

**HİPERBOLİK UZAYIN İZOMETRİLERİ ÜZERİNE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Rabia ÇAKAN**

**DANIŞMAN**

**Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HAZİRAN 2011**

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HİPERBOLİK UZAYIN İZOMETRİLERİ ÜZERİNE**

**Rabia ÇAKAN**

**DANIŞMAN**  
**Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HAZİRAN 2011**

## TEZ ONAY SAYFASI

Rabia ÇAKAN tarafından hazırlanan “Hiperbolik Uzayın İzometrilere Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 07/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik **Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

**Başkan** : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi



**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi



**Üye** : Doç. Dr. Erdoğan HALAT  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi



Afyon Kocatepe Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
...../...../..... tarih ve  
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü  
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

**BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI**  
**Afyon Kocatepe Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

07/06/2011

Rabia ÇAKAN

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### HİPERBOLİK UZAYIN İZOMETRİLERİ ÜZERİNE

Rabia ÇAKAN

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2011

Danışman: Yrd. Doç.Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tezin amacı, hiperbolik uzaydaki izometrisini incelemektir. Birinci bölümde hiperbolik geometrinin ortaya çıkışı açıklanmıştır. İkinci bölümde Poincaré üst yarı düzlemindeki bazı temel kavramlar tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde Poincaré üst yarı düzleminin izometrisini verilmiştir. Dördüncü bölümde hiperbolik uzayın izometrisini ve kürenin stereografik izdüşümünü incelenmiştir.

2011, Sayfa : 91

**Anahtar Kelimeler:** Hiperbolik Uzay, İnverson, İzometri, Stereografik İzdüşüm.

## ABSTRACT

M.Sc Thesis

### ON THE ISOMETRIES OF HYPERBOLIC SPACE

Rabia ÇAKAN

Afyonkarahisar Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

June 2011

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

The aim of this thesis was to examine isometries in hyperbolic space. In the first chapter, the emergence of the hyperbolic geometry was explained. In the second chapter, some general concepts in Poincaré upper half plane were defined. In the third chapter, isometries of the Poincaré upper half plane were given. In the fourth chapter, isometries of the hyperbolic space and stereographic projections of sphere were examined.

2011, Page : 91

**Key Words:** Hyperbolic Space, Inversion, Isometry, Stereographic Projection.

## TEŐEKKÖR

Bu alıŐmayı bana vererek çalıŐmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ'e, manevi desteklerini esirgemeyen aileme teŐekkÖr ve Őükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Rabia ÇAKAN

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	i
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. HİPERBOLİK DÜZLEMDE İZOMETRİLER.....	15
3.1 H-Düzleminde İncersiyon.....	18
3.2 H-Düzleminde Yansımalar.....	31
3.3 H-Düzleminde Ötelemeler.....	47
3.4 H-Düzleminde Dönmeler.....	50
3.5 Kongrüans.....	59
4. HİPERBOLİK UZAYDA İZOMETRİLER.....	62
4.1 Hiperbolik Uzayda İncersiyon.....	66
4.2 Hiperbolik Uzayda Yansımalar, Ötelemeler ve Dönmeler.....	69
4.3 Kürelerin Stereografik İzdüşümü.....	82
KAYNAKLAR.....	89
ÖZGEÇMİŞ.....	91



## SİMGELER DİZİNİ

$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$	: Soyut geometri
$\mathbb{A} - \mathbb{D} - \mathbb{B}$	: Arada olma
${}_a L$	: Düz jeodezik
${}_c L_r$	: Eğri jeodezik
$\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$	: Kartezyen düzlem
$d_E$	: Öklid uzaklık
$\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$	: Metrik geometri
$\mathbb{C}$	: Kompleks uzay
$\mathbb{R}$	: Öklid uzay
$H - düzlemi$	: Poincaré üst yarı düzlem
$H^3$	: Hiperbolik uzay
$I_{C,k}$	: İnvaryasyon
$d_H$	: Poincaré uzaklık
$\hat{\phantom{x}}$	: Açık ölçüsti
$\circ$	: Bileşke işlemi
$\parallel$	: Paralel
$\simeq$	: Eşlik işareti
$\triangle$	: Üçgen işareti

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Öklidin V. postulatı ve Playfair postulatı arasındaki ilişki... 6
Şekil 2.2	Playfair postulatı ve üçgenin iç açıları arasındaki ilişki..... 7
Şekil 2.3	Üçgenin iç açıları ve Öklidin V. postulatı arasındaki ilişki.. 8
Şekil 2.4	$d_H$ uzaklığı..... 12
Şekil 2.5	Eş hiperbolik uzunluktaki yaylar..... 14
Şekil 3.1	Sabit üç noktadan geçen düzlem..... 16
Şekil 3.2	Direkt ve karşıt hareket..... 18
Şekil 3.1.1	Çemberde kuvvet..... 19
Şekil 3.1.2	H-düzleminde inversiyon..... 20
Şekil 3.1.3	İnversiyon ile doğru ve çember arasındaki ilişki..... 22
Şekil 3.1.4	İnversiyon ile çemberler arasındaki ilişki..... 23
Şekil 3.1.5	Ortogonal Çemberler..... 25
Şekil 3.1.6	Konformal dönüşüm..... 26
Şekil 3.1.7	İnversiyonlar altında açıların korunumu..... 28
Şekil 3.1.8	Kirişler dörtgeni..... 29
Şekil 3.2.1	Öklid düzleminde yansıma..... 31
Şekil 3.2.2	H-düzlemindeki hiperbolik yansıma..... 32
Şekil 3.2.3	Üç izometri ile $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$ gösterimi..... 35
Şekil 3.2.4	Öklid ve hiperbolik çember gösterimi..... 41
Şekil 3.2.5	Öklid ve hiperbolik merkezlerin gösterimi..... 43
Şekil 3.3.1	Öklid düzlemde öteleme..... 47
Şekil 3.3.2	H-düzlemindeki hiperbolik öteleme..... 49
Şekil 3.4.1	Öklid düzleminde dönme..... 51
Şekil 3.4.2	Öklid düzleminde dönme..... 52

<b>Şekil 3.4.3</b>	H-düzlemindeki hiperbolik dönme.....	54
<b>Şekil 3.4.4</b>	Kesişen iki eğri jeodezikteki hiperbolik dönme.....	57
<b>Şekil 3.4.5</b>	İki hiperbolik dönme.....	58
<b>Şekil 3.4.6</b>	Hiperbolik dönmeler.....	58
<b>Şekil 3.5.1</b>	İki doğrunun kongruentliği.....	59
<b>Şekil 3.5.2</b>	İki açının kongruentliği.....	60
<b>Şekil 4.1</b>	Düşey çember üzerindeki iki nokta arasındaki $d_H$ uzaklığı.	65
<b>Şekil 4.1.1</b>	$H^3$ te inversiyon.....	68
<b>Şekil 4.2.1</b>	Öklid uzayda öteleme ve dönme.....	70
<b>Şekil 4.2.2</b>	Öklid uzayda yansıma.....	71
<b>Şekil 4.2.3</b>	Öklid uzayda öteleme.....	73
<b>Şekil 4.2.4</b>	Öklid uzayda dönme.....	74
<b>Şekil 4.2.5</b>	$H^3$ te düşey çember.....	79
<b>Şekil 4.3.1</b>	Stereografik izdüşüm.....	82

# 1 GİRİŞ

Öklid' in düzlem geometrisi 5 temel postulata dayanır.

**Postulat I.** Her nokta çifti yalnız ve ancak bir tek doğru parçası ile birleştirilebilir.

**Postulat II.** Herhangi bir doğru parçası her iki doğrultuda sonsuza kadar uzatılabilir.

**Postulat III.** Merkezi ve yarıçapı verilen sadece bir tek çember çizilebilir.

**Postulat IV.** Bütün dik açılar birbirine eşdeğerdir.

**Postulat V.** Herhangi farklı iki doğru üçüncü bir doğru tarafından kesildiğinde bu üçüncü doğruya göre aynı tarafta oluşan iç açılar sürekli şekilde iki dik açıdan küçük kalıyor ise bu takdirde ilk iki doğru bu iki dik açıdan küçük açılarının olduğu bölge içinde kesişirler.

Postulat V in eşdeğeri Playfair Postulatıdır .

**Playfair Postulatı.** Bir doğru ve dışında bir nokta verildiğinde verilen noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan bir tek doğru vardır (Kurbay 2007).

Hiperbolik geometrinin çıkışı Öklid'in beş temel postulatından beşincisine dayanmaktadır. Beşinci postulatın aynı zamanda paralellik postulatına denk olduğu Öklid'in ilk dört postulatından kolaylıkla görülmektedir. 2000 yıldan beri matematikçiler ilk dört postulatı beşinci Postulatı elde etmeye çalışmışlardır. Her bir durum için ilave postulatlar yaparak 5. Postulata ulaşmaya çalışmışlar. Her bir durumda da bu postulatların gerçekte 5. Postulata denk olduğu sonucuna varmışlardır. Özellikle 19. Yüzyıldan itibaren matematikçiler 5. Postulatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlar ve sonuçta aşağıdaki postulata ulaşmışlardır.

Düzlemde bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde , bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel birden çok doğru vardır.

Bu postulat öklid geometrideki paralellik postulatı gibi hiperbolik geometri veya öklid olmayan geometrinin temelini oluşturmuştur.

Hiperbolik geometride beş temel model ve bunlar arasında izometrik geçişler vardır. Bu modeller: Üst yarı düzlem modeli, Disk modeli, Yarı küre modeli, Klein modeli, Hiperboloidal model (Yakut 2004).

Bu tezde beş temel modelden biri olan Poincaré üst yarı düzleminin ve hiperbolik uzayın izometrilere incelenecektir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde Hiperbolik geometrinin ortaya çıkışından bahsedildi. İkinci bölümünde Poincaré üst yarı düzlem modeliyle ilgili bazı temel kavramlar özetlendi. Üçüncü bölümde Poincaré üst yarı düzlem modelinin izometrilere olan hiperbolik hareketler incelendi. Dördüncü bölümde hiperbolik uzayın izometrilere olan hiperbolik hareketler ve stereografik izdüşüm incelendi.

## 2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezi anlaşılır kılmak için Poincaré yarı-düzleminde (H-düzlemi) bazı kavram ve özellikler, Millman ve Parker, Stahl, Yakut, Martin, Sönmez, Salihova, Kurbay kaynakları esas alınarak özetlendi.

**Tanım 2.1.** Elemanları noktalar olarak adlandırılan bir  $\mathcal{P}$  kümesi,  $\mathcal{P}$  nin doğru olarak adlandırılan bazı alt kümelerinin topluluğu  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{I}$  da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (*incidence*) bağıntısı olmak üzere  $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  sistemi aşağıdaki iki aksiyonu sağlıyorsa bu sistem bir *soyut geometri* olarak adlandırılır :

- (i)  $\forall A, B \in \mathcal{P}$  için  $A \in l$  ve  $B \in l$  olacak şekilde bir tek  $l \in \mathcal{L}$  doğrusu vardır.
- (ii) Her doğru en az iki noktayı kapsar.

$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  soyut geometrisi  $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.2.**  $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  soyut geometrisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *incidence geometridir*, denir:

- (i)  $\mathcal{L}$  de farklı iki noktayı üzerinde bulduran bir tek doğru vardır.
- (ii) Doğrudan olmayan üç  $A, B, C \in \mathcal{P}$  noktaları vardır.

**Tanım 2.3.**  $l, \mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  incidence geometrisinin bir doğrusu olsun.  $d, \mathcal{G}$  üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa  $f : l \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $l$  için bir *ceveldir* denir:

- (i)  $f$  fonksiyonu bire-bir ve örtendir .
- (ii)  $l$  üzerindeki her  $P, Q$  nokta çifti için

$$| f(P) - f(Q) | = d(P, Q)$$

dir. Bu denkleme *cevvel denklemi* denir.

**Tanım 2.4.** Bir  $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir *metrik-tir* denir:

- (M1) Her  $A, B \in \mathcal{P}$  için  $d(A, B) \geq 0$ ,
- (M2) Her  $A, B \in \mathcal{P}$  için  $d(A, B) = 0 \iff A = B$ ,
- (M3) Her  $A, B \in \mathcal{P}$  için  $d(A, B) = d(B, A)$ ,
- (M4) Her  $A, B, C \in \mathcal{P}$  için  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ .

**Tanım 2.5.**  $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$  incidence geometrisi  $d$  uzaklık fonksiyonu ile bir likte  $\forall l \in \mathcal{L}$  için bir cetvele sahip ise *cetvel postulatını* sağlıyor denir. Bu durumda  $\mathcal{M} = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$  ye bir *metrik geometri* denir (Salihova 2006).

**Tanım 2.6 (Arada Olma).** Herhangi bir geometride  $d$  uzaklık fonksiyonu olmak üzere arada olmanın tanımı aşağıdaki gibidir:

$P, A$  ile  $B$  noktaları arasında bir nokta olmak üzere,

- (i)  $d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)$  dir.
- (ii)  $A, P, B$  doğrudadır.

Bu durum kısaca  $A - P - B$  olarak gösterilir.

**Tanım 2.7.** Herhangi bir  $l$  doğrusu,  $\triangle ABC$  üçgeni ve  $A - D - B$  olacak şekilde  $D \in l$  noktası için  $l \cap \overline{AC} \neq \emptyset$  veya  $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$  oluyorsa bu geometriye *Pasch Postulatını sağlayan metrik geometri* denir (Millman and Parker 1991).

**Tanım 2.8.**  $\mathcal{P} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  olsun.  $a$  sabit gerçel sayı olmak üzere  $\mathbb{R}^2$  nin

$$\mathcal{L}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$$

şeklindeki her alt kümesine bir *dikey doğru* denir.  $m$  ve  $b$  sabit gerçel sayılar olmak üzere  $\mathbb{R}^2$  nin

$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$$

şeklindeki her alt kümesine *dikey olmayan doğru* denir.  $\mathcal{L}_E$  tüm dikey ve dikey olmayan doğruların kümesi olsun. Burada  $(x, y) \mathcal{I} \mathbf{L}_a \iff x = a$  ve  $(x, y) \mathcal{I} \mathbf{L}_{m,b} \iff y = mx + b$

olmak üzere  $\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$  bir soyut geometridir.  $\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$  düzlem modeli *kartezyen düzlem* olarak adlandırılır.

**Tanım 2.9 (Noktanın doğruya olan uzaklığı).** Bir  $P$  noktası ile bir  $l$  doğrusu verilmiş olsun.  $P$  noktası ile bu doğru üzerindeki en yakın nokta arasındaki uzaklığa  $P$  noktasının  $l$  doğrusuna olan uzaklığı denir ve

$$d(P, l) = \min_{X \in l} d(P, X)$$

şeklinde yazılır (Salihova 2006).

**Aksiyom 2.1 ( Archimedean aksiyomu).**  $A$  ve  $B$  noktalarından geçen herhangi bir doğru  $l$  olsun. Bu doğru üzerinde  $A$  ve  $B$  noktaları arasında olacak şekilde bir  $A_1$  noktası alınsın.  $A_1$  noktasından sonra  $A_2$ ,  $A_2$  noktasından sonra  $A_3$  noktaları olarak  $A_1, A_2, A_3, \dots$  noktalar dizisini oluşturalım.

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

doğru parçaları birbirine eşit olsun. Bu noktalar dizisinde  $B$  noktası,  $A$  ve  $A_n$  arasında kalacak şekilde bir tek  $A_n$  noktası vardır.

**Önerme 2.1.** İki doğruyu iç ters açıları eşit olacak şekilde kesen bir doğru var ise bu iki doğru birbirine paraleldir.

**Teorem 2.1.** Aşağıdaki durumlar soyut geometrinin şartları altında bir birine denktir:

- (a) Playfair Postulatu
- (b) Öklidin beşinci Postulatu
- (c) Her üçgenin iç açılarının toplamı  $180^\circ$  dir.

**İspat.** (b $\Rightarrow$ a) Öklidin beşinci Postulatının geçerli olduğunu kabul edelim.  $CD$  doğrusu verilsin (Şekil 2.1).  $CD$  doğrusu üzerinde olmayan bir  $X$  noktası ve bu noktadan geçen  $AB$  doğrusu alınsın. Öyle ki  $\widehat{DYX}$  ve  $\widehat{AXY}$  açıları birbirine eşit olsun.  $X$  noktasından geçen bir tek doğrunun var olduğunu göstereceğiz. Önerme 2.1 e göre  $AB$  doğrusu  $CD$



doğrusuna paraleldir. Eğer  $A'B'$  doğrusu  $X$  noktasından geçen herhangi bir doğru ise

ya

$$\widehat{A'XY} < \widehat{AXY} = \widehat{DYZ} = \pi - \widehat{CYX}$$

ya da

$$\widehat{B'XY} < \widehat{BXY} = \widehat{CYX} = \pi - \widehat{DYZ}$$

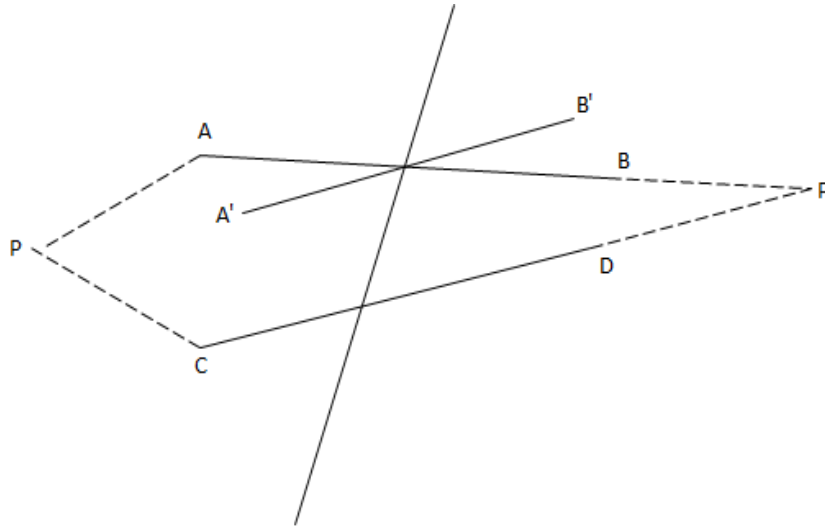
dir. Yani,

$$\widehat{A'XY} + \widehat{CYX} < \pi$$

veya

$$\widehat{B'XY} + \widehat{DYZ} < \pi$$

dir. Her iki durumda da Öklidin beşinci postulatına göre  $A'B'$  doğrusu  $CD$  doğrusunu keser.



**Şekil 2.1** Öklidin V. postulatı ve Playfair postulatı arasındaki ilişki

(a $\Rightarrow$ c) Playfair postulatının geçerli olduğunu kabul edelim.  $\triangle ABC$  verilmiş olsun (Şekil 2.2).  $BC$  doğrusuna paralel ve  $A$  noktasından geçen bir  $DE$  doğrusu ve

$$\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$$

olacak şekilde bir  $D'A$  doğrusunu alalım. Önerme 2.1 e göre  $D'A$  doğrusu  $BC$  doğrusuna paraleldir. Bu yüzden  $D'A$  doğrusu ve  $DE$  doğrusu çakışık olmalıdır.

$$\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$$

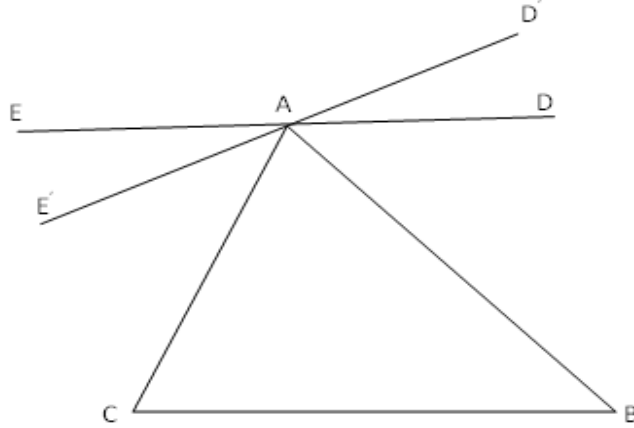
dir. Benzer şekilde,

$$\widehat{EAC} = \widehat{BCA}$$

dır. Sonuç olarak,

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = \widehat{BAD} + \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = \pi$$

dir.



**Şekil 2.2** Playfair postulatı ve üçgenin iç açıları arasındaki ilişki



dir. Tümevarım ilkesinden,

$$\delta_n = \frac{\delta_1}{2^{n-1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yazılabilir. Eğer  $\beta_n = \widehat{CAD}_n$  denirse

$$\alpha + \beta_n + \delta_n = \pi$$

ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \pi - \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \pi - \alpha - 0 > \beta$$

dır. Yani bazı sonlu  $n$  sayıları için  $\beta_n > \beta$  dir. O halde  $AB$  doğrusu,  $ACD_n$  üçgeninin içinden geçer ve Pasch Postulatına göre  $AB$  doğrusu  $CD$  doğrusunu kesmek zorundadır. Teoremin ilk kısmında açı tartışmalarına göre benzer olarak  $AB$  ve  $CD$  doğrularının Öklid'in beşinci postulatına uygun  $k$  nın aynı tarafında kesişmek zorunda oldukları sonucuna varılır (Stahl 1993).

**Tanım 2.10 (H-Düzlemi ve H-Uzaklığı).** Öklid düzlemde x- ekseni, alt ve üst yarı düzlemleri arasında geçişi sağlayan bir doğrudur. x-ekseninin üst kısmına yani,

$$H = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\}$$

ye Poincaré yarı düzlemi veya kısaca  $H$ -düzlemi denilmektedir. Poincaré yarı düzlemi hiperbolik düzlem modellerinden biridir.  $P_1(x, y)$ ,  $P_2(x + dx, y)$ ,  $P_3(x + dx, y + dy)$  sonsuz küçük üçgen oluşturmak üzere,  $P_1$  ile  $P_3$  noktaları arasındaki öklid uzaklık,

$$d_E(P_1, P_3) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

dir.  $P_1$  ile  $P_3$  noktaları arasındaki Poincaré uzaklığı da,

$$d_H(P_1, P_3) = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (2.1)$$

formülü ile tanımlanır.

**Tanım 2.11** (*H*-düzlemindeki doğruların sınıflandırılması). *H*-düzleminde doğrular

$${}_aL = \{(x, y) \in H \mid x = a\} \quad \text{I.tip doğrular (düz jeodezikler)}$$

$${}_cL_r = \{(x, y) \in H \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2\} \quad \text{II.tip doğrular (eğri jeodezikler)}$$

olarak adlandırılırlar.

**Önerme 2.2.**  $C = (c, 0)$  merkezli,  $r$  yarıçaplı II. tip bir doğru ve  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  noktaları bu doğru üzerindeki noktalar olsun.  $P_1$  ve  $P_2$  noktaları arasındaki  $d_H$  uzaklığı,

$$c = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}$$

ve

$$r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_2 - c)^2 + y_2^2}$$

olmak üzere

$$d_H(P_1, P_2) = \ln \left| \frac{\frac{x_1 - c + r}{y_1}}{\frac{x_2 - c + r}{y_2}} \right|$$

dir.

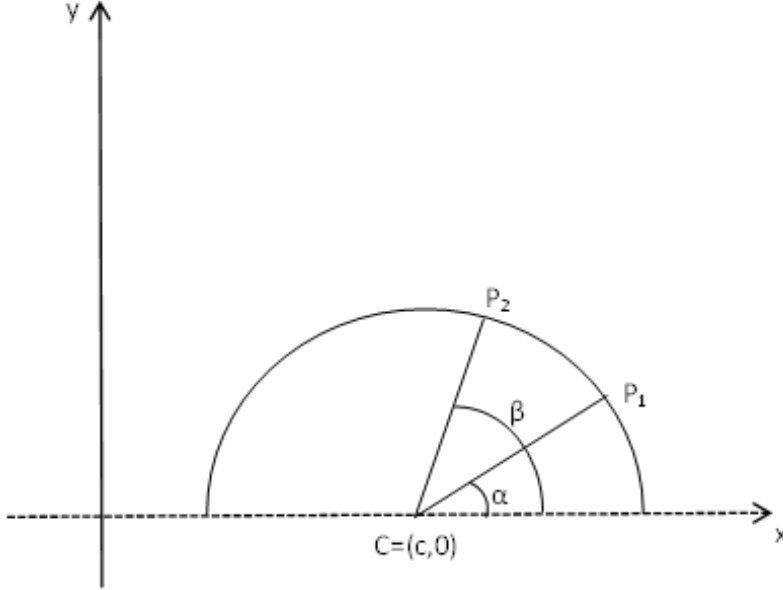
İspat.

$$\begin{aligned}
d_H(P_1, P_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + \left(-\frac{x-c}{y}\right)^2}}{y} dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{y^2} dx = r \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r^2 - (x-c)^2} \\
&= r \frac{1}{2r} \ln \left| \frac{r+x-c}{r-(x-c)} \right| \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-c+r}{-(x-c)+r} \right| \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x-c+r)(x-c+r)}{(-(x-c)+r)(x-c+r)} \right| \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&= \ln \left| \frac{(x-c+r)}{y} \right| \Big|_{x_1}^{x_2} \\
&= \ln \left| \frac{(x_2-c+r)}{y_2} \right| - \ln \left| \frac{(x_1-c+r)}{y_1} \right| \\
&= \ln \left| \frac{\frac{(x_2-c+r)}{y_2}}{\frac{(x_1-c+r)}{y_1}} \right|
\end{aligned}$$

**Önerme 2.3.**  $C = (c, 0)$  merkezli,  $r$  yarıçaplı II. tip bir doğru verilsin.  $P_1$  ve  $P_2$  bu doğru üzerinde iki nokta olsun.  $CP_1$  ve  $CP_2$  doğru parçaları pozitif yönde x-ekseniyle  $\alpha$  ve  $\beta$  açıları yapsın. Bu takdirde verilen noktalar arasındaki  $d_H$  uzaklığı (Şekil 2.4),

$$d_H(P_1, P_2) = \ln \left| \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} \right|$$

formülüyle bellidir.



**Şekil 2.4**  $d_H$  uzaklığı

**İspat.** Doğru üzerindeki  $(x, y)$  noktasından geçen yarıçapın x-ekseniyle yapmış olduğu açı  $t$  olsun.

$$x = c + r \cos t$$

$$dx = -r \sin t dt$$

$\implies$

$$y = r \sin t$$

$$dy = r \cos t dt$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_H(P_1, P_2) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(-r \sin t dt)^2 + (r \cos t dt)^2}}{r \sin t} \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r dt}{r \sin t} \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \csc t dt \\
&= \ln \left| \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} \right|
\end{aligned}$$

dir.

**Önerme 2.4.**  ${}_aL$  doğrusu üzerinde bulunan  $P_1(a, y_1)$  ve  $P_2(a, y_2)$  noktaları arasındaki  $d_H$  uzaklığı

$$d_H(P_1, P_2) = \ln \left| \frac{y_2}{y_1} \right|$$

dir.

**İspat.**

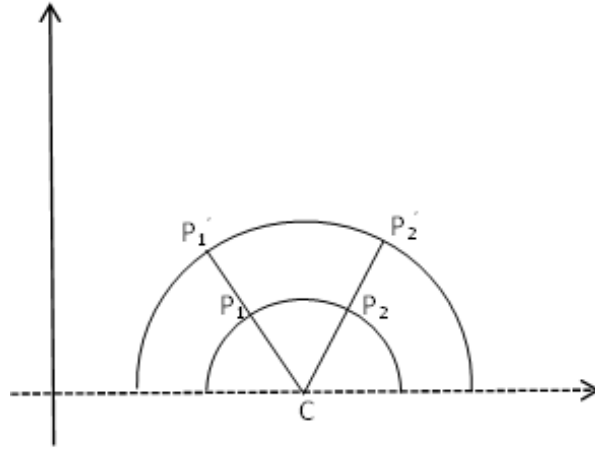
$$\begin{aligned}
d_H(P_1, P_2) &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{dy^2}}{y} \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} \\
&= \ln |y_2| - \ln |y_1| \\
&= \ln \left| \frac{y_2}{y_1} \right|
\end{aligned}$$

dir.

**Önerme 2.5.**  $P_1P_2$  ve  $P_1^lP_2^l$  x-ekseni üzerinde aynı merkezli çember yayları  $C$ ,  $P_1$ ,  $P_1^l$  ve  $C$ ,  $P_2$ ,  $P_2^l$  üçlüleri doğruduş olsunlar (Şekil 2.5). Bu takdirde  $P_1P_2$  ve  $P_1^lP_2^l$  aynı  $d_H$



uzunluğuna sahiptirler (Sönmez 2006).



**Şekil 2.5** Eş hiperbolik uzunluktaki yaylar

### 3 HİPERBOLİK DÜZLEMDE İZOMETRİLER

**Tanım 3.1 (İzometri).**  $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$  ve  $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', d')$  metrik geometriler olmak üzere her  $A, B \in \mathcal{P}$  için,

$$\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$$

$$d(\varphi A, \varphi B) = d'(A, B)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $\varphi$  ye  $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$  ve  $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', d')$  arasında bir *izometri* denir (Sönmez 2006).

İzometri, direkt izometri ve karşıt izometri olmak üzere ikiye ayrılır. Direkt izometri yönü korur. Bu izometri katı hareketler olarak da adlandırılır. Ötelemeler ve dönmeler direkt izometridir. Karşıt izometri yönü ters çevirir. Yansımalar karşıt izometridir.

Bu tezde öteleme ve dönmelere katı hareket, inversiyon ve yansımalara hareket adı verilecektir.

**Tanım 3.2.**  $A$  herhangi bir nokta ve  $k \in N^+$  olsun.  $A$  noktasını kendisine döndüren ve diğer bir  $P$  noktasını  $d(A, P') = k.d(A, P)$  olacak şekilde bir  $P'$  noktasına döndüren bir dönüşüme merkezi  $A$  olan ve oranı  $k$  olan *radyal dönüşüm* denir (Hacısalihoglu 1998).

$\Phi : H^2 \rightarrow H^2$  bir izometri olmak üzere bu izometri bir radyal dönüşümdür (İnt.Kyn.2).

**Tanım 3.3.**  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  ve  $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$  insidens geometriler olmak üzere her  $l \in \mathcal{L}$  için  $\varphi(l) \in \mathcal{L}'$  olacak şekilde bir  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  dönüşümüne *kolınasyon* denir (Sönmez 2006).

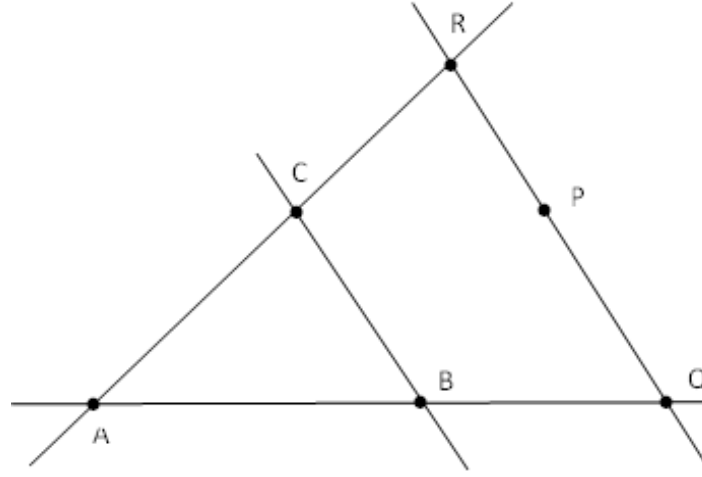
İzometriler uzaklığı koruyan kolınasyonlardır.

**Teorem 3.1.** Eğer bir izometri bir doğru üzerindeki farklı iki noktayı sabit bırakır ise bu izometri doğru üzerindeki noktalar kümesini sabit bırakır.

**İspat.** Bir doğru üzerinde  $A$  ve  $B$  noktaları olsun. Bu noktalardan farklı bir  $P$  noktası alınsın.  $P$  noktası bu noktalardan farklı olduğundan  $AP$  uzaklığı sıfırdan farklı

olur. Eğer  $BP$  uzaklığı bilirse  $P$  noktası bulunabilir. İzometri uzaklığı koruyan bir kolonasyon olduğu için  $A$  ve  $B$  noktalarını sabit bırakan izometri  $P$  noktasını da sabit bırakmalıdır. Yani,  $A$  ve  $B$  noktalarını sabit bırakan izometri  $A$  ve  $B$  noktalarından geçen doğru üzerindeki bütün noktaları sabit bırakmalıdır (Martin 1982).

**Teorem 3.2.** Doğrudaş olmayan üç noktanın herbirini sabit bırakan hareket bir birim dönüşümdür.



**Şekil 3.1** Sabit üç noktadan geçen düzlem

**İspat.**  $A, B, C$  doğrudaş olmayan belli üç nokta olsun ve  $\alpha$  da bunların herbirini sabit bırakan hareket olsun (Şekil 3.1). İki noktadan herbirini sabit bırakan bir hareket bu noktadan geçen doğrunun bütün noktalarını da sabit bıraktığından  $\alpha$  hareketi  $AB, BC, AC$  doğrularının bütün noktalarını sabit bırakır. Bu doğrulardan hiçbiri üzerinde bulunmayan bir nokta  $P$  olsun. Eğer  $Q$  noktası  $AB$  doğrusu üzerinde  $A$  ve  $B$  den farklı bir nokta ise  $PQ$  doğrusu  $AC$  ve  $BC$  doğrularından her ikisine birden paralel olmaz, birini, örneğin  $AC$  yi bir  $R$  noktasında kesmesi gerekir.  $\alpha$  hareketi  $Q$  ve  $R$  yi sabit bıraktığından  $QR$  doğrusunun bütün noktalarını da sabit bırakır, dolayısıyla  $\alpha$  hareketi  $P$  noktasını da sabit bırakır. O halde  $\alpha$  hareketi düzlemin her noktasını sabit bırakır (Hacısalihoglu 1998).

**Teorem 3.3.** Doğrudaş olmayan belli üç noktayı, sırası ile, yine doğrudaş olmayan belli üç noktaya dönüştüren iki hareket mevcut olamaz.

**İspat.**  $\alpha, \beta$  izometrilere doğrudaş olmayan üç  $A, B, C$  noktalarını, sırası ile, doğrudaş olmayan  $A', B', C'$  noktalarına dönüştürdüğünü kabul edelim. O zaman  $\alpha\beta^{-1}$  izometrisi  $A, B, C$  noktalarının herbirini sabit bırakır ve bundan dolayı  $\iota$  özdeşlik dönüşümü olmak zorundadır.  $\alpha\beta^{-1} = \iota$  den

$$(\alpha\beta^{-1})\beta = \iota\beta$$

$$\alpha(\beta^{-1}\beta) = \beta$$

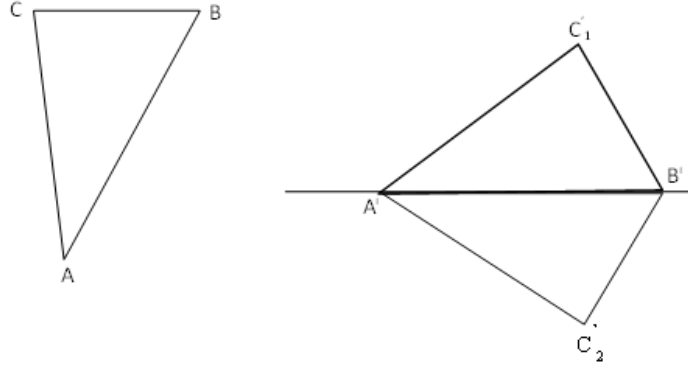
$$\alpha\iota = \beta$$

$$\alpha = \beta$$

elde edilir (Martin 1982).

**Teorem 3.4.** Bir hareket ya direkt veya karşıtdır.

**İspat.**  $H$  bir hareket  $A, B, C$  doğrudaş olmayan üç nokta  $H(A, B) = A', B'$  olsun. O zaman  $H$  hareketi  $C$  noktasını  $AC = A'C'$  ve  $BC = B'C'$  olacak şekilde bir  $C'$  noktasına gönderir.  $C'$  nün yeri  $A'B'$  doğrusunun iki yanından birinde  $C'_1$  veya  $C'_2$  olarak Şekil 3.2 de görüldüğü gibidir. Eğer  $C'$  nün yeri  $C'_1$  ise  $H$  hareketi  $ABC$  üçgeninin açılarının yönlerini korur; eğer  $C'$  nün yeri  $C'_2$  de ise  $H$  hareketi açılarının yönlerini ters çevirir.  $A, B, C$  gibi doğrudaş olmayan üç noktayı  $A', B', C'$  gibi doğrudaş olmayan üç noktaya dönüştüren bir tek hareket var olduğundan  $H(A, B, C) = A', B', C'_1$  ise, yani açılarının yönleri korunursa yegane olan  $H$  direkt bir harekettir; benzer şekilde  $H(A, B, C) = A', B', C'_2$  ise, yani açılarının yönleri ters dönüşürse, yegane olan  $H$  karşıt bir harekettir. O halde  $H$  hareketi ya direkt ya da karşıtdır (Hacısalihoglu 1998).



Şekil 3.2 Direkt ve karşıt hareket

### 3.1 H-Düzleminde İncersiyon

**Tanım 3.1.1.**  $H$ -düzleminde I ve II tipindeki doğrular ile üst yarı düzlemdeki çemberleri, yine I ve II tipindeki doğrular ile üst yarı düzlemdeki çemberlere dönüştüren dönüşümlere *inversiyon* denir.

**Önerme 3.1.1.** Bir doğrunun bir çembere teğet olması için gerek ve yeter şart aynı yayı gören teğet-kiriş açıyla çevre açının eşit olmasıdır.

**Önerme 3.1.2.**  $P$  noktası, verilen bir çemberin dışında ve  $PT$ , çembere  $T$  noktasında teğet olsun.  $PB$  doğrusu da,  $AB$  kiriş olacak şekilde çemberi kessin. Bu takdirde

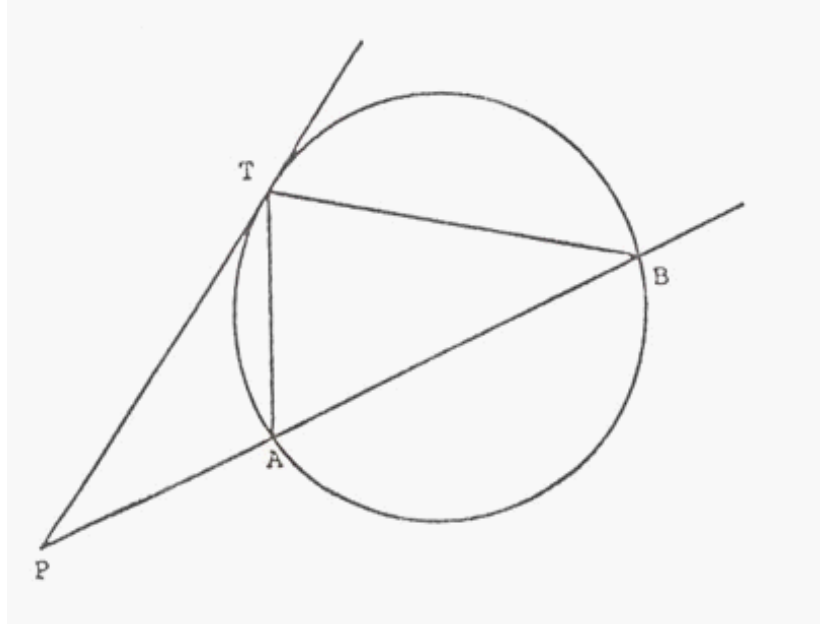
$$PA.PB = PT^2$$

olur.

**İspat.** Önerme 3.1.1 e göre  $\widehat{ATP} = \widehat{PBT}$  dir (Şekil 3.1.1).  $\widehat{TPA}$  açısı  $TPA$  ve  $BPT$  üçgenlerinin ikisinde de ortak olduğundan dolayı bu üçgenler benzerdir. Benzerlik oranından

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$

yazılır.



**Şekil 3.1.1** Çemberde kuvvet

$C$  merkezli ve  $k$  yarıçaplı bir çember verilsin. Eğer

- (a)  $C, P, P'$  doğru parçasının dışında olacak şekilde,  $C, P, P'$  noktaları doğrudalarsa,
- (b)  $CP \cdot CP' = k^2$

ise  $P$  ve  $P'$  noktaları çembere göre simetriktir.

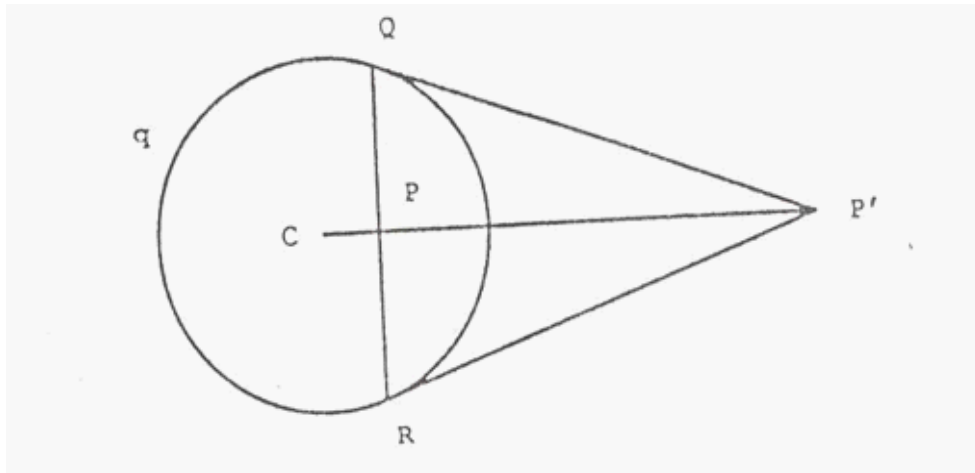
Ayrıca, bir çembere göre  $P$  noktası ile  $P'$  noktasının simetrik olması için gerek ve yeter şart  $P'$  noktası ile  $P$  noktasının simetrik olmasıdır. Üstelik  $P$  noktasının kendisiyle simetrik olması için gerek ve yeter şart  $P$  noktası çemberin üzerinde olmalıdır. Çemberin içinde bir  $P$  noktası verilsin. Bu noktanın karşılığı olan  $P'$  simetrik noktası aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$QR$  doğru parçası,  $P$  den geçen çemberin kirişe ve  $CP$  yarıçap doğrusuna dik olsun (Şekil 3.1.2).  $P'$  noktası,  $CP$  yarıçap doğrusu ile çembere  $Q$  noktasında teğet doğrunun

kesişimidir.  $C$  sabit bir nokta ve  $k$  pozitif bir reel bir sayı olsun.  $P$  ve  $P'$  noktalarını,  $C$  merkezli ve  $k$  yarıçaplı çembere göre simetrik yapan  $I_{C,k}$  inversiyonu,

$$I_{C,k}(P) = P'$$

şeklinde bir fonksiyondur.  $I_{C,k}$  inversiyonu,  $C$  noktasında tanımsızdır. İversiyonlar, yansımalara benzeyen involusyonlardır.  $I_{C,k}$  inversiyonun sabit noktaları,  $C$  merkezli ve  $k$  yarıçaplı çemberi oluşturan noktalardır.  $C$  noktasının kendisi hariç,  $C$  den geçen herhangi bir  $m$  doğrusunun noktaları,  $I_{C,k}$  ile  $m$  nin geri kalan noktalarına döndüştür. Sonuç olarak;  $I_{C,k}$  böyle bir  $m$  doğrusunu kendisine döndüştürür. Demek ki, aynı inversiyon  $C$  merkezli çemberi de,  $C$  merkezli başka bir çembere döndüştürür.



Şekil 3.1.2 H-düzleminde inversiyon

**Teorem 3.1.1.**  $I_{C,k}$  inversiyonu,

- (a)  $C$  den geçen doğruları kendilerine,
- (b)  $C$  den geçmeyen doğruları,  $C$  den geçen çemberlere,
- (c)  $C$  den geçen çemberleri,  $C$  den geçmeyen doğrulara,
- (d)  $C$  den geçmeyen çemberleri,  $C$  den geçmeyen çemberlere döndüştürür. Çemberi doğruya döndüştüren veya doğruyu çembere döndüştüren inversiyonda,  $C$  merkezinden

geçen doğrunun verilen doğruya dik olduğu, çemberi çembere dönüştüren inversiyonda da merkezlerin doğrudan olduğu bilinmektedir.

### İspat.

(a) Bu durum aşıkardır.

(b)  $m$ ,  $C$  den geçmeyen bir doğru ve  $H$  noktası,  $CH$  doğrusu,  $m$  ye dik olacak şekilde  $m$  nin bir noktası olsun (Şekil 3.1.3).  $P$ ,  $m$  nin keyfi bir noktası ve

$$H' = I_{C,k}(H)$$

ve

$$P' = I_{C,k}(P)$$

olsun.

$$CH \cdot CH' = k^2 = CP \cdot CP'$$

olduğundan,

$$\frac{CH'}{CP} = \frac{CP'}{CH}$$

yazılabilir.

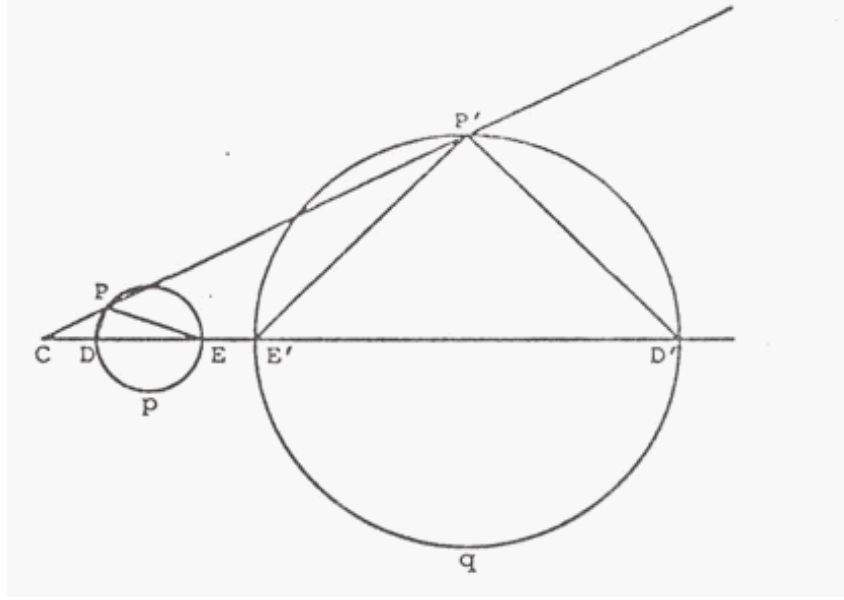
Üstelik,  $\widehat{HCP}$ ,  $HCP$  ve  $P'CH'$  üçgenlerinin her ikisinde de ortak olduğundan, bu iki üçgen benzerdir ve buradan,

$$\widehat{H'P'C} = \widehat{PHC} = \frac{\pi}{2}$$

olur.







Şekil 3.1.4 İncersiyon ile çemberler arasındaki ilişki

$$CP \cdot CP' = CD \cdot CD' = CE \cdot CE' = k^2$$

olduğundan dolayı,

$$\frac{CD}{CP'} = \frac{CP}{CD'}$$

ve

$$\frac{CE}{CP'} = \frac{CP}{CE'}$$

söylenebilir.

$\widehat{DCP}$  açısı,  $D'CP'$ ,  $ECP$ ,  $P'CE'$  üçgenlerinin ortak açısı olduğundan dolayı, ilk ikisinin ve son ikisinin birbirlerine benzer olduklarını söyleyebiliriz.  $\widehat{CDP} = \widehat{CP'D'}$  ve  $\widehat{CEP} = \widehat{CP'E'}$  dir. Üçgende bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşit ve çapı gören çevre açısı  $\frac{\pi}{2}$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\widehat{E'P'D'} &= \widehat{CP'D'} - \widehat{CP'E'} \\
&= \widehat{CDP} - \widehat{CEP} \\
&= \widehat{DPE} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

olur.  $D'$  ve  $E'$  noktalarının,  $P$  ve  $P'$  noktalarından bağımsız olmasından dolayı,  $P'$  noktası,  $D'E'$  çapına sahip çember üzerindedir.

**Tanım 3.1.2.** Eğer iki çember teğetleri birbirine dik olacak şekilde kesişirlerse bu çemberlere *ortogonal çember* denir.

Ortogonal çemberlerin teğetleri, kesim noktasından geçen yarıçapa diktir.

**Önerme 3.1.3.**  $q$ ,  $C$  merkezli ve  $k$  yarıçaplı çember ve  $p$  başka bir çember olsun. Bu takdirde,  $I_{C,k}$  inversiyonunun  $p$  yi sabit bırakması için gerek ve yeter şart  $p$  ve  $q$  çemberleri ortogonal olmalıdır.

**İspat.**  $p$ ,  $q$  ya ortogonal bir çember olsun ve onların  $T$  gibi bir noktada kesiştiklerini kabul edelim.  $P$ ,  $p$  çemberinin keyfi bir noktası ve  $Q$ ,  $p$  çemberi ile  $CP$  keseninin kesişimi olsun. Önerme 3.1.2 den,

$$CP.CQ = CT^2 = k^2$$

$$I_{C,k}(P) = Q$$

sonucu ortaya çıkar. Öyleyse,  $I_{C,k}$  inversiyonu  $p$  çemberini kendisine dönüştürür.

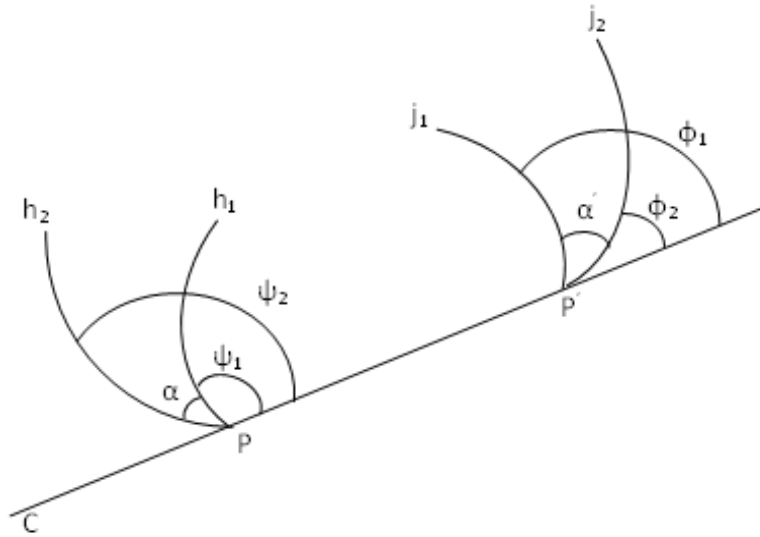
Tersine,  $p$  çemberi  $I_{C,k}$  inversiyonu ile sabit kalsın.  $I_{C,k}$ ,  $q$  nun içindeki ve dışındaki noktaları değiştirir.  $p$  çemberinin  $q$  çemberini  $S$  ve  $T$  gibi iki noktada kesiştiklerini



dikkat edilmesi gerekir. Bu yüzden inversiyonların açıları koruduğu söylendiğinde işaret değişmesine rağmen işaretsiz ölçümün korunduğu kastedilecektir (Stahl 1993).

**Tanım 3.1.3.**  $w = f(z)$  dönüşümü bir  $z_0$  noktasından geçen eğrilerin arasındaki açıları ve açıların yönlerini koruyor ise bu dönüşüme  $z_0$  noktasındaki *konformal dönüşüm* denir (İnt.Kyn.3).

Bu tezde konformal terimi açı ölçüsünü koruyan anlamında kullanılacaktır.



**Şekil 3.1.6** Konformal dönüşüm

**Teorem 3.1.2.** İversiyonlar düzlemin konformal dönüşümleridir.

**İspat.**  $I_{C,k}$  bir inversiyon olsun. Kutup noktası  $C$  ve kutup eksenini x-ekseni olarak bir kutupsal koordinat sistemi oluşturalım.

$$r = f(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

denklemini ile  $h$  eğrisini ifade edelim.  $I_{C,k}$  inversiyonu  $h$  eğrisini denklemini,

$$r = F(\theta) = \frac{k^2}{f(\theta)} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

olan  $h^i$  eğrisine dönüştürür. Kutupsal koordinat sisteminde bir  $P$  noktası alalım ve  $P$  noktasındaki  $\alpha$  açısı  $r = f_i(\theta)$  ( $i = 1, 2$ ) denklemleri ile gösterilen  $h_i$  kenarlarına sahip olsun (Şekil 3.1.6).  $I_{C,k}$  inversiyonunun  $P$ ,  $h_1$  ve  $h_2$  yi sırasıyla  $P_1^i$ ,  $j_1$  ve  $j_2$  ye dönüştürdüğünü kabul edelim. Burada  $j_i$  görüntü eğrileri,

$$r = F_i(\theta) = \frac{k^2}{f_i(\theta)}, \quad i = 1, 2$$

denklemine sahiptirler. Herhangi bir  $r = f(\theta)$  eğrisi üzerindeki  $P$  noktası için  $CP$  yarıçap vektöründen  $P$  noktasındaki teğet doğruya kadar olan açı

$$\tan \psi = \frac{r}{r'}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\tan \phi_1 = \frac{F_1}{F_1'} = \frac{k^2/f_1}{-k^2 f_1'/f_1^2} = -\frac{f_1}{f_1'} = -\tan \psi_1$$

olup  $\phi_1 = \pi - \psi_1$  ve  $\phi_2 = \pi - \psi_2$ dir. Bu eşitlikler,

$$\alpha' = \phi_1 - \phi_2 = (\pi - \psi_1) - (\pi - \psi_2) = \psi_2 - \psi_1 = -\alpha$$

yi verir (Stahl 1993).

Çember ve düz doğrular arasındaki açılarla ilgili bazı özel durumlar vardır:

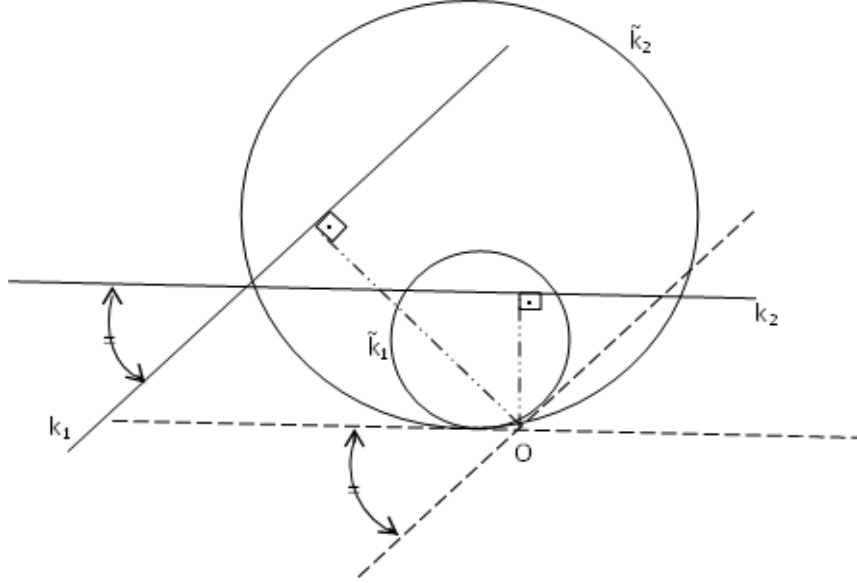
(1) Çember ve çemberin teğet doğrusu arasındaki açı daima  $0^\circ$  dir.

(2) Eğer iki çember birbirini  $0^\circ$  açıyla kesiyor ise bu çemberlerin teğet doğruları ortaktır.

**Önerme 3.1.4.**  $k_1$  ve  $k_2$  ya iki çember veya bir çember ve bir düz doğru ya da iki düz doğru olsun.  $k_1$  ve  $k_2$  nin bir inversiyon altındaki  $\tilde{k}_1$  ve  $\tilde{k}_2$  görüntüleri arasındaki açı  $k_1$  ve  $k_2$  arasındaki açıya eşittir.

**İspat.**  $k_1$  ve  $k_2$  nin iki düz doğru olduğu kabul edilsin. Eğer inversiyonun merkezi  $k_1$  ve  $k_2$  nin kesişim noktası ile çakışır ise  $\tilde{k}_1 = k_1$  ve  $\tilde{k}_2 = k_2$  olur. Buradan, açıların korunduğu söylenebilir. Genelliği bozmaksızın inversiyon merkezi olan  $O$  noktasının  $k_1$

üzerinde olmadığını kabul edelim.  $\tilde{k}_1$ ,  $O$  noktasındaki teğet doğrusu  $k_1$  e paralel olan ve  $O$  noktasından geçen bir çemberdir (Teorem 3.1.1).  $\tilde{k}_2$ , ya  $k_2$  dir ya da  $O$  noktasındaki teğet doğrusu  $k_2$  e paralel olan ve  $O$  noktasından geçen bir çemberdir.  $O$  noktasında  $\tilde{k}_1$  in teğet doğrusu  $k_1$  e ve  $\tilde{k}_2$  in teğet doğrusu  $k_2$  e paralel olduğundan  $k_1$  ve  $k_2$  arasındaki açı  $\tilde{k}_1$  ve  $\tilde{k}_2$  arasındaki açı ile aynıdır (Şekil 3.1.7).



Şekil 3.1.7 İncersiyonlar altında açılarının korunumu

Şimdi  $k_1$  ve  $k_2$  den en az birinin çember olduğunu kabul edelim. Burada  $k_1$  bir çember olsun.  $l_1$  ve  $l_2$ ,  $k_1$  ve  $k_2$  nin kesişim noktasında sırasıyla  $k_1$  ve  $k_2$  nin teğetleri olsun.  $k_2$  nin doğru olması durumunda  $k_2 = l_2$  dir.  $\tilde{k}_1$  ve  $\tilde{l}_1$  nin bir tek ortak noktaları olduğu için bu noktadaki  $\tilde{k}_1$  ve  $\tilde{l}_1$  nin teğet doğruları da ortaktır. Yani  $\tilde{k}_1$  ve  $\tilde{l}_1$  sıfır açıyla kesişmelidir. Benzer şekilde  $\widehat{k_2 l_2} = 0^\circ$  dir. Yani bir önceki duruma göre  $l_1$  ve  $l_2$  arasındaki açı  $\tilde{l}_1$  ve  $\tilde{l}_2$  arasındaki açı ile aynıdır.

$$\widehat{k_1 k_2} = \widehat{l_1 l_2} = \widehat{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} = \widehat{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2}$$

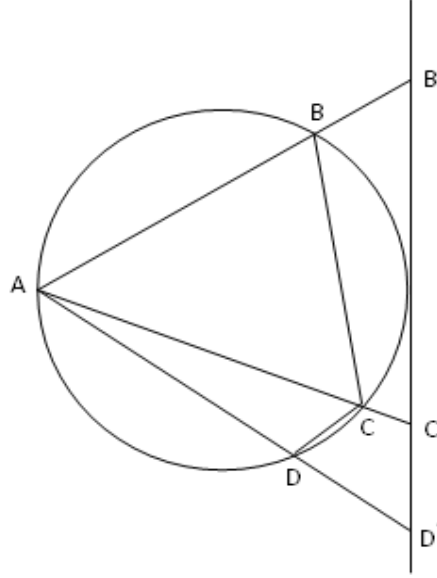
(İnt.Kyn.1).

Şimdi incersiyonların uygulamasını içeren önermeler verilecektir.

**Önerme 3.1.5.**  $I_{C,k}$  inversiyonu  $P$  ve  $Q$  noktalarını  $P'$  ve  $Q'$  noktalarına dönüştürsün. Bu takdirde,

$$P'Q' = \frac{k^2 \cdot PQ}{CP \cdot CQ}$$

dir.



**Şekil 3.1.8** Kirişler dörtgeni

**İspat.** İlk olarak  $C, P, Q$  noktalarının doğrudaş olmadıklarını kabul edelim. Önerme 3.1.2 den,

$$CP \cdot CP' = k^2 = CQ \cdot CQ'$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CQ'}{CP'}$$

dir.  $\triangle CPQ$  ve  $\triangle CQ'P'$  üçgenleri benzerdir. Sonuç olarak,



$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{CQ'}{CP} = \frac{CQ'.CQ}{CP.CQ} = \frac{k^2}{CP.CQ}$$

dir.

$C, P, Q$  noktalarının doğrudan olduklarını kabul edelim. Önerme 3.1.2 den,

$$CP.CP' = k^2 = CQ.CQ'$$

eşitliği elde edilir.  $C - P - Q$  ve  $C - Q' - P'$  arasındaki oran korunacağından,

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{CQ'}{CP} = \frac{CQ'.CQ}{CP.CQ} = \frac{k^2}{CP.CQ}$$

dir.

**Önerme 3.1.6.** Bir kirişler dörtgeninde köşegenlerin çarpımı karşılıklı kenarların çarpımlarının toplamına eşittir.

**İspat.**  $ABCD$ ,  $k$  çaplı çember içerisine çizilen bir kirişler dörtgeni olsun (Şekil 3.1.8). Teorem 3.1.1 e göre  $I_{A,k}$  inversiyonu bu çemberi çembere teğet olan bir doğruya ve  $B, C, D$  noktalarını teğet doğrusu üzerindeki  $B', C', D'$  noktalarına dönüştürür. Buradan  $B'C' + C'D' = B'D'$  dir. Önerme 3.1.5 e göre

$$\frac{k^2.BC}{AB.AC} + \frac{k^2.CD}{AC.AD} = \frac{k^2.BD}{AB.AD}$$

ya da

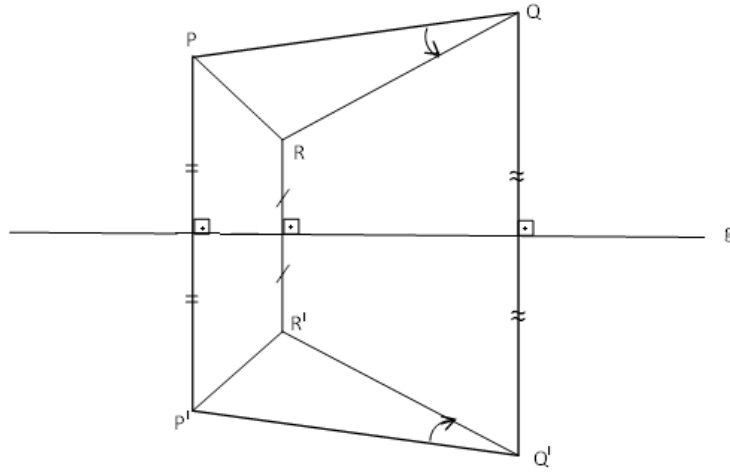
$$BC.AD + CD.AB = BD.AC$$

dir ( Stahl 1993).

## 3.2 H-Düzleminde Yansımalar

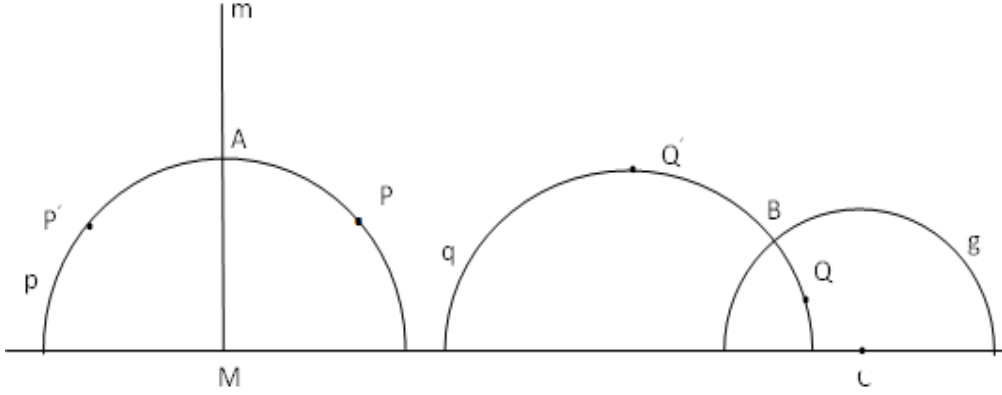
Hiperbolik yansımalar öklid yansımaların hiperbolik benzerleridir.

**Tanım 3.2.1.**  $g$  düzlemde herhangi bir doğru olmak üzere  $g$  nin her noktasını kendisine ve düzlemin diğer her bir noktasını  $g$  ye göre simetriği olan noktaya dönüştüren bir dönüşüme bir *yansıma*, daha başka bir ifadeyle,  $g$  ye göre bir *yansıma* denir.  $g$  doğrusuna da bu *yansımanın eksenini* denir.



Şekil 3.2.1 Öklid düzleminde yansıma

Şekil 3.2.1de  $P, Q, R$  noktaları doğrudan değildir. Bu noktaların  $g$  ye göre yansımaları, sırası ile,  $P', Q', R'$  dir.  $g$  doğrusu  $PP', QQ', RR'$  yi dik kesmektedir (Hacısalıhoğlu 1998).



**Şekil 3.2.2** H-düzlemindeki hiperbolik yansıma

H-düzlemindeki hiperbolik yansımalar öklid yansımaların hiperbolik benzerleridir. H-düzleminde hiperbolik yansımalar ya düz bir jeodezikteki öklid yansıma ya da merkezi x-ekseni üzerinde bulunan eğri jeodezikteki bir inversiyondur.

(1) Hiperbolik yansıma düz jeodezikteki bir öklid yansıma olsun. Şekil 3.2.2 de birinci şekildeki  $\rho_m$  yansımasını dikkate alalım.  $\rho_m$  in yansıma eksenini, x-eksenindeki  $M$  noktasından geçen düz  $m$  jeodeziğidir.  $P$  üst yarı düzlemde herhangi bir nokta,  $p$  de bu  $P$  noktasından geçen ve merkezi  $M$  olan eğri jeodezik olsun.  $p$  ve  $m$  jeodezikleri  $A$  kesişim noktasında dik olduklarından  $\rho_m(p) = p$  dir ( Önerme 3.1.3) ve  $P' = \rho_m(P)$  görüntü noktası  $p$  jeodeziği üzerindedir. Bu nedenle  $\rho_m$  bir hiperbolik harekettir.  $PA$  ve  $PA'$  jeodezik parçaları eşit hiperbolik uzunluğa sahiptirler. Sonuç olarak  $m$  jeodeziği,  $P$  noktası ve bu noktanın  $P' = \rho_m(P)$  görüntüsünden geçen jeodezik parçanın hiperbolik orta dikmesidir.

(2) Hiperbolik yansıma, x-ekseni üzerinde merkezi bulunan bir inversiyon olsun. x-ekseni üzerinde herhangi bir  $C$  noktasını alalım.  $I_{C,k}$  inversiyonunun dan oluşan hiperbolik yansıma incelenecektir. Bu inversiyon  $C$  merkezli  $k$  yarıçaplı  $g$  eğri jeodeziğindeki her noktayı sabit bıraktığından dolayı  $I_{C,k}$  nin eksenini olarak bu jeodezik alınabilir. Herhangi  $Q$  noktası için  $Q' = I_{C,k}(Q)$  olsun.  $Q$  noktasından geçen ve  $g$  ye  $B$  noktasında dik

olan bir  $q$  jeodeziğini alalım.  $I_{C,k}(q) = q$  dir (Önerme 3.1.3) ve  $Q'$  noktası  $q$  jeodeziğinin üzerindedir. Bu nedenle  $I_{C,k}$  inversiyonu bir hiperbolik harekettir.  $QB$  ve  $QB'$  jeodezik parçaları eşit hiperbolik uzunluğa sahiptirler. Sonuç olarak  $g$  jeodeziği,  $Q$  noktası ve bu noktanın görüntüsü olan  $Q' = I_{C,k}(Q)$  noktasından geçen jeodezik parçasının hiperbolik orta dikmesidir (Stahl 1993).

Şimdi öklid yansımalar ile ilgili bazı teoremleri inceleyeceğiz.

**Teorem 3.2.1.** Yansımalar açılardan yönünü ters çeviren hareketlerdir. Bir yansıma eksenini üzerindeki noktalardan başka hiç bir noktayı sabit bırakmaz. Bir yansıma ekseninden ve eksenine dik olan doğrulardan başka hiçbir doğruyu sabit bırakmaz.

**İspat.** Bir yansımanın düzlemde birebir bir dönüşüm olduğu açıktır. Hatta Şekil 3.2.1 den yansımanın uzaklığı koruduğu da gösterilebilir. O halde bir yansıma bir harekettir. Her noktanın eksene göre yansımışı eksene göre simetriği olduğundan, her açının yönü tersi olur. O halde Şekil 3.2.1 de  $PQR$  açısının yönü pozitif ise görüntüsü olan  $P'Q'R'$  açısının yönü negatiftir. Ekseni  $g$  olan bir yansımada  $g$  nin noktaları sabit noktalardır. Ayrıca  $g$  doğrusu ve  $g$  ye dik olan bütün doğrular da sabit doğrulardır,  $g$  ye göre simetrik olan şekil de yansımada sabit kalır (Hacısalihoglu 1998).

**Teorem 3.2.2.** İki noktayı sabit bırakan bir izometri bir yansıma ya da bir birim dönüşümdür.

**İspat.**  $m$  doğrusu üzerindeki  $P$  ve  $Q$  noktalarını sabit bırakan bir  $\alpha$  izometrisini düşünelim.  $\alpha$  izometrisi için iki durum vardır.  $\alpha$  izometrisi ya  $\iota$  ya da  $\sigma_m$  yansımasıdır.  $\alpha = \iota$  ise noktaların sabit kaldığı aşıkardır.  $\alpha \neq \iota$  olsun.  $\alpha = \sigma_m$  olduğunu gösterelim. Eğer  $\alpha \neq \iota$  ise Teorem 3.1 ye göre  $\alpha$  tarafından sabit bırakılmayan bir  $R$  noktası vardır. Bu yüzden  $R$  noktası  $m$  doğrusunun dışındadır ve  $P, Q, R$  noktaları doğrudan olmayan üç noktadır.  $R' = \alpha(R)$  olsun.  $\alpha$  bir izometri olduğu için  $PR = PR'$  ve  $QR = QR'$  dir.  $P$  ve  $Q$  nun herbiri  $R$  ve  $R'$  den eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olduğundan  $m$  doğrusu  $\overline{RR'}$  nün orta dikmesidir. Sonuç olarak  $\alpha(R) = R' = \sigma_m(R)$  dir. Aynı

zamanda  $\alpha(P) = P = \sigma_m(P)$  ve  $\alpha(Q) = Q = \sigma_m(Q)$  dir. Teorem 3.3 e göre  $\alpha = \sigma_m$  elde edilir (Martin 1982).

Şimdi yansımaların bileşkesiyle ilgili bazı teoremlerden bahsedeceğiz.

$g$  doğrusuna göre bir  $\sigma_g$  yansımasını bir başka  $h$  doğrusuna göre bir  $\sigma_h$  yansıması takip etsin.  $\sigma_g$ ,  $\sigma_h$  yansımaları açılarının yönlerini ters çevireceklerinden bunların bileşkeleri olan dönüşüm de açılarının yönlerini korumuş olur (Hacısalıhoğlu 1998).

**Teorem 3.2.3.** Tek bir noktayı sabit bırakan izometri iki yansımanın bir bileşkesidir.

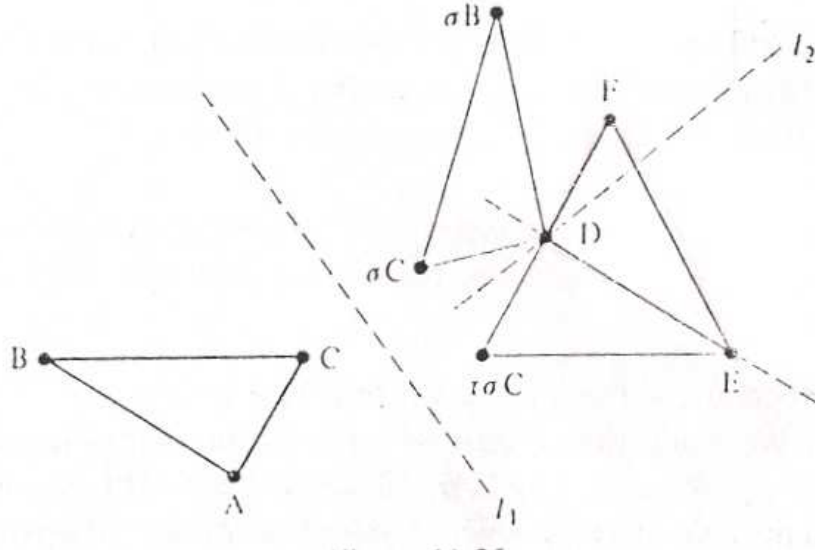
**İspat.** Bir  $\alpha$  izometrisinin bir tek  $C$  noktasını sabit bıraktığını kabul edelim.  $P$  noktası  $C$  den farklı bir nokta,  $\alpha(P) = P'$  ve  $m$  doğrusu  $\overline{PP'}$  nün orta dikmesi olsun.  $\alpha$  bir izometri olduğu için  $CP = CP'$  dir. Bu durumda  $C$  noktası  $m$  doğrusunun üzerindedir. Bu yüzden  $\sigma_m(C) = C$  ve  $\sigma_m(P') = P$  dir.  $\sigma_m\alpha(C) = \sigma_m(C) = C$  ve  $\sigma_m\alpha(P) = \sigma_m(P') = P$  dir. Teorem 3.2.2 e göre  $l = \overleftrightarrow{CP}$  olmak üzere  $\sigma_m\alpha = \iota$  ya da  $\sigma_m\alpha = \sigma_l$  dir. Ancak  $\sigma_m\alpha \neq \iota$  dir. Yoksa  $\alpha, \sigma_m$  olurdu ve  $C$  den başka noktaları da sabit bırakırdı. Bu yüzden bazı  $l$  doğrusu için  $\sigma_m\alpha = \sigma_l$  dir. Bu eşitliğin iki tarafı soldan  $\sigma_m$  ile çarpıldığında  $\alpha = \sigma_m\sigma_l$  elde edilir.

Herhangi  $m$  doğrusu için  $\iota = \sigma_m\sigma_m$  olduğundan önceki iki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.2.4.** Bir noktayı sabit bırakan bir izometri en fazla iki yansımanın bir bileşkesidir.

**Teorem 3.2.5.** Yansımaların bileşkesi bir izometridir. Her izometri en fazla üç yansımanın bileşkesidir.

**İspat.** Kabul edelim ki özdeş olmayan bir  $\alpha$  izometrisi  $P$  noktasını farklı  $Q$  noktasına dönüştürsün.  $m$  doğrusu da  $\overline{PQ}$  nün orta dikmesi olsun.  $\sigma_m\alpha$  izometrisi  $P$  noktasını sabit bırakır. Teorem 3.2.4 ye göre  $\sigma_m\alpha$  nin en fazla iki yansımanın bileşkesi olması gerekir. Bu iki yansımanın bileşkesine  $\beta$  denilsin. Böylece  $\alpha = \sigma_m\beta$  dir ve  $\alpha$  en fazla üç yansımanın bileşkesidir (Martin 1982).



**Şekil 3.2.3** Üç izometri ile  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  gösterimi

Öklid düzlemde iki üçgenin köşe noktaları arasında birebir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş ise bu iki üçgen K.A.K'a (kenar-açı-kenar) göre eşittir. Bu iki eş üçgen en fazla üç yansıma ile meydana gelir. Poincaré yarı-düzlemde üç izometri ile  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  olduğu gösterilebilir (Şekil 3.2.3). Buna bağlı olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.2.6.** Her hiperbolik katı hareket en fazla üç hiperbolik yansımanın bir bileşkesidir (Stahl 1993).

Şimdi eğik jeodezikteki hiperbolik yansılarda kolaylık sağlaması açısından kompleks sayılarla ilgili bazı tanım ve teoremleri verelim.

**Tanım 3.2.2.** Öklid düzlemdeki her bir  $(x, y)$  noktası  $z = x + iy$  olarak ifade edilirse bu  $z$  sayısına *kompleks sayı* denir. Kompleks sayılar kümesi  $\mathbb{C}$  ile ifade edilir.  $z(x, y)$ ,  $z = x + iy$  kompleks sayısına karşılık gelen nokta olsun.  $z$  doğru parçasının uzunluğuna  $z$ 'nin *modülü* denir.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ile gösterilir.  $z$  nin *argümenti*

$$\arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

olarak gösterilir.  $\theta$  ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere bir açı olsun. Modülü 1, argümenti  $\theta$  olan kompleks sayı

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ve  $r$  bir reel sayı olmak üzere modülü  $r$  , argümenti  $\theta$  olan kompleks sayıyı

$$re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

olarak gösteririz.

**Tanım 3.2.3.** Eğer  $z = x + iy$  bir kompleks sayı ise  $x - iy$  sayısı *bu kompleks sayının eşleneğidir* denir.  $\bar{z}$  ile gösterilir.

$\bar{z}$  nin eşleneğinin de  $z$  olduğunu görmek kolaydır. Her kompleks sayı ve eşleneği x-eksenine göre simetriktir. Diğer bir deyişle,  $f(z) = \bar{z}$  fonksiyonu x-ekseninde  $\rho_x$  yansımasıdır (Stahl 1993).

**Tanım 3.2.4.**  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ve  $z \in \mathbb{C}_\infty$  olmak üzere

$$T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & , z \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & , z = \infty \\ \infty & , z = -\frac{d}{c} \end{cases} \quad ad - bc \neq 0$$

biçiminde ifade edilebilen dönüşümlere *möbiüs dönüşümleri* denir. Kısaca;

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ye bir *möbiüs dönüşümü* denir (Başkan 2005).

**Teorem 3.2.7.** Möbiüs dönüşümü grubu üst yarı düzlemi sabit bırakır.

**İspat.**  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ve  $z \in \mathbb{C}_\infty$  olmak üzere

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{(az + b)}{(cz + d)} \\ &= \frac{(az + b)}{(cz + d)} \cdot \frac{c\bar{z} + d}{c\bar{z} + d} \\ &= \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}m(T(z)) &= \frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{y}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

$|cz + d|^2 > 0$ ,  $y > 0$  olduğundan;  $\dot{I}m(T(z)) > 0$  dır (Yılgör 2007).

II. tip doğrular olan eğri jeodezikteki hiperbolik yansımalar, merkezi x-ekseni üzerinde olan inversiyonlardır. Şimdi H-düzlemde eğik jeodezikteki yansımaların kompleks sayılarla ifadesini verelim.

**Önerme 3.2.1.**  $I_{O,k}$  inversiyonunu alalım ve bu inversiyon

$$I_{O,k}(z) = z^l$$

olsun.

$$\arg(z^l) = \arg(z)$$



ve

$$|z| \cdot |z'| = k^2$$

olmak üzere

$$z' = I_{O,k}(z) = \frac{k^2}{\bar{z}}$$

dir. Bu denklem  $O$  merkezli  $k$  yarıçaplı hiperbolik yarı çemberde (eğri jeodezikte) bir hiperbolik yansımadır.

**Önerme 3.2.2.**  $A(a, 0)$  merkezli  $k$  yarıçaplı hiperbolik çemberlerde yansıma

$$I_{A,k}(z) = \frac{k^2}{\bar{z} - a} + a$$

dir.

**Teorem 3.2.8.** H-düzleminde hiperbolik yansımalar hiperbolik uzaklığı korurlar.

**İspat.**

Durum 1. I tipindeki doğrudaki yansıma için  $m$ ,  $x = c$  eşitliğine sahip bir doğru olsun.  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktalarının  $m$  doğrusuna göre simetri olması için gerek ve yeter şart  $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$  ve  $y_1 = y_2$  dir.

Eğer  $a \leq t \leq b$  olmak üzere  $\gamma$ ,  $[u(t), v(t)]$  olarak verilen herhangi bir eğri ise  $\rho_m(\gamma)$ ,  $[2c - u(t), v(t)]$  olan bir eğridir. Şimdi

$$\gamma \text{ boyunca} \quad : \quad dx = u'(t)dt \quad dy = v'(t)dt$$

$$\rho_m(\gamma) \text{ boyunca} \quad : \quad dx = -u'(t)dt \quad dy = v'(t)dt$$

dir. Buradan hem  $\gamma$  hem de  $\rho_m(\gamma)$  hiperbolik uzunluk olarak,

$$\int_a^b \frac{\sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)}}{v(t)} dt$$

ortak değere sahiptirler.

Durum 2. II tipindeki doğrudan yansıma için  $I_{C,k}$  bir inversiyon olsun.  $h$  eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$\int_h \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

dir. Kutup noktasını  $C$  ve kutup eksenini x-ekseni olarak bir kutupsal koordinat sistemi oluşturalım. Kartezyen koordinatlar kutupsal koordinatlara dönüştürüldüğünde

$$x = c + r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta + r \frac{d \cos \theta}{d\theta} = r' \cos \theta - r \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \frac{d \sin \theta}{d\theta} = r' \sin \theta + r \cos \theta$$

dir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 d\theta^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2 d\theta^2 \\ &= [r'^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2rr' (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] d\theta^2 \\ &= (r'^2 + r^2) d\theta^2 \end{aligned}$$

dir.  $h$  eğrisini,

$$r = f(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

denklemini ile ifade edelim.  $I_{C,k}$  inversiyonu  $h$  yi

$$r = F(\theta) = \frac{k^2}{f(\theta)} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

olarak verilen  $h'$  eğrisine dönüştürür. Buradan,

$$\begin{aligned} d_H(h') &= \int_{h'} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r \sin \theta} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{F'^2 + F^2}}{F \sin \theta} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(-k^2 f' / f^2)^2 + (k^2 / f)^2}}{k^2 \sin \theta / f} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{f'^2 + f^2}}{f \sin \theta} d\theta \\ &= \int_h \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r \sin \theta} d\theta \\ &= d_H(h) \end{aligned}$$

dir (Stahl 1993).

**Tanım 3.2.5.** Düzlemde verilen bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine *çember* denir.

Düzlemde verilen  $M = (m, n)$  (çemberin merkezi) noktasından  $r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  çemberin yarıçapı) birim uzaklıkta bulunan değişken nokta  $X = (x, y)$  olsun.  $\{X : |MR| = r\}$  noktalar kümesi bir çember belirtir ve bu çemberin denklemi

$$(x - m)^2 - (y - n)^2 = r^2$$

şeklindedir (Salihova 2006).

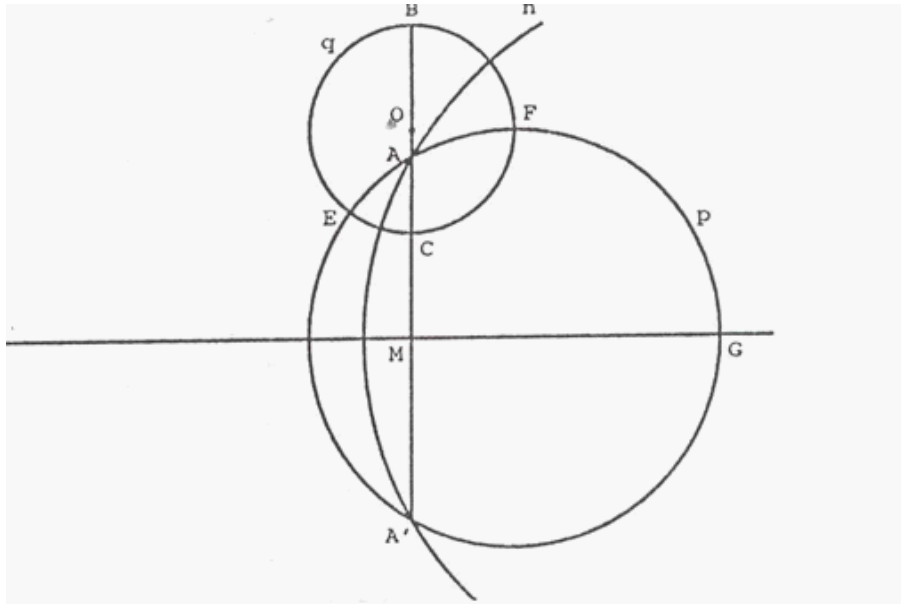
Şimdi hiperbolik yansımalarından faydalanarak bir öklid çemberinin bir hiperbolik çember olduğunu gösterelim.

**Teorem 3.2.9.** Üst yarı düzlemdeki her öklid çember aynı zamanda bir hiperbolik çemberdir.

**İspat.**  $q$ ,  $O$  merkezli ve  $x$ -eksenine dik  $BC$  çaplı bir öklid çember olsun (Şekil 3.2.4). Eğer  $q$  nun aynı zamanda hiperbolik çember olduğu ispatlanırsa, bu hiperbolik çemberin  $A$  hiperbolik merkezi,  $BC$  doğru parçasının hiperbolik orta noktası ise

$$MA = \sqrt{MB.MC} \quad (3.2.1)$$

olur. Şimdi  $A$  dan geçen her  $p$  jeodeziğinin,  $q$  nun içini iki hiperbolik eş parçaya böldüğünü gösterelim. Bu hiperbolik eşlik,  $I_p$  hiperbolik yansıması olup, yani  $p$  nin her noktasını sabit bırakan bir yansımadır.



**Şekil 3.2.4** Öklid ve hiperbolik çember gösterimi

Önerme 3.1.3 e göre  $p$  ve  $q$  nun dik olması için ancak ve ancak  $q$  merkezli çemberindeki hiperbolik yansımanın  $p$  çemberini sabit bırakmasını gerektirmekteydi. Bu nedenle  $k$

sı  $q$  nun öklid yarıçapı olan  $p$  yi sabit bırakan  $I_{O,k}$  inversiyonunun olduğunu ispatlamak gerekir. Tabii ki  $I_{O,k}$  inversiyonu  $p$  ve  $q$  nun  $E$  ve  $F$  kesişim noktalarını sabit bırakır.  $I_{O,k}(p)$ ,  $E$  ve  $F$  yi kapsayan bir çember olması nedeniyle, şimdi  $A' = I_{O,k}(A)$  nın  $p$  üzerinde olduğunu gösterelim. Bunun için  $A$  ve  $A'$  nün x-eksenine göre simetrik olduğunu göstermek yeterdir.

$O = (., b)$  ise bu takdirde  $B = (., b + k)$ ,  $C = (., b - k)$  ve (3.2.1) den,

$$A = (., \sqrt{b^2 - k^2})$$

olur. Buradan  $A'$  nün ordinatı,  $A$  nın ordinatının negatifi olan,

$$\begin{aligned} OM - OA' &= b - \frac{k^2}{OA} \\ &= b - \frac{k^2}{b - \sqrt{b^2 - k^2}} \\ &= b - \frac{k^2}{b - \sqrt{b^2 - k^2}} \cdot \frac{b + \sqrt{b^2 - k^2}}{b + \sqrt{b^2 - k^2}} \\ &= b - \frac{k^2 (b + \sqrt{b^2 - k^2})}{b^2 - (b^2 - k^2)} \\ &= b - \frac{k^2 (b + \sqrt{b^2 - k^2})}{k^2} \\ &= b - (b + \sqrt{b^2 - k^2}) \\ &= -\sqrt{b^2 - k^2} \end{aligned}$$

ifadesine eşittir. Sonuç olarak  $A'$ ,  $p = I_{O,k}(p)$  olacak şekilde  $p$  ve  $I_{O,k}(p)$  nin üzerindedir. Bunun anlamı  $p$  ve  $q$  ortogondur ve bu nedenle  $q = I_{O,k}(q)$  dur. Diğer bir deyişle,  $A$  dan geçen her düz jeodezik,  $q$  yu iki hiperbolik eş parçaya ayırır.  $p$ ,  $A$  dan geçtiği sürece,  $AE$  yayının hiperbolik uzunluğu sabittir.

$AE$  nin  $AC$  üzerine dönüşümü ise, hiperbolik yansımayla bulunur.  $G$ , x-ekseni ile  $p$  nin kesişimi ve  $n$ ,  $G$  merkezli ve  $A$  dan geçen eğik jeodezik olsun.  $I_n(A) = A$  ve  $I_n(A') = A'$  olduğundan dolayı  $I_n(p) = BM$  olur. Bununla birlikte ispatın ilk kısmına bakarak  $I_n(q) = q$  ve sonuç olarak  $I_n$  nin  $q$  ve  $p$  nin kesişimi olan  $E$  yi,  $q$  ve  $BM$  nin kesişimi olan  $C$  üzerine dönüştürdüğünü söyleyebiliriz. Ayrıca  $G$  ile diğer kesişim de,  $E$  noktasını  $B$  ye dönüştürür. Bu durumda şu sonuca varılır;  $AE$  yayının hiperbolik uzunluğu sabittir ve bu nedenle  $q$ ,  $A$  merkezli hiperbolik çemberdir.

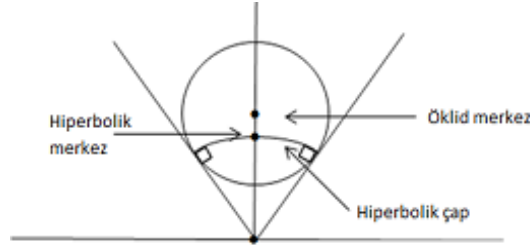
**Önerme 3.2.3.**  $(h, k)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı bir çember

$$H = h \quad , \quad K = \sqrt{k^2 - r^2} \quad , \quad R = \frac{1}{2} \ln \frac{k+r}{k-r}$$

veya

$$h = H \quad , \quad k = K \cosh(R) \quad , \quad r = K \sinh(R)$$

olan  $(H, K)$  hiperbolik merkezli ve  $R$  hiperbolik yarıçaplı çemberdir (Şekil 3.2.5).



**Şekil 3.2.5** Öklid ve hiperbolik merkezlerin gösterimi

**İspat.**  $B$  ve  $C$ ,  $(h, k)$  çemberinin merkezinden geçen doğrunun alt ve üst noktaları olsun.  $B$  ve  $C$  nin koordinatlarının  $(h, k+r)$  ve  $(h, k-r)$  olduğu açıktır. Bu takdirde Önerme 2.4 ten

$$R = \frac{1}{2} \ln \frac{k+r}{k-r}$$

dir.  $K$  hiperbolik orta nokta olduğundan,

$$K = \sqrt{(k+r)(k-r)} = \sqrt{k^2 - r^2}$$

dir. Ayrıca  $H = h$  olduğu da aşıkardır.

Diğer taraftan,  $R$  nin eşitinden,

$$\frac{k}{r} = \frac{e^{2R} + 1}{e^{2R} - 1} = \coth(R)$$

yazabiliriz.

Bu ifade,  $K^2 = k^2 - r^2$  olacak şekilde çözümlürse,

$$r^2 = \frac{K^2}{\coth^2(R) - 1} = K^2 \sinh^2(R)$$

ve

$$k^2 = K^2 + r^2 = K^2 [1 + \sinh^2(R)] = K^2 \cosh^2(R)$$

bulunur.

**Sonuç 3.2.1.** Her hiperbolik çember aynı zamanda öklid çemberdir.

**Önerme 3.2.4.** Öklid düzlemindeki çember denklemleri,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

şeklindedir. Poincaré yarı düzlemindeki çemberin analitik denklemleri ise,

$$x^2 + y^2 - 2Hx - 2K \cosh(R)y + H^2 + K^2 = 0$$

dır.

**İspat.**  $(h, k)$  öklid çemberin merkezi ise, H-düzleminde,

$$h = H \quad , \quad k = K \cosh(R) \quad , \quad r = K \sinh(R)$$

ifadesini öklid düzlemdeki çember denkleminde yerine yazarak,  $H$  düzlemindeki çemberin analitik denkleminin

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - H)^2 + (y - K \cosh(R))^2 = (K \sinh(R))^2$$

$$x^2 - 2Hx + H^2 + y^2 - 2K \cosh(R)y + K^2 \cosh^2(R) = K^2 \sinh^2(R)$$

$$x^2 - 2Hx + H^2 + y^2 - 2K \cosh(R)y + K^2 (\cosh^2(R) - \sinh^2(R)) = 0$$

$$x^2 - 2Hx + H^2 + y^2 - 2K \cosh(R)y + K^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2Hx - 2K \cosh(R)y + H^2 + K^2 = 0$$

olduğu sonucuna varırız (Sönmez 2006).

Öklid düzleminde  $\pi$  sayısı önemli bir rol oynamaktadır. Bu sabit sayı öklid düzleminde çemberin çevre uzunluğunun çapına oranına eşit olmasına rağmen, H-düzleminde farklıdır.

**Örnek 3.2.1.** Üzerinde keyfi bir  $P(x, y)$  noktası verilen  $C(h, k)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı  $q$  çemberinin hiperbolik uzunluğunu bulunuz.

**Çözüm.**  $C(h, k)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı  $q$  çemberinin denklemi

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

dir.  $P(x, y)$ ,  $q$  çemberi üzerinde keyfi bir nokta ve  $t$ ,  $CP$  yarıçapının x-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı olsun. Buradan çemberin parametrik denklemi,

$$x = h + r \cos t \quad y = k + r \sin t$$



olur ve

$$dx = -r \sin t \, dt \quad dy = r \cos t \, dt$$

,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_H(q) &= \int_q \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r dt}{k + r \sin t} \\ &= \left[ 2r \frac{2}{\sqrt{k^2 - r^2}} \arctan \frac{k \tan(t/2) + r}{\sqrt{k^2 - r^2}} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{4r}{\sqrt{k^2 - r^2}} \left[ \arctan \frac{k + r}{\sqrt{k^2 - r^2}} - \arctan \frac{-k + r}{\sqrt{k^2 - r^2}} \right] \\ &= \frac{4r}{\sqrt{k^2 - r^2}} \left[ \arctan \sqrt{\frac{k + r}{k - r}} + \arctan \sqrt{\frac{k - r}{k + r}} \right] \\ &= \frac{2\pi r}{\sqrt{k^2 - r^2}} \end{aligned}$$

ve

$$\frac{d_H(q)}{2R} = \frac{2\pi r}{\sqrt{k^2 - r^2} \ln \frac{k + r}{k - r}} \neq \pi$$

dir (Stahl 1993).

### 3.3 H-Düzleminde Ötelemeler

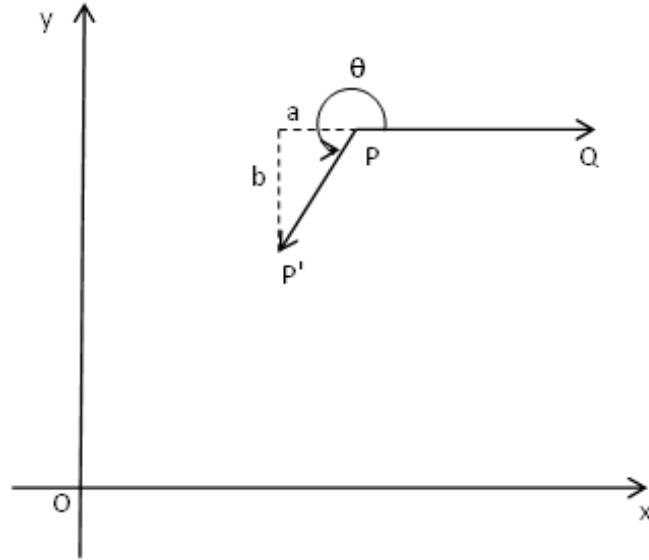
Öklid düzleminde olduğu gibi H-düzleminde de ötelemeler eksenleri kesişmeyen iki yansımanın bileşkesidir. I. tip doğrular düz jeodezikler olduğundan dolayı düz jeodezikteki ötelemeler Öklid düzlemdeki ötelemelerin aynısıdır.

**Tanım 3.3.1.** Bir öteleme hareketi, denklemleri,

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b \quad (3.3.1)$$

olan bir dönüşümdür; burada  $a$  ve  $b$  herhangi reel sayılardır.



**Şekil 3.3.1** Öklid düzlemde öteleme

Eğer  $a = b = 0$  ise (3.3.1) denklemleri  $x = x'$ ,  $y = y'$  özdeşliğine indirgenir. O halde  $\iota$  özdeşlik elemanı ötelemeler cümlesine dahildir.

Herhangi bir  $P$  noktasından başlayarak bir  $P'$  noktasına şu şekilde gidilebilir: (3.3.1) denklemlerine göre Ox eksenine paralel olarak  $a$  birim kadar ve Oy eksenine paralel

olarak  $b$  birim kadar gidilir.  $a$  ve  $b$  nin işaretleri gidilecek yönleri belirtirler. Şekil 3.3.1 de  $a < 0$  ve  $b < 0$  dir.

Eğer dönüştürme  $\iota$  değilse,  $P'$  nün  $P$  ye göre durumu, *öteleme vektörü* denen,  $\overrightarrow{PP'}$  vektörü ile belirtilir, ötelemenin uzunluğu  $\overrightarrow{PP'}$  nün boyu ile belirtilir.  $\overrightarrow{PP'}$  nün boyu  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ve doğrultusu  $\theta = \widehat{QPP'}$  açısı ile verilir. Burada  $\theta$  açısına *ötelemenin doğrultusu* denir.

Bir öteleme vektörüne  $\overrightarrow{PP'}$  denirse bu öteleme vektörünün tersine  $\overrightarrow{P'P}$  denir. Yani ötelemenin tersi mevcuttur. Öteleme ve tersi aynı doğrultuda, fakat ters yöndedir ve uzunlukları aynıdır (Hacısalihoglu 1998).

Aşağıda eğri jeodezikteki ötelemeler kompleks sayılarla ifade edilecektir.

$z_0 = a + ib$  üst yarı düzlemde herhangi bir sayı olmak üzere

$$f(z) = \frac{z - a}{b}$$

mobius dönüştürümü  $z_0$  ı  $i$  ye taşıyan bir hiperbolik ötelemedir. Bu dönüştürümün tersi

$$f^{-1}(z) = bz + a$$

olup  $i$  noktasını  $z_0$  a taşır. Böylece,  $H$ -düzlemde herhangi bir  $z_1 = c + id$  noktası verildiğinde

$$d\left(\frac{z - a}{b}\right) + c = \frac{dz + (bc - ad)}{0z + b}$$

bileşkesi  $z_0$  ı  $z_1$  e taşıyan bir hiperbolik katı hareket olur.

**Örnek 3.3.1.**  $z_0 = 2 - 3i$  noktasını  $z_1 = 3 + 4i$  ye taşıyan hiperbolik ötelemenin denklemini yazınız.

**Çözüm.**  $z_0 = 2 - 3i$  ve  $z_1 = 3 + 4i$  olmak üzere

$$\frac{4z + (-3.3 - 2.4)}{-3} = \frac{4z - 17}{-3}$$

$z_0$  1  $z_1$  a taşıyan bir hiperbolik katı harekettir.

**Örnek 3.3.2.**  $B(-1, 0)$  olmak üzere  $T = I_{B,4} \circ I_{O,2}$  nin öteleme olduğunu gösteriniz (Şekil 3.3.2).  $1 + i$  ve  $3i$  noktalarının  $T$  altındaki görüntülerini bulunuz.

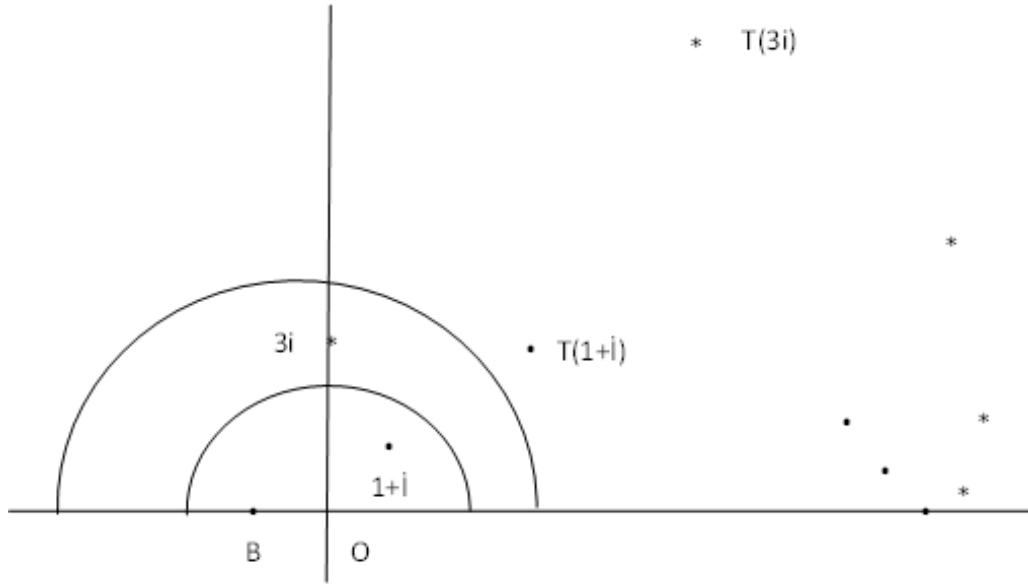
**Çözüm.**

$$T(z) = I_{B,4} \circ I_{O,2}(z) = \frac{4^2}{\frac{2^2}{z} + 1} - 1 = \frac{15z - 4}{z + 4}$$

$$T(1 + i) = \frac{15i + 11}{i + 5}$$

$$T(3i) = \frac{45i - 4}{3i + 4}$$

olarak verilen bu bileşke yansımaların eksenleri kesişmediği için bir hiperbolik ötelemedir. Bu da öklid ötelemelerinin hiperbolik benzerleridir.  $T^n(1 + i)$  ve  $T^n(3i)$  nin ilk birkaç değeri Şekil 3.3.2 de gösterilmiştir. Bu noktaların x-ekseni üzerinde aynı noktaya doğru yakınsar.



**Şekil 3.3.2** H-düzlemindeki hiperbolik öteleme

Buradan, ötelemelerin bileşkesinin bir öteleme olduğu söylenebilir.

**Teorem 3.3.1.** H-düzleminde ötelemeler hiperbolik uzaklığı korurlar.

**İspat.**  $\tau$  bir öteleme olsun. Herhangi  $h$  sabit sayısı için

$$\tau(x, y) = (x + h, y)$$

dir.  $a \leq t \leq b$  olmak üzere  $\gamma, [u(t), v(t)]$  olarak verilen herhangi bir eğri ise  $\tau(\gamma), [u(t) + h, v(t)]$  şeklinde herhangi bir eğri olacaktır. Hem  $\gamma$  hem de  $\tau(\gamma)$  eğrilerinde,

$$dx = u'(t)dt \quad dy = v'(t)dt$$

dir. Sonuç olarak hem  $\gamma$  hem de  $\tau(\gamma)$ ,

$$\int_a^b \frac{\sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)}}{v(t)} dt$$

hiperbolik uzunluğuna sahiptirler (Stahl 1993).

### 3.4 H- Düzleminde Dönmeler

Hiperbolik dönmeler öklid dönmelerin hiperbolik benzerleridir. Bunlar:

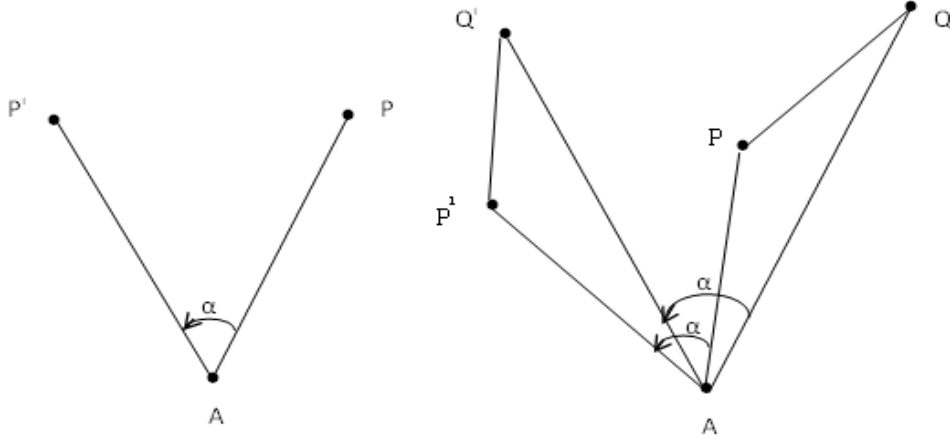
(1) Öklid dönmelerin aynısı olan düz jeodezikteki dönmeler ile eğri jeodezikteki dönmeler kesişen iki doğrudaki yansımaların bileşkesiyle oluşur.

(2) Kesişen iki doğrudaki dönmelerin merkezi, hem düz hem de eğri jeodezikte kesişen doğruların kesim noktasıdır.

(3) Düz jeodezikteki dönmelerin açısı ile eğri jeodezikteki dönmelerin açısı, kesişen iki doğru arasındaki açının iki katıdır (Stahl 1993).

**Tanım 3.4.1.** Düzlemin bir noktası  $A$  ve radyanları gösteren bir sayı  $\alpha$  olsun.  $A$  noktasını kendisine ve düzlemin diğer bir noktası olan  $P$  noktasını  $P^1$  ne dönüştüren o

şekilde bir dönüştürme alalım ki  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'}$  ve  $\widehat{PAP'} = \alpha$  olsun. Bu şekildeki dönüştürme  $A$  noktası etrafında  $\alpha$  kadar bir dönme denir.  $A$  noktasına bu dönmenin merkezi ve  $\alpha$  açısına da dönme açısı denir.



**Şekil 3.4.1** Öklid düzleminde dönme

$A$  noktasından  $AP$  uzaklığında bulunan bir  $P$  noktası (Şekil 3.4.1),  $\overline{AP}$  doğru parçasının  $A$  etrafındaki  $\alpha$  açısı kadar dönmesiyle bir tek  $P'$  noktasına dönüştür. Aşikardır ki düzlemin her bir noktası tek bir noktanın resmidir. O halde bir dönme,  $AQ = A'Q'$  ve  $\widehat{PAQ} = \widehat{P'A'Q'}$  olduğundan  $APQ$  ve  $A'P'Q'$  üçgenlerinden  $PQ = P'Q'$  dir; dolayısıyla dönme, uzaklığı korur. Aynı şey,  $A, P, Q$  noktalarının aynı doğru üzerinde olmaları halinde de doğrudur.

Burada, dönmeler  $R$  ile ifade edilecektir.

Merkezi  $A$  olan bir çemberin noktaları yine çemberin noktalarına dönüştürler.  $A$  dan geçen doğrular yine  $A$  dan geçen doğrulara dönüştürler; ilk doğru ile görüntüsü arasındaki açı  $\alpha$  dir. Dönmeler açıların yönlerini korur.

Eğer  $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$  veya  $2\pi$  nin herhangi tam katı ise  $R$  bir özdeşlik dönüştürmedir. Benzer şekilde  $\alpha = (2k + 1)\pi$  dönme açısına sahip olan bütün dönmeler aynı dönüştürme



$H$ -düzlemde hiperbolik dönmenin tek bir sabit noktası vardır. Bu sabit nokta dönme merkezini bulmak ve diğer noktaların yerini belirlemek için gereklidir.

**Örnek 3.4.1.**

$$f(z) = -\frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}$$

dönüşümü  $z = i$  noktası etrafında dönme açısı  $180^\circ$  olan bir hiperbolik dönmedir. Dönmenin merkezi  $f(i) = -\frac{1}{i} = i$  dir.  $f(2i) = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$  olduğu için dönmenin açısının  $180^\circ$  olduğu görülür.

Merkezi  $i$  noktasında olan diğer bütün hiperbolik dönmeler için aşağıdaki lemmaya bakınız.

**Lemma 3.4.1.**  $H$ -düzlemde  $\theta$  herhangi bir açı olmak üzere

$$f_\theta(z) = \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}$$

mobius dönüşümü  $i$  noktası etrafında dönme açısı  $2\theta$  olan bir hiperbolik dönmedir.

**İspat.**

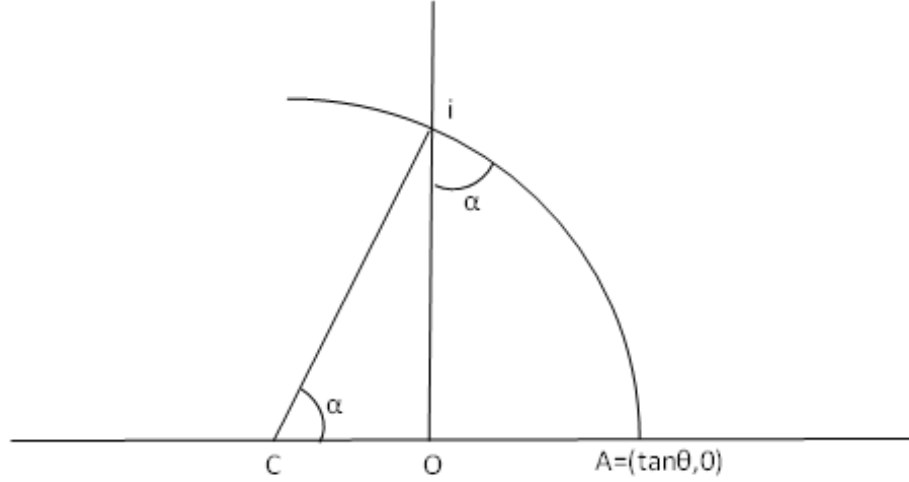
$$\cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta) = 1 > 0$$

olduğu için  $f_\theta$ ,  $H$ -düzlemde bir hiperbolik katı harekettir.

$$f_\theta(i) = \frac{\cos \theta i + \sin \theta}{-\sin \theta i + \cos \theta} = \frac{i(\cos \theta - \sin \theta i)}{-\sin \theta i + \cos \theta} = i$$

dir.  $f_\theta$ ,  $i$  noktası etrafında bir hiperbolik dönmedir.





**Şekil 3.4.3** H-düzlemindeki hiperbolik dönme

$\theta = n\pi + \pi/2$  olduğu zaman  $f_\theta(z) = -\frac{1}{z}$  dir.  $i$  noktası etrafında dönme açısı  $180^\circ$  olan hiperbolik dönmenin tanımlanması Örnek 3.4.1 de gösterildi.  $\theta$  nın diğer değerleri için hiperbolik dönme tanımlayalım.  $\tan \theta$  sonlu bir reel sayı olmak üzere  $A = (\tan \theta, 0)$  olsun (Şekil 3.4.3).  $f_\theta$ ,  $i$  noktasını sabit bıraktığı ve  $f_\theta(0) = \tan \theta$  olduğu için  $f_\theta$  hiperbolik dönmesi  $i$  den  $O$  ya kadar olan düz jeodeziği  $i$  den  $A$  ya kadar olan eğri jeodeziğe dönüştürür. Eğer  $C = (-c, 0)$ , bu eğri jeodeziğin öklid merkezi ise  $\alpha = \angle A C i$  dir.  $Oi$  nin öklid uzunluğu 1 olduğu için  $Ci$  nin öklid uzunluğu  $\csc \alpha$  ve  $c = \cot \alpha$  dir.  $CA$ ,  $CO$  ve  $OA$  nın toplamı olduğundan

$$\csc \alpha = \cot \alpha + \tan \theta$$

$$\csc \alpha - \cot \alpha = \tan \theta$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \theta$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \theta$$

$$\alpha = 2\theta$$

dir.  $iO$  ve  $iA$  arasındaki açı  $2\theta$  dır ve bu açı  $f_\theta$  hiperbolik dönmenin açısıdır.

Şimdi herhangi bir hiperbolik dönme tanımlamak mümkündür.

**Önerme 3.4.1.** Merkezi  $a + ib$  ve dönme açısı  $2\theta$  olan hiperbolik dönme

$$(bz + a) \circ \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta} \circ \frac{z - a}{b}$$

bileşkesidir.

**Örnek 3.4.2.**  $1 + i$  noktası etrafında dönme açısı  $90^\circ$  olan hiperbolik dönmenin denklemini bulunuz.

**Çözüm.** Önerme 3.4.1 e göre

$$\begin{aligned} (z + 1) \circ \frac{z + 1}{-z + 1} \circ (z - 1) &= (z + 1) \circ \frac{z - 1 + 1}{-(z - 1) + 1} \\ &= (z + 1) \circ \frac{z}{-z + 2} \\ &= \frac{z}{-z + 2} + 1 \\ &= \frac{2}{-z + 2} \end{aligned}$$

**Örnek 3.4.3.**  $A = (3, 0)$  olmak üzere  $I_{O,2}$  ve  $I_{A,4}$  inversiyonların bileşkesiyle meydana gelen dönme gösteriniz.  $1 + i$  noktasının bu dönüşüm altındaki görüntüsünü bulunuz.

**Çözüm.**  $I_{O,2}$  inversiyonu

$$\frac{2^2}{\bar{z}}$$

denklemine sahiptir ve bu denklemde  $1 + i$  noktasını

$$\frac{2^2}{1 + i} = \frac{4}{1 - i} = \frac{4}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{4 + 4i}{1 + 1} = 2 + 2i$$

noktasına dönüştür. Diğer taraftan  $A = (3, 0)$  olmak üzere  $I_{A,4}$  inversiyonu

$$\frac{4^2}{\bar{z} - 3} + 3 = \frac{3\bar{z} + 7}{\bar{z} - 3}$$

denkleminde sahiptir ve bu denklemde  $1 + i$  noktası

$$\frac{3(\overline{1+i}) + 7}{\overline{1+i} - 3} = \frac{10 - 3i}{-2 - i} = \frac{-17 + 16i}{5}$$

noktasına dönüştür.

$I_{A,4}$  ve  $I_{O,2}$  inversiyonları hiperbolik yansımalarıdır. Bu yansımaların eksenleri kesişir (Şekil 3.4.4). Sonuç olarak  $R = I_{A,4} \circ I_{O,2}$  bileşkesi bir hiperbolik dönmedir.

Şimdi bu bileşke daha detaylı incelenecektir.  $\frac{4}{z}$  nin eşleniğinin  $\frac{4}{z}$  olduğu bilindiğine göre

$$R(z) = I_{A,4} \circ I_{O,2}(z) = I_{A,4}\left(\frac{4}{z}\right) = \frac{3\frac{4}{z} + 7}{\frac{4}{z} - 3} = \frac{7z + 12}{-3z + 4}$$

denklemini elde edilir. Bu bir hiperbolik dönme olduğu için üst yarı düzlemde bir tek sabit noktası (dönme merkezi) olması gerekir. Şimdi dönme merkezini bulalım.

$$R(z) = \frac{7z + 12}{-3z + 4} = z$$

denklemini çözülerek dönme merkezi bulunabilir.

$$z^2 + z + 4 = 0$$

denkleminin kökleri

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

olup üst yarı düzlemde yer alan kök

$$\frac{-1 + i\sqrt{15}}{2}$$

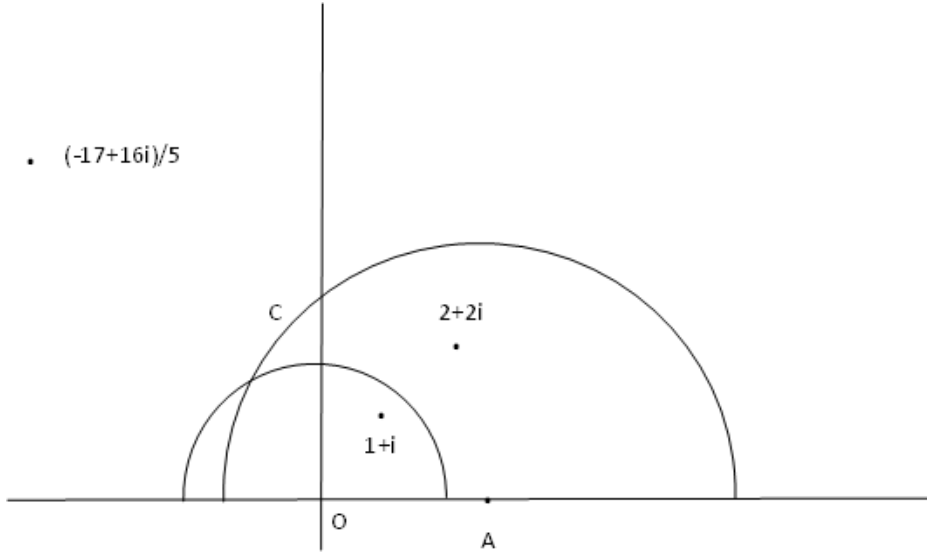
dir.  $R = I_{A,4} \circ I_{O,2}$  bileşkesi,  $\left(\frac{-1 + i\sqrt{15}}{2}, 0\right)$  merkezli bir hiperbolik dönmedir.  $I_{A,4}$  ve  $I_{O,2}$  hiperbolik yansıma eksenleri arasındaki açı

$$\cos^{-1}\left(\frac{AC^2 + OC^2 - OA^2}{2.AC.OC}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2.4.2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)$$

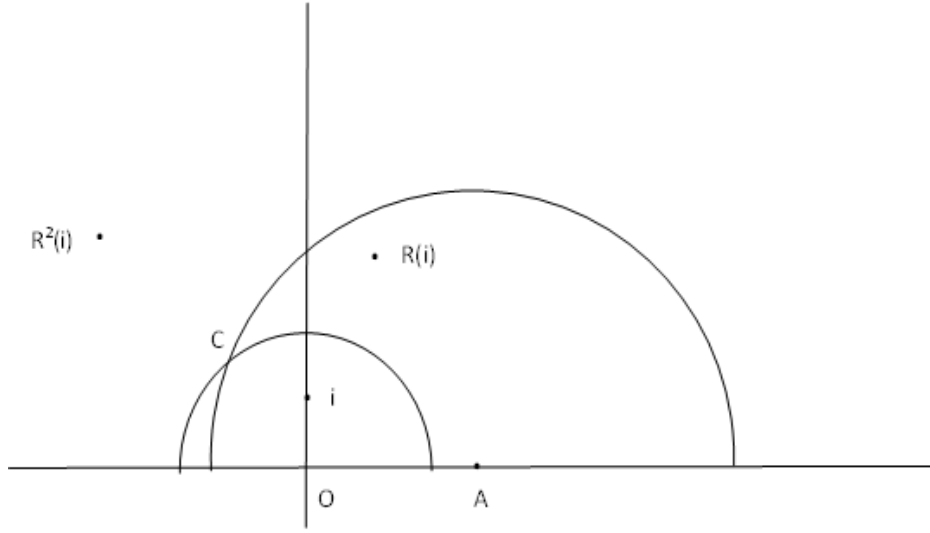
dir ve hiperbolik  $R$  dönmesinin açısı

$$2 \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right) = 93.13\dots^\circ$$

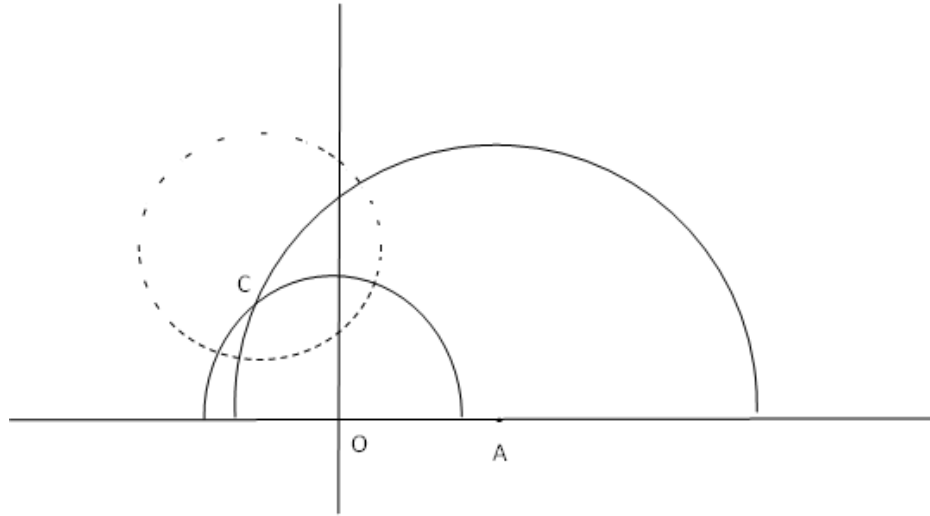
dir (Şekil 3.4.4). Şekil 3.4.5 de  $i$ ,  $R(i)$  ve  $R^2(i) = R(R(i))$  noktaları ve Şekil 3.4.6 de ise  $R^n(i)$  nin bir çok değeri işaretlenmiştir.  $R$  bir hiperbolik katı hareket olduğu için  $C$  ve  $R^k(i)$  arasındaki hiperbolik uzaklık,  $R(C) = C$  ve  $R(R^k(i)) = R^{k+1}(i)$  arasındaki hiperbolik uzaklığa eşittir. Bu şekilden de görüldüğü gibi  $R^k(i)$  noktaları  $C$  merkezli hiperbolik çember gösterir (Stahl 1993).



**Şekil 3.4.4** Kesişen iki eğri jeodezikteki hiperbolik dönme



**Şekil 3.4.5** İki hiperbolik dönme

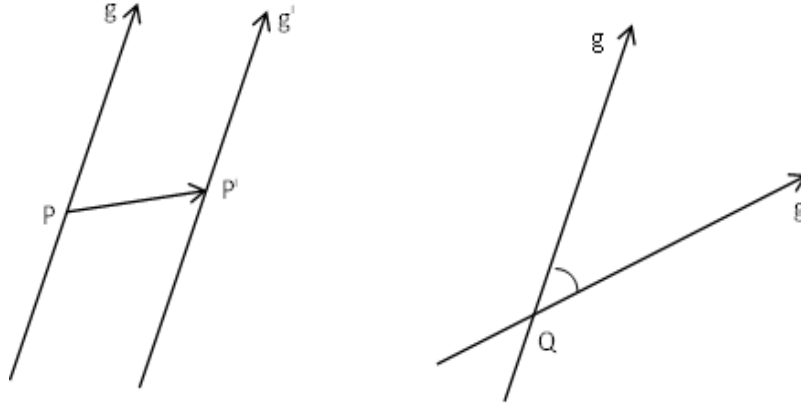


**Şekil 3.4.6** Hiperbolik dönmeler

Buradan dönmelerin bileşkesinin bir dönme olduğu ve dönme merkezlerinin aynı olduğu söylenebilir.

### 3.5 Kongrüans

Öklid düzlemde herhangi iki doğru veya eşit uzunluklu herhangi iki doğru parçası kendi aralarında kongruenttir. Herhangi iki  $P, P'$  noktasının kongruent olduğunu göstermek için  $P$  yi  $P'$  ye gönderen bir hareketin var olduğuna işaret edilir. Örneğin  $PP'$  vektörünün belirttiği öteleme  $P$  noktasını  $P'$  ye resmeden bir harekettir. Benzer şekilde herhangi iki  $g, g'$  doğrusu da kongruenttir. Gerçekten  $g \parallel g'$  ise iki  $P \in g$  ve  $P' \in g'$  noktaları için  $PP'$  ötelemesi  $g$  doğrusunu  $g'$  doğrusuna gönderen bir harekettir (Şekil 3.5.1). Eğer  $g$  ve  $g'$  bir  $Q$  noktasında kesişirse  $Q$  noktası etrafındaki bir dönme hareketi ile  $g$  doğrusu  $g'$  doğrusuna resmedilebilir (Şekil 3.5.1).



Şekil 3.5.1 İki doğrunun kongruentliği

Uzunlukları eşit olan  $\overline{AB}$  ve  $\overline{A'B'}$  gibi herhangi iki doğru parçasıda kongruenttir.  $AB = A'B'$  olduğundan  $A, B$  noktalarını, sırası ile,  $A', B'$  noktalarına gönderen bir katı hareket vardır. Bu katı hareket  $\overline{AB}$  yi  $\overline{A'B'}$  ye gönderen katı harekettir.

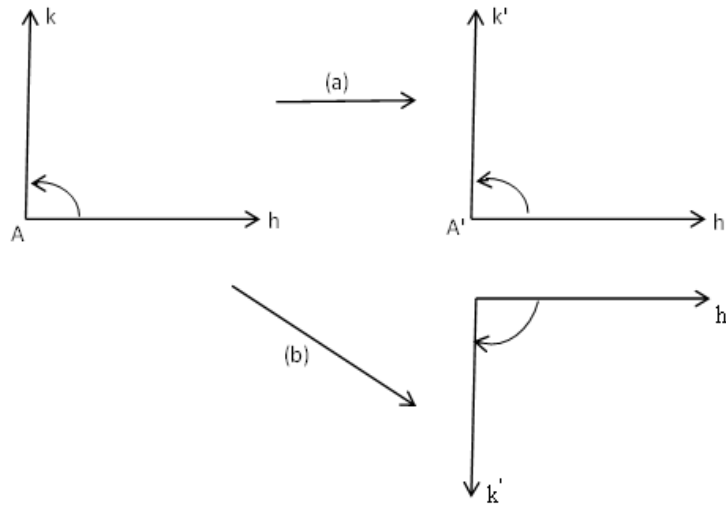
Bütün dik açıların kongruent olduklarını göstermek için göstermek için köşesi  $A$  ve kenarları  $h, k$  olan bir  $(A, h, k)$  dik açısı ile köşesi  $A'$  ve kenarları  $h', k'$  olan bir diğer  $(A', h', k')$  dik açısı alınır (Şekil 3.5.2-a).  $h$  ve  $h'$  kenarları üzerinde  $AB = A'B'$  olacak şekilde, sırası ile,  $B$  ve  $B'$  noktaları alınırsa  $D(A, B) = (A', B')$  olacak şekilde bir katı hareket mevcut olduğundan  $D(h) = h'$  dir. Diğer taraftan  $D$  hareketi yarı doğruları

yarı doğru'lara dönuştürdüğünden ve dikliğı koruduğundan  $k$  yarı doğru'sunu da ucu  $A'$  olan  $h'$ 'ye dik olan bir doğru'ya dönuştürür. Eğer verilen açılar Şekil (3.5.2-a) da olduğı gibi aynı yönlü iseler  $D(h, k) = (h', k')$  olacaktır. Eğer verilen açılar Şekil (3.5.2-b) deki gibi ters yönlü iseler  $D$  yerine  $D'(A, B) = (A', B')$  olacak şekilde bir  $D'$  karşıt hareketi almır ve yine  $D'(h, k) = (h', k')$  olur.

Kenarları karşılıklı olarak eşit olan  $ABC$  ve  $A'B'C'$  üçgenleri kongruenttir. Gerçekten  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  ve  $AC = A'C'$  olduğundan  $A, B, C$  noktalarını, sırası ile,  $A', B', C'$  noktalarına resmeden bir tek hareket vardır. Bu hareket  $M$  ise

$$M(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}) = \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{A'C'}$$

dır. Böylece  $M(ABC) = A'B'C'$  olur.



**Şekil 3.5.2** İki açının kongruentliğı

Düzlemde  $f$  ve  $f'$  ile gösterilen iki şeklin kongruent olduklarını söyleyebilmek için  $f$  yi  $f'$  üzerine resmeden bir hareketin var olduğunu göstermek gerekir. Bu demektir ki  $f$  den  $f'$  ye öyle bir;

$$F : f \rightarrow f'$$

birebir dönüşümü vardır ki bu dönüşümde  $P \neq Q$ ,  $P, Q \in f$  noktalarına  $F(P) = P'$  ve  $F(Q) = Q'$  olacak şekilde  $P' \neq Q'$ ,  $P', Q' \in f'$  karşılık gelirse  $PQ = P'Q'$  dir.

**Teorem 3.5.1.** Öklid düzlemde iki geometrik şeklin kongruent olması için gerek ve yeter şart bu şekillerden birinin herhangi iki noktası arasındaki uzaklık diğerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklığa eşit olmak üzere bu iki şekil arasında birebir bir dönüşüm mevcut olmasıdır (Hacısalihoglu 1998).

Bir hiperbolik üçgenin bütün iç açıları belli ise kenar uzunlukları da bu açılara bağlı olarak bulunabilir. O halde hiperbolik üçgenin karşılıklı iç açıları eşit ise kenarların hiperbolik uzunlukları eşit olacağından hiperbolik üçgenlerin kongruentliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.5.2.** Eğer iki hiperbolik üçgenin karşılıklı açıları eşit ise bu üçgenler hiperbolik olarak kongruenttir (Stahl 1993).



## 4 HİPERBOLİK UZAYDA İZOMETRİLER

Bu tezde hiperbolik uzay, üst yarı düzlemdeki Poincaré yarı düzlemine benzer şekilde tanımlanan üst yarı uzay modelidir.

$$H^3 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z > 0\}$$

kümesine hiperbolik uzay veya kısaca  $H^3$  uzayı denilmektedir.

$H^3$  te iki tip doğru (jeodezik) vardır: Düşey çemberler ve düşey doğrular. Düşey çemberler, merkezleri  $xy$ -düzleminde olan öklid yarı çember yayları; düşey doğrular da,  $xy$ -düzlemine dik olan öklid doğru parçalarıdır(Önerme 4.2.2).

**Tanım 4.1.**  $a \leq t \leq b$  olmak üzere  $H^3$  te herhangi bir  $\gamma(t)$  eğrisi verildiğinde bu eğrinin hiperbolik uzunluğu

$$\int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} \quad (4.1)$$

dir. Bu tanım hiperbolik uzaydaki Poincaré metriğidir.

**Örnek 4.1.**  $1 \leq t \leq 3$  olmak üzere  $\gamma(t) = (3t - 1, t + 2, 2t + 1)$  olarak verilen öklid doğru parçasının hiperbolik uzunluğunu bulunuz.

**Çözüm.** Bu,  $(2, 3, 3)$  ve  $(8, 5, 7)$  noktalarından geçen doğru parçasının parametrik denklemi

$$x = 3t - 1 \quad y = t + 2 \quad z = 2t + 1$$

ve

$$dx = 3dt \quad dy = dt \quad dz = 2dt$$

dir. Bunlar (4.1) eşitliğinde yerine yazıldığında verilen doğrunun hiperbolik uzunluğu,

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{9dt^2 + dt^2 + 4dt^2}}{2t+1} = \int_1^3 \frac{\sqrt{14}}{2t+1} dt = \frac{\sqrt{14}}{2} \ln \frac{7}{3}$$

olur.

**Örnek 4.2.**  $(a, b, c_1)$  ve  $(a, b, c_2)$  noktalarından geçen öklid doğru parçasının hiperbolik uzunluğunu bulunuz.

**Çözüm.** Bu doğru parçası,

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = t \quad , \quad c_1 \leq t \leq c_2$$

olarak parametreleştirilirse

$$dx = 0 \quad , \quad dy = 0 \quad , \quad dz = dt$$

dir. Bu doğrunun hiperbolik uzunluğu,

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + dt^2}}{t} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{c_2}{c_1}$$

dir.

**Örnek 4.3.**  $t = 1$  den  $t = 2$  ye kadar olan aralıkta  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$  eğrisinin hiperbolik uzunluğunu hesaplayınız.

**Çözüm.** Bu eğri boyunca

$$dx = dt \quad , \quad dy = 2tdt \quad , \quad dz = 3t^2dt$$

dir. Böylece bu eğrinin hiperbolik uzunluğu

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}{t^3} \approx 2.35$$

olur.

Şimdi  $H^3$  te herhangi bir  $\gamma$  eğrisinin hiperbolik uzunluğuyla ilgili bazı durumları inceleyelim.

$z = 1$  düzleminde her eğri için  $dz = 0$  dır. Böylece, (4.1) denklemiyle gösterilen  $\gamma$  eğrisinin hiperbolik uzunluğu,

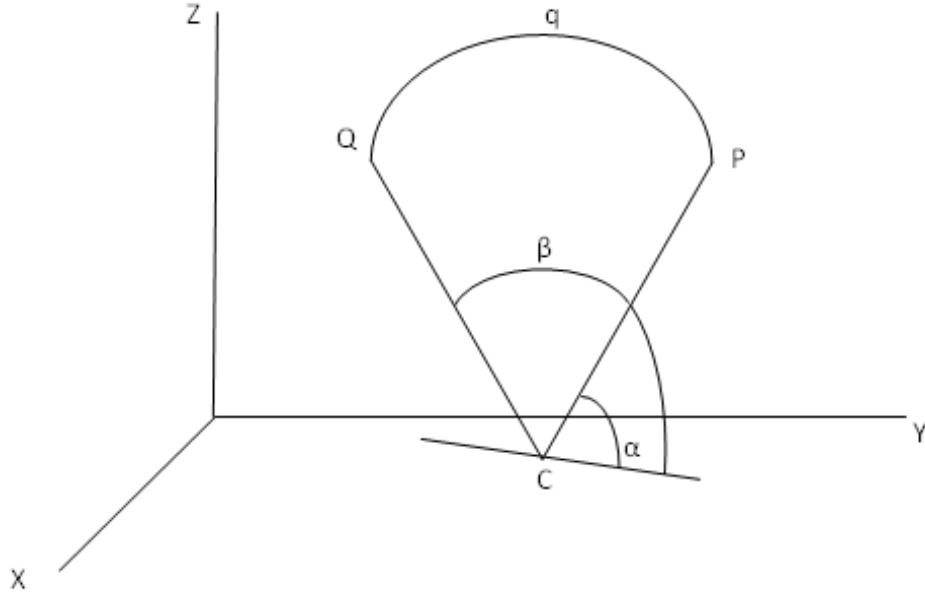
$$\int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

şeklindeki öklid uzunluğuna dönüşür. Dolayısıyla  $z = 1$  düzleminin hiperbolik geometrisi ile öklid geometrisi aynıdır.

Benzer olarak,  $x = 0$  düşey düzlemindeki her eğri için  $dx = 0$  dir. Bu düzlemdeki herhangi  $\gamma$  eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{dy^2 + dz^2}}{z}$$

dir. Uygun harflerin tekrar yazılmasından sonra bu denklem Poincaré üst yarı düzlem metriği ile aynı olur. Yani,  $H^3$  deki Poincaré metriği  $x = 0$ ,  $y > 0$  olacak şekildeki H-düzlemindeki Poincaré metriğine kısıtlanmıştır. Benzer uygulamalar diğer düzlemler için de geçerlidir.



**Şekil 4.1** Düşey çember üzerindeki iki nokta arasındaki  $d_H$  uzaklığı

**Önerme 4.1.**  $H^3$  te  $q$ ,  $C(a, b, 0)$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı bir düşey çember ve  $P$  ile  $Q$  da bu çember üzerinde iki nokta olsun.  $CP$  ve  $CQ$  doğruları  $xy$ -düzleminde sırasıyla  $\alpha \leq \beta$  olacak şekilde  $\alpha$  ve  $\beta$  açıları yapsın (Şekil 4.1). Bu takdirde,  $PQ$  yayının uzunluğu

$$d_H(P, Q) = \ln \left| \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} \right|$$

dir.

**İspat.** Yukarıda incelediğimiz gibi  $H^3$  deki Poincaré metriğini  $yz$ -üst yarı düzlemine kısıtladığımızda bu düzlem üzerinde bir metrik tanımlanır. Bu metrik  $H$ -düzlemindeki metrik ile aynıdır.

**Önerme 4.2.**  $(a, b, z_1)$  ve  $(a, b, z_2)$  noktalarından geçen öklid doğru parçasının hiperbolik uzunluğu

$$\ln \frac{z_2}{z_1}$$

dir.

Yukarıdaki iki önerme  $H^3$  ün jeodezikleri için sağlanır (Stahl 1993).

## 4.1 Hiperbolik Uzayda İnverson

Düzlemde konformal dönüşümlere benzer olarak  $n \geq 3$  için  $R^n$  de bir çok konformal dönüşüm vardır. Bu konformal dönüşümlerden biri küre inversonudur (Blair 2000).

$H^3$  te  $R$  yarıçaplı hiperbolik küre, sabit  $C$  noktasından  $R$  hiperbolik uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir.

Üst yarı düzlemde her hiperbolik çemberin bir öklid çember olduğu gösterilmişti. Benzer olarak  $H^3$  ün her hiperbolik küresi de bir öklid küresidir. Hiperbolik küre şu şekilde elde edilebilir: Düşey bir çember alalım. Bu çember, çemberin merkezinden geçen düşey doğru etrafında  $180^\circ$  döndürelim. Her hiperbolik çember bir öklid çember ve bu dönme hem öklid hem de hiperbolik katı hareket olduğundan şu sonuç ortaya çıkar: Çemberin oluşturduğu yüzey hem öklid hem de hiperbolik küredir.

**Önerme 4.1.1.**  $(a, b, c)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı küre,

$$A = a \quad , \quad B = b \quad , \quad C = \sqrt{c^2 - r^2} \quad , \quad R = \frac{1}{2} \ln \frac{c + r}{c - r}$$

ya da

$$a = A \quad , \quad b = B \quad , \quad c = C \cosh(R) \quad , \quad r = C \sinh(R)$$

olan  $(A, B, C)$  hiperbolik merkezli ve  $R$  hiperbolik yarıçaplı küredir.

**İspat.**  $K$  ve  $M$ ,  $(a, b, c)$  küre merkezinden geçen düşey doğrunun alt ve üst noktaları olsun.  $K$  ve  $M$  nin koordinatlarının  $(a, b, c + r)$  ve  $(a, b, c - r)$  olduğu aşikardır. Bu takdirde Önerme 4.2 den

$$R = \frac{1}{2} \ln \frac{c+r}{c-r}$$

dir.  $C$  hiperbolik orta nokta olduğundan

$$C = \sqrt{(c+r)(c-r)} = \sqrt{c^2 - r^2}$$

dir. Ayrıca  $A = a$  ve  $B = b$  olduğu aşıkardır. Diğer taraftan  $R$  nin eşitinden

$$\frac{c}{r} = \frac{e^{2R} + 1}{e^{2R} - 1} = \coth(R)$$

yazılabilir.

Bu ifade  $C^2 = c^2 - r^2$  olacak şekilde çözümlürse

$$r^2 = \frac{C^2}{\coth^2(R) - 1} = C^2 \sinh^2(R)$$

ve

$$c^2 = C^2 + r^2 = C^2(1 + \sinh^2(R)) = C^2 \cosh^2(R)$$

bulunur (Stahl 1993).

**Tanım 4.1.1.** Hiperbolik uzayda  $p$  merkezli bir  $S$  yarı öklid küresini ele alalım ( $p$  noktası sonsuzdaki sınırlı düzlemin bir elemanıdır.).  $x$ , hiperbolik uzayın keyfi bir noktası ve  $M$ ,  $p$  ve  $x$  noktalarından geçen bir doğru olsun.  $x(S \cap M)$  ve  $x'(S \cap M)$  öklid doğru parçaları aynı hiperbolik uzunluğa sahip olacak şekilde tek bir  $x'$  noktası vardır (Şekil 4.1.1).  $x'$  noktası  $S$  küresine göre  $x$  noktasının görüntüsüdür. Bu dönüşüm bir hiperbolik izometridir ve  $S$  küresinde *inversiyon* olarak adlandırılır.



$$x' = a + \left( \frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a)$$

dir.

Kürede inversiyon doğru ve çemberleri, doğru ve çemberlere dönüştürür.

Aşağıda, bu ifadeden yola çıkarak Teorem 3.1.1 in benzeri verilmektedir.

**Teorem 4.1.1.**  $H^3$  te  $C$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı bir küre inversiyonu

- (a)  $C$  den geçen düşey doğruları kendilerine,
- (b)  $C$  den geçmeyen düşey doğruları  $C$  den geçen düşey çemberlere,
- (c)  $C$  den geçen düşey çemberleri  $C$  den geçmeyen düşey doğrulara,
- (d)  $C$  den geçmeyen düşey çemberleri  $C$  den geçmeyen düşey çemberlere dönüştürür.

**İspat.** Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.1 e benzer şekilde yapılmaktadır (Blair 2000).

**Teorem 4.1.2.** Kürede inversiyon bir hiperbolik izometridir (Cannon, Floyd, Kenyon, Parry 1997).

**İspat.**  $S$ ,  $C$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı bir küre olsun. Keyfi  $x$  ve  $y$  noktalarının bu  $S$  küresine göre inversiyonu  $x'$  ve  $y'$  olsun. Kürede inversiyon bir konformal dönüşüm olduğu ve iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık açılara bağlı bulunduğu için  $x$  ve  $y$  noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık,  $x'$  ve  $y'$  noktaları arasındaki hiperbolik uzaklığa eşittir. Yani hiperbolik uzaklık korunur. Bu nedenle, kürede inversiyon bir hiperbolik izometridir.

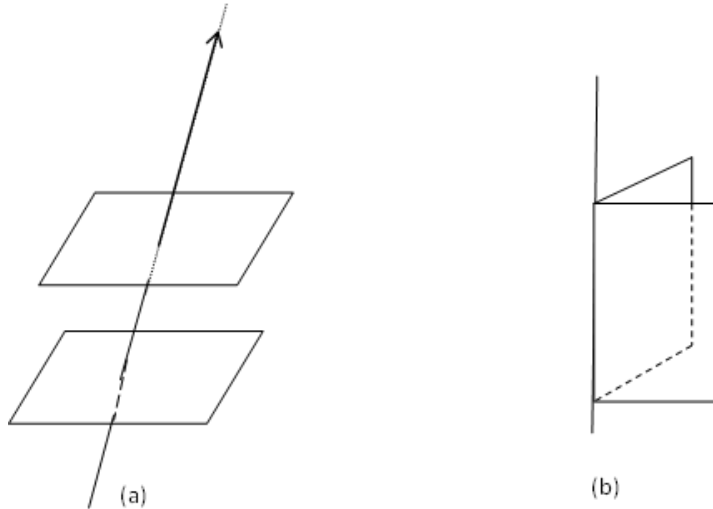
## 4.2 Hiperbolik Uzayda Yansımalar, Ötelemeler ve Dönmeler

$H^3$  te düşey doğrular  $xy$ -düzlemine dik olan öklid doğru parçaları olduğu için 3-boyutlu öklid uzayındaki izometriler  $H^3$  deki düşey doğrular için sağlar. Şimdi genel anlamda düşey doğrular için bu izometrilere bahsedilecektir.



$H^3$  deki *dönüşüm*, uzaydaki noktalar kümesini kendi noktalar kümesine dönüştüren birebir bir dönüşümdür.  $\alpha$  dönüşümü bir kolinasyon olsun. Kolinasyonun şu özelliği vardır: Her  $l$  doğrusu için  $\alpha(l)$  bir doğrudur. Uzaydaki her  $P$  ve  $Q$  noktası için  $P' = \alpha(P)$  ve  $Q' = \alpha(Q)$  olmak üzere  $P'Q' = PQ$  ise  $\alpha$  dönüşümü bir *izometridir*.  $\iota$  birim dönüşümü her  $P$  noktası için  $\iota(P) = P$  olarak tanımlanır.  $\alpha \neq \iota$  olmak üzere  $\alpha^2 = \iota$  ise  $\alpha$  dönüşümü bir *involüsyondur*. Eğer  $\alpha$  noktalar kümesini sabit bırakır ise  $\alpha$  izometrisi noktalar kümesi için bir *simetridir*.

$\Delta$  bir düzlem olmak üzere  $\sigma_\Delta$  yansıması,  $\Delta$  üzerindeki her  $P$  noktası için  $\sigma_\Delta(P) = P$  ise uzaydaki noktaları kendi üzerine dönüştüren bir dönüşümdür.  $Q$  noktası  $P$  noktasından farklı olmak üzere  $P$  noktası  $\Delta$  düzlemi üzerinde değil ise  $\sigma_\Delta(P) = Q$  ve  $\Delta$  düzlemi  $\overline{PQ}$  nun orta dikmesidir. Yansılarda çift sayıdaki yansımaların bileşkesi *çifttir*. Tek sayıdaki yansımaların bileşkesi *tektir*. Eğer  $\Gamma$  ve  $\Delta$  düzlemleri paralel ise  $\sigma_\Delta\sigma_\Gamma$ ,  $\Gamma$  ve  $\Delta$  düzlemlerine dik olan ortak doğrular boyunca bir *ötelemedir* (Şekil 4.2.1-a). Eğer  $\Gamma$  ve  $\Delta$  düzlemleri  $l$  doğrusunda kesişir ise  $\sigma_\Delta\sigma_\Gamma$  dönüşümü  $l$  eksenini etrafında bir *dönmedir* (Şekil 4.2.1-b). Birim dönüşüm bir *ötelemedir* ama bir *dönme* değildir. İzometri hem tek hem de çift izometri olamaz. Tek izometrilere yansıma denir. Çift izometrilere öteleme ve dönme denir.

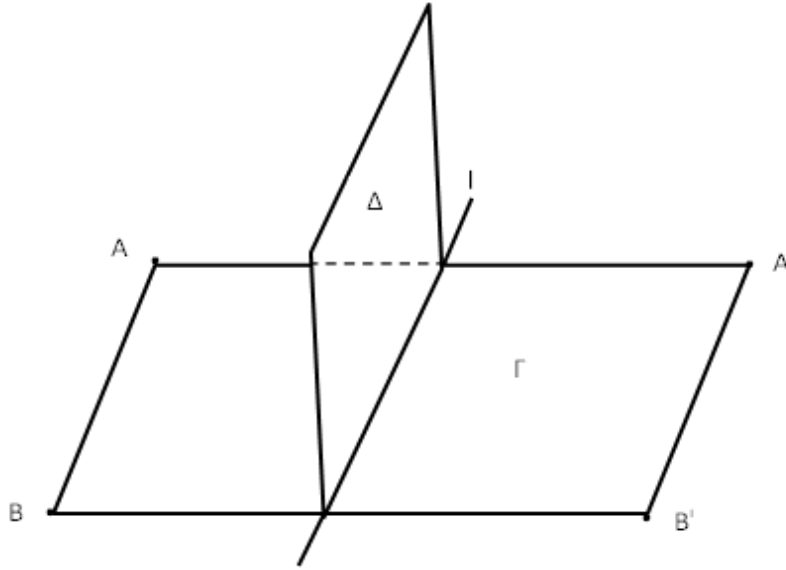


**Şekil 4.2.1** Öklid uzayda öteleme ve dönme

Her bir düzlem herhangi iki noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri olduğu için izometri uzaydaki düzlemler kümesini korur. Her bir doğru farklı düzlemlerin kesişimi olduğu için izometri bir kolinasyondur.

**Teorem 4.2.1.** Yansıma involüsyon özelliğini sağlayan bir izometridir.

**İspat.**  $A$  ve  $B$  iki nokta olmak üzere hem  $A$  yı hem de  $B$  yi içinde bulandıran bir  $\Gamma$  düzlemini düşünelim. Şekil 4.2.2 de görüldüğü gibi bu düzlem  $\Delta$  düzlemine diktir.  $\Gamma$  ve  $\Delta$  düzlemlerinin  $l$  doğrusunda kesiştiklerini kabul edelim.  $\sigma_{\Delta}$  yansımasının tanımına göre  $A' = \sigma_{\Delta}(A)$  ve  $B' = \sigma_{\Delta}(B)$  olmak üzere  $\Gamma$  düzleminde  $A'$  ve  $B'$  noktaları bulunur.  $\sigma_{\Delta}$  yansımasının  $\Gamma$  düzlemine kısıtlanmış  $l$  doğrusunda düzlem yansımasıdır. Düzlem izometrisindeki sonuçlarımızdan  $A'B' = AB$  dir. Böylece  $\sigma_{\Delta}$  bir izometridir.



**Şekil 4.2.2** Öklid uzayda yansıma

**Teorem 4.2.2.**  $\alpha$  ve  $\beta$  izometriler olsun. Hepsi aynı düzlemde bulunmayan  $P, Q, R, S$  noktaları için

$$\alpha(P) = \beta(P) \quad \alpha(Q) = \beta(Q) \quad \alpha(R) = \beta(R) \quad \alpha(S) = \beta(S)$$

ise  $\alpha = \beta$  dir.

**İspat.** Bir izometri, iki noktadan geçen doğruyu ve doğrudan olmayan üç noktadan geçen düzlemi sabit bırakır (Teorem 3.1-3.2). Benzer düşünceyle eğer izometri hepsi aynı düzlem içinde olmayan dört noktayı sabit bırakır ise bu izometri bu noktaları köşe kabul eden dörtyüzlüyü sabit bırakır. Böylece uzaydaki her bir nokta, dörtyüzlüyü iki noktada kesen bir doğru üzerinde olduğu için bu noktalar bir izometri tarafından sabit bırakılır. Bu dört noktayı sabit bırakan izometri birim dönüşüm olmalıdır.  $\alpha$  ve  $\beta$  dörtyüzlünün herbir köşesini kendisine dönüştüren izometri ise  $\beta^{-1}\alpha$  izometrisi dörtyüzlünün köşelerini sabit bırakır.  $\beta^{-1}\alpha = \iota$  ve  $\alpha = \beta$  dir. Bu durum, Teorem 3.3 nin benzeridir.

Düzlemde bir izometri en fazla üç yansımasının bileşkesidir. Bu ifadenin benzeri olarak, uzayda bir izometrinin en fazla dört yansımanın bileşkesi olduğunu gösterebiliriz.

**Teorem 4.2.3.** Bir izometri en fazla dört yansımanın bileşkesidir. Herhangi bir  $P$  noktasını sabit bırakan bir izometri,  $P$  den geçen düzlemlerdeki en fazla üç yansımanın bileşkesidir. İki noktayı sabit bırakan bir izometri ya dönme veya bir yansıma ya da bir birim dönüşümdür. Doğrudan olmayan üç noktayı sabit bırakan bir izometri yansıma ya da birim dönüşümdür. Düzlemsel olmayan dört noktayı sabit bırakan bir izometri birim dönüşümdür.

**İspat.**  $\alpha$  izometrisinin tek bir düzlem içerisinde olmayan  $P, Q, R, S$  noktalarını  $P', Q', R', S'$  noktalarına götürdüğünü kabul edelim. Dört durum ortaya çıkar:

Durum 1.  $P = P', Q = Q', R = R'$  ve  $S = S'$  olsun. Yukarıda bahsedilen durumda  $\Delta$  düzlemini  $P$  noktasından geçen herhangi bir düzlem olarak alırsak  $\alpha = \iota = \sigma_{\Delta}\sigma_{\Delta}$  dir.

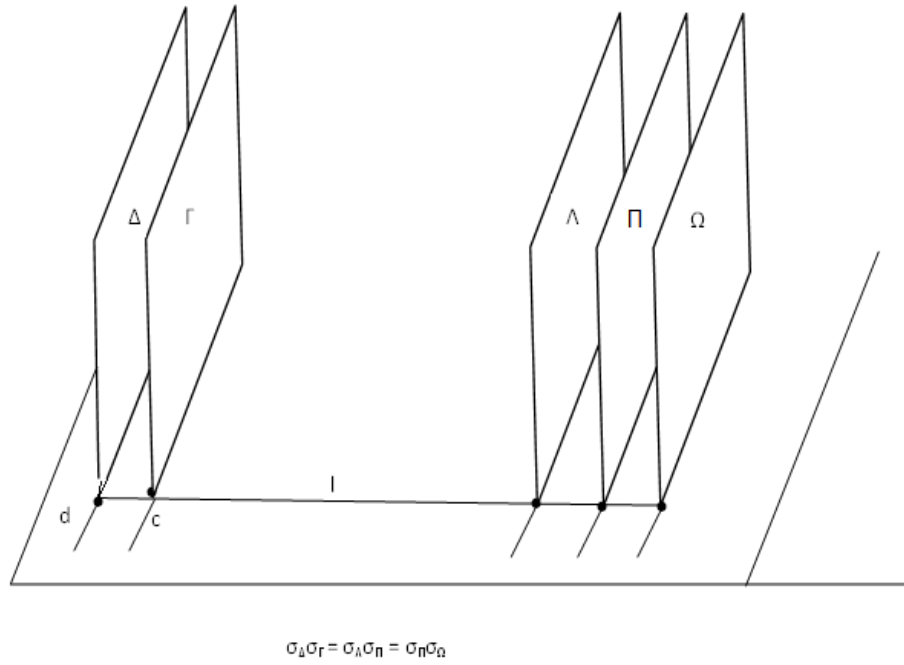
Durum 2.  $P = P', Q = Q', R = R'$  ama  $S \neq S'$  olsun.  $P, Q, R$  noktaları  $\overline{SS'}$  nin orta dikmesi olan  $\Gamma$  düzlemi üzerindedir. Bu yüzden  $\alpha = \sigma_{\Gamma}$  dir.

Durum 3.  $P = P', Q = Q'$  ama  $R \neq R'$  olsun. Burada  $P$  ve  $Q$  noktaları  $\overline{RR'}$  nin orta dikmesi olan  $\Delta$  düzlemi üzerinde yer alır.  $\Delta$  daki bir yansıma problemi Durum 1 ya da Durum 2 ye indirir.  $\alpha$  en fazla iki yansımanın bir bileşkesidir.

Durum 4.  $P = P'$  ama  $Q \neq Q'$  olsun.  $P$  noktası,  $\overline{QQ'}$  nin orta dikmesi olan  $\Pi$  düzlemi üzerinde yer alır.  $\Pi$  düzlemindeki bir yansıma problemi yukarıdaki durumlardan birine dönüştürür. Bu nedenle  $\alpha$ ,  $P$  den geçen düzlemler içerisinde en fazla üç yansımanın bileşkesidir.

Durum 5.  $P \neq P'$  olsun.  $\overline{PP'}$  nün orta dikmesi olan düzlem içindeki bir yansıma problemi bu dört durumdan birine dönüştürür. Bu nedenle her izometri en fazla dört yansımanın bir bileşkesidir.

Aşağıda ötelemeyle ilgili bir teorem verilecektir (Şekil 4.2.3).



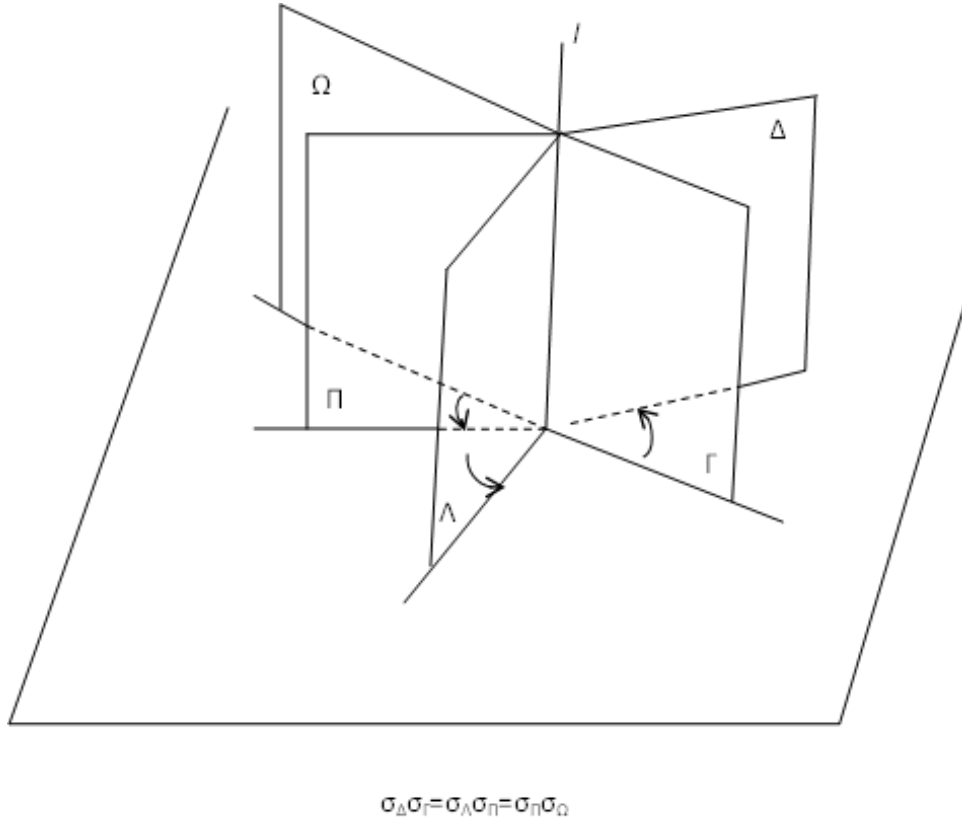
Şekil 4.2.3 Öklid uzayda öteleme

**Teorem 4.2.4.** Eğer  $\Gamma$  ve  $\Delta$  düzlemleri paralel ise  $\alpha_{\Delta}\alpha_{\Gamma}$  ötelemesi  $\Gamma$  ve  $\Delta$  nin ortak dikmesi olan her doğruyu ve  $\Gamma$ ,  $\Delta$  düzlemlerine dik olan her bir düzlemi sabit bırakır. Ama noktaları sabit bırakmaz. Eğer  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\Pi$  düzlemleri  $l$  doğrusuna dik ise

$$\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma} = \sigma_{\Lambda}\sigma_{\Pi} = \sigma_{\Pi}\sigma_{\Omega}$$

olacak şekilde  $\Lambda$  ve  $\Omega$  düzlemleri vardır. Eğer  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\Pi$  düzlemleri  $l$  doğrusuna dik ise  $\sigma_{\Pi}\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma}$ ,  $l$  doğrusuna dik olan bir düzlemden yansımadır.  $P$  ve  $Q$  farklı noktalar olmak üzere  $P$  yi  $Q$  ya götüren bir tek öteleme vardır. Bu öteleme  $\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma}$  olarak ifade edilir.  $\Gamma$  ya da  $\Delta$  düzlemlerinden biri keyfi olarak  $\overleftrightarrow{PQ}$  ya dik olarak seçildiğinde diğeri de  $\overleftrightarrow{PQ}$  ya dik olan bir tek düzlem belirtir.

Aşağıda dönme ile ilgili bir teorem verilecektir (Şekil 4.2.4).



**Şekil 4.2.4** Öklid uzayda dönme

**Teorem 4.2.5.** Eğer  $\Gamma$  ve  $\Delta$  düzlemleri  $l$  doğrusunda kesişirler ise  $\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma}$  izometrisi  $l$  doğrusu üzerindeki noktaları,  $l$  doğrusuna dik olan her düzlemi, merkezi  $l$  doğrusu üzerinde bulunan her çemberi sabit bırakır. Eğer  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\Pi$  düzlemleri  $l$  doğrusu üzerindeki her noktada kesişirlerse,

$$\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma} = \sigma_{\Lambda}\sigma_{\Pi} = \sigma_{\Pi}\sigma_{\Omega}$$

olacak şekilde  $l$  doğrusundan geçen  $\Lambda$  ve  $\Omega$  düzlemleri vardır. Eğer  $\Gamma, \Delta, \Pi$  düzlemleri  $l$  doğrusunun üzerindeki her bir noktada kesişirlerse  $\sigma_{\Pi}\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma}$ ,  $l$  yi kapsayan düzlemde bir yansımadır.  $l$  doğrusu etrafındaki bir dönme  $\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma}$  olarak ifade edilir (Martin 1982).

Şimdi  $H^3$  te eğrilerin uzunluklarını koruyan hiperbolik katı hareketleri inceleyelim.

**Önerme 4.2.1.**  $a, b$  ve  $\alpha$  sabit reel sayılar olsun.

$$\rho(x, y, z) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha, z)$$

$$\tau(x, y, z) = (x + a, y + b, z)$$

dönüşümleri  $H^3$  ün hiperbolik katı hareketlerdir.

**İspat.** İlk önce  $\rho(x, y, z)$  dönüşümü göz önüne alalım.  $a \leq t \leq b$  olmak üzere

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

$H^3$  te bir eğri ve

$$u(t) = x(t) \cos \alpha + y(t) \sin \alpha$$

$$v(t) = -x(t) \sin \alpha + y(t) \cos \alpha$$

$$w(t) = z(t)$$

olmak üzere  $\gamma$  eğrisinin  $\rho$  dönüşümü altındaki görüntüsü

$$\gamma^*(t) = [u(t), v(t), w(t)]$$

olsun.  $\rho$  nun bir hiperbolik hareket olması için

$$\int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}}{w} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$= \cos \alpha dx + \sin \alpha dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$= -\sin \alpha dx + \cos \alpha dy$$

$$dw = dz$$

dir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d_H(\gamma^*) &= \int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}}{w} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) dx^2 + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) dy^2 + dz^2}}{z} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} \\ &= d_H(\gamma) \end{aligned}$$

olur. Buradan,  $\rho$  dönüşümü bir katı harekettir.

$\tau(x, y, z)$  dönüşümünü göz önüne alalım.  $a \leq t \leq b$  olmak üzere,

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

$H^3$  te bir eğri olsun.

$$u(t) = x(t) + a$$

$$v(t) = y(t) + b \quad a, b \in R$$

$$w(t) = z(t)$$

olmak üzere  $\gamma$  eğrisinin  $\tau$  dönüşümü altındaki görüntüsü

$$\gamma^*(t) = [u(t), v(t), w(t)]$$

olsun. Buradan,

$$du = dx$$

$$dv = dy$$

$$dw = dz$$

olduğundan,

$$\int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}}{w} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z}$$

dir. Bu nedenle,  $\tau$  dönüşümü bir katı harekettir.

Yukarıdaki önermede  $\rho$ , dönme eksenini olan  $z$ -ekseni ile  $s$  aatin tersi yönünde  $\alpha$  açısı yaparak oluşturulan öklid dönmesini,  $\tau$  ise  $(0, 0, z)$  noktasını  $(a, b, z)$  noktasına dönüştüren yataysal ötelemeyi gösterir.

#### **Sonuç 4.2.1.**

- (a) Eksenini  $xy$ -düzlemine dik olan her öklid dönmesi,
- (b)  $xy$ -düzlemine paralel olarak hareket edilen her öklid ötelemesi,

$H^3$  ün hiperbolik katı hareketleridir.



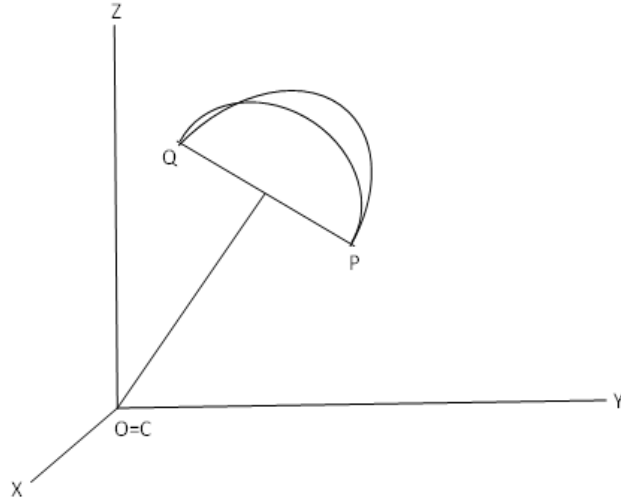
$H^3$  te düşey çemberlerdeki yansımalar inversiyonlardır. H-düzleminde eğri jeodezikteki dönmelere benzer olarak kesişen iki düşey çemberlerdeki inversiyonların bileşkesi dönmeyi verir. Yine H-düzleminde eğri jeodezikteki ötelemelere benzer olarak paralel iki düşey çemberlerdeki inversiyonların bileşkesi ötelemeyi verir.

**Önerme 4.2.2.** Poincaré üst yarı uzayın jeodezik parçaları,

- (a) Merkezi  $xy$ -düzleminde olan öklid yarı çember yayları (düşey çemberler) ya da
- (b)  $xy$ -düzlemine dik olan öklid düz doğru parçalarıdır (düşey doğrular).

**İspat.**  $P(x, y, z)$  ve  $Q(x, y, z)$  noktaları  $H^3$  ün herhangi iki noktası ve bu noktalardan geçen eğri  $\gamma$  olsun. İki durum söz konusudur.

Durum 1.  $PQ$  doğrusu  $xy$ -düzlemine dik olmasın.  $\Pi$ ,  $P$  ile  $Q$  noktalarını içeren ve  $xy$ -düzlemine dik olan bir düzlem ve  $C$ ,  $xy$ -düzlemi ile  $PQ$  doğru parçasının orta dikmesinin kesişim noktası olsun. Bir öteleme ve bir dönmenin bileşkesiyle  $\Pi$  düzlemini  $yz$ -düzlemine ve  $C$  noktasını başlangıç noktasına dönüştürelim (Şekil 4.2.5). Bu dönüşümler hem hiperbolik hem de öklid katı hareketler olduğu için düşey doğruları düşey doğrulara ve düşey öklid yarı çemberleri düşey öklid yarı çemberlere dönüştürür. Şimdi genelliği bozmaksızın  $\Pi$  nin  $yz$ -düzlemi ve  $C$  nin başlangıç noktası olduğunu kabul edelim.



**Şekil 4.2.5**  $H^3$  te düşey çember

$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ ,  $P$  ve  $Q$  noktalarından geçen bir eğri olsun. Küresel koordinat sistemine göre,

$$x(t) = r(t) \sin u(t) \cos v(t)$$

$$y(t) = r(t) \sin u(t) \sin v(t)$$

$$z(t) = r(t) \cos u(t)$$

olur.

$$dx = (r' \sin u \cos v + ru' \cos u \cos v - r \sin u v' \sin v)dt$$

$$dy = (r' \sin u \sin v + ru' \cos u \sin v + r \sin u v' \cos v)dt$$

$$dz = (r' \cos u - ru' \sin u)dt$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}
dx^2 + dy^2 + dz^2 &= [(r' \sin u \cos v + ru' \cos u \cos v - r \sin u v' \sin v)^2 \\
&\quad + (r' \sin u \sin v + ru' \cos u \sin v + r \sin u v' \cos v)^2 \\
&\quad + (r' \cos u - ru' \sin u)^2] dt^2 \\
&= [(r')^2 \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) \\
&\quad + r^2 (u')^2 \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) \\
&\quad + r^2 (v')^2 \sin^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&\quad + 2rr'u' \sin u \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v) \\
&\quad + (r')^2 \cos^2 u - 2rr'u' \sin u \cos u + r^2 (u')^2 \sin^2 u] dt^2 \\
&= \left[ (r')^2 + r^2 (u')^2 + r^2 (v')^2 \sin^2 u \right] dt^2
\end{aligned}$$

dir. Böylece  $\gamma$  eğrisinin hiperbolik uzunluğu,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2 (u')^2 + r^2 (v')^2 \sin^2 u}}{r \cos u} dt \quad (4.2.1)$$

olur. Buradaki  $t_1$  ve  $t_2$ , sırasıyla  $P$  ve  $Q$  noktalarına karşılık gelen  $t$  parametresinin değerleridir. Şimdi,  $\gamma$  jeodeziğinin  $yz$ -düzleminde yer alması gerektiğini ve merkezi orjinde olan düşey yarı çember yayı olduğunu gösterelim.

$\gamma$  nin denkleminde  $v = \frac{\pi}{2}$  yazarak  $\delta$  eğrisini elde edelim.  $\delta$ ,  $P$  ve  $Q$  noktalarından geçen eğridir. Bu eğri tamamen  $yz$ -düzleminde yer alır.  $\delta$  eğrisi,

$$x(t) = 0$$

$$y(t) = r(t) \sin u(t)$$

$$z(t) = r(t) \cos u(t)$$

olmak üzere

$$\delta(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

şeklindedir.

(4.2.1) ifadesinde  $v' = 0$  yazarak  $\delta$  jeodeziğinin uzunluğu,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2 (u')^2}}{r \cos u} dt \quad (4.2.2)$$

olur.

Belirli integrallerin temel özelliklerine göre (4.2.1) nin integrali (4.2.2)ün integralinden büyüktür ya da (4.2.2) ün integraline eşittir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart  $v' = 0$  dır, yani  $v$  sabit sayıdır.

Ancak  $P$  ve  $Q$  noktalarının her ikisi de  $yz$ -düzleminde olduğu için  $v$  sayısı tektir ve  $\frac{\pi}{2}$  dir.  $v = \frac{\pi}{2}$  olduğundan dolayı  $\gamma$  bir jeodezik olmak üzere  $\gamma$  jeodeziği tamamen  $yz$ -düzleminde bulunmak zorundadır. Yani  $\gamma = \delta$  dir ve  $\gamma$  düşey yarı çember yayıdır.

Durum 2.  $PQ$  jeodeziği  $xy$ -düzlemine dik olsun.  $x_1 = x_2$  ve  $y_1 = y_2$  olmak üzere  $PQ$  jeodeziği  $(x_1, y_1, z_1)$  ve  $(x_2, y_2, z_2)$  noktalarından geçsin.  $PQ$  jeodeziğinin hiperbolik uzunluğu

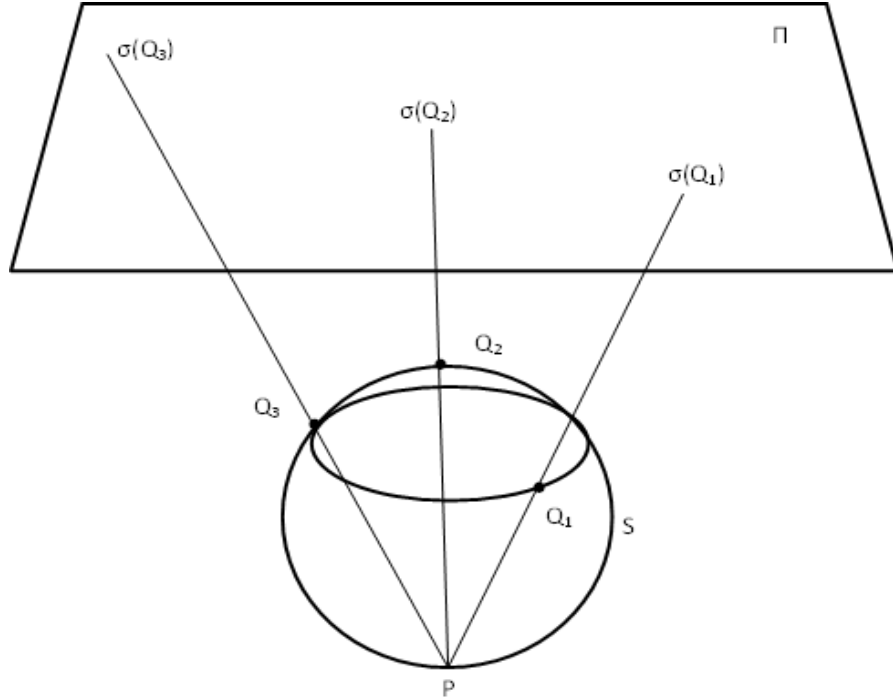
$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} \ln \frac{z_2}{z_1}$$

olur. Önerme 4.2 ye göre  $PQ$  jeodeziğinin öklid düz doğru parçası olduğunu söyleyebiliriz (Stahl 1993).

### 4.3 Kürenin Stereografik İzdüşümü

**Tanım 4.3.1.**  $S, R^3$  te bir küre ve  $P$ , kürenin en aşağıdaki noktası olsun (Güney yarım küredeki).  $\Pi$  nin  $xy$ -düzlemine paralel ve  $P$  noktasını kapsamayan herhangi bir düzlem olduğunu düşünelim.  $Q$  noktası,  $P$  noktasından farklı  $S$  küresinin her hangi bir noktası olmak üzere  $Q$  nun  $\Pi$  düzlemi üzerine izdüşümü olan  $Q'$  noktası,  $\Pi$  düzlem ile  $PQ$  doğrusunun arakesit noktasıdır (Şekil 4.3.1).  $\sigma(Q) = Q'$  dönüşümü,  $S$  nin  $\Pi$  üzerine *stereografik izdüşümü* olarak adlandırılır.

$\sigma$  nun tanım kümesi  $S/\{P\}$  dir. Burada,  $S/\{P\}$  şeklinde tanımlanan küreye *delinmiş küre* adı verilecektir. Ancak yüzey üzerinde inversiyon dönüşümü kullanıldığında kürenin tamamı tanımlıymiş gibi stereografik izdüşüm uygulanır. Bu uygulama gösterimi basitleştirme işine yarar.



**Şekil 4.3.1** Stereografik izdüşüm

Aşağıdaki lemma  $Q$  nun koordinatlarına göre stereografik izdüşümü ifade eder.

**Lemma 4.3.1.**  $S, (0, 0, c)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı bir küre olsun.  $S$  nin  $z = d$  düzlemi üzerine stereografik izdüşümü,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2ur(d-c+r)}{u^2+v^2+(d-c+r)^2} \\
y &= \frac{2vr(d-c+r)}{u^2+v^2+(d-c+r)^2} \\
z &= \frac{(u^2+v^2)(c-r)+(d-c+r)^2(c+r)}{u^2+v^2+(d-c+r)^2}
\end{aligned}$$

olmak üzere kürenin  $(x, y, z)$  noktasını  $(u, v, d)$  noktasına dönüştürür.

**İspat.**  $(u, v, d)$  noktası  $\Pi$  düzleminin keyfi noktası olsun. Lemmanın ifadesinde verilen  $(x, y, z)$  noktasının  $(u, v, d)$  ve  $(0, 0, c-r)$  noktalarıyla doğruduş olduğunu göstermek yeterlidir. Bu nokta gerçekten verilen kürenin üzerinde yer alır.  $Q = (x, y, z)$  noktası

$$\frac{x-0}{u-0} = \frac{y-0}{v-0} = \frac{z-(c-r)}{d-(c-r)} \quad (4.3.1)$$

$$x^2 + y^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad (4.3.2)$$

eşitliklerini sağlar. (4.3.1) eşitliğindeki oranlamamın bir  $\lambda$  sabitine eşit olduğu kabul edilirse

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z-(c-r)}{d-(c-r)} = \lambda$$

ve

$$x = \lambda u \quad y = \lambda v \quad z = \lambda(d-(c-r)) + (c-r)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikler (4.3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 + [\lambda(d - (c - r)) + (c - r) - c]^2 = r^2$$

$$\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 + \lambda^2 (d - c + r)^2 - 2\lambda(d - c + r)r + r^2 = r^2$$

$$\lambda^2 (u^2 + v^2 + (d - c + r)^2) - 2\lambda(d - c + r)r = 0$$

ve

$$\lambda = \frac{2(d - c + r)r}{u^2 + v^2 + (d - c + r)^2}$$

dir. Buradan,

$$x = \frac{2ur(d - c + r)}{u^2 + v^2 + (d - c + r)^2}$$

$$y = \frac{2vr(d - c + r)}{u^2 + v^2 + (d - c + r)^2}$$

$$z = \frac{(u^2 + v^2)(c - r) + (d - c + r)^2(c + r)}{u^2 + v^2 + (d - c + r)^2}$$

dir.

$H^3$  deki her hiperbolik küre bir öklid küre iken  $H^3$  ün hiperbolik ve öklid metriği her bir küre üzerinde farklı geometriler tanımlar. Örneğin, öklid yarıçapı 1 ve öklid merkezi  $(0, 0, 2)$  olan küre düşünölsün. Herhangi meridyenin öklid uzunluğu  $\pi$  dir. Diğer taraftan aynı meridyenin hiperbolik uzunluğu Örnek 3.2.1 e göre,

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{2^2 - 1^2}} = \frac{\pi}{3}$$

dir.

Bu iki farklı uzunluk şunu gösterir:  $H^3$  ün hiperbolik ve öklid metriği aynı küre üzerinde farklı geometrileri ortaya çıkarır.  $H^3$  te herhangi iki küre verildiğinde ilk kürenin hiperbolik geometrisi ikinci kürenin öklid geometrisiyle aynı olabilir.

Aşağıda iki geometrinin izomorf olma durumu tanımlanacaktır.

**Tanım 4.3.2.**  $S$  ve  $T$  iki geometri olsun.  $f$ ,  $S$  den  $T$  ye bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu aşağıdaki iki durumu sağlar ise  $f$  bir izometridir:

(a)  $f$  in tersi vardır.

(b)  $\gamma$ ,  $S$  de herhangi bir sonlu eğri ise  $\gamma$  eğrisinin  $S$  üzerindeki uzunluğu,  $f(\gamma)$  nin  $T$  üzerindeki uzunluğuna eşittir.

**Önerme 4.3.1.**  $S$ ,  $(a, b, c)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı herhangi bir küre ve  $\Pi$ ,  $z = d$  düzlemi olsun.  $D = d - c + r$  olmak üzere  $S$  nin  $\Pi$  üzerine  $\sigma$  stereografik izdüşümü,  $S$  nin öklid geometrisi ile  $\Pi$  düzlemi üzerindeki Riemann metriği ile tanımlanan geometri arasında bir izometri kurar.  $\Pi$  düzlemi üzerindeki Riemann metriği,

$$\frac{4D^2r^2(dx^2 + dy^2)}{[x^2 + y^2 + D^2]^2} \quad (4.3.3)$$

olarak tanımlanır.  $S^+$ ,  $H^3$  deki  $S$  delinmiş küresinin bir bölümü olsun.  $\sigma$  dönüşümü,  $S^+$  nin hiperbolik geometrisi ile  $\Pi$  düzleminin  $\sigma(S^+)$  kısmında tanımlanan

$$\frac{4D^2r^2(dx^2 + dy^2)}{[(x^2 + y^2)(c - r) + D^2(c + r)]^2} \quad (4.3.4)$$

Riemann metriğinin geometrisi arasında bir izometri kurar.

Poincaré metriği sadece  $H^3$  te tanımlandığı için, yüzeylerin hiperbolik geometrisi incelendiğinde,  $H^3$  te bulunan yüzeylerin bir bölümüne odaklanmak gerekir. Bu yüzden eğer  $S$  küresinin merkezi  $xy$ -düzleminde ise  $S^+$ ,  $S$  nin üst yarı küresidir. Eğer  $S$ ,  $R$  yarıçaplı ve  $(0, 0, R)$  merkezli bir küre ise  $S$  küresi  $xy$ -düzlemine teğettir ve  $S^+$  delinmiş küredir. Eğer  $S$  küresinin tamamı  $H^3$  te bulunursa  $S^+ = S$  olur.

**Önerme 4.3.1 in İspatı.**  $S$  nin öklid geometrisinin  $\Pi$  düzlemi üzerindeki (4.3.3) denklemiyle verilen Riemann metriğinin oluşturduğu geometriye izometrik olması için  $\gamma$ ,  $S$  üzerinde herhangi bir eğri olmak üzere

$$\int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{\sigma(\gamma)} \frac{2Dr\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2 + D^2} \quad (4.3.5)$$



olduğunu göstermeliyiz. Önerme 4.2.1 e göre yatay öklid ötelemeler hem öklid hem de hiperbolik izometrilere olduğu için küre merkezlerinin  $z$ -ekseni üzerinde olduğunu kabul edebiliriz.  $(0, 0, c)$  öklid merkezli ve  $r$  öklid yarıçaplı bir kürenin  $z = d$  düzlemi üzerine izdüşümü olduğunu kabul edelim. Lemma 4.3.1 e göre stereografik izdüşüm,

$$x = \frac{2uDr}{u^2 + v^2 + D^2}$$

$$y = \frac{2vDr}{u^2 + v^2 + D^2}$$

biçiminde kürenin  $(x, y, z)$  noktasını  $(u, v, d)$  noktasına dönüştürür ve

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2Dr(v^2 - u^2 + D^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-4uvDr}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-4uvDr}{(u^2 + v^2 + D^2)^2} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2Dr(u^2 - v^2 + D^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}$$

olur. Dahası, (4.3.1) eşitliğinden

$$z = \frac{Dx}{u} + c - r = \frac{Dy}{v} + c - r$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-4uD^2r}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-4vD^2r}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}$$

dir.

$$\begin{aligned}
dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 \\
&\quad + \left( \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2 \\
&= \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 \\
&\quad + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 \\
&\quad + 2 \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] dudv \\
&= \frac{4D^2 r^2 \left[ (v^2 - u^2 + D^2)^2 + 4u^2 v^2 + 4u^2 D^2 \right]}{(u^2 + v^2 + D^2)^4} du^2 \\
&\quad + \frac{4D^2 r^2 \left[ 4u^2 v^2 + (u^2 - v^2 + D^2)^2 + 4v^2 D^2 \right]}{(u^2 + v^2 + D^2)^4} dv^2 \\
&\quad + \frac{16uvD^2 r^2 \left[ -(v^2 - u^2 + D^2) - (u^2 - v^2 + D^2) + 2D^2 \right]}{(u^2 + v^2 + D^2)^4} dudv \\
&= \frac{4D^2 r^2 (v^2 + u^2 + D^2)^2}{(u^2 + v^2 + D^2)^4} du^2 + \frac{4D^2 r^2 (u^2 + v^2 + D^2)^2}{(u^2 + v^2 + D^2)^4} dv^2 \\
&= \frac{4D^2 r^2 (du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik hem (4.3.5) eşitliğini hem de  $S$  nin öklid geometrisi ile ilgili durumunu açıklar.  $S^+$  nın hiperbolik geometrisine döndüğümüzde,  $S^+$  daki herhangi  $\gamma$  eğrisi için

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} = \int_{\sigma(\gamma)} \frac{2Dr\sqrt{dx^2 + dy^2}}{(x^2 + y^2)(c - r) + D^2(c + r)} \quad (4.3.6)$$

eşitliğini göstermeliyiz. Zincir kuralının yukarıdaki uygulamalarını kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} &= \frac{\frac{4D^2r^2(du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}}{\left[\frac{(u^2 + v^2)(c - r) + D^2(c + r)}{u^2 + v^2 + D^2}\right]^2} \\ &= \frac{4D^2r^2(du^2 + dv^2)}{[(u^2 + v^2)(c - r) + D^2(c + r)]^2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Elde edilen bu sonuç, hem (4.3.6) eşitliğini hem de  $S^+$  nin hiperbolik geometrisi ile ilgili durumunu açıklar (Stahl 1993).

## KAYNAKLAR

- Başkan, T. (2005). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Ankara, pp. 318 .
- Blair, D. E. (2000). Inversion Theory and Conformal Mapping, Student Mathematical Library, V. 9, pp. 118.
- Cannon, J.W., Floyd W.J., Kenyon R., Parry R.W. (1997). Hyperbolik Geometri, MSRI Publications Vol 31.
- Hacısalihoğlu, H. H. (1998). İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Hacısalihoğlu Yayıncılık, pp. 329.
- Kurbay, İ. (2007). Hiperbolik Geometride Bazı Uygulamalar, Yüksek Lisans Tezi, Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Martin, G. E. (1982). Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry, New York:Springer-Verlag, pp. 237.
- Millman, R. S. and Parker (1991). Geometry a Metric Approach with Models, Verlag New York Inc, pp. 367.
- Salihova, S. (2006). Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Sönmez, N. (2006). Poincaré Yarı Düzlem Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- Stahl, S. (1993). The Poincaré half plane A gateway to modern geometry, Jones and Barlett Publishers, Boston, pp. 298.
- Yakut, A. T. (2004). Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Tepe Açıları, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yılgör, E. B. (2007). Euclid Geometri ve Hiperbolik Geometrinin Matematik Eğitimindeki Yeri ve Önemi, Balıkesir Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü.

## İNTERNET KAYNAKLARI

1- <http://legacy.lclark.edu/~istavrov/geo-hypisos-07.pdf>, 20.10.2010

2-<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Snyder.pdf>, 02.09.2010

3-[http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map), 18.09.2010

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Rabia ÇAKAN  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : İzmir/Torbali 06.06.1987  
**Yabancı Dili** : İngilizce

## Eğitim Durumu

**Lise** : Torbalı Lisesi (YDA), 2005.  
**Lisans** : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü, 2009.