsun. Eğer her $x, y \in G$ için

$$f(x.y) = f(y.x)$$

ise f ye G grubunun bir fuzzy normal alt grubudur denir.

Teorem 1.3.1.1: $f,\ G$ grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.

f_{N1}) $f(xy) = f(yx)$

f_{N2}) $f(xyx^{-1}) = f(y)$

f_{N3}) $f(xyx^{-1}) \geq f(y)$

f_{N4}) $f(xyx^{-1}) \leq f(y)$ dir.

İspat: $f_{N1} \Longrightarrow f_{N2}$

$\forall x, y \in G$ için

$$f(xyx^{-1}) = f(xyx^{-1}) = f(x^{-1}xy) = f(y)$$

$f_{N2} \Longrightarrow f_{N3}$

$\forall x, y \in G$ için

$$f(xyx^{-1}) = f(y) \text{ olduğu için } f(xyx^{-1}) \geq f(y)$$

$f_{N3} \Longrightarrow f_{N4}$

$\forall x, y \in G$ için

$$f(xyx^{-1}) \leq f(x^{-1}.xyx^{-1}.(x^{-1})^{-1}) = f(x^{-1}.xy.x) = f(y)$$

$f_{N4} \Longrightarrow f_{N1}$

$\forall x, y \in G$ için

$$f(xy) = f(xyxx^{-1}) = f(x.yx.x^{-1}) \leq f(yx)$$

$$f(yx) = f(yxyy^{-1}) = f(y.xy.y^{-1}) \leq f(xy)$$

o halde $f(xy) = f(yx)$ dir.

f ve g, G grubunun herhangi iki fuzzy alt grubu olsun . Bu durumda herhangi bir $u \in G$ için

$$f(x) = g(uxu^{-1}) \text{ dir.}$$

Bu durumda f ve g fuzzy alt gruplarına u elemanına göre eşleniktir denir.

Teorem 1.3.1.2: f nin G grubunun bir fuzzy normal alt grubu olması için gerek ve yeter şart $k \in I$ için f_k seviye alt kümesinin G nin normal alt grubu olmasıdır.

İspat: f , G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu durumda f , G nin bir fuzzy alt grubu ise her $k \in I$ için f_k kümesi G grubunun bir alt grubudur. Buna göre her $x \in G$ için ve her $y \in f_k$ için

$$f(xyx^{-1}) = f(y) \geq k \Longrightarrow xyx^{-1} \in f_k$$

olur ve f_k, G nin normal alt grubudur.

f_k G nin normal alt grubu olsun. Bu durmda f_k , G nin bir fuzzy alt grubudur. Her $x, y \in G$ için

$$f(y) = k \text{ olsun.}$$

o halde $y \in f_k$ dir. Böylece f_k normal alt grup olduğu için $xyx^{-1} \in f_k$ dir.

o halde $f(xyx^{-1}) \geq k = f(y)$ dir ve $f(xyx^{-1}) \geq f(y)$ olduğu için f , G nin bir fuzzy normal alt grubudur.

Teorem 1.3.1.3: G bir grup ve f , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Her $x, y \in G$ için $f(x.y) = f(y.x)$ olması için gerek ve yeter şartg fuzzy alt grup olmak üzere $fg = gf$ olmasıdır.

İspat: Her $x, y \in G$ için $f(x.y) = f(y.x)$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} f.g &= \vee\{f(xy^{-1})\wedge g(y) : y \in G\} \\ &= \vee\{f(y^{-1}x)\wedge g(y) : y \in G\} \\ &= g.f \end{aligned}$$

o halde $f.g = g.f$ dir.

Benzer şekilde $f.g = g.f$ olduğu kabul edilirse $f(x.y) = f(y.x)$ olduğu görülür.

Teorem 1.3.1.4: G bir grup olsun ve f, G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun. f_e

kümesi G grubunun bir normal alt grubudur.

İspat: $f_e = \{x \in T: f(x) = f(e)\}$, G grubunun bir alt grubudur. Her $y \in G$ için

$$f(y) = f(e) \text{ dir.}$$

dolayısıyla her $x \in G$ için

$$f(xyx^{-1}) = f(y) = f(e) \text{ dir .}$$

bu durmda $xyx^{-1} \in f_e$ dir ve f_e , G nin bir normal alt grubudur.

Teorem 1.3.1.5: $f,\ G$ nin bir fuzzy alt grubu olsun.

$N(f) = \{x : x \in G,$ her $y \in G$ için $f(xy) = f(yx)\}$

kümesi G grubunun bir alt grubudur.

Teorem 1.3.1.6: $f,\ G$ nin bir fuzzy alt grubu olsun. f nin $N(f)$ altındaki kısıtlanışı olan $f_{|_{N(f)}}$ kümesi $N(f)$ nin bir fuzzy normal alt grubudur.

İspat: Her $x, y \in N(f)$ için ve $t \in G$ için

$$f(xyt) = f(x.yt) = f(yt.x) = f(y.tx) = f(tx.y) = f(txy)$$

ve $x, y \in N(f)$ dir.

Her $x \in N(f)$ için ve $t \in G$ için

$$f(x^{-1}t) = f((t^{-1}x)^{-1}) = f(t^{-1}x) = f(xt^{-1}) = f((tx^{-1})^{-1}) = f(tx^{-1}) \text{ dir.}$$

böylece $x^{-1} \in N(f)$ olduğundan $N(f)$, G grubunun bir alt grubudur.

f , G nin bir fuzzy alt grubu ve $N(f)$, G nin bir alt grubu olduğu için her $x \in N(f)$ dir ve $x \in G$ dir. Ayrıca her $x, y \in N(f)$için

$$f_{|_{N(f)}}(xy) = f_{|_{N(f)}}(yx)$$

olduğu görülür. O halde $f_{|_{N(f)}}$, $N(f)$ nin bir fuzzy normal alt grubudur.

Teorem 1.3.1.7: f , G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun.

$$suppf = \{x \in G : f(x) > 0\}$$

G nin normal alt grubudur.

Teorem 1.3.1.8: f, G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Her $x \in X$ için

$$f(e)_{\{x\}}.f$$

f fuzzy alt grubunun x e göre fuzzy sol kosetidir ve xf ile gösterilir.

$$f.f(e)_{\{x\}}$$

f fuzzy alt grubunun x e göre fuzzy sağ kosetidir ve fx ile gösterilir.

Teorem 1.3.1.9: f, G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda her $x, y \in G$ için aşağıdaki varsayımlar geçerlidir.

1) $xf = yf \Leftrightarrow xf_e = yf_e$
2) $fx = fy \Leftrightarrow f_e x = f_e y$ dir.

İspat: 1) $xf = yf$ olduğunu kabul edelim. o halde her $z \in G$ için

$$f(x^{-1}z) = f(y^{-1}z) \text{ dir.}$$

dolayısıyla

$$xf_e = yf_e \text{ dir.}$$

Burada z elemanı yerine y yazdığımızda yani

$$f(x^{-1}y) = f(y^{-1}y) = f(e)$$

elde ederiz ki $x^{-1}y \in f_e$ dir, böylece

$$xf_e = yf_e$$

dir. $xf_e = yf_e$ olduğunu kabul edelim. o halde $x^{-1}y \in f_e$ ve $y^{-1}x \in f_e$ dir. Buna göre her $z \in G$ için

$$f(x^{-1}z) = f(x^{-1}yy^{-1}z)$$

$$\geq \min\{ f(x^{-1}y), f(y^{-1}z)$$

$$= \min\{f(e), f(y^{-1}z)\}$$

$$= f(y^{-1}z) \text{ dir.}$$

böylece her $z \in G$ için $f(x^{-1}z) \leq f(y^{-1}z)$ dir. Bu durumda $f(x^{-1}z) = f(y^{-1}z)$ dir.

o halde $xf = yf$ dir.

2. varsayımda benzer şekilde gösterilir.

Teorem 1.3.1.10: f , G grubunun bir fuzzy normal alt grubu olsun. Eğer her

$x, y \in G$ için

$$xf = yf \Rightarrow f(x) = f(y) \text{ dir.}$$

İspat: $xf = yf$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$f(x) = f(yy^{-1}x) \geq f(y) \wedge f(y^{-1}x)$$

$$= f(y) \wedge f(e)$$

$$= f(y)$$

$$f(y) = f(xx^{-1}y) \geq f(x) \wedge f(x^{-1}y)$$

$$= f(x) \wedge f(e)$$

$$= f(x)$$

o halde $f(x) = f(y)$ olduğu görülür.

Teorem 1.3.1.11: f , G grubunun bir fuzzy normal alt grubu olsun.

${}^{G}/_{f} = \{xf : x \in G\}$ kümesini göz önüne alalım.

1) $(xf).(yf) = (xy)f$

2) $({}^{G}/_{f}, .)$ gruptur.

3) ${}^{G}/_{f} \cong {}^{G}/_{f_e}$

İspat: Her $x, y \in G$ $için$

$$(xf).(yf) = (f(e)_{\{x\}}.f).(f(e)_{\{y\}}.f)$$
$$= f(e)_{\{x\}}.(f.f(e)_{\{y\}}).f$$
$$= (f(e)_{\{x\}}.f(e)_{\{y\}}).f.f$$
$$= (xy)f$$

$\left({}^{G}/_{f},.\right)$ işleminin kapalı olduğu 1) den görülüyor. Buna göre her $x, y, z \in G$ için

$$\big((xf).(yf)\big).(zf) = ((f(e)_{\{x\}}.f).\big(f(e)_{\{y\}}.f\big)).(f(e)_{\{z\}}.f)$$
$$= (f(e)_{\{x\}}.f).((f(e)_{\{y\}}.f).(f(e)_{\{z\}}.f))$$
$$= (f(e)_{\{x\}}.f).((f(e)_{\{y\}}.f(e)_{\{z\}}).f)$$
$$= (xf).(yf.zf)$$

Her $x \in G$ için

$$f.(xf) = (ef).(xf) = (ex)f = xf \text{ dir.}$$

yine her $x \in G$ için

$$(x^{-1}f).(xf) = (x^{-1}x)f = ef = f \text{ dir.}$$

dolayısıyla $({}^{G}/_{f},.)$ gruptur.

$h: xf \to xf_e$ bir fonksiyon yani $h: {}^{G}/_{f} \to {}^{G}/_{f_e}$ olsun. Bu durumda

her $x, y \in G$ için

$$h(xf.yf) = h(xyf) = xyf_e = (xf_e).(yf_e) = h(xf).h(yf) \text{ dir .}$$

Bu durmda h bir homomorfizmadır. Buna göre her $x, y \in G$ için

$$h(xf) = h(yf) \Leftrightarrow (xf_e) = (yf_e)$$
$$\Leftrightarrow (xf) = (yf)$$

olduğundan h fonksiyonu birebirdir. Her $xf_e \in {}^{G}/_{f_e}$ için $h(\propto) = xf_e$ olacak şekilde en az bir $\propto = xf \in {}^{G}/_{f}$ olduğundan h fonksiyonu örtendir.O halde

$$ {}^{G}/_{f} \cong {}^{G}/_{f_e} \text{ dir.} $$

Tanım 1.3.1.2: f , G grubunun bir fuzzy normal alt grubu olsun ve f nin indeksi s olsun

f nin mertebesi;

$$ .f = \frac{.(G)}{s} $$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.1.3: f , G grubunun bir fuzzy normal alt grubu olsun. f nin tüm fuzzy kosetlerinin ailesi de $\mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$ nin kardinalitesi f nin indeksidir.

Tanım 1.3.1.4: G sonlu bir grup olsun ve f , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Eğer f, G grubunun değişmeli alt grubu ise f fuzzy alt grubuna, değişmeli fuzzy alt grup denir.

1.4 FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde kullandığımız temel referanslar (N. Palaniappan, Chang C.L, Foster D.H, Lowen R) dir

Fuzzy Topolojik Uzayların Özellikleri

Tanım 1.4.1: X boştan farklı bir küme ve X deki fuzzy alt kümelerin bir ailesi τ olsun. olsun.

1) $X, \emptyset \in \tau$
2) $f, g \in \tau$ ise $f \wedge g \in \tau$ ve
3) her $i \in I$ için $f_i \in \tau$ için $\vee_i f_i \in \tau$

şartları sağlanıyorsa τ ya X üzerindeki bir fuzzy topolojidir denir. (X, τ) sıralı ikilisine de bir fuzzy topolojik uzay denir.

Örnek 1.4.1: Boştan farklı bir X kümesi için X deki bütün sabit fuzzy alt kümelerin kolleksiyonu bir fuzzy topolojidir.

Örnek 1.4.2: Boştan farklı bir X kümesindeki bütün fuzzy topoloji ailelerinin keyfi kesişimi X kümesi için bir fuzzy topolojidir.

Tanım 1.4.2: Boştan farklı bir X kümesi üzerinde τ bir fuzzy topolji olsun . Eğer $f \in \tau$ ise f kümesine τ fuzzy topolojisine göre τ $-$fuzzy $açık$ küme denir. Benzer şekilde eğer f nin tümleyeni açık ise f kümesine τ fuzzy topolojisine göre τ $-$fuzzy kapalı küme denir.

Tanım 1.4.3: : Boştan farklı bir X kümesi üzerinde (X, τ_1) ve (X, τ_2) iki fuzzy topolojik uzay olsun.Eğer (X, τ_1) , (X, τ_2) içinde fuzzy sürekli ise τ_1 , τ_2 den daha incedir denir.

Tanım 1.4.4: X boştan farklı bir küme , f, X de bir fuzzy alt küme ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. f fuzzy alt kümesindeki indirgenmiş fuzzy topoloji f nin fuzzy alt kümelerinin ailesindendir. İndirgenmiş fuzzy topoloji τ_f ile gösterilir.

(f, τ_f) $ikilisi$,(X, τ) nun bir fuzzy alt uzayıdır.

Tanım 1.4.5: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve f ,X in bir fuzzy alt kümesi olsun. f fuzzy alt kümesini içeren , τ dan alınan en az bir g fuzzy kümesini kapsayan bir s fuzzy alt kümesine f nin bir fuzzy komşuluğu denir.

Tanım 1.4.6: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve k ,X in bir fuzzy noktası olsun. k fuzzy noktasını içeren , τ dan alınan en az bir f fuzzy alt kümesini kapsayan , g fuzzy alt kümesine k fuzzy noktasının ‘’ Q $-$komşuluğudur ‘’ denir.

Tanım 1.4.7: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $f, g,$ X kümesinden alınan iki fuzzy alt küme olsun. Eğer;

$$f \leq s \leq g$$

olacak şekilde bir $s \in \tau$ var ise g ye f fuzyy alt kümesinin komşuluğu denir. f fuzzy alt kümesinin bütün komşuluklarının oluşturduğu kümeye f nin fuzzy komşuluk sistemi denir.

Teorem 1.4.1: Her $g < f$ fuzzy alt kümesi için f nin , g nin bir komşuluğu olması için gerek ve yeter şart f nin fuzzy açık olmasıdır.

İspat:($\Rightarrow$) $f \leq f$ olduğu için $f \leq s \leq f$ şeklinde bir s fuzzy açık kümesi vardır. O halde f açıktır.

($\Leftarrow$) f fuzzy açık olduğu için en az bir g vardır ki $g < f$ dir ve f , g nin fuzzy komşuluğudur.

Tanım 1.4.8: X boştan farklı bir küme ve f, X in bir fuzzy alt kümesi olsun ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun f fuzzy alt kümesini kapsayan fuzzy kapalı kümelerin kesişimine f nin kapanışı denir ve $\bar{f}$
ile gösterilir.Bu durumda ;

$$\bar{f} = \wedge\{g: f \leq g \; ve \; g' \in \tau\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.4.9: X boştan farklı bir küme ve f, X in bir fuzzy alt kümesi olsun ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. f fuzzy alt kümesini kapsayan bütün fuzzy açık kümelerin birleşiminin oluşturduğu en geniş fuzzy açık kümeye f fuzzy kümesinin içi denir ve $\overset{o}{f}$ ile gösterilir. Bu durumda ;

$$\overset{o}{f} = \vee\{ g: f \leq g \; ve \; g \; \in \tau\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.4.2: X boştan farklı bir küme ve f, X in bir fuzzy alt kümesi olsun. f nin fuzzy açık olması için gerek ve yeter şart $f = \overset{o}{f}$ olmasıdır.

İspat: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve f , X in bir fuzzy alt kümesi olsun.

Bu durumda $\overset{o}{f}$ açıktır. O halde $\overset{o}{f} \leq s \leq f$ olacak şekilde bir s fuzzy açık kümesi vardır.

Fakat s, f nin bir fuzzy kümesidir ve $s \leq \overset{o}{f}$ dir. Böylece $\overset{o}{f} = s$ dir. O halde $\overset{o}{f}$ fuzzy açıktır ve en büyük fuzzy açık kümedir. Bu durumda $f = \overset{o}{f}$ dir .

Teorem 1.4.3: : X boştan farklı bir küme ve f, g, X in fuzzy alt kümeleri olsun.

(X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durmda aşağıdaki şartlar sağlanır.

1) $\bar{f}$ fuzzy kapalıdır.

2) $f \leq \bar{f}$ dir.

3) $\bar{f}$, f yi kapsayan en dar fuzzy kapalı kümesidir.

4) $f \leq g \Longrightarrow \bar{f} \leq \bar{g}$ dir.

5) f fuzzy kapalı ise $f = \bar{f}$ dir.

6) $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$ dir.

7) $\left(\overline{f \vee g}\right) = \bar{f} \vee \bar{g}$ dir.

Teorem 1.4.4: X boştan farklı bir küme ve f, g, X in fuzzy alt kümeleri olsun.

(X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durmda aşağıdaki şartlar sağlanır.

1) $\overset{o}{f}$ fuzzy açıktır.

2) $\overset{o}{f} \leq f$ dir.

3) $f \leq g \Longrightarrow \overset{o}{f} \leq \overset{o}{g}$ dir.

4) $\left(\overset{o}{f \wedge g}\right) = \overset{o}{f} \wedge \overset{o}{g}$ dir.

5) $\left(\overset{o}{\overset{o}{f}}\right) = \overset{o}{f}$ dir.

Tanım 1.4.10: X boştan farklı bir küme ve f, X in bir fuzzy alt kümesi olsun. (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda ;

$$f = \overset{o}{\overline{f}}$$

ise f fuzzy kümesine düzenli-açık küme denir.

Tanım 1.4.11: X boştan farklı bir küme ve f, X in bir fuzzy alt kümesi olsun. (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda ;

$$f' = \overset{o'}{\overline{f}}$$

ise f kümesine de düzenli kapalı küme denir.

Tanım 1.4.12: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve k , X in bir fuzzy noktası olsun. k fuzzy noktasının komşuluklar ailesi $K(k)$ olsun.Bu durmda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) her $k \in K(k) ise\ k < K$ dir
2) her $k_1, k_2 \in K(k) ise\ k_1 \wedge k_2 \in K(k)$ dir.
3) Herhangi bir $k \in K(k)$ ve $k \leq g\ ise\ g \in K(k)\ dir.$
4) her $k \in K(k)$ için $s \leq k$ olacak şekilde öyle bir $s \in K(k)$ vardır ki $g \leq s$ şartını sağlayan her g fuzzy noktası için $k \in K(g)$ dir.

Tanım 1.4.13: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve k , X in bir fuzzy noktası olsun. k fuzzy noktasının komşuluklar ailesi $K(k)$ olsun. $G(k) \leq K(k)$ olsun $K(k)$ nin her k elemanına karşılık $G \leq K$ olacak şekilde bir g elemanı varsa $G(k)$ ailesine k nin fuzzy yerel tabanı denir.

Tanım 1.4.14: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\alpha \leq \tau$ olsun. Her $f \in \tau$ için

$$f = \bigvee_{i \in I} g_i$$

olacak şekilde $\{g_i\}_{i \in I} \leq \alpha$ alt ailesi varsa α ya τ için bir taban denir. Yani ;

α, τ için bir tabandır ancak ve ancak her $f \in \tau$ için en az bir $\alpha' \leq \alpha$ vadır

öyleki $\bigvee_{g \in \alpha'} g$ dir.

Tanım 1.4.15: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve f , X in bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda X deki fuzzy açık kümelerin f ile kesişimlerinin oluşturduğu aileye τ nun f ye indirgenmiş fuzzy topolojisi denir ve τ_f ile gösterilir.

Tanım 1.4.16: X kümesindeki bir τ fuzzy topolojisi için α bir taban ise f fuzzy kümesinden indirgenmiş τ_f fuzzy topolojisi için ;

$$\alpha_f = \{s \wedge f : s \in \alpha\}$$

bir tabandır.

Teorem 1.4.5: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\alpha < \tau$ olsun . Bu durumda α , τ için bir tabandır gerek ve yeter şart;

1) $X = \bigvee_{f \in \alpha} f$
2) her $f_1, f_2 \in \alpha$ için ve her $f \in f_1 \wedge f_2$ $için$ $f \in \alpha$

olmasıdır.

Tanım 1.4.17: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\beta \leq \tau$ olsun. β nın elemanlarının her sonlu kesişiminin oluşturduğu fuzzy kümeler ailesi τ nun bir tabanı ise β , τ için bir alt tabandır.

Tanım 1.4.18: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve f , X in bir fuzzy alt kümesi olsun. f nin ve f' nün kapanışlarının kesişimindeki bir k fuzzy noktasına f nin sınır noktası denir. f nin sınır noktalarının kümesi;

$$\varphi f = \{k : k \in \bar{f} \wedge \bar{f}'\}$$

Tanım 1.4.19: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki fuzzy topolojik uzay olsun ve

$$f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$$

bir dönüşüm olsun. f nin fuzzy sürekli olması için gerek ve yeter şart τ_2 de her bir açık g fuzzy kümesinin ters görüntüsünün $f^{-1}(g)$, τ_1 de açık olmasıdır.Yani her $g \in \tau_2$ *için*

$$f^{-1}(G) \in \tau_1$$

oluyorsa f ye fuzzy sürekli denir.

(f, τ_f) ve (g, τ_g) sırasıyla (X, τ_1) ve (Y, τ_2) fuzzy topolojik uaylarının birer alt uzayı olsun.

$f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(f) < f(g)$ ise

$f: (f, \tau_f) \rightarrow (g, \tau_g)$ de bir dönüşümdür.

Tanım 1.4.20: (f, τ_f) ve (g, τ_g) sırasıyla (X, τ_1) ve (Y, τ_2) fuzzy topolojik uzaylarının birer alt uzayı olsun.

$f: (f, \tau_f) \rightarrow (g, \tau_g)$ dönüşümünün indirgenmiş fuzzy sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir g fuzzy kümesinin τ_g de olması ve $f^{-1}(g) \wedge f$ nin de τ_f de olmasıdır.

Teorem 1.4.6: $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır;

1) f fuzzy süreklidir.
2) f herhangi bir k noktasında Q-komşuluğuna göre fuzzy süreklidir.
3) f herhangi bir k noktasında komşuluğa göre fuzzy süreklidir.

Teorem 1.4.7: $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ bir dönüşüm olsun. Bu durmda;

f fuzzy sürekli ise her f fuzzy kümesi için $f(f)$ nin herhangi bir g komşuluğunun ters görüntüsü f nin bir komşuluğudur.

İspat: f fuzzy sürekli , f , X kümesinden alınan bir fuzzy alt küme ve g , $f(f)$ nin herhangi bir komşuluğu olsun. Bu durumda g , $f(f)$ nin fuzzy açık bir t komşuluğunu içerir. O halde ;

$$f() \leq t \leq g$$

dir. Buradan ;

$$f \leq f^{-1}(f(f)) \leq f^{-1}(t) \leq f^{-1}(g)$$

yazabiliriz. f fuzzy sürekli olduğu için $f^{-1}(t) \in \tau_1$ dir. O halde;

$$f \leq f^{-1}(t) \leq f^{-1}(g)$$

elde edilir ki böylece $f^{-1}(g)$, f nin bir komşuluğudur.

Teorem 1.4.8: $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ fuzzy sürekli bir dönüşüm ve $g: (Y, \tau_2) \rightarrow (Z, \tau_3)$ bir fuzzy sürekli dönüşüm olsun. O halde;

$$gof: (X, \tau_1) \rightarrow (Z, \tau_3)$$

fuzzy sürekli bir dönüşümdür.

Tanım 1.4.21: $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ birebir ve örten dönüşümüne fuzzy sürekli ve fuzzy açık ise fuzzy homomorfizm denir. İki fuzzy topolojik uzay arasında fuzzy homomorfizm varsa bu uzaylara fuzzy homomorfiktirler denir.

Tanım 1.4.22: f ve g herhangi iki fuzzy altküme olsun. $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir ve örten ise X ve Y ye aynı kardinal sayıya sahiptir denir. Herhangi bir X kümesinin kardinal sayısı bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|X|$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.23: Bir küme sonlu ise bu kümeye sayılabilir küme denir.

Tanım 1.4.24: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\alpha_\tau = \{\alpha\}$, τ nun bütün tabanlarının kümesi olsun. Her $\alpha \in \alpha_\tau$ için $|\alpha|$ kardinal sayılar kümesinin en küçük elemanına (X, τ) fuzzy topolojik uzayının ağırlığı denir ve ;

$$w(X, \tau) = \min \{ |\alpha| : \alpha, \tau \text{ nun bir tabanı} \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.25: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. (X, τ) fuzzy topolojik uzayının her fuzzy noktasının sayılabilir bir fuzzy komşuluklar tabanı varsa bu uzaya birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzay denir.

Benzer şekilde bir (X, τ) fuzzy topolojik uzayının sayılabilir bir tabanı varsa bu uzaya da ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzay denir.

Teorem 1.4.9: Her ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzay aynı zamanda birinci sayılabilir toplojik uzaydır.

İspat: (X, τ) ikinci sayılabilir fuzzy topolojik uzay olsun . Bu durumda sayılabilir bir tabana sahiptir. α , τ nun sayılabilir bir tabanı olsun . $\alpha_k = \{f: k < f, f \in \alpha\}$ ailesini göz önüne alalım.

$\alpha_k \leq \alpha$ ve α sayılabilir olduğundan α_k ailesi de sayılabilirdir. $k < g$ olacak şekildeki bir $g \in \tau$ için α , τ nun tabanı olduğundan $k < f \leq g$ olacak şekilde $f \in \alpha$ vardır.

$k < f \; ve \; f \in \alpha$ ise $f \in \alpha_k$ dır.

O halde $k < f$ olacak şekildeki $g \in \tau$ için $k < f \leq g$ olacak şekilde en az bir $f \in \alpha$ vardır. Bu durmda α , k noktasının komşuluklar tabanıdır. Böylece (X, τ) fuzzy topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir tabanı olduğundan bu fuzzy topolojik uzay aynı zamanda birinci sayılabilir fuzzy topolojik uzaydır.

Tanım 1.4.26: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık kümelerin bir ailesi olsun.Eğer $X = \bigvee_{i \in I} f_i$ ise $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ ailesine X in bir fuzzy açık örtüsü denir.

Tanım 1.4.27: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve X in her $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ fuzzy açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına fuzzy kompakt uzay denir.

2. FUZZY TOPOLOJİK GRUPLAR

Bu bölümde kullandığımız temel referanslar Chon I., Foster D.H., Liang M.J., Hai Y.C., Lowen R. dır

2.1Temel Kavramlar ve Teoriler

Tanım 2.1.1: $\boldsymbol{G}$ bir grup ve τ da $\boldsymbol{G}$ üzerinde bir topoloji olsun. Eğer $\boldsymbol{G}$ grubundaki

1)$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G}$
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$(Grup işlemine göre)

2)$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{x} \rightarrow x^{-1}$($\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{G}$ de ki işleme göre tersi)

fonksiyonları sürekli ise $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau})$ üçlüsüne bir topolojik grup denir.

Buradaki $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ kartezyen çarpımı üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir.

$\boldsymbol{G}$ grubunun toplamsal olması halinde

1)$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G}$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$

2)$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G}$

$\boldsymbol{x} \rightarrow -\boldsymbol{x}$

olacaktır.

Lemma 2.1.1: $\boldsymbol{G}$ bir topolojik grup olsun bu taktirde $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G},\ \boldsymbol{g} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}) := \boldsymbol{g}^{-}\mathbf{1}$

dönüşümü bir homeomorfizmdir.

Tanım 2.1.2: Bir G grubunda

$\delta: G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy - 1$ ile tanımlanan fonksiyona $\boldsymbol{\delta}$-fark fonksiyonu

denir.Grubun toplamsal olması halinde bu fonksiyon

$\delta: G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x - y$

Önerme 2.1.1:Bir G grubu üzerinde bir topoloji verilsin

$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{f}: \boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{G}$

$$(x, y) \to F(x, y) := xy \quad ve \qquad x \to x^{-}1$$

Fonksiyonları sürekliolması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{\delta}$-fark fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.1.1: X bir fuzzy topolojik uzay G de çarpımsal bir fuzzy topolojık grup olsun. $f, g: X \to G$ fonksiyonları sürekli ise $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ ile tanımlanan

$$f.g: X \to G$$

fonksiyonları süreklidir

Önerme 2.1.2: X bir fuzzy topolojik uzay ve G de çarpımsal bir fuzzy topolojik grup olsun
$f, g: X \to G$ fonksiyonları sürekli ise $(f.g-1)(x) = f(x).[g(x)\,]-1$ ile tanımlanan $f.g-1: X \to G$ fonksiyonları süreklidir

Tanım 2.1.3: $(X, .)$ bir grup ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda;

1) $f: (X, \tau)x(X, \tau) \to (X, \tau)$, $f: (xy) \to xy$ dönüşümü fuzzy süreklidir.
2) $f: (X, \tau) \to (X, \tau)$, $f: x \to x^{-1}$ dönüşümü fuzzy süreklidir.

şartları sağlanıyorsa $(X, \tau, .)$ sistemine fuzzy topolojik grup denir.

Tanım 2.1.4: X bir grup ve X in bütün sabit fuzzy alt kümeleri fuzzy açık olsun.

G , X in bir fuzzy grubu olsun ve τ_G , G ye indirgenmiş fuzzy topoloji olsun. Bu durumda ;

1) $\alpha: (x, y) \to xy$
   $(G, \tau_G)x\,(G, \tau_G) \to (G, \tau_G)$ dönüşümü fuzzy sürekli

2) $\beta: x \to x^{-1}$
   $(G, \tau_G) \to (G, \tau_G)$ dönüşümü fuzzy sürekli

şartları sağlanıyorsa G fuzzy grubuna X in bir fuzzy topolojik grubu denir.

Eğer sadece 1) şartı sağlanıyorsa G fuzzy grubuna X in bir fuzzy topolojik yarı grubu denir.

Tanım 2.1.5:G bir grup ve (G,τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer ;

1) $\forall\, a,b\ \in G\ ve\ (ab)_\alpha$ fuzzy noktasının bir W Q-komşuluğu için a_α nın U ve b_α nın V komşulukları için $UV < W$ olacak şekilde bir Q-komşuluğu varsa
2) $\forall\, a\ \in G$ ve ${a_\alpha}^{-1}$ fuzzy noktasının bir V Q-komşuluğu için $U^{-1} \leq V$ olacak
3) şekilde a_α nın bir U Q-komşuluğu varsa

şartları sağlanıyorsa (G,τ) ya bir fuzzy topolojik grup denir.

Teorem 2.1.2: X bir grup ve X in bütün sabit fuzzy alt kümeleri fuzzy açık olsun ve (X,τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun.Bu durumda X grubundan alınan bir G fuzzy alt grubu bir fuzzy topolojik gruptur ancak ve ancak $f:(X,\tau)x(X,\tau) \to (X,\tau)$, $f:(xy) \to xy^{-1}$ dönüşümü fuzzy süreklidir.

İspat: G ,X de bir fuzzy topolojik grup olsun. Bu durumda

$$\alpha:(G,\tau_G)x\,(G,\tau_G) \to\ (G,\tau_G)\ ,\alpha(x) = \alpha^{-1}$$

$$\beta_G:(G,\tau_G) \to\ (G,\tau_G)\ ,\qquad \beta_G(x) = x$$

dönüşümü fuzzy süreklidir. O halde $(G,\tau_G)x\,(G,\tau_G)$ den $(G,\tau_G)x\,(G,\tau_G)$ ye $(xy) = (xy^{-1})$ kartezyen çapım dönüşümü fuzzy süreklidir. Bu durumda

$$\gamma:(x,y) \to xy$$

$$(G,\tau_G)x\,(G,\tau_G) \to\ (G,\tau_G)$$

dönüşümü de fuzzy süreklidir. O halde $f:\gamma o(\alpha x\beta)$

$$f:(xy) \to (x,y^{-1}) \to\ xy^{-1}$$

dönüşümü fuzzy süreklidir.

f dönüşümü fuzzy sürekli olsun. G , X in fuzzy alt grubu olduğuna göre

$$\forall x \in X \; için \; G(x) \leq G(e)$$

dir.

O halde

$$\beta : y \to (e, y) \to ey^{-1} = y^{-1} \text{ dönüşümü sürekli ve}$$

$$\gamma : (x,y) \to (x, y^{-1}) \to x(y^{-1})^{-1} = xy$$

dönüşümüde fuzzy sürekli olur.

Teorem 2.1.3: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay (K, K) bir fuzzy topoljik grup olsun ve f, g X fuzzy topolojik uzayından K topolojik uzayına bütün fuzzy sürekli fonksiyonların kümesinden alınan iki fonksiyon olsun.
Bu durumda X fuzzy topolojik uzayından K fuzzy topolojik uzayına

$$(f * g)(x) = f(x).\, g(x)$$

$$\forall x \in X \,, f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$$

şeklinde tanımlı $f * g$ ve f^{-1} dönüşümleri fuzzy süreklidir.

İspat: α_μ $\mu \in (0,1]$, X de bir fuzzy nokta olsun ve W

$$(f*g)(\alpha_\mu) = ((f*g)(\alpha))_\mu = (f(\alpha) \cdot g(\alpha))_\mu$$

nın K da açık bir Q-komşuluğu olsun. (K, K) bir fuzzy topolojik grup olduğundan

$U \cdot V \subseteq W$ olacak şekilde $f(\alpha)_\mu$ nün U ve $g(\alpha)_\mu$nün V açık Q-komşulukları vardır. f ve g fuzzy sürekli olduğu için $\alpha_\mu$fuzzy noktasının

$$f(U1) \leq U \text{ ve } g(V1) \leq V$$

olacak şekilde X de U_1 ve V_2 açık Q-komşulukları vardır. Açık olarak $U_1 \wedge V_1$ kesişimi de X de α_μ açık bir Q-komşuluğudur. Şimdi

$$(f*g)(U_1 \wedge V_1) \leq W$$

olduğunu göstermemiz gerekir. $b_k \in U_1 \wedge V_1$ için

$$(f*g)(b_k) = (f(b)g(b))_k = (f*g)(b)_k \in W$$

olmalıdır. $b_k \in U_1$ ve $b_k \in V_1$ dir. Böylece

$$f(b_k) = f(b)_k \in U \quad \text{ve} \quad g(b_k) = g(b)_k \in V$$

elde edilir. O halde $U(f(b)) \geq k$ ve $V(g(b)) \geq k$ dir. Ayrıca

$$(U \cdot V)(f(b)g(b)) = sup\, \{min\{U(z_1), V(z_2) \mid z_1 z_2 = f(b)g(b\}\} \geq k$$

dır. $U \cdot V \leq W$ olduğuna göre

$$k \leq (U \cdot V)(\, f(b)g(b)\,) \leq W(\, f(b)g(b)\,)$$

dır. Böylece $(f(b)g(b))_k = (f*g)(b)_k \in W$ elde edilir. O halde $(f*g)(U_1 \cap V_1) \subseteq W$ dir ve $f*g$

dönüşümü fuzzy süreklidir.

α_μ , X de bir fuzzy nokta ve W,

$$f^{-1}(\alpha_\mu) = f^{-1}(\alpha)_\mu = f(\alpha)_\mu{}^{-1}$$

nın K da açık bir Q-komşuluğu olsun. $(K, K\ )$ bir fuzzy topolojik grup olduğu için

$U^{-1} \leq W$ olacak şekilde $f(\alpha)_\mu$nın açık bir U Q-komşuluğu vardır. f, X de α_μ fuzzy noktasında fuzzy sürekli olduğuna göre α_μ nın $f(U_1) \leq U$ olacak şekilde X de açık bir U_1 Q-komşuluğu vardır. Şimdi

$$f^{-1}(U_1) \leq W$$

olduğunu gösterelim. $b_k \in U_1$ olsun. $f(b_k) = f(b)_k \in U$ dur. O halde

$$k \leq U(f(b)) = U^{-1}(f(b)^{-1}) \leq W(f(b)^{-1}) = W(f^{-1}(b))$$

dir. Böylece $f^{-1}(b)_k = f^{-1}(b)_k \in W$ dir ve f^{-1} dönüşümü fuzzy süreklidir.

Teorem 2.1.4: X bir grup ve X in bütün sabit fuzzy alt kümeleri fuzzy açık olsun ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun., (K, K) bir fuzzy topolojik grup ve e, K grubunun birim elemanı olsun. Bu burumda e': $X \to Y$, $e'(x) = e$ dönüşümü fuzzy süreklidir.

İspat: $\forall x \in X$ için ve $U \in K$ olsun

$$(e')^{-1}(U)(x) = U(e'(x)) = U(e)$$

dir. O halde $(e')^{-1}(U)$ fuzzy kümesi sabittir. X bir grup ve X in bütün sabit fuzzy alt kümeleri fuzzy açık ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olduğuna göre $(e')^{-1}(U) \in \tau$ elde edilir.

Teorem 2.1.5: X bir grup ve X in bütün sabit fuzzy alt kümeleri fuzzy açık olsun ve (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun., (K, K) bir fuzzy topolojik grup olsun. Bu durumda X fuzzy topolojik uzayından K topolojik uzayına bütün fuzzy sürekli fonksiyonların kümesi ile * işlemi bir grup oluşturur. Aynı zamanda K bir abel grup ise bu sistem bir abel gruptur.

Teorem 2.1.6: F ve G bir X grubundaki K fuzzy topolojik yarı grubunun fuzzy altkümeleri ve H, X de bir L fuzzy topolojik grubunun fuzzy altkümesi olsun. Bu durumda

1) F ve G fuzzy kompakt ise FG fuzzy kompakttır.
2) H fuzzy kompakt ise H^{-1} fuzzy kompakttır.

3.FUZZY TOPOLOJİK GRUPLARIN TERS LİMİTLERİ

Bu bölümde profinite fuzzy grupların (halkaların, cebirlerin) inşasında kullanılan ‘’ ters limitler’’ ele alımıştır. Özellikle bir invers sistemin invers limitinin varlığı ve izomorfizmaya bağlı olarak tek oluşu ve ayrıca bir ters limitin farklı ters sistemlerin ters limiti biçiminde ifade edilebilmesi gibi bazı özelliklerin daha iyi anlaşılması için önemlidir.

Tanım3.1: $I = (I, \preccurlyeq)$ ikilisine aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa yönlendirilmiş kısmi sıralı fuzzy alt küme veya bazen kısaca I nın kendisine yönlendirilmiş fuzzy poset denir.

a) Her $i \in I$ için $i \preccurlyeq i$ dir.
b) Her $i, j, k \in I$ için $i \preccurlyeq j$ ve $j \preccurlyeq k$ ise $i \preccurlyeq k$ dir.
c) Her $i, j \in I$ için $i \preccurlyeq j$ ve $j \preccurlyeq i$ ise $i = j$ dir.
d) $i, j \in I$ ise $i, j \preccurlyeq k$ olacak biçimde bir $k \in I$ vardır.

Tanım3.2: $(I, \preccurlyeq)$; yönlendirilmiş bir fuzzy poset, $\{X_i : i \in I\}$ fuzzy topolojik grupların bir ailesi ve her $i \succcurlyeq j$ için $\varphi_{ij} : X_i \to X_j$ sürekli bir grup homomorfizmi olsun. Eğer $i \succcurlyeq j \succcurlyeq k$ olacak biçimde $i, j, k \in I$ için

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & X_i \\
& X_i \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise , $\{X_i : i \in I\}$ ailesine tanımlanan sürekli hoomorfizmalarla birlikte bir ters sistem (inverse veya projective system) denir.

Not: Tanımda verilen φ_{ij} dönüşümü bazı kaynaklarda φ_{ji} şeklinde ifade edilir. Fakat burada önemli olan ve diğer ifadelerde de ortak olan $j \preccurlyeq i$ oluşudur.

Tanım3.3: Y bir fuzzy topolojik grup, $\{X_i : i \in I\}$ fuzzy topolojik grupların bir ters sistemi ve her $i \in I$ için $\psi_i : Y \to X_i$ sürekli bir grup homomorfizmi olsun. $i \succcurlyeq j$ ve $i, j \in I$ için

$\varphi_{ij}\psi_i = \psi_i$ oluyorsa yukarıda tanımlanan ψ_i dönüşümlerine fuzzy uyumlu veya fuzzy compatible denir.

Örnek3.1: Alışılmış sıralaması ile $I = [0,1], \{X_i : i \in [0,1]\}$ sonlu fuzzy kümeler ailesi ve her $\varphi_{i,i+1} : X_{i+1} \to X_i$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $i \in I$ için $\varphi_{i,i} = id_{X_i}$ ve $j > i$ için $\varphi_{i,j} = \varphi_{i,i+1} \dots \varphi_{j-1,j}$ olsun. Bu durumda (X_i, φ_{ij}) sonlu kümelerin bir invers sistemidir.

G bir fuzzy grup ve I ise ‘‘$U_1, U_2 \in I$ için $V \leq U_1 \cap U_2$ olacak biçimde $V \in I$ vardır’’ şartını sağlayan fuzzy normal alt grupların ailesi olsun $U, V \in I$ için $U \leq^* V \Leftrightarrow V \leq U$ şeklinde tanımlanan $\leq^*$ bağıntısı ile I bir yönlendirilmiş fuzzy kümedir.

$U \leq^* V$ ve her $g \in G$ için

$$q \cup V : G / V \longrightarrow G / U$$
$$q \cup V(gV) \mapsto gU$$

olmak üzere $(G_U, q \cup V)$ sistemi fuzzy gruparın bir invers sistemidir.

Tanım3.4: Aşağıdaki verilen universal (evrensel) özellikler sağlanıyorsa X fuzzy topolojik grubuna $\varphi_{ij} : X \to X_i$ şeklinde tanımlanan uyumlu dönüşümlerle birlikte , bir fuzzy ters limit (fuzzy invers limiti) denir. Y bir fuzzy topolojik grup ve $\psi_i : Y \to X_i$ $(i \in I)$ uyumlu grup homomorfizmleri olsun.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise $\psi: Y \longrightarrow X$ olacak şekilde bir tek sürekli fuzzy grup homomorfizmi vardır.

Örnek3.2: $\varphi_i : X_i \to X_j$ dönüşümlerine ''projeksiyon'' denir. φ_i dönüşümlerinin örten olması şart değildir. Inverse limit kısaca $limit(X, \varphi_i)$ veya kısaca $X = \lim_{\leftarrow} X_i (i \in I)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5: $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ bir fuzzy invers sistem olmak üzere $\varphi_i (i \geq j)$ dönüşümleri örtense bu sisteme fuzzy örten invers sistem denir.

Tanım3.6: I yönlendirilmiş poset, her $i \in I$ için sonlu ayrık fuzzy topolojik uzay ve $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ fuzzy invers sistem olmak üzere $X = \lim_{\leftarrow} X_i (i \in I)$ uzayına fuzzy profinite veya ''Boolean uzay '' denir.

Önerme: G bir fuzzy topolojik grup ve I da G nin kapalı fuzzy normal alt grublarından oluşan bir tabanı olsun. $K, L \in I$ olmak üzere $K \leq' L \Leftrightarrow L \leq K$ olacak biçimde bir bağıntı tanımlayalım $\leq'$ bağıntısına göre I bir posettir. $K, L \in I$ ve $K \leq' L$ için

$$q_{KL} : G/L \to G/K$$

şeklinde tanımanan örten sürekli homomorfizmalarla birlikte $G/K \ (K \in L)$ biçiminde fuzzy gruplar bir fuzzy invers sistem oluşturur.

$$(\widehat{G}, \varphi_k) = X = \lim_{\leftarrow} G/K$$

olsun. Bu durumda çekirdeği $\bigcap_{K \in I} K$ görüntüsü $\widehat{G}$ nin yoğun alt kümesi olan her $K \in I$

için $\varphi_k\theta$ dönnüşümü G den G/K ya bölüm dönüşümü olacak şekilde $\theta : G \to \hat{G}$ sürekli homomorfizması vardır.

Önerme 3.1 : $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ üçlüsü fuzzy topolojik gruplar ve sürekli grup homomorfizmlerinin bir invers sistemi olsun. Bu durumda

1) $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ fuzzy invers sisteminin bir tek limiti vardır.

2) Fuzzy invers limitler izomorfizme göre tektir. Yani X ve Y $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ sisteminin invers limiti ise her $i \in I$ için $\psi_i\psi = \varphi_i$ olacak şekilde yalnız bir tek $\varphi : X \to Y$ topolojik izomorfizmi vardır.

Önerme 3.2: $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ sonlu , ayrık fuzzy topolojik grupların bir invers sistemi

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i$$

ve

$$\varphi_i : G \to G_i$$

dönüşümleri ise projeksiyon homomorfizmaları olsun. Bu durumda

$$\{S_i : S_i = ker\ (\varphi_i)$$

ailesi G de birim elemanının ‘’ açık komşuluklarının temel sistemini’’ oluşturur.

KAYNAKLAR

1) Fuzzy Sets and fuzzy Logic (George J. Klir, Bo Yuan ,P. Hall P T R, 19995)

2) Fuzzy Topology (N. Palaniappan, CRC Pres, 2002)

3) Fuzzy Group Theory (J.N. Mordeson,K.R. Bhutani, A.Rosenfeld, Springer, 2005)

4) Chang C.L., Fuzzy Topological Space, J.Math.Anal.Appl. 24, 1968, 182-190

5) Chon I., Some Properties of Fuzzy Topological Groups, Fuzzy Sets and Systems 123,2001, 197-201

6) Foster D.H., Fuzzy topological groups, J.Math .Anal .Appl. 67, 1979, 549-564

7) Jha P.K., Singh T.B., Some Local Properties of fuzzy topology and fuzzy topological groups, Bull.Cal.Math.Soc. 87, 1995, 441-448,

8) Jin-xuan F., Fuzzy homomorphism and fuzzy isomorphism, Fuzzy sets and systems 63,1994, 237-242

9) Liang M.J.,Hai Y.C., Fuzzy topological groups, Fuzzy sets and systems 12, 1984, 289-299

10) Liang M.J.,Hai Y.C., On the direct product of fuzzy topological groups, Fuzzy sets andsystems 17, 1985, 91-97

11) Liang M.J.,Hai Y.C., On fuzzy topological groups, Fuzzy sets and systems 23, 1987,281-287

12) Lowen R., Fuzzy Topological spaces and fuzzy compactness, J.Math.Anal.Appl. 56,1976, 621-633

13) Pao-Ming, Pu and Ying-Ming, Liu, Fuzzy Topology. I. Neigbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, J.Math.Anal.Appl. 76, 571-599, 1980

14) Rosenfeld D.H., Fuzzy groups, J.Math.Anal.Appl. 35, 1971, 512-517

15) Wong C.K., Fuzzy Topology:Product and quotient therems, J.Math.Anal.Appl 45, 1974,512-521

16) Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets. Information and Control 8, 338-353

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kadir GÜNEŞ

Doğum Yeri : AFYONKARAHİSAR

Doğum Tarihi : 09/06/1984

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyonkarahisar Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans : Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Çalıştığı Kurum : MEB (Matematik Öğretmeni)

Çalıştığı Yer :

1) Kopal İlköğretim Okulu (ERZURUM)
2) 75.Yıl İlköğretim Okulu (Musabeyli/KİLİS)
3) Toki İlköğretim Okulu (Merkez/KİLİS)