PASCH GEOMETRİLERİN

KATEGORİKSEL YAPISI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hidayet Hüda KÖSAL

DANIŞMAN

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2011

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PASCH GEOMETRİLERİN KATEGORİKSEL YAPISI

Hidayet Hüda KÖSAL

DANIŞMAN

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2011

TEZ ONAY SAYFASI

Hidayet Hüda KÖSAL tarafından hazırlanan "Pasch Geometrilerin Kategoriksel Yapısı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 07/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik **Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Başkan : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN
Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka üniversite de başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15/06/2011

Hidayet Hüda KÖSAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PASCH GEOMETRİLERİN KATEGORİKSEL YAPISI

HİDAYET HÜDA KÖSAL

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde kategori teorinin temel kavramlarından söz edilmiştir. Üçüncü bölümde pasch geometrilerin temel kavramları ve cebirsel yapısı verilmiştir. Dördüncü bölümde ise pasch geometrilerin kategoriksel yapısı incelenmiştir.

2011, 63 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Kategoriler, Funktorlar, Doğal Transformasyonlar, Pasch geometriler, Morfizmler, Homomorfizmler

ABSTRACT

Master Of Science Thesis

CATEGORICAL STRUCTURE OF PASCH GEOMETRIES

HİDAYET HÜDA KÖSAL

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction and it gives a general knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts of category theory. In the third chapter, basic concepts and algebraic structures of pasch geometries are given. In the fourty chapter, categorical structure of pasch geometries are examined.

2011, pages 63

KEY WORDS : Categories, Functors, Natural Transformations, Pasch geometries, Morphisms and Homomorphisms.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli hocam Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE' ye, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU hocama teşekkür ve şükranlarımı bir borç bilirim.

Hidayet Hüda KÖSAL

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{K}$	Kümeler kategorisi
$\mathbf{G}$	Gruplar kategorisi
$\mathbf{G}'$	Abelyen gruplar kategorisi
$\mathbf{T}$	Topolojik uzaylar kategorisi
$\mathbf{V}$	Vektör uzayları kategorisi
$\mathbf{K}_1$	Sonlu kümeler kategorisi
P	Pasch geometriler kategorisi
P_1	Değişmeli geometriler kategorisi
P_2	Sharp geometriler kategorisi
$\sim$	Eşlenik bağıntısı
$[f]$	f Morfizminin denklik sınıfı
$\mathbf{C}^{op}$	$\mathbf{C}$ Kategorisinin duali

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Kategori teorisi, matematiksel yapılar ve bunlar arasındaki ilişkilerle soyut olarak ilgilenen bir matematik kuramıdır. Bir kategori birbirleriyle ilişkili matematiksel nesneler sınıfının (örneğin grupların, topolojik uzayların, vektör uzayların) özünü yakalamaya çalışır. Geleneksel olarak yapıldığı gibi tekil nesneler üzerine yogunlaşmak yerine, nesneler arasındaki yapı muhafaza edici dönüşümler (yani morfizmler) üzerine yoğunlaşır. Gruplar örneğinde bu dönüşümler grup homomorfizmaları, topolojik uzaylarda sürekli fonksiyonlar, vektör uzaylarında ise lineer dönüşümlerdir. Bunun yanında bu teoride farklı kategorileri funktorlar aracılığı ile ilişkilendirmek mümkündür. Funktorlar bir kategorinin her bir nesnesini diğer kategorinin bir nesnesiyle ve bir kategorideki morfizmi diğerindeki bir morfizme ilişkilendiren fonksiyonların bir genelleştirmesidir. Bunun ötesinde, bu tip yapılar "doğal bir bağıntıya" sahiptir ve bir funktoru diğerine ilişkilendirme yolu olan doğal transformasyon fikrine olanak tanır.

Kategoriler, funktorlar ve doğal transformasyonlar kavramı Samuel Eilenberg ve Saunder Maclane tarafından 1945 yılında "General Theory of Naturel Equivalences" adlı yayınlarında ortaya atılmıştır. Başkalarının yanı sıra Ulam tarafından benzer düşüncelerin 1930 ların sonunda Polonya okulunda ortaya çıktığı iddia edilmiştir.

Kategori teori çağdaş matematiğin, teorik bilgisayar bilimlerinin ve uygulamalı fiziğin ilgilendiği bir matematik kuramıdır. Kategori teorisi hala gelişmekte ve işlevleri buna paralel olarak artmaktadır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Kategoriler

Tanım 2.1.1 $\mathbf{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıda verilen ve istenenleri sağlayan bir sistemdir.

(i) $Ob(\mathbf{C})$, elemanları obje olarak isimlendirilen bir sınıftır. Bu sınıfın elemanları genellikle $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$ ile gösterilecektir.

(ii) A, B objeleri için

$$Mor_{\mathbf{C}}(A, B) = \{f \mid f : A \to B\}$$

biçiminde ifade edilen elemanları morfizm olarak isimlendirilen bir kümedir(Morfizmler bazen **ok** olarak isimlendirilir). $Ob(\mathbf{C})$ deki her A objesi için

$$I_A \epsilon Mor_{\mathbf{C}}(A, A)$$

morfizmine birim morfizm denir.

(iii) $Ob(\mathbf{C})$ deki her A, B, C objeleri için

$$k^B_{A,C} : Mor_{\mathbf{C}}(A, B) \times Mor_{\mathbf{C}}(B, C) \to Mor_{\mathbf{C}}(A, C)$$
$$(f, g) \to k^B_{A,C}(f, g) = g \circ f = gf$$

biçiminde tanımlanan ve kompozisyon olarak isimlendirilen bir işlemdir.

(i),(ii),(iii) sistemde var olması gerekenlerdir. Sistemin sağlaması gerekenler yani istenenler:

(K1)(Assosyatif Özelliği) Her $f \epsilon Mor(A, B), g \epsilon Mor(B, C)$ ve $h \epsilon Mor(C, D)$ için

$$h(gf) = (hg)f$$

olmalıdır.

(K2)(Birimlilik) $Ob(\mathbf{C})$ deki her A objesi için

$$I_A : A \to A$$

biçiminde birim morfizm var olup $f \epsilon Mor(A, B)$ için

$$fI_A = f = I_B f$$

olmalıdır (Fokkinga 1994).

Örnek 2.1.1 Objeleri tüm kümeler, morfizmleri kümeler arasındaki fonksiyonlar ve kompozisyon işlemi bileşke işlemi olan yapıyı **K** ile gösterelim. Bu yapı **K1,K2** koşullarını sağladığından dolayı bir kategoridir. Bu kategoriye Kümeler kategorisi diyeceğiz. Şimdi bu yapının **K1** ve **K2** koşullarını sağladığını gösterelim.

K1) $A, B, C, D \epsilon Ob(\mathbf{K})$ olmak üzere

$$f \epsilon Mor(A, B), g \epsilon Mor(B, C) \ ve \ h \epsilon Mor(C, D)$$

olsun.

$\forall x \epsilon A$ için

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

olduğundan

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

elde edilir.

K2) $Ob(\mathbf{K})$ daki her A objesi için

$$\begin{array}{rcl} I_A : A & \to & A \\ x & \to & x \end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon her zaman var olup $f \epsilon Mor(A, B)$ ve $\forall x \epsilon A$ için

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x) = I_B(f(x)) = (I_B \circ f)(x)$$

olduğundan

$$f \circ I_A \;=\; f \;=\; I_B \circ f$$

dir.(Barr 1999, Charles 1999)

Örnek 2.1.2 Objeleri tüm gruplar, morfizmleri gruplar arasındaki homomorfizmalar ve kompozisyon işlemi bileşke işlemi olan yapıyı **G** ile gösterelim. Bu yapı **K1,K2** koşullarını sağladığından dolayı bir kategoridir. Bu kategoriye gruplar kategorisi denir. Şimdi bu yapının **K1** ve **K2** koşullarını sağladığını gösterelim.

K1) $G_1, G_2, G_3, G_4 \in Ob(\mathbf{G})$ olmak üzere

$$k \in Mor(G_1, G_2), l \in Mor(G_2, G_3) \ ve \ m \in Mor(G_3, G_4)$$

olsun. Fonksiyonların birleşme özelliği olduğundan dolayı

$$m \circ (l \circ k) \;=\; (m \circ l) \circ k$$

dir.

K2) $Ob(\mathbf{G})$ daki her G_1 objesi için

$$\begin{array}{rcccc} I_G & : & G_1 & \to & G_1 \\ & & x & \to & x \end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon her zaman var olup $k \in Mor(G_1, G_2)$ için

$$k \circ I_{G_1} \;=\; k \;=\; I_{G_2} \circ k$$

dir.

Örnek 2.1.3 Objeleri tüm abelyan gruplar, morfizmleri abelyan gruplar arasındaki homomorfizmalar ve kompozisyon işlemi bileşke işlemi olan yapıyı $\mathbf{G}'$ ile gösterelim. Bu yapı **K1,K2** koşullarını sağladığından dolayı bir kategoridir. Bu kategoriye abelyan gruplar kategorisi denir. Şimdi bu yapının **K1** ve **K2** koşullarını sağladığını gösterelim.

K1) $G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 \in Ob(\mathbf{G}')$ olmak üzere

$$k \in Mor(G'_1, G'_2), l \in Mor(G'_2, G'_3) \ ve \ m \in Mor(G'_3, G'_4)$$

olsun. Fonksiyonların birleşme özelliği olduğundan dolayı

$$m \circ (l \circ k) \;=\; (m \circ l) \circ k$$

dir.

K2) $Ob(\mathbf{G}')$ daki her G_1' objesi için

$$\begin{array}{rcccl} I_{G_1'} & : & G_1' & \rightarrow & G_1' \\ & & x & \rightarrow & x \end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon her zaman var olup $k \,\epsilon\, Mor(G_1', G_2')$ için

$$k \circ I_{G_1'} \;=\; k \;=\; I_{G_2'} \circ k$$

dir.

Örnek 2.1.4 Objeleri tüm topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kompozisyon işlemi bileşke işlemi olan yapıyı **T** ile gösterelim. Bu yapı **K1,K2** koşullarını sağladığından dolayı bir kategoridir. Bu kategoriye topolojik uzaylar kategorisi denir. Şimdi **K1,K2** koşullarının gösterelim.

K1) $T_1, T_2, T_3, T_4 \,\epsilon\, Ob(\mathbf{K})$ olmak üzere

$$k \,\epsilon\, Mor(T_1, T_2), l \,\epsilon\, Mor(T_2, T_3) \; ve \; m \,\epsilon\, Mor(T_3, T_4)$$

olsun. Fonksiyonların birleşme özelliği olduğundan dolayı

$$m \circ (l \circ k) \;=\; (m \circ l) \circ k$$

dir.

K2) $Ob(\mathbf{T})$ daki her T_1 objesi için

$$\begin{array}{rcccl} I_{T_1} & : & T_1 & \rightarrow & T_1 \\ & & x & \rightarrow & x \end{array}$$

biçiminde bir fonksiyon her zaman var olup $k \,\epsilon\, Mor(G_1, G_2)$ için

$$k \circ I_{T_1} \;=\; k \;=\; I_{T_2} \circ k$$

dir.

Örnek 2.1.5 Objeleri tüm vektör uzayları, morfizmleri bu vektör uzayları arasında tanımlı lineer dönüşümler ve kompozisyon işlemi bileşke işlemi olan yapıyı **V** ile gösterelim. Bu yapı **K1,K2** koşullarını sağladığından dolayı bir kategoridir. Bu kategoriye vektör uzayları kategorisi denir. **K1,K2** koşullarının sağlandığı bir önceki örnekte yapıldığı gibi gösterilebilir.

2.2 Verilen Kategoriden Yeni Kategori Elde Etmek

2.2.1 Altkategoriler

Tanım 2.2.1.1 $\mathbf{C}$ bir kategori olsun. $\boldsymbol{\beta}$, aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\boldsymbol{\beta}$ ye $\mathbf{C}$ nin alt kategorisi denir.

(1) $Ob(\boldsymbol{\beta}) \subset Ob(\mathbf{C})$ veya $Ob(\boldsymbol{\beta})$ objelerin sınıfı $Ob(\mathbf{C})$ nin altsınıfıdır.

(2)$Mor(\boldsymbol{\beta}) \subset Mor(\mathbf{C})$ veya $Ob(\boldsymbol{\beta})$ daki her A, B objeleri için $Mor_{\beta}(A, B) \subseteq Mor_C(A, B)$ dir.

(3)$\boldsymbol{\beta}$ nin kompozisyon fonksiyonları, $\mathbf{C}$ nin karşı gelen fonksiyonlarının kısıtlanmışlarıdır. Yani $\boldsymbol{\beta}$ deki iki morfizmin kompozisyonu, $\mathbf{C}$ deki kompozisyonu ile aynıdır. $Ob(\boldsymbol{\beta})$ daki her A, B, C objeleri için

$$\begin{aligned} Mor(A, B) \times Mor(B, C) &\rightarrow Mor(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ_{\beta} f = g \circ_C f \end{aligned}$$

dir.

(4)$\boldsymbol{\beta}$ nin birim morfizmi, $\mathbf{C}$ nin birim morfizmidir.

Bununla birlikte $\boldsymbol{\beta}$ daki her A, B objeleri için

$$Mor_C(A, B) = Mor_{\beta}(A, B)$$

veya her B, B' objesi için $\boldsymbol{\beta}(B, B') = \mathbf{C}(B, B')$ ise $\boldsymbol{\beta}$ ye $\mathbf{C}$ nin **dolu altkategorisi** denir(Michael 1999, Charles 1999).

Örnek 2.2.1.1 Her kategori, kendisinin bir dolu altkategorisidir.

Örnek 2.2.1.2 Sonlu kümeler kategorisi $\mathbf{K}_1$ olmak üzere $\mathbf{K}_1$ kategorisi kümeler kategorisinin dolu alt kategorisidir.

(1) Sonlu kümelerin sınıfı tüm kümelerin oluşturduğu sınıfın bir alt sınıfıdır. Başka bir deyişle

$$Ob(\mathbf{K}_1) \subseteq Ob(\mathbf{K})$$

dır.

(2) $A, B \,\epsilon\, Ob(\mathbf{K}_1)$ olmak üzere $f \,\epsilon\, Mor_{K_1}(A, B)$ olsun. Bu durumda f dönüşümü A dan B ye bir fonksiyondur. A dan B ye tanımlı fonksiyonların kümesi $Mor_K(A, B)$ olduğundan f aynı zamanda $Mor_K(A, B)$ ninde bir elemanı olup buradan

$$Mor_{K_1}(A, B) \subseteq Mor_K(A, B)$$

elde edilir.

(3) $A, B, C \,\epsilon\, Ob(\mathbf{K}_1)$ olmak üzere, $f \,\epsilon\, Mor_{K_1}(A, B)$ ve $g \,\epsilon\, Mor_{G_1}(B, C)$ için

$$f : A \to B, g : B \to C$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Mor_{K_1}(A, B) \times Mor_{K_1}(B, C) \quad &\to \quad Mor_{K_1}(A, C) \\ (f, g) \quad &\mapsto \quad g \circ_{K_1} f = g \circ_K f \end{aligned}$$

dır. Yani $\mathbf{K}_1$ in morfizmleri $\mathbf{K}$ da karşılık gelen morfizmlerin kısıtlanmışıdır.

(4) $Ob(\mathbf{K}_1)$ deki her bir A objesi için

$$I_A \ : \ A \ \to \ A$$

biçimindeki birim morfizmler aynı zamanda $\mathbf{K}$ kategorisinin de birim morfizmidir.

Sonuç 2.2.1.1 $\mathbf{K}$ kategorisinde sonlu iki küme A, B olmak üzere $f \,\epsilon\, Mor_K(A, B)$ alalım. A ve B kümeleri sonlu kümeler olduklarında dolayı $f \,\epsilon\, Mor_{K_1}(A, B)$ olur. Bu durumda

$$Mor_{K_1}(A, B) \ = \ Mor_K(A, B)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\mathbf{K}_1$ kategorisinin dolu alt kategori olduğunu gösterir.

Örnek 2.2.1.3 Objeleri kümeler ve morfizmleri birebir ve örten fonksiyon olan kategoriyi $\mathbf{K}_2$ ile gösterelim. $\mathbf{K}_2$ kategorisi, $\mathbf{K}$ kategorisinin altkategorisidir. Fakat dolu kategorisi değildir. Çünkü her $A, B \,\epsilon\, Ob(\mathbf{K})$ için $Mor_K(A, B)$ kümesindeki birebir örten olmayan fonksiyonlar $Mor_{K_2}(A, B)$ kümesinde yer almayacak yani

$$Mor_{K_2}(A, B) \quad \neq \quad Mor_K(A, B)$$

dir.

Örnek 2.2.1.4 Abelyan gruplar kategorisi $\mathbf{G}'$ olmak üzere $\mathbf{G}'$ kategorisi gruplar kategorisinin dolu alt kategorisidir.

(1) Abelyan grupların sınıfı tüm grupların oluşturduğu sınıfın bir alt sınıfıdır. Başka bir deyişle

$$Ob(\mathbf{G}') \subseteq Ob(\mathbf{G})$$

dir.

(2) $A, B \,\epsilon\, Ob(G')$ olmak üzere $f \,\epsilon\, Mor_{G'}(A, B)$ olsun. Bu durumda f dönüşümü A dan B ye bir fonksiyondur. A dan B ye tanımlı fonksiyonların kümesi $Mor_G(A, B)$ olduğundan f aynı zamanda $Mor_G(A, B)$ ninde bir elemanı olup buradan

$$Mor_{G'}(A, B) \subseteq Mor_G(A, B)$$

elde edilir.

(3) $A, B, C \,\epsilon\, Ob(\mathbf{G}')$ olmak üzere,

$$f \,\epsilon\, Mor_{G'}(A, B) \text{ ve } g \,\epsilon\, Mor_{G\prime}(B, C)$$

için $f : A \to B, g : B \to C$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} Mor_{G'}(A, B) \times Mor_{G'}(B, C) & \to & Mor_{G'}(A, C) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ_{G'} f = g \circ_G f \end{array}$$

dır. Yani $\mathbf{G}'$ in morfizmleri $\mathbf{G}$ de karşılık gelen morfizmlerin kısıtlanmışıdır.

(4) $Ob(\mathbf{G}')$ deki her bir A objesi için

$$I_A \;:\; A \;\rightarrow\; A$$

biçimindeki birim morfizmler aynı zamanda **G** kategorisinin de birim morfizmidir.

Sonuç 2.2.1.2 **G** kategorisinde abelyan iki grup A, B olmak üzere $f \;\epsilon\; Mor_G(A, B)$ alalım. A ve B grupları abelyan gruplar olduklarında dolayı $f \;\epsilon\; Mor_{G'}(A, B)$ olur. Bu durumda

$$Mor_{G'}(A, B) \;=\; Mor_G(A, B)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\mathbf{G}'$ kategorisinin dolu alt kategori olduğunu gösterir.

2.2.2 Çarpım Kategorisi

C ve **D** iki kategori olsun. Bu bölümde $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ biçiminde yeni bir kategori tanımlanacaktır. Bu kategoriye **C** ve **D** kategorilerinin **çarpım kategorisi** denir.

Objeler: $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ nin objeleri,

$$Ob(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = Ob(\mathbf{C}) \times Ob(\mathbf{D})$$

alınarak oluşturulur. Bu sınıfın elemanları C, D sırasıyla **C** ve **D** nin objeleri olmak üzere

$$(C, D)$$

biçimindeki ikililerden oluşmaktadır(Bican 2007).

Morfizmler: (C, D) ve (C', D'); $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ nin objeleri ise,

$$\begin{aligned} Mor_{(\mathbf{C}\times\mathbf{D})}((C, D), (C', D')) &= Mor_{\mathbf{C}}(C, C') \times Mor_{\mathbf{D}}(D, D') \\ &= \{(f, g) \mid f : C \rightarrow C' \text{ ve } g : D \rightarrow D'\} \end{aligned}$$

Kompozisyon:

$$(f, g) \circ_{C\times D} (f', g') = (f' \circ_C f, g' \circ_D g)$$

Şimdi **(K1)** ve **(K2)** aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

(K1) Her

$$(f_1, g_1)\epsilon Mor((A_1, B_1), (C_1, D_1)), (f_2, g_2)\epsilon Mor(((A_2, B_2), (C_2, D_2)) \text{ ve}$$
$$(f_3, g_3)\epsilon Mor(((A_3, B_3), (C_3, D_3))$$

için

$$(f_1, g_1) \circ_{C\times D} [(f_2, g_2) \circ_{C\times D} \ (f_3, g_3)] \stackrel{?}{=} [(f_1, g_1) \circ_{C\times D} (f_2, g_2)] \circ_{C\times D} \ (f_3, g_3)$$

$$\begin{aligned}
(f_1, g_1) \circ_{C\times D} [(f_2, g_2) \circ_{C\times D} \ (f_3, g_3)] &= (f_1, g_1) \circ_{C\times D} (f_3 \circ_C f_2, g_3 \circ_D g_2) \\
&= [(f_3 \circ_C f_2) \circ_C f_1, (g_3 \circ_D g_2) \circ_D g_1] \\
&= [f_3 \circ_C (f_2 \circ_C f_1), g_3 \circ_D (g_2 \circ_D g_1)] \\
&= (f_2 \circ_C f_1, g_2 \circ_D g_1) \circ_{C\times D} (f_3, g_3) \\
&= [(f_1, g_1) \circ_{C\times D} (f_2, g_2)] \circ_{C\times D} \ (f_3, g_3)
\end{aligned}$$

(K2) $Ob(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ deki her (A, B) objesi için

$$(I_A, I_B) = I_{(A,B)} : (A, B) \to (A, B)$$

biçiminde birim morfizm var olup $(f, g)\epsilon Mor((A, B), (C, D))$ için

$$\begin{aligned}
I_{(A,B)} \circ_{C\times D} (f, g) &= (I_A, I_B) \circ_{C\times D} (f, g) \\
&= (f \circ_C I_A, g \circ_D I_B) \\
&= (f, g)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f, g) \circ_{C\times D} I_{(C\times D)} &= (f, g) \circ_{C\times D} (I_C \circ I_D) \\
&= (I_C \circ_C f, I_D \circ_D g) \\
&= (f, g)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$I_{(A,B)} \circ (f, g) = (f, g) = (f, g) \circ I_{(C,D)}$$

olduğundan $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ bir kategoridir(Blyth 1986).

2.2.3 Bölüm Kategorisi

Tanım 2.2.3.1 $\mathbf{C}$ herhangi bir kategori ve $\sim$, $Mor(\mathbf{C})$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

(i) Her $f \epsilon Mor_C(A,B)$ için

$$[f]_\sim \;=\; \{g|f\sim g\}\subset Mor_C(A,B)$$

(ii) $[f]_\sim \;=[f']_\sim \quad ve\;\, [g]_\sim \;=[g']_\sim$ olmak üzere

$$[f]_\sim\circ[g]_\sim \;=\; [f']_\sim\circ[g']_\sim \Leftrightarrow \;\; g\circ f\sim g'\circ f'$$

ise $\sim$ ya, $\mathbf{C}$ nin bir kongüransı denir.

Tanım 2.2.3.2 $\sim$, $\mathbf{C}$ nin bir kongüransı olsun. $\mathbf{D}=\mathbf{C}/\sim$ ile göstereceğimiz kategoriye $\mathbf{C}$ nin **bölüm kategorisi** denir.

Objeler: $Ob(\mathbf{C}/\sim)=Ob(\mathbf{C})$

Morfizmler: $Mor(\mathbf{C}/\sim)=\{[f]_\sim : f\;\epsilon\; Mor(\mathbf{C})\}$

Kompozisyon: $[f]_\sim\circ[g]_\sim=[g\circ f]_\sim$

(K1) ve **(K2)** aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

(K1) Her $[f]_\sim,[g]_\sim,[h]_\sim \epsilon Mor(\mathbf{C}/\sim)$ için

$$\begin{aligned}
([f]_\sim\circ[g]_\sim)\circ[h]_\sim &\overset{?}{=} [f]_\sim\circ([g]_\sim\circ[h]_\sim)\\
([f]_\sim\circ[g]_\sim)\circ[h]_\sim &= [g\circ f]_\sim\circ[h]_\sim\\
&= [h\circ(g\circ f)]_\sim\\
&= [(h\circ g)\circ f]_\sim\\
&= [f]_\sim\circ[h\circ g]_\sim\\
&= [f]_\sim\circ([g]_\sim\circ[h]_\sim)
\end{aligned}$$

buradan $([f]_\sim\circ[g]_\sim)\circ[h]_\sim \;=[f]_\sim\circ([g]_\sim\circ[h]_\sim)$ elde edilir.

(K2) $Ob(\mathbf{C}/\sim)$ daki her A objesi için $I_A=[I_A]_\sim : A\to A$ biçiminde birim morfizm var olup $f\epsilon Mor_C(A,B)$ olmak üzere

$[f]_\sim \epsilon Mor(\mathbf{C}/\sim)$ için

$$
\begin{aligned}
[I_A]_\sim \circ_{C/\sim} [f]_\sim &= [f \circ_C I_A]_\sim \\
&= [f]_\sim
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
[f]_\sim \circ_{C/\sim} [I_B]_\sim &= [I_B \circ_{C/\sim} f]_\sim \\
&= [f]_\sim
\end{aligned}
$$

olup $\mathbf{D} = \mathbf{C}/\sim$ bir kategoridir. $\mathbf{D} = \mathbf{C}/\sim$ kategorisine $\mathbf{C}$ nin bölüm kategorisi denir(Blyth 1986).

2.2.4 Dual (Opposite) Kategori

$\mathbf{C} = (Ob(\mathbf{C}), Mor(A,B), \circ)$ herhangi bir kategori olsun. $\mathbf{C}$ nin dual kategorisi

$$\mathbf{C}^{op} = (Ob(\mathbf{C}), Mor(B,A), *)$$

olup * kompozisyonu

$$f * g = g \circ f$$

biçiminde tanımlanır ve $\mathbf{C}^{op}$ ile gösterilir.

Bu ifadeden hareketle aşağıdaki sonuçları yazabiliriz:

(1) $\mathbf{C}^{op}$ kategorisinin obje ve morfizmleri ile $\mathbf{C}$ kategorisinin obje ve morfizmleri aynıdır.

(2) $f : A \to B$ için $f \in Ob_{\mathbf{C}}(A,B)$ ise $f : B \to A$ morfizmi $Ob_{C^{op}}(B,A)$ nın bir elemanıdır.

(3) $h = g \circ f$ morfizmi $\mathbf{C}$ kategorisinin bir elemanı ise $h = g \circ f$ morfizmi $\mathbf{C}^{op}$ kategorisinin bir elemanıdır(Barr 1999, Charles 1999).

Önerme 2.2.4.1 Herhangi bir kategorinin duali yine kategoridir.

İspat:

K1) Her $f \in Mor_{\mathbf{C}^{op}}(B,A), g \in Mor_{\mathbf{C}^{op}}(C,B)$ ve $h \in Mor_{\mathbf{C}^{op}}(D,C)$ için

$$
\begin{aligned}
f * (g * h) &= (g * h) \circ f \\
&= (h \circ g) \circ f \\
&= h \circ (g \circ f) \\
&= (g \circ h) * h \\
&= (f * g) * h
\end{aligned}
$$

dir.

K2) $Ob(\mathbf{C}^{op})$ deki her A objesi için $I_A : A \to A$ biçiminde birim morfizm var olup $f \in Mor_{\mathbf{C}^{op}}(B, A)$ için

$$
\begin{aligned}
f * I_B &= I_B \circ f &= f \\
I_A * f &= f \circ I_A &= f
\end{aligned}
$$

yani

$$
I_A * f = f = f * I_A
$$

dir.

2.3 Özel Objeler ve Morfizmler

Tanım 2.3.1 C bir kategori olsun. **C** deki bir $f : A \to B$ morfizmi sol sadeleşebilir yani

$$
f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2
$$

ise f ye **monomorfizm (**veya **monik)** denir(Oosten 1995).

Örnek 2.3.1 Küme, Grp ve Top kategorilerinde her bire-bir morfizm bir moniktir. Gerçekten de f, g_1, g_2 bire-bir fonksiyonları ve $\forall x \in A$ için

$$
(f \circ g_1)(x) = (f \circ g_2)(x) \quad .
$$

olsun. Bu durumda

$$
f(g_1(x)) = f(g_2(x))
$$

eşitliği elde edilir. f fonksiyonu bire-bir olduğundan

$$g_1(x) \quad = \quad g_2(x)$$

elde edilir.

Tanım 2.3.3 **C** bir kategori olsun. **C** deki $f : A \to B$ morfizmi sağ sadeleşebilir, yani

$$g_1 \circ f \quad = \quad g_2 \circ f \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2$$

ise f ye **epimorfizm (**veya kısace **epik)** denir(Oosten 1995).

Tanım 2.3.4 **C** bir kategori ve $f : A \to B$, **C** de bir morfizm olsun.

$$g \circ f \quad = \quad I_A$$

olacak biçimde $g : B \to A$ var ise f ye bir kesit(veya **seksiyon)** denir(Oosten 1995).

Hatırlatma 2.3.2 Her kesit moniktir, fakat tersi doğru değildir.

İspat: Her kesit moniktir.

f kesit olsun. Yani $gf = I_B$ olcak biçiminde g var olsun.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & B \arrow[r, shift left, "f"] & C \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{llll}
fg_1 & = & fg_2 \;\Rightarrow & g_1 \stackrel{?}{=} g_2 \\
\forall a \epsilon A \text{ için} & (fg_1)(a) & = & (fg_2)(a) \\
\Rightarrow & g(fg_1(a)) & = & g(fg_2)(a) \\
\Rightarrow & (gf)(g_1(a)) & = & (gf)(g_2(a)) \\
\Rightarrow & I_B(g_1(a)) & = & I_B(g_2(a)) \\
\Rightarrow & g_1(a) & = & g_2(a) \\
\Rightarrow & g_1 & = & g_2 \\
\Rightarrow & f \text{ moniktir.} & &
\end{array}$$

Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin; Z-**Mod** da,

$$\begin{aligned} f: \ Z &\rightarrow \ Z \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

tanımlayalım. f bire-bir olduğundan f moniktir. Fakat f bir kesit değildir. Eğer olsaydı $\forall n \epsilon Z$ için

$$\begin{aligned} 2g(n) &= g(2n) \\ &= g(f(n)) \\ &= (g \circ f)(n) \\ &= I_{z(n)} = n \end{aligned}$$

olup $2g(n)$ olurdu. Özel olarak $2g(1) = 1$ dir. fakat bu mümkün değildir. Çünkü $2x = 1$denkleminin Z de çözümü yoktur. Böylece f bir kesit değildir.

Kesitin dual kavramı retreksiyondur.

Tanım 2.3.5 C bir kategori $f : A \rightarrow B$, **C** de bir morfizm olsun.

$$f \circ g = I_B$$

olacak biçimde $g : B \rightarrow A$ var ise f ye bir **retreksiyon** denir(Oosten 1995).

2.4 Bimorfizm ve İzomorfizm

Tanım 2.4.1 Bir morfizm monik ve epik ise bu morfizme **bimorfizm** denir(Blyth 1986).

Tanım 2.4.2 C kategorisinde A ve B objeleri verilsin. $f : A \rightarrow B$ morfizmi kesit ve retraksiyon ise f ye **izomorfizm** denir. Yani

$$f : A \rightarrow B \text{ izomorfizm} \ \Leftrightarrow \ f \circ g = I_B \ \ ve \ \ g \circ f = I_A$$

olacak biçimde bir tek $g : B \rightarrow A$ morfizmi vardır. Bu durumda A objesi B objesine izomorftur, denir ve $A \cong B$ ile gösterilir. Buradaki g morfizmine **ters morfizm** denir. Şimdi g nin tekliğini gösterelim. Varsayalım ki g' aynı özelliğe sahip diğer bir morfizm olsun. Yani $fg' = I_B$ ve $g'f = I_A$ olsun.

$$
\begin{aligned}
g &= I_A g \\
&= (g'f)g \\
&= g'(fg) \\
&= g' I_B \\
&= g'
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow g = g'$ buradan da g tektir(Blyth 1986).

Örnek 2.4.1 Herhangi kategorideki her birim morfizm izomorfizmdir.

Tanım 2.4.3 Bir kategorideki her biomorfizm bir izomorfizm ise bu kategoriye **dengelenmiş (**balanced) **kategori** denir(Blyth 1986).

2.5 İlk, Son, Sıfır, Çarpım ve Toplam Objeler

2.5.1 İlk (initial) Objeler

Tanım 2.5.1.1 C kategorisindeki her X objesi için

$$|C(I, X)| = 1$$

ise yani $Mor_C(I, X)$ kümesinin bir tek elemanı varsa I ya **C** nin **ilk objesi** denir(Fokkinga 1994).

Örnek 2.5.1.1 Küme, Grp, Top kategorilerindeki ilk objeler sırasıyla

$$bos\ küme, \quad \{e\}, \quad bos\ uzay$$

dır.

Önerme 2.5.1.1 I_1 ve I_2; **C** kategorisinin ilk objeleri ise

$$I_1 \cong I_2$$

dir. Yani ilk obje izomorfizma farkıyla tektir.

İspat: I_1, ilk obje ise $Mor(I_1, I_2) = \{f\}$ ve I_2, ilk obje ise $Mor(I_1, I_2) = \{g\}$ dir. Teklikten $I_1 \rightarrow I_2$ ve $I_2 \rightarrow I_1$ morfizmleri tektir

$$(I_1 \xrightarrow{g\circ f} I_1) \;=\; (I_1 \xrightarrow{I_{I_1}} I_1) \quad ve \quad (I_2 \xrightarrow{f\circ g} I_2) \;=\; (I_2 \xrightarrow{I_{I_1}} I_2)$$

olup

$$g \circ f \;=\; I_{I_1} \quad ve \quad f \circ g \;=\; I_{I_2}$$

elde edilir. O halde $I_1 \cong I_2$ dir.

2.5.2 Son Objeler

Tanım 2.5.2.1 Bir **C** kategorisinde her X objesi için

$$Mor_C(X, S)$$

kümesi tek morfizmden oluşmakta ise **C** nin S objesine **son obje** denir(Fokkinga 1994).

Örnek 2.5.2.1 Küme,Grp, Top kategorilerindeki son objeler sırasıyla**;**

$$\{x\}(veya\{\phi\}), \quad \{e\}, \quad X = \{x\}\ topolojik\ uzay$$

dir.

Önerme 2.5.2.1 S_1 ve S_2, **C** kategorisinde son objeler ise $S_1 \cong S_2$ dir.

İspat: S_2 son obje ise $S_1 \xrightarrow{f} S_2$ tek morfizm var ve S_1 son obje ise $S_2 \xrightarrow{g} S_1$ tek morfizm vardır. Teklikten;

$$\begin{aligned} S_1 \xrightarrow{f} S_2 \xrightarrow{g} S_1; \quad g \circ f &= I_{S_1} \\ S_2 \xrightarrow{g} S_1 \xrightarrow{f} S_2; \quad f \circ g &= I_{S_2} \end{aligned}$$

olup

$$S_1 \;\cong\; S_2$$

dir. Yani son obje izomorfizm farkıyla tektir.

2.5.3 Sıfır Objeler

Tanım 2.5.3.1 C kategorisindeki Z objesi hem ilk hem de son obje ise Z ye **C** nin **sıfır objesi** denir(Blyth 1986).

Örnek 2.5.3.1 Grp, Mod$_{\mathrm{R}}$ kategorilerinde $\{e\}, \{0\}$ objeleri hem ilk hemde son obje olup aynı zamanda sıfır objelerdir.

Örnek 2.5.3.2 Küme, Top, Halka kategorilerinin sıfır objeleri yoktur. Çünkü ilk ve son objeler birbirinden farklıdır.

Tanım 2.5.3.2 **C** kategorisinin her A, B objeleri için

$$Mor(A,B) \;\; \neq \;\; \phi$$

ise **C** ye bağlantılı kategori denir(Blyth 1986).

2.5.4 Çarpım Objeler

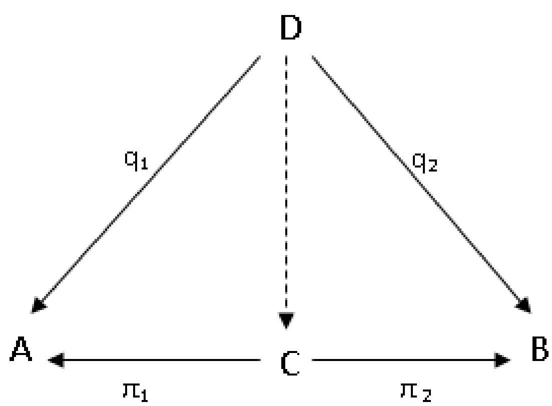
Tanım 2.5.4.1 **C** bir kategori, A , $B \in Ob($ **C**$)$ ve

$$\pi_1 : \;\; C \;\; \rightarrow \;\; A \;\;\; ve \;\;\; \pi_2 \;\; : \;\; C \;\; \rightarrow \;\; B$$

C nin morfizmleri olsun. Bu durumda D bir obje ve

$$q_1 \;\; : \;\; D \;\; \rightarrow \;\; A \;\;\; ve \;\;\; q_2 \;\; : \;\; D \;\; \rightarrow \;\; B$$

morfizmleri verildiğinde



Şekil 2.1

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir tek

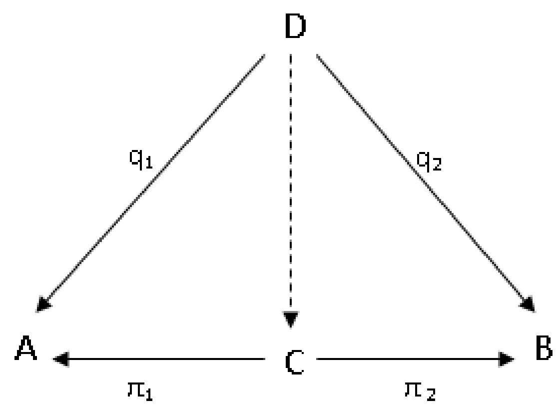
$$q \;\; : \;\; D \;\; \rightarrow \;\; C$$

morfizmi varsa C ye A ve B nin çarpım objesi denir(Oosten 1995).

Örnek 2.5.4.1 **K** kümeler kategorisi, A ve B iki küme olsun. Bu durumda A ve B objelerinin çarpım objesi $A \times B$ kartezyen çarpım kümesidir. Çünkü D bir küme ve

$$q_1 \ : \ D \ \rightarrow \ A \quad ve \quad q_2 \ : \ D \ \rightarrow \ B$$

morfizmleri verildiğinde



Şekil 2.2

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir tek

$$\begin{aligned} q \ : \ D & \rightarrow \ A \times B \\ x & \rightarrow \ (q_1(x), q_2(x)) \end{aligned}$$

morfizmi vardır. Gerçekten de $\forall x \in D$ için

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ q)(x) \ = \ \pi_1(q(x)) & = \ \pi_1(q_1(x), q_2(x)) \\ & = \ q_1(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\pi_2 \circ q)(x) \ = \ \pi_2(q(x)) & = \ \pi_2(q_1(x), q_2(x)) \\ & = \ q_2(x) \end{aligned}$$

olduğundan diyagram değişmelidir. Şimdi bir tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki

$$(\pi_1 \circ q') \ = \ q_1 \quad ve \quad (\pi_2 \circ q') \ = \ q_2$$

olacak biçiminde

$$\begin{aligned} q' \ : \ D &\rightarrow A \times B \\ x &\rightarrow (q_1'(x), q_2'(x)) \end{aligned}$$

dönüşümü var olsun. Bu durumda $\forall x \ \epsilon \ D$ için

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ q')(x) = \pi_1(q'(x)) &= \pi_1(q_1'(x), q_2'(x)) \\ &= q_1'(x) = q_1(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\pi_2 \circ q')(x) = \pi_2(q'(x)) &= \pi_2(q_1'(x), q_2'(x)) \\ &= q_2'(x) = q_2(x) \end{aligned}$$

olduğundan $q = q'$ elde edilir ki bu da q dönüşümünün bir tek olduğunu gösterir.

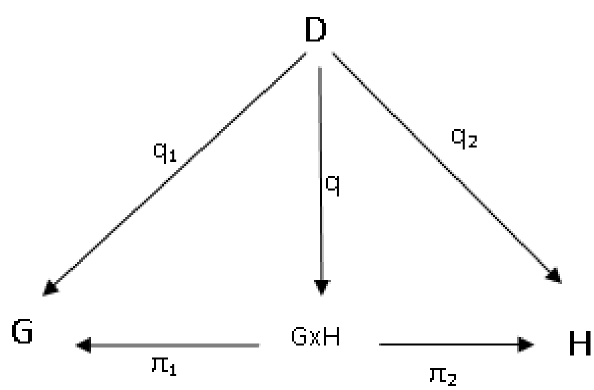
Örnek 2.5.4.2 G gruplar kategorisi, G ve H iki grup olsun. Bu iki grubun çarpım objesi

$$\begin{aligned} C = G \times H &= \{(x, y) : x \epsilon G, y \epsilon H\} \\ (x, y)(x', y') &= (xx', yy') \end{aligned}$$

dir($G \times H$, $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$ işlemleriyle birlikte bir gruptur). Çünkü D bir grup ve

$$q_1 \ : \ D \ \rightarrow \ G \quad ve \quad q_2 \ : \ D \ \rightarrow \ H$$

grup homomorfizmleri verildiğinde



Şekil 2.3

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir tek

$$
\begin{aligned}
q \;:\; D \;&\rightarrow\; G \times H \\
x \;&\rightarrow\; (q_1(x), q_2(x))
\end{aligned}
$$

grup homomorfizmi vardır. O halde G ve H objelerinin çarpım objesi $G \times H$ dır.

2.5.5 Toplam Objeler

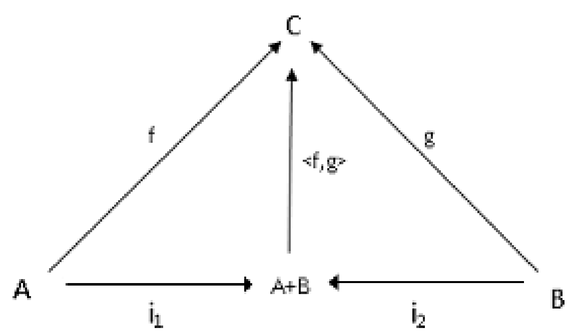
Tanım 2.5.5.1 C bir kategori A,$B \in Ob(\mathbf{C})$ ve

$$i_1 \;:\; A \;\rightarrow\; A + B \quad ve \quad i_2 \;:\; B \;\rightarrow\; A + B$$

dönüşümleri **C** kategorisinin morfizmleri olsun. Bu durumda C bir obje olmak üzere

$$f \;:\; A \;\rightarrow\; C \quad ve \quad g \;:\; B \;\rightarrow\; C$$

morfizmleri verildiğinde



Şekil 2.4

diyagramı değişmeli yani

$$< f, g > i_1 \;= f \quad ve \quad < f, g > i_2 \;=\; g$$

olacak biçiminde bir tek

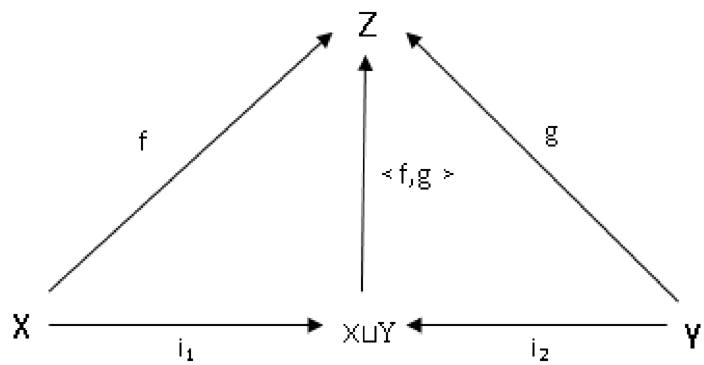
$$< f, g > \;:\; A + B \;\rightarrow\; C$$

morfizmi varsa $A+B$ objesine A ve B nin **toplam(coproduct) objesi** denir(Blyth 1986).

Örnek 2.5.5.1 K kümeler kategorisi, X ve Y iki küme olsun. Bu durumda X ve Y nin ayrık birleşim kümesi $X \sqcup Y$, X ve Y nin toplam objesidir. Çünkü Z bir küme ve

$$f \; : \; X \; \rightarrow \; Z \; \; ve \; \; g \; : \; Y \; \rightarrow \; Z$$

morfizmleri verildiğinde



Şekil 2.5

diyagramı değişmeli olacak biçiminde bir tek

$$< f, g > \; : \; X \sqcup Y \; \rightarrow \; Z$$

fonksiyonu vardır. Burada i_1 ve i_2 içine fonksiyon ve

$$\begin{aligned} her \; x \epsilon X \;\; icin \;\; < f, g > (x) \;&=\; f(x) \\ her \; y \epsilon Y \;\; icin \;\; < f, g > (y) \;&=\; g(y) \end{aligned}$$

dir. Gerçekten de $\forall x \; \epsilon \; X$ için

$$(< f, g > \circ i_1)(x) \;=\; < f, g > (i_1(x)) \;=\; < f, g > (x) \;=\; f(x)$$

ve $\forall y \; \epsilon \; Y$ için

$$(< f, g > \circ i_2)(y) \;=\; < f, g > (i_2(y)) \;=\; < f, g > (y) \;=\; g(y)$$

olduğundan diyagram değişmelidir. Şimdi $< f, g >$ dönüşümünün bir tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki

$$< f', g' > \circ i_1 \;=\; f \quad ve \quad < f', g' > \circ i_2 \;=\; g$$

ve

$$\begin{aligned} her\ x \epsilon X \quad icin \quad < f', g' > (x) &= f'(x) \\ her\ y \epsilon Y \quad icin \quad < f', g' > (y) &= g'(y) \end{aligned}$$

olacak biçimde $< f', g' >$ dönüşümü var olsun. Bu durumda $\forall x \ \epsilon \ X$

$$(< f', g' > \circ i_1)(x) \;=\; < f', g' > (i_1)(x) \;=\; < f', g' > (x) \;=\; f'(x) \;=\; f(x)$$

ve $\forall y \ \epsilon \ Y$ için

$$(< f', g^{'} > \circ i_2)(y) \;=\; < f^{'}, g^{'} > (i_2(y)) \;=\; < f^{'}, g^{'} > (y) \;=\; g^{'}(y) \;=\; g(x)$$

elde edilir ki bu durumda $< f, g >$ dönüşümünün bir tek olduğunu gösterir.

2.6 Funktorlar

Bu bölümde bir kategoriden diğer bir kategoriye giden morfizm kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 2.6.1 **C** ve **D** iki kategori olsun.

$$F \;:\; Mor(\mathbf{C}) \;\rightarrow\; Mor(\mathbf{D})$$

fonksiyonu;

(i)(Birimlerin korunması) **C** her A objesi için

$$F(I_A) \;=\; I_{F(A)} \;;$$

(ii)(Kompozisyonların korunması) $f \circ g$, **C** nin bir kompozisyonu ise

$$F(f \circ g) \;=\; F(f) \circ F(g) \;;$$

özelliklerini sağlanıyor ise F ye $\mathbf{C}$ den $\mathbf{D}$ ye bir **funktor** denir ve $(\mathbf{C}, F, \mathbf{D})$ ile gösterilir.

Bu tanımla birlikte aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

1. $A, \mathbf{C}$ kategorisinin herhangi bir objesi olmak üzere $F(A)$, $\mathbf{D}$ kategorisinin bir objesidir.

2. $f : A \to B$ dönüşümü $\mathbf{C}$ kategorisinin bir morfizmi olmak üzere

$$Ff : F(A) \to F(B)$$

dönüşümü $\mathbf{D}$ kategorisinin bir morfizmidir.

3. $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ olmak üzere

$$F(Mor_C(A, B)) \subset Mor_D(F(A), F(B))$$

dir(Oosten 1995).

Örnek 2.6.1 $\mathbf{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere

$$\begin{aligned} I_C : \ & \mathbf{C} && \to \mathbf{C} \\ & I_C(A) && = A \\ & I_C(f) && = f \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bir funktordur. Bu funktora **birim funktor** denir.

Örnek 2.6.2 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ nin bir alt kategorisi olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} I & : & \mathbf{C} & \to & \mathbf{D} \\ & & I(A) & = & A \\ & & I(f) & = & f \end{array}$$

$(I : Mor_C(\mathbf{C}) \hookrightarrow Mor(\mathbf{D})$ gömme fonk.) biçiminde tanımlanan dönüşüm bir funktordur.

Örnek 2.6.3 $\mathbf{C}/\sim, \mathbf{C}$ nin bölüm kategorisi olmak üzere

$$\begin{array}{cccc} Q : & Mor(\mathbf{C}) & \to & Mor(\mathbf{C}/\sim) \\ & Q(A) & = & A \\ & Q(f) & = & [f] \end{array}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bir funktordur. Bu funktora **bölüm funktoru** denir.

Örnek 2.6.4 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ iki kategori ve $B, \mathbf{D}$ nin herhangi bir sabit objesi olmak üzere $\mathbf{C}$ nin herhangi bir A objesi için $F(A) = B$ ve $f : A_1 \to A_2$ mofizmi için

$$\begin{array}{ccccc} F(f) & : & F(A_1) & \to & F(A_2) \\ \| & & \| & & \| \\ I_B & : & B & \to & B \end{array}$$

biçiminde, yani $\mathbf{D}$ nin bütün morfizmleri birim mofizm ise bu durumda

$$F \ : \ \mathbf{C} \ \to \ \mathbf{D}$$

funktoruna **sabit funktor** denir.

Önerme 2.6.1 $F : A \to B$ ve $G : B \to C$ iki funktor ise $G \circ F : A \to C$ bir funktordur.

İspat

1. $\mathbf{A}$ kategorisinin herhangi bir X objesi için I_X birim morfizm olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (G \circ F)(I_X) &= G(F(I_X)) \\ &= G(I_{F(X)}) \\ &= I_{G(F(X))} \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $G \circ F$ fonksiyonu birimleri koruyor.

2. $f \circ g$, $\mathbf{A}$ nın bir kompozisyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} (G \circ F)(f \circ g) &= G(F(f \circ g)) \\ &= G(F(f) \circ F(g)) \\ &= G(F(f)) \circ G(F(g)) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $G \circ F$ fonksiyonu kompozisyon işlemini koruyor. O halde $G \circ F$ fonksiyonu bir funktordur.

Tanım 2.6.2 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ bir funktor olsun.

$$F \ : \ C^{op} \ \to \ D \quad (veya \ F : C \to D^{op})$$

bir funktor ise F ye kontravaryant funktor denir. Bu durumda F bir kontravaryant funktor ise

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \quad ve \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

dır.

Örnek 2.6.8 $F : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Küme}$ bir fonksiyon ve B, $\mathbf{Ab}$ nin sabit bir objesi olmak üzere

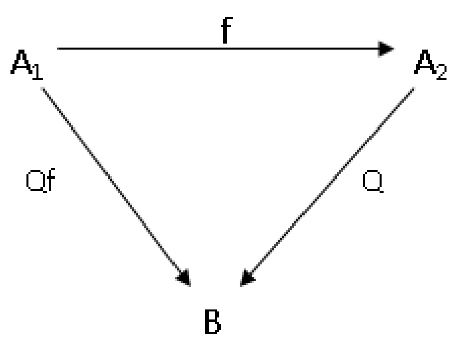
$$F(A) = Hom(A, B)$$

ve

$f : \; A_1 \; \to \; A_2$ homomorfizmi için

$$\begin{array}{cccccc} F(f) & : & F(A_2) & \to & F(A_1) \\ & & \| & & \| \\ & & Hom(A_2, B) & \to & Hom(A_1, B) \\ & & Q & \mapsto & F(f) \circ (Q) = Q \circ f \end{array}$$

biçiminde tanımlanan F kontravaryant bir funktordur. Bu tanımdan dolayı



Şekil 2.6

diyagramı değişmelidir. Şimdi

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

olduğunu gösterelim. $Q \in Hom(A_2, B)$ için

$$
\begin{aligned}
F(f \circ g)(Q) &= Q(f \circ g) \\
&= (Qf) \circ g \\
&= F(g) \circ (Qf) \\
&= (F(g) \circ F(f))(Q)
\end{aligned}
$$

dır. Sonuç olarak

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

dir.

2.7 Doğal Transformasyonlar

Tanım 2.7.1 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ve $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ iki funktor olmak üzere

(i) $\mathbf{C}$ nin her A objesi için

$$\eta \ : F(A) \ \to \ G(A)$$

morfizmi $Mor(\mathbf{D})$ kümesindedir,

(ii) $\forall f : A \to B \in Mor(\mathbf{C})$ için

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

Şekil 2.7

diyagramı değişmelidir,

şartları sağlanıyorsa $\eta : F \to G$ dönüşümüne F den G ye bir **doğal transformasyon** denir.

Tanım 2.7.2 $\eta : F \to G$ doğal transformasyon olsun. Her A objesi için

$$\eta_A \ : \ F(A) \ \rightarrow \ G(A)$$

izomorfizm ise η ye **doğal izomorfizm** denir. Bu durumda

$$\eta_A^{-1} \ : \ G(A) \ \rightarrow \ F(A)$$

ters izomorfizmi var olup $\eta^{-1} : G \rightarrow F$ doğal transformasyonu tanımlanır ve

$$\eta \ : \ F \ \cong \ G$$

ile gösterilir.

Tanım 2.7.3 C ve **D** iki kategori ve

$$G \ : \ \mathbf{C} \ \rightarrow \ \mathbf{D}$$

bir funktor olsun. Bu durumda

$$F \ : \ \mathbf{D} \ \rightarrow \ \mathbf{C}$$

funktoru ve

$$\eta \ : \ I_A \ \rightarrow \ GF \quad ve \quad \varepsilon \ : \ FG \ \rightarrow \ I_B$$

doğal izomorfizmleri varsa

$$G \ : \ \mathbf{C} \ \rightarrow \ \mathbf{D}$$

funktoruna **kategorilerinin denkliği, C** ve **D** kategorilerine de **denk kategoriler** denir.(Blyth 1986)

2.8 Eşitleyiciler

Tanım 2.8.1 $\mathbf{C}$ bir kategori, A ve B, $\mathbf{C}$ nin objeleri olmak üzere

$$f \; : \; A \; \rightarrow \; B \;\; ve \;\; g \; : \; A \; \rightarrow \; B$$

$(f \neq g)$ morfizmleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise (E, j) ikilisine ya da kısaca j ye (f, g) nin **eşitleyicisi (equalizer),** E ye ise **eşitleyici obje** denir.

(1) $E \in Ob(\mathbf{C})$ ve

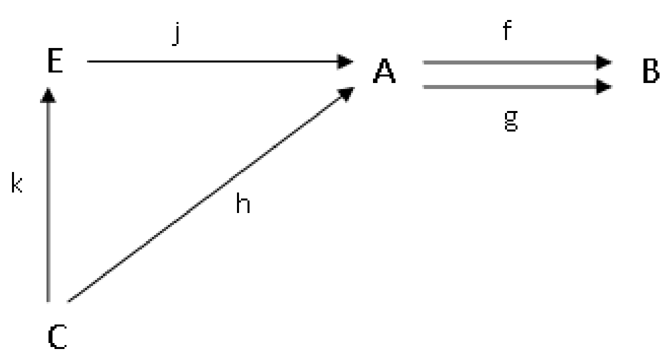
$$E \; \xrightarrow{j} \; A \; \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \; B$$

diyagramı için $f \circ j = g \circ j$ dir.

(2) $C \in Ob(\mathbf{C})$ objesi için

$$h \; : \; C \; \rightarrow \; A \;\; ve \;\; f \circ h \; = \; g \circ h$$

verildiğinde



Şekil 2.8

diyagramı değişmeli yani $j \circ k = h$ olacak biçimde bir tek

$$k \; : \; C \; \rightarrow \; E$$

morfizmi vardır(Oosten 1995).

Örnek 2.8.1 K, kümeler kategorisi ve A, B herhangi iki küme olmak üzere

$$f \;:\; A \;\rightarrow\; B \;\; ve \;\; g \;:\; A \;\rightarrow\; B \; (f \neq g)$$

fonksiyonları verilsin.

1. $E = \{a \,\epsilon\, A : f(a) = g(a)\} \subseteq A$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} j \;:\; E &\rightarrow A \\ a &\rightarrow j(a) = a \end{aligned}$$

fonksiyonu için $f \circ j = g \circ j$ dir. Gerçektende $\forall x \,\epsilon\, E$ için

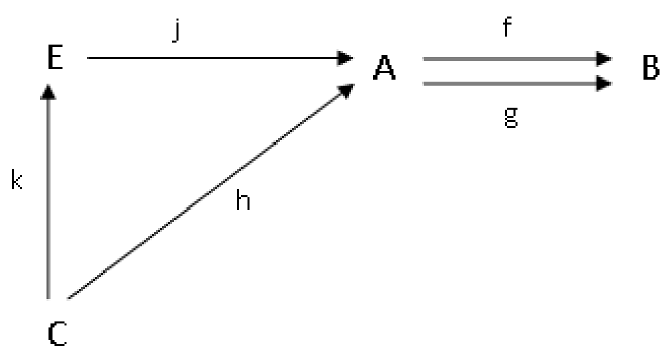
$$(f \circ j)(x) \;=\; f(j(x)) \;=\; f(x) \;= g(x) \;=\; g(j(x)) \;=\; (g \circ j)(x)$$

dir.

2. $C \,\epsilon\, Ob(\mathbf{C})$ olmak üzere

$$h \;:\; C \;\rightarrow\; A \;\; ve \;\; fh \;=\; gh$$

verildiğinde



Şekil 2.9

diyagramı değişmeli olacak biçiminde bir tek

$$
\begin{aligned}
k \;:\; C &\rightarrow E \\
c &\rightarrow k(c) = h(c)
\end{aligned}
$$

fonksiyonu vardır.

Sonuç olarak (E, j), f ve g morfizmlerinini bir eşitleyicisidir.

Genel olarak **Küme, grup ve topoloji** kategorileri için eşitleyici obje

$$\{a \in A : f(a) = g(a)\}$$

dır.

Tanım 2.8.2 C herhangi bir kategori, A ve B, **C** nin objeleri olmak üzere

$$f, g : A \longrightarrow B$$

morfizmleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (C, h) ikilisine ya da kısaca h ye (f, g) nin **koeşitleyicisi (coequalizer)** denir(Oosten 1995).

(1) $C \in Ob(\mathbf{C})$ ve

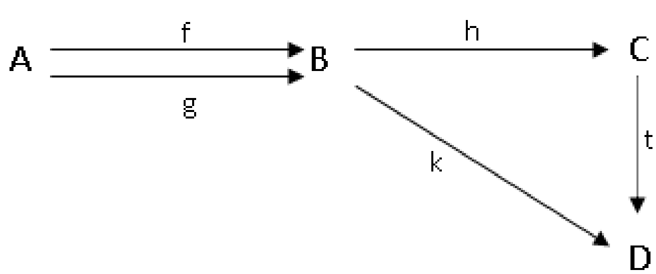
$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{h} C$$

diyagramı için $h \circ f = h \circ g$ dir,

(2) $D \in Ob(\mathbf{C})$ objesi için

$$k \;:\; B \rightarrow D \quad ve \quad kf \;=\; kg$$

verildiğinde



Şekil 2.10

diyagramı değişmeli yani $t \circ h = k$ olacak biçiminde bir tek

$$t \ : \ C \ \rightarrow \ D$$

morfizmi vardır(Oosten 1995).

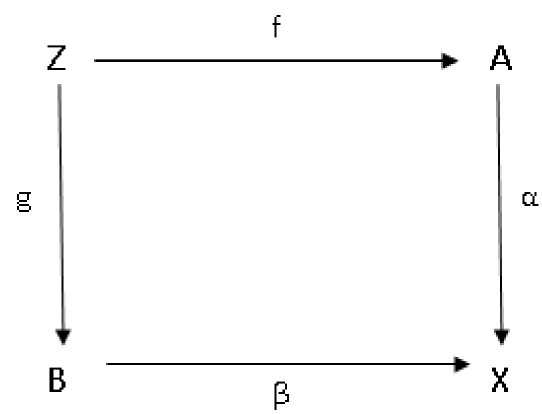
2.9 Geri Çekmeler(Pullback) ve İleri İtmeler(Pushouts)

2.9.1 Geri Çekmeler(Pullback)

Tanım 2.9.1.1 C bir kategori olsun. $A, B, X,$ **C** nin objeleri ve

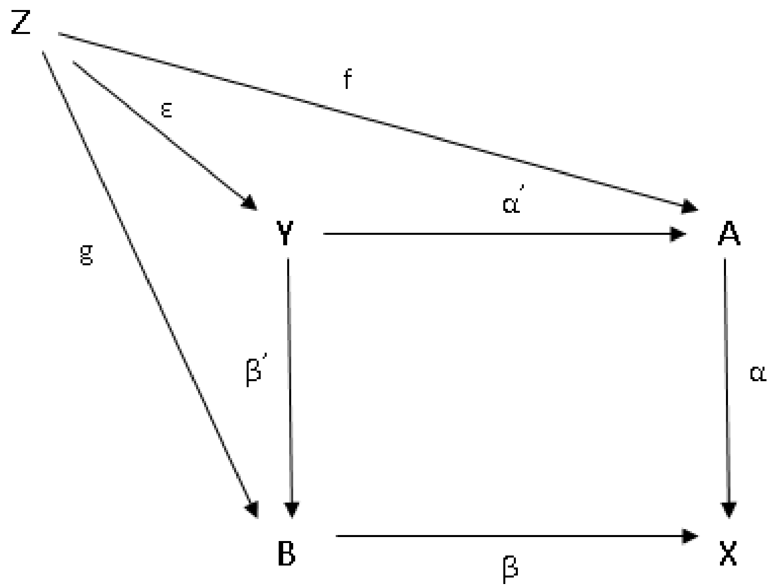
$$\alpha \ : \ A \ \rightarrow \ X \ \ ve \ \ \beta \ : \ B \ \rightarrow \ X$$

morfizmleri olsun.



Şekil 2.11

diyagramı değişmeli yani $\alpha \circ f = \beta \circ g$ verildiğinde



Şekil 2.12

$\alpha' \circ \varepsilon = f$ ve $\beta' \circ \varepsilon = g$ olacak biçiminde

$$\varepsilon \ : \ Z \ \rightarrow \ Y$$

bir tek morfizmi var ise (α', β') ne (α, β) nın geri çekmesi, Y objesine de geri çekme objesi denir(Blyth 1986).

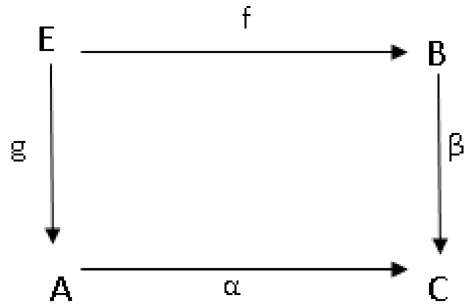
Örnek 2.9.1.1 K kümeler kategorisi A, B, C birer küme ve

$$\alpha \ : \ A \ \rightarrow \ C \quad ve \quad \beta \ : \ B \ \rightarrow \ C$$

fonksiyonlar olmak üzere (α, β) nın geri çekmesi (π_A, π_B) geri çekme objesi

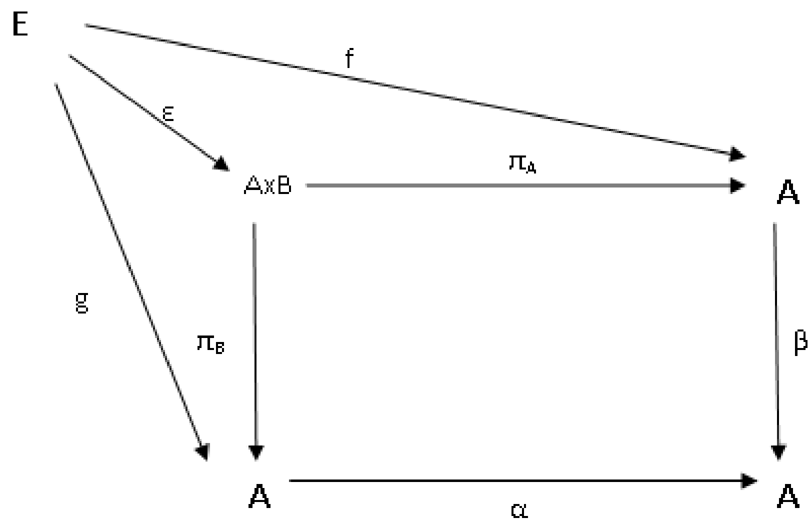
$$D \ = \ A \times_K B \ = \ \{(x, y) : \alpha(x) = \beta(y)\} \ \subseteq \ A \times B$$

dir. Çünkü



Şekil 2.13

değişmeli diyagramı verildiğinde



Şekil 2.14

diyagramı değişmeli olacak biçiminde bir tek

$$\begin{array}{rcccc} \varepsilon & : & E & \rightarrow & A \times_K B \\ & & z & \rightarrow & (f(z), g(z)) \end{array}$$

morfizmi vardır(Aytekin 2010).

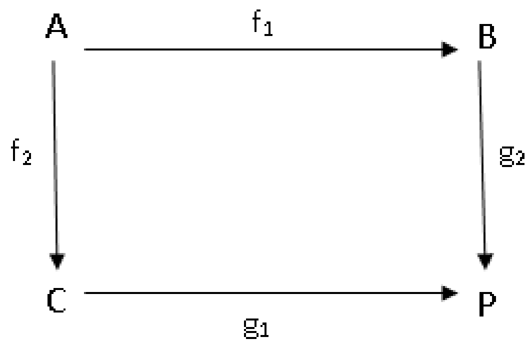
2.9.2 İleri itmeler(Pushouts)

Tanım 2.9.2.1 **C** bir kategori olsun. $A, B, C \in Ob(\mathbf{C})$ ve

$$f_1 : A \to B \quad ve \quad f_2 : A \to C$$

C de morfizmler olsun. Bu durumda

(i)



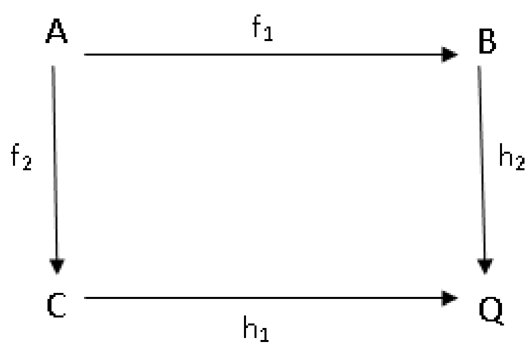
Şekil 2.15

diyagramı değişmeli olacak biçimde

$$g_1 : C \to P \quad ve \quad g_2 : B \to P$$

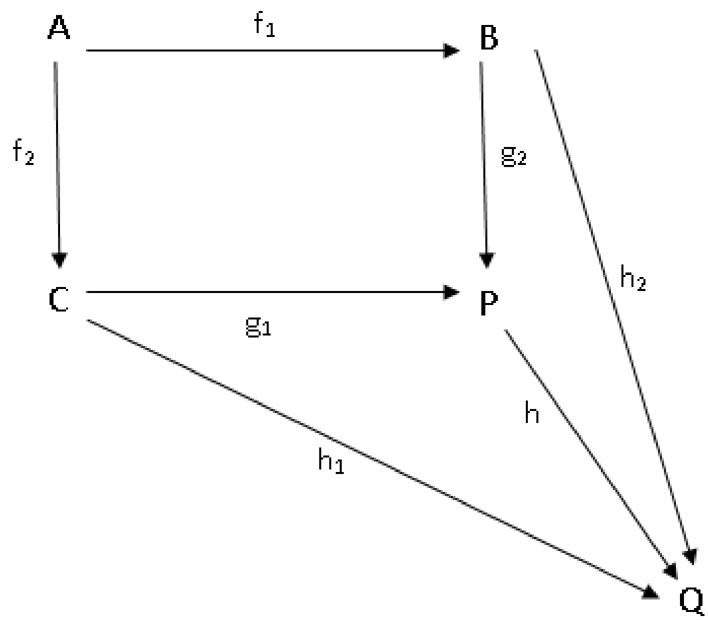
morfizmleri vardır.

(ii) Q objesi ve



Şekil 2.16

diyagramı değişmeli olacak biçimde morfizmleri verildiğinde



Şekil 2.17

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir tek

$$h \;:\; P \;\rightarrow\; Q$$

morfizmi vardır.

Koşulları sağlanıyor ise (P, g_1, g_2) ye ya da kısaca P ye (f_1, f_2) nin ileri itmesi denir(Aytekin 2010).

3 PASCH GEOMETRİ

Tanım 3.1 A bir küme, $e \epsilon A$ ve $\Delta_A \subseteq A \times A \times A$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan (A, e, Δ_A) üçlüsüne A üzerinde bir **Pasch Geometri** denir.

(1) $\forall a \epsilon A$ için $(a, b, e) \epsilon \Delta_A$ olacak biçimde bir tek $b \epsilon A$ vardır (Genelde b terimi $a^{\#}$ ile gösterilir).

(2) $e^{\#} = e$ ve $\forall a \epsilon A$ için $(a^{\#})^{\#} = a$ dır.

(3) $(a, b, c) \epsilon \Delta_A$ ise $(b, c, a) \epsilon \Delta_A$ dır.

(4) $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_4, a_5) \epsilon \Delta_A$ ise $\exists a_6 \epsilon A$ vardır öyleki

$$(a_6, a_4^{\#}, a_2), (a_6, a_5, a_3^{\#}) \epsilon \Delta_A$$

dır(Bhattarai 1997).

Önerme 3.1 A bir küme ve (A, e, Δ_A) üçlüsü A üzerinde bir Pasch Geometri ise aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. $(a, b, c) \epsilon \Delta_A$ ise $(c^{\#}, b^{\#}, a^{\#}) \epsilon \Delta_A$ dır.
2. $a, b \epsilon A$ ise $\exists c \epsilon A$ vardır öyle ki $(a, b, c) \epsilon \Delta_A$ dır(Harrison 1979).

İspat:

1. $(a, b, c) \epsilon \Delta_A$ olduğunu kabul edelim. A bir Pasch geometri olduğundan

$$(a, a^{\#}, e) \epsilon \Delta_A$$

olacak biçiminde bir tek $a^{\#} \epsilon A$ vardır. 4. aksiyom gereğince

$$(a, b, c) \epsilon \Delta_A \text{ ve } (a, a^{\#}, e) \epsilon \Delta_A \text{ ise } \exists a_6 \epsilon A$$

vardır öyle ki $(a_6, a, b) \epsilon \Delta_A$ ve $(a_6, e, c^{\#}) \epsilon \Delta_A$ dır. Aynı düşünce ile

$$(a_6, a, b) \epsilon \Delta_A \text{ ve } (a_6, e, c^{\#}) \epsilon \Delta_A \text{ ise } \exists a_7 \epsilon A$$

vardır öyle ki $(a_7, e, a) \epsilon \Delta_A$ ve $(a_7, c^{\#}, b^{\#}) \epsilon \Delta_A$ dır. $(a_7, e, a) \epsilon \Delta_A$ ise $(a, a_7, e) \epsilon \Delta_A$ olur. $(a, a^{\#}, e) \epsilon \Delta_A$ olacak biçiminde bir tek $a^{\#} \epsilon A$ olacağından $a_7 = a^{\#}$ dır. Sonuç olarak $(c^{\#}, b^{\#}, a^{\#}) \epsilon \Delta_A$ elde edilir.

2. $a, b \epsilon A$ olsun. A bir Pasch geometri olduğundan

$$(a, a^{\#}, e) \; \epsilon \; \Delta_A \; ((a^{\#}, a, e) \; \epsilon \; \Delta_A) \text{ ve } (b, b^{\#}, e) \; \epsilon \; \Delta_A$$

olacak biçiminde bir tek $a^{\#}$ ve $b^{\#}$ vardır. 3. aksiyom gereğince

$$(e, b, b^{\#}) \; \epsilon \; \Delta_A \text{ ve } (e, a^{\#}, a) \; \epsilon \; \Delta_A$$

dır. 4. aksiyom gereğince ise $\exists c \; \epsilon \; A$ vardır öyle ki $(c, a, b) \; \epsilon \; \Delta_A$ ve $(c, a, b) \; \epsilon \; \Delta_A$ olur. Buradan $(a, b, c) \; \epsilon \; \Delta_A$ elde edilir.

Örnek 3.1 $\Delta = \{(x, y, z) : x, y, z \; \epsilon \; R \text{ ve } x + y + z = 0\}$ olmak üzere $(R, 0, \Delta)$ sıralı üçlüsü R üzerinde bir Pasch geometridir.

Çözüm:

1. R kümesi toplama işlemine göre bir grup olduğundan dolayı $a + a^{\#} + 0 = 0$ olacak biçimde bir tek $a^{\#}$ vardır ve $a^{\#} = (-a)$ dır.

2. $0^{\#} = 0$ ve $(a^{\#})^{\#} = -(-a) = a$ dır.

3. $(a, b, c) \; \epsilon \; \Delta$ olsun. Bu durumda $a + b + c = 0$ dır. R kümesinde toplama işleminin değişme özelliği olduğundan dolayı $b + c + a = 0$ dır. Dolayısıyla $(b, c, a) \; \epsilon \; \Delta$ dir.

4. $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_4, a_5) \; \epsilon \; \Delta$ olsun. Bu durumda $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ve $a_1 + a_4 + a_5 = 0$ elde edilir. Bu iki eşitlikten $a_4 - a_2 = a_3 - a_5$ elde edilir. $a_6 = a_4 - a_2 = a_3 - a_5$ alalım. buradan $a_6 + (-a_4) + a_2 = 0$ ve $a_6 + a_5 + (-a_3) = 0$ olur. Sonuç olarak $(a_6, a_4^{\#}, a_2), (a_6, a_5, a_3^{\#}) \; \epsilon \; \Delta$ elde edilir.

Örnek 3.2 $\Delta = \{(x, y, z) : x, y, z \; \epsilon \; R \backslash \{0\} \text{ ve } xyz = 1\}$ olmak üzere $(R \backslash \{0\}, 1, \Delta)$ üçlüsü $R \backslash \{0\}$ üzerinde bir Pasch geometridir.

Çözüm:

1. $R/\{0\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir grup olduğundan dolayı $a.a^{\#}.1 = 1$ olacak biçiminde bir tek $a^{\#}$ vardır, ve $a^{\#} = \frac{1}{a}$ dır.

2. $1^{\#} = \frac{1}{1} = 1$ ve $(a^{\#})^{\#} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ dır.

3. $(a, b, c) \; \epsilon \; \Delta$ olsun. Bu durumda $a.b.c = 1$ dir. $R \backslash \{0\}$ kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği olduğundan dolayı $b.c.a = 1$ dir. Dolayısıyla $(b, c, a) \; \epsilon \; \Delta$ dır.

4. $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_4, a_5) \; \epsilon \; \Delta$ olsun. Bu durumda $a_1.a_2.a_3 = 1$ ve $a_1.a_4.a_5 = 1$ elde edilir. Bu iki eşitlikten $\frac{1}{a_2 a_3} = \frac{1}{a_4 a_5} \Rightarrow \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_3}{a_5}$ eşitliği elde edilir. $a_6 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_3}{a_5}$ alalım.

Bu durumda $\frac{1}{a_4} = a_4^{\#}, \frac{1}{a_3} = a_3^{\#}$ olmak üzere $(a_6, a_4^{\#}, a_2), (a_6, a_5, a_3^{\#}) \in \Delta$ ifadesi elde edilir

Tanım 3.2 A bir Pasch geometri olmak üzere;

$$\forall (a,b,c) \in \Delta_A \quad \Rightarrow \quad (b,a,c) \in \Delta_A$$

önermesi doğru ise A geometrisine değişmelidir, denir(Bhattarai 1997).

Tanım 3.3 A bir Pasch geometri ve

$$\forall (a,b,c),(a,b,d) \in \Delta_A \quad \Rightarrow \quad c = d$$

önermesi doğru ise A geometrisine **sharp** geometri denir(Bhattarai 1997).

Önerme 3.2 A bir sharp geometri olmak üzere

$$a,b,c \in A \text{ için } (a,b,c) \in \Delta_A \quad \Rightarrow \quad a.b = c^{\#}$$

önermesi sağlandığında A kümesi . işlemi ile birlikte bir grup yapısı oluşturur.

Tersine her bir G grubu

$$x.y = z^{\#} \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) \in \Delta_G$$

önermesi sağlandığında G grubu birim elemanı ile birlikte bir sharp geometri oluşturur(Bhattarai 1999).

İspat:

1. (Kapalılık özelliği): $\forall a,b \in A$ için $a.b = c^{\#}$ olsun. Bu durumda $(a,b,c) \in \Delta_A$ dır. $c \in A$ olduğundan $c^{\#} \in A$ olacak biçiminde bir tek $c^{\#} \in A$ vardır. Sonuç olarak $a.b$ $\in A$ elde edilir.

2. (Birleşme özelliği): $\forall a,b,c \in A$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ olduğunu gösterelim. $\forall a,b \in A$ için $(a,b,x) \in \Delta_A$ olacak biçimde $\exists x \in A$ vardır. Bu durumda $a.b = x^{\#}$ dir($(a,b,x) \in \Delta_A$ ise Pasch geometrinin 3. önermesi gereği $(b,x,a) \in \Delta_A$).
$\forall b,c \in A$ için $(b,c,y) \in \Delta_A$ olacak biçimde $\exists y \in A$ vardır. Bu durumda $b.c = y^{\#}$ dir.
Pasch geometri tanımının 4. önermesi gereği $(b,c,y),(b,x,a) \in \Delta_A \Rightarrow \exists a_6 \in A$ vardır öyle ki $(a_6, x^{\#}, c), (a_6, a, y^{\#}) \in \Delta_A$ dır. Bu durumda $x^{\#}.c = a.y^{\#}$ elde edilir. Öyleyse

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

eşitliği doğrudur.

3.(Birim eleman): A bir Pasch geometri olduğundan $\forall a \; \epsilon \; A$ için $(a, a^{\#}, e) \; \epsilon \; \Delta_A$ dır. Pasch geometrinin 3. önermesi gereği $(e, a, a^{\#}) \; \epsilon \; \Delta_A$ dır. Bu durumda $e.a = a$ dır. Benzer biçimde $(a^{\#}, a, e) \; \epsilon \; \Delta_A$ olacağından $a.e = a$ elde edilir. Bu durumda . işleminin etkisiz elemanı var ve e dir.

4.(Ters eleman): $\forall a \; \epsilon \; A$ için $(a, a^{\#}, e) \; \epsilon \; \Delta_A$ olduğundan $a.a^{\#} = e$ ve benzer biçimde $(a^{\#}, a, e) \; \epsilon \; \Delta_A$ olacağından $a^{\#}.a = e$ dir. Bu durumda $a^{-1} = a^{\#}$ dir.

Tanım 3.4 (Alt geometri) A bir geometri ve $S \subseteq A$ olsun. $e \; \epsilon \; S$ ve

$$\exists \; s_1, s_2 \epsilon S \quad i\text{ç}in \quad (s_1, s_2, x) \epsilon \Delta_A \;\; \Rightarrow \;\; x \epsilon S$$

önermesi doğru oluyor ise S ye A nın altgeometrisi denir. $\Delta_S = \Delta_A \cap (S \times S \times S)$ alındığında (S, e, Δ_S) yapısı bir altgeometri olur.

S, A nın altgeometrisi ve

$$\forall a, b \epsilon A \quad ve \quad bazı \; s \epsilon S \quad \text{için } (s, a, b) \epsilon \Delta \;\; \Rightarrow \;\; \exists s_1 \epsilon S \quad vardır \; öyleki \quad (s_1, b, a) \epsilon \Delta$$

önermesi doğru ise S ye normal alt geometri denir(Bhattarai 1997).

S, A nın alt geometrisi olmak üzere, A kümesinin elemanları arasında aşağıdaki bağıntı tanımlansın.

$$\forall a, b \epsilon A \text{ için} \quad a \sim b \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists s_1, s_2 \epsilon S \text{ ve } x \epsilon A \text{ için} \quad (a, s_1, x^{\#}), (x, b^{\#}, s_2) \epsilon \Delta$$

A kümesi üzerinde tanımlanan bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı A kümesini denklik sınıflarına ayırır. $a \; \epsilon \; A$ için a nın denklik sınıfı $[a] = \{x : a \sim x\}$ biçimindedir. A kümesinin tüm denklik sınıflarının kümesi ise $A//S = \{[a] : a \; \epsilon \; A\}$ biçiminde gösterilir.

Önerme 3.4 S, A nın altgeometrisi olmak üzere

$$\Delta_{A//S} = \;\; \{(X, Y; Z) : X, Y, Z \epsilon A//S, \exists x \epsilon X, y \epsilon Y, z \epsilon Z \text{ ve } (x, y, z) \epsilon \Delta_A\}$$

biçiminde bir sıralı üçlü kümesi tanımlansın. Bu durumda $(A//S, S, \Delta_{A//S})$ yapısı bir Pasch geometridir. Bu geometriye A nın bölüm geometrisi denir(Bhattarai 1997).

İspat:

1. $X \epsilon A//S$ olmak üzere $(X, X^{\#}, S) \epsilon \Delta_{A//S}$ alalım. Bu durumda tanımdan dolayı

$$\exists x \epsilon X, y \epsilon Y, z \epsilon S \text{ ve } (x, y, e) \epsilon \Delta_A$$

dır. A bir geometri olduğundan $(x, y, e) \epsilon \Delta_A$ olacak biçiminde bir tek $y = x^{\#} \epsilon A$ vardır. Sonuç olarak $X^{\#} \epsilon\ A//S$ bir tektir.

2. $a \epsilon S$ olsun. S bir geometri olduğundan $(a, a^{\#}, e) \epsilon S$ olacak biçiminde bir tek $a^{\#} \epsilon S$ vardır. $A//S$ kümesinin elemanları denklik sınıfları olup, denklik sınıfları kümesi ya birbirlerine eşittir ya da ayrıktır. $a^{\#} \epsilon\ S$ olduğundan $S \cap S^{\#} \neq \emptyset$ dir. Sonuç olarak $S = S^{\#}$ elde edilir. Aynı zamanda $(X^{\#})^{\#} = X$ olduğu açıktır.

3. $(X, Y, Z) \epsilon \Delta_{A//S}$ olsun. Bu durumda

$$\exists x \epsilon\ X, y \epsilon\ Y, z \epsilon\ Z \text{ ve } (x, y, z) \epsilon \Delta_A$$

dır. $(x, y, z) \epsilon \Delta_A$ ise Pasch geometrinin 3. aksiyomu gereğince $(y, z, x) \epsilon \Delta_A$ dir. Buradan $(Y, Z, X) \epsilon \Delta_{A//S}$ elde edilir.

4. $(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_4, A_5) \epsilon \Delta_{A//S}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\exists a_1 \epsilon A_1, a_2 \epsilon A_2, a_3 \epsilon A_3, a_4 \epsilon A_4, a_5 \epsilon A_5 \text{ ve } (a_1, a_2, a_3) \epsilon \Delta_A, (a_1, a_4, a_5) \epsilon \Delta_A$$

dır. A bir geometri olduğundan $\exists a_6 \epsilon A$ vardır öyleki

$$(a_6, a_4^{\#}, a_2), (a_6, a_5, a_3^{\#}) \epsilon \Delta_A$$

dır. Bu durumda $\exists A_6 \epsilon A//S$ için

$$(A_6, A_4^{\#}, A_2), (A_6, A_5, A_3^{\#}) \epsilon \Delta_A$$

elde edilir.

Önerme 3.5 (A, e_A, Δ_A) ve (B, e_B, Δ_B) Pasch geometrileri için

$$\Delta_{A\times B} \;=\; \{((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)) : (a_1,a_2,a_3)\epsilon\Delta_A,(b_1,b_2,b_3)\epsilon\Delta_B\}$$

olmak üzere $(A\times B,(e_A,e_B),\Delta_{A\times B})$ üçlüsü bir Pasch geometridir. Bu geometriye A ile B nin çarpım geometrisi denir.

İspat:

1. $\forall(a,b)\ \epsilon\ A\times B$ için $a\ \epsilon\ A$ olduğundan $a^{\#}$ bir tektir. Benzer biçimde $b\ \epsilon\ B$ için $b^{\#}$ bir tektir.

$$(a,a^{\#},e_A)\ \epsilon\ \Delta_A \text{ ve } (b,b^{\#},e_B)\ \epsilon\ \Delta_B$$

olduğundan çarpım geometrisi tanımından dolayı $((a,b),(a^{\#},b^{\#}),(e_A,e_B))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$ olur. Dolayısıyla $\forall(a,b)\ \epsilon\ A\times B$ için bir tek $(a,b)^{\#}$ vardır ve $(a,b)^{\#}=(a^{\#},b^{\#})$ dir.

2. $(e_A,e_A,e_A)\ \epsilon\ \Delta_A$ ve $(e_B,e_B,e_B)\ \epsilon\ \Delta_B$ olduğundan

$$((e_A,e_B),(e_A,e_B),(e_A,e_B))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(e_A,e_B)^{\#}=(e_A,e_B)$ dir.
$\forall(a,b)\ \epsilon\ A\times B$ için $(a^{\#},a,e_A)\ \epsilon\ \Delta_A,(b^{\#},b,e_B)\ \epsilon\ \Delta_B$ olduğundan

$$((a^{\#},b^{\#}),(a,b),(e_A,e_B))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$$

elde edilir. Böylece $((a,b)^{\#})^{\#}=(a,b)$ dir.

3. $((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$ olsun. Bu durumda

$$(a_1,a_2,a_3)\ \epsilon\ \Delta_A \text{ ve } (b_1,b_2,b_3)\ \epsilon\ \Delta_B$$

dir. Pasch geometrinin 3. aksiyomu gereğince $(a_2,a_3,a_1)\ \epsilon\ \Delta_A$ ve $(b_2,b_3,b_1)\ \epsilon\ \Delta_B$ olur. Böylece

$$((a_2,b_2),(a_3,b_3),(a_1,b_1))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$$

elde edilir.

4. $((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)),((a_1,b_1),(a_4,b_4),(a_5,b_5))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$ olsun. Bu durumda

$$(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_4,a_5)\ \epsilon\ \Delta_A \text{ ise } \exists a_6\ \epsilon\ A \text{ için } (a_6,a_4^{\#},a_2),(a_6,a_5,a_3^{\#})\ \epsilon\ \Delta_A$$

dir. Benzer biçiminde

$$(b_1,b_2,b_3),(b_1,b_4,b_5)\ \epsilon\ \Delta_B \text{ ise } (b_6,b_4^{\#},b_2),(b_6,b_5,b_3^{\#})\ \epsilon\ \Delta_B$$

dir. Bu iki ifadeden

$$((a_6,b_6),(a_4^{\#},b_4^{\#}),(a_2,b_2)),((a_6,b_6),(a_5,b_5),(a_3^{\#},b_3^{\#}))\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$$

elde edilir.

Tanım 3.5 A ve B Pasch geometriler olmak üzere $f: A \to B$ fonksiyonu için

$$f(e_A)=e_B \quad ve \quad (x,y,z)\epsilon\Delta_A \quad \Rightarrow \quad (f(x),f(y),f(z))\epsilon\Delta_B$$

önermesi sağlanıyorsa f fonksiyonuna A dan B ye tanımlı geometrik morfizm denir.f bir geometrik morfizm olmak üzere

$$K_f \quad = \quad \{a : a\epsilon A, f(a)=e_B\}$$

kümesine morfizmin çekirdeği,

$$\mathrm{Im}_f \quad = \quad \{b : b\epsilon B, b=f(x) \text{ ve } x\epsilon A\}$$

kümesine ise f morfizminin görüntü kümesi denir(Harrison 1979).

Tanım 3.6 $f: A \to B$ geometrik morfizmi için f^{-1} mevcut ve B den A ya bir morfizm ise bu durumda f fonksiyonuna A dan B ye geometrik izomorfizm denir. $f: A \to B$ bir geometrik izomorfizm ise

$$(x,y,z)\epsilon\Delta_A \quad \Leftrightarrow \quad (f(x),f(y),f(z))\epsilon\Delta_B$$

önermesi doğrudur(Harrison 1979).

Tanım 3.7 A ve B Pasch geometriler olmak üzere $f: A \to B$ dönüşümü geometrik morfizm ve

$$(f(x),f(y),b)\epsilon\Delta_B \quad \Rightarrow \quad \exists z\epsilon A \text{ vardır öyleki } b=f(z) \text{ ve } (x,y,z)\epsilon\Delta_A$$

önermesi doğru ise $f : A \rightarrow B$ fonksiyonuna geometrik homomorfizm denir(Harrison 1979).

Önerme 3.6 $f : A \rightarrow B$ geometrik homomorfizm olmak üzere K_f kümesi A geometrisinin altgeometrisi, Im_f kümesi ise B geometrisinin altgeometrisidir(Bhattarai 1997).

İspat: f bir homomorfizma olduğundan $e \in K_f$ dir. $k_1, k_2 \in K_f$ için $(k_1, k_2, a) \in \Delta_A$ olsun. Bu durumda $(f(k_1), f(k_2), f(a)) \in \Delta_B$ olur. $k_1, k_2 \in K_f$ olduğundan $f(k_1) = e_B$ ve $f(k_2) = e_B$ olur. Bu durumda $(e_B, e_B, f(a)) \in \Delta_B$ olup $(e_B, f(a), e_B) \in \Delta_B$ elde edilir. $f(a) = e_B^{\#} = e_B$ olduğundan $a \in K_f$ olur. Bu durumda K_f bir alt geometridir. Şimdi Im_f nin B nin alt geometrisi olduğunu gösterelim. $f(e_A) = e_B$ olduğundan $e_B \in \mathrm{Im}_f$ dir. $m_1, m_2 \in \mathrm{Im}_f$ için $(m_1, m_2, a) \in \Delta_B$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(k_1) = m_1, f(k_2) = m_2$ olacak biçiminde $\exists k_1, k_2 \in A$ vardır. Böylece $(f(k_1), f(k_2), a) \in \Delta_B$ yazabiliriz. f dönüşümü bir homomorfizma olduğundan $\exists z \in A$ vardır öyle ki $f(z) = a$ ve $(k_1, k_2, z) \in \Delta_A$ dır. Bu durumda $f(z) = a \in \mathrm{Im}_f$ olur. Sonuç olarak Im_f B nin alt geometrisidir.

Önerme 3.7 Geometrik homomorfizmlerin bileşkesi de geometrik homomorfizmdir.

İspat: A, B ve C birer Pasch geometriler olmak üzere $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ geometrik homomorfizmalar olsun. Öncelikle $g \circ f : A \rightarrow C$ dönüşümünün geometrik morfizm olduğunu gösterelim. $(x, y, z) \in \Delta_A$ ise f dönüşümü morfizm olduğundan

$$(f(x), f(y), f(z)) \in \Delta_B$$

olur. $(f(x), f(y), f(z)) \in \Delta_B$ ise g dönüşümü morfizm olduğundan

$$(g(f(x)), g(f(y)), g(f(z))) \in \Delta_C$$

elde edilir. Böylece $g \circ f : A \rightarrow C$ dönüşümü geometrik morfizm olur. Şimdi $g \circ f : A \rightarrow C$ dönüşümünün geometrik homomorfizma olduğunu gösterelim.

$g : B \rightarrow C$ bir homomorfizm olduğu için $\exists b \in B$ vardır öyleki

$$g(b) = c \text{ ve } (f(x), f(y), b) \in \Delta_B$$

dir. $f : A \rightarrow B$ dönüşümü de bir homomorfizm olduğundan $\exists z \in A$ vardır öyle ki

$$f(z) = b \text{ ve } (x, y, z) \ \epsilon \ \Delta_A$$

dır. Bu durumda $\exists z \ \epsilon \ A$ vardır öyle ki $(g \circ f)(z) = c$ ve $(x, y, z) \ \epsilon \ \Delta_A$ dır. Sonuç olarak $g \circ f : A \to C$ dönüşümü bir homomorfizmdir.

Önerme 3.8 A, B, C ve D Pasch geometriler ve $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ homomorfizmler olmak üzere

$$h \circ (g \circ f) \ = \ (h \circ g) \circ f$$

dir.

İspat: $\forall x \ \epsilon \ A$ için

$$((h \circ g) \circ f)(x) \ = \ (h \circ g)(f(x)) \ = \ h(g(f(x)) \ = \ h((g \circ f)(x)) \ = \ (h \circ (g \circ f))(x)$$

elde edilir.

Önerme 3.9 A ve B birer Sharp geometri olmak üzere $f : A \to B$ bir geometrik homomorfizm olsun. Bu durumda f dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

İspat: A, B Sharp geometrileri Önerme 3.2 den dolayı birer grup yapısıdır.

$f : A \to B$ dönüşümü geometrik homomorfizm olduğundan $f(e_A) = e_B$ dir.

$\forall x, y \ \epsilon \ A$ için A bir Sharp geometri olduğundan $(x, y, z) \ \epsilon \ \Delta_A$ olacak biçimde bir tek $z \epsilon \ A$ vardır. A kümesinde tanımlanan işlemden dolayı

$$x.y = z^{\#}$$

dir. Buradan

$$f(x.y) = f(z^{\#})$$

elde edilir.

A bir Pasch geometri olduğundan

$$(z, z^{\#}, e_A) \ \epsilon \ \Delta_A$$

olacak biçimde bir tek $z^{\#} \epsilon A$ vardır. f bir homomorfizm olduğundan aynı zamanda

$$(f(z), f(z^{\#}), f(e_A)) \epsilon \Delta_B$$

dir. B kümesi bir Pasch geometri olduğundan $f(z) \epsilon B$ için

$$(f(z), [f(z)]^{\#}, f(e_A)) \epsilon \Delta_B$$

olacak biçimde bir tek $[f(z)]^{\#} \epsilon B$ vardır. B geometrisi sharp geometri olduğundan

$$f(z^{\#}) = [f(z)]^{\#}$$

elde edilir.

$(x, y, z) \epsilon \Delta_A$ ise f bir homomorfizma olduğundan

$$(f(x), f(y), f(z)) \epsilon \Delta_B$$

dir. Böylece

$$f(x).f(y) = [f(z)]^{\#}$$

elde edilir. $f(z^{\#}) = [f(z)]^{\#}$ olduğundan

$$f(x.y) = f(x).f(y)$$

olur. Sonuç olarak f dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

4 PASCH GEOMETRİLERİN KATEGORİKSEL YAPISI

Şimdi Pasch geometrilerin kategorisini oluşturalım. Bu kategoride objelerimiz Pasch geometriler morfizmlerimiz geometrik homomorfizmler ve kompozisyon işlemimiz ise fonksiyonlardaki bileşke işlemi olacaktır.

$$\begin{aligned} Ob(P) &= \{A : A \text{ bir Pasch geometri}\} \\ Mor_P(A,B) &= \{\dot{f} : f : A \to B, geometrik\ homomorfizm\} \end{aligned}$$

$Ob(P)$ deki her A, B, C objeleri için kompozisyon işlemi

$$\begin{aligned} k_{A,C}^{B} \ : \quad Mor_P(A,B) \times Mor_P(B,C) &\to Mor_P(A,C) \\ k_{A,C}^{B}(f,g) &= g \circ f = gf \end{aligned}$$

biçimindedir.

Kurduğumuz bu sistem bir kategoridir. Bundan sonra bu kategori P ile gösterilecektir.

Önerme 4.1 Değişmeli (Abelyan) geometrilerin kategorisi P_1 olmak üzere P_1 kategorisi P kategorisinin bir alt kategorisidir.

Önerme 4.2 Sharp geometrilerin kategorisi P_2 olmak üzere P_2 kategorisi P kategorisinin bir alt kategorisidir.

Önerme 4.3 P kategorisinde ilk(initial) ve son(terminal) objeler mevcuttur. Bu objeler izomorfizm farkıyla bir tektir.

İspat: P kategorisinde tek elemanlı her bir obje ilk objedir. Örneğin kümeler kategorisinde $X = \{x\}$ ve $\Delta_X = \{(x,x,x)\}$ olmak üzere (X, x, Δ_X) Pasch geometrisini alalım. Bu geometriden diğer geometrilere tanımlanan homomorfizmler her zaman bir tektir.

Şimdi bu ilk objelerin izomofizm farkıyla bir tek olduğunu gösterelim. X_1, X_2; P kategorisinin ilk objeleri olsun. Bu durumda X_1, bir ilk obje olduğundan

$$Mor_P(X_1, X_2) = \{f\}$$

olacak biçiminde bir tek f morfizmi vardır. Benzer biçimde X_2, bir ilk obje olduğundan

$$Mor_P(X_2, X_1) = \{g\}$$

olacak biçiminde bir tek g morfizmi vardır.

$$(X_1 \overset{g\circ f}{\to} X_1) \;=\; (X_1 \overset{I_{X_1}}{\to} X_1) \quad ve \quad (X_2 \overset{f\circ g}{\to} X_2) \;=\; (X_2 \overset{I_{X_2}}{\to} X_2)$$

olup kümeler arasında tanımlanan morfizmin tek olmasından

$$g \circ f \;=\; I_{X_1} \quad ve \quad f \circ g \;=\; I_{X_2}$$

elde edilir. Böylece $X_1 \cong X_2$ dir.Yani ilk objeler izomorfizm farkı ile bir tektir.

P kategorisinde tek elemanlı her bir obje son objedir. Örneğin kümeler kategorisinde

$$X = \{x\} \text{ ve } \Delta_X = \{(x, x, x)\}$$

olmak üzere (X, x, Δ_X) Pasch geometrisini alalım. P deki her bir geometriden X geometrilerine her zaman bir tek homomorfizma tanımlanır.

Şimdi bu son objelerin izomorfizm farkı ile bir tek olduğunu gösterelim. X_1 ve $X_2; P$ kategorisinin son objeleri olsun. X_2 bir son obje olduğundan

$$f : X_1 \to X_2$$

olacak biçiminde bir tek morfizm vardır. Benzer biçimde X_1 bir son obje olduğundan

$$g : X_2 \to X_1$$

olacak biçiminde bir tek morfizm vardır. Kümeler arasında tanımlanan morfizm tek olduğundan

$$\begin{aligned} X_1 \overset{f}{\to} X_2 \overset{g}{\to} X_1 \;&:\; g \circ f \;=\; I_{X_1} \\ X_2 \overset{g}{\to} X_1 \overset{f}{\to} X_2 \;&:\; f \circ g \;=\; I_{X_2} \end{aligned}$$

olup

$$X_1 \cong X_2$$

dir. Yani son obje izomorfizm farkıyla bir tektir.

Sonuç 4.1 P kategorisinde X objesi hem ilk obje hem de son obje olduğundan X objesi aynı zamanda P kategorisinin sıfır objesidir.

Önerme 4.4 P**,** Pasch geometriler kategorisi, A ve B Pasch geometriler olsun. Bu durumda bu iki geometrinin çarpım objesi

$$A \times B \ = \ \{(x,y)|x\epsilon A, y\epsilon B\}$$

biçimindeki çarpım geometrisidir.

İspat: Önerme 3.5 de belirtildiği gibi, A ve B iki geometri olmak üzere $(A\times B, (e_A, e_B), \Delta_{A\times B})$ yapısı bir geometridir ve bu geometriye A ile B nin çarpım geometrisi denir. Bu geometrinin A ile B nin çarpım objesi olduğunu gösterelim.

D herhangi bir geometri olmak üzere

$$q_1 \ : \ D \ \rightarrow \ A \quad ve \quad q_2 \ : \ D \ \rightarrow \ B$$

morfizmlerini ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} q \ : \ D \ &\rightarrow \ A \times B \\ x \ &\rightarrow \ q(x) = (q_1(x), q_2(x)) \end{aligned}$$

dönüşümü bir geometrik homomorfizmdir. Gerçekten de $e_D \ \epsilon \ D$ olsun. Bu durumda

$$q(e_D) = (q_1(e_D), q_2(e_D))$$

olur. q_1 ve q_2 birer homomorfizm olduğundan

$$q_1(e_D) = e_A, q_2(e_D) = e_B$$

elde edilir. Böylece $q(e_D) = (e_A, e_B)$ olur.

$(x,y,z) \ \epsilon \ \Delta_D$ alalım. Bu durumda q_1 ve q_2 birer homomorfizm olduğundan

$$(q_1(x), q_1(y), q_1(z)) \ \epsilon \ \Delta_A \text{ ve } (q_2(x), q_2(y), q_2(z)) \ \epsilon \ \Delta_B$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$((q_1(x), q_2(x)), (q_1(y), q_2(y)), (q_1(z), q_2(z)) \quad \epsilon \quad \Delta_{A\times B}$$

elde edilir. Böylece q dönüşümü bir morfizmdir.

$(q(x), q(y), b)\ \epsilon\ \Delta_{A\times B}$ olsun. Bu durumda q dönüşümünün tanımından dolayı;

$$((q_1(x), q_2(x)), (q_1(y), q_2(y)), (b_1, b_2)) \quad \epsilon \quad \Delta_{A\times B}$$

dir.

$$\begin{aligned} ((q_1(x), q_2(x)), (q_1(y), q_2(y)), (b_1, b_2)) \quad & \epsilon \quad \Delta_{A\times B} \\ & \Rightarrow \quad (q_1(x), q_1(y), b_1)\epsilon\Delta_A \ ve \ (q_2(x), q_2(y), b_2)\epsilon\Delta_B \end{aligned}$$

dir. q_1 dönüşümü homomorfizm olduğundan

$$b_1 = q_1(z_1) \text{ ve } (x, y, z_1)\ \epsilon\ \Delta_D$$

olacak biçimde $\exists z_1\ \epsilon\ D$ vardır. Benzer düşünceyle q_2 dönüşümü homomorfizm olduğundan

$$b_2 = q_2(z_2) \text{ ve } (x, y, z_2)\ \epsilon\ \Delta_D$$

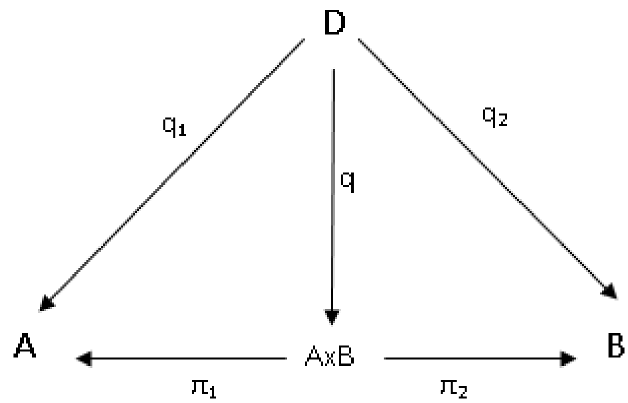
olcak biçimde $\exists z_2\ \epsilon\ D$ vardır. Bu durumda

$$(q(x), q(y), b)\ \epsilon\ \Delta_{A\times B} \Rightarrow \exists z\ \epsilon\ D \text{ vardır öyle ki } q(z) = b \text{ ve } (x, y, z)\ \epsilon\ \Delta_D$$

önermesi doğru olduğundan q dönüşümü bir homomorfizmdir.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi_1 & : & A\times B & \rightarrow & A & ve & \pi_2 & : & A\times B & \rightarrow & B \\ & & (x,y) & \rightarrow & x & & & & (x,y) & \rightarrow & y \end{array}$$

olmak üzere



Şekil 4.1

diyagramı değişmelidir. Gerçektende $\forall x \in D$ için

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ q)(x) &= \pi_1(q(x)) = \pi_1(q_1(x), q_2(x)) \\ &= q_1(x)\end{aligned}$$

ve

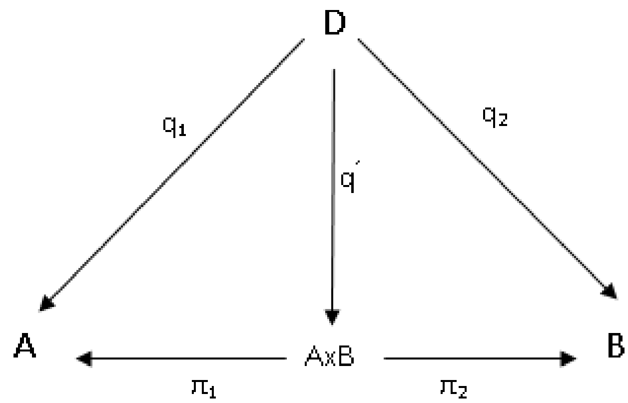
$$\begin{aligned}(\pi_2 \circ q)(x) &= \pi_2(q(x)) = \pi_2(q_1(x), q_2(x)) \\ &= q_2(x)\end{aligned}$$

olduğundan $\pi_1 \circ q = q_1$, $\pi_2 \circ q = q_2$ dir. Şimdi bu biçimde tanımlanan q homomorfizminin bir tek olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagram değişmeli olacak biçimde

$$q' : D \to A \times B$$

homomorfizmini ele alalım.

$$\begin{aligned} q' : D &\to A \times B \\ x &\to q'(x) = (q_1'(x), q_2'(x)) \end{aligned}$$



Şekil 4.2

Bu durumda diyagram değişmeli olduğundan $\forall x \,\epsilon\, D$ için

$$(\pi_1 \circ q')(x) \;=\; q_1(x) \quad ve \quad (\pi_2 \circ q')(x) \;=\; q_2(x)$$

olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \pi_1(q'(x)) &= \pi_1(q'_1(x), q'_2(x)) \\ &= q'_1(x) = q_1(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \pi_2(q'(x)) &= \pi_2(q'_1(x), q'_2(x)) \\ &= q'_2(x) = q_2(x) \end{aligned}$$

olup $q' = q$ elde edilir. Yani $q : D \to A \times B$ homomorfizmi bir tektir.
Sonuç olarak A, B objelerinin çarpım objesi

$$A \times B \;=\; \{(x, y) | x \epsilon A, y \epsilon B\}$$

objesidir.

Önerme 4.5 P_2 kategorisinde aynı tanım ve görüntü kümesine sahip her morfizm çifti bir eşitleyiciye sahiptir.

İspat: X ve Y, P_2 kategorisinin iki objesi olmak üzere $f, g : X \to Y$ morfizmler olsun.

$$E \;=\; \{x : x\epsilon X,\; f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

olmak üzere E, X in bir alt geometrisidir. $E \subset X$ olup f ve g morfizmler olduğundan $f(e_X) = e_Y$ ve $g(e_X) = e_Y$ dir. Buradan $f(e_X) = g(e_X)$ elde edilir. Bu durumda $e_X \epsilon E$ dir.

$$\exists\; x_1, x_2 \;\epsilon\; E \text{ için } (x_1, x_2, x) \;\epsilon\; \Delta_X$$

olsun. f, g birer homomorfizm olduğundan

$$(x_1, x_2, x)\epsilon\Delta_X \quad\Rightarrow\quad (f(x_1), f(x_2), f(x))\epsilon\Delta_Y \quad ve \quad (g(x_1), g(x_2), g(x))\epsilon\Delta_Y$$

dir. $x_1, x_2\epsilon E$ için $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ dir. X ve Y geometrileri sharp geometri olduğundan dolayı $f(x) = g(x)$ olup $x \;\epsilon\; E$ elde edilir. Öyleyse E bir alt geometridir.
Şimdi

$$i : E \to X$$
$$x \to x$$

biçiminde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşüm bir homomorfizmdir. Ayrıca $f \circ i = g \circ i$ dir. Gerçekten de $\forall x\epsilon E$ için

$$(f \circ i)(x) = \;\; f(i(x)) \;\; = \;\; f(x) \;\; = \;\; g(x) \;\; = \;\; g(i(x)) \;\; = \;\; (g \circ i)(x)$$

dir. $\forall x\epsilon E$ için $(f \circ i)(x) = (g \circ i)(x)$ olduğundan $f \circ i = g \circ i$ elde edilir.
Diğer taraftan

$$k : E' \to X$$

bir geometrik homomorfizm ve $f \circ k = g \circ k$ olsun. Her $x \;\epsilon\; E'$ için

$$(f \circ k)(x) = f(k(x) = g(k(x) = (g \circ k)(x)$$

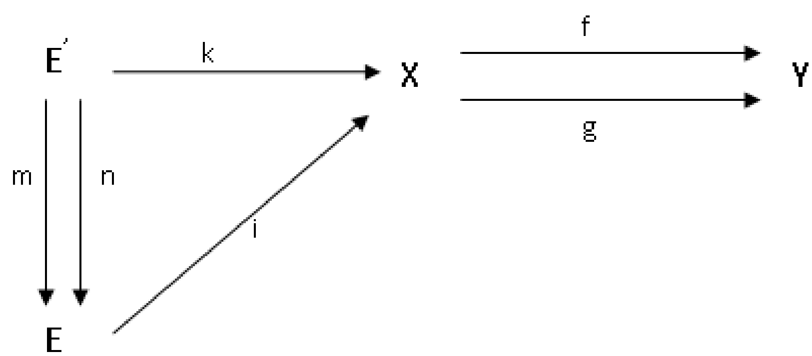
olduğundan $k(x) \;\epsilon\; E$ elde edilir. Böylece $\mathrm{Im}(k) \subset E$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} h \ : \ E' \ &\rightarrow \qquad E \\ x \ &\rightarrow \ h(x) = k(x) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. Bu durumda $i \circ h = k$ dır. Gerçektende $\forall x \epsilon E'$ için

$$(i \circ h)(x) = i(h(x)) \ = \ i(k(x)) \ = k(x)$$

dir. Şimdi



Şekil 4.3

diyagramı değişmeli olacak biçiminde $m, n : E' \rightarrow E$ dönüşümleri seçelim. Bu durumda

$$i \circ n = k \quad ve \quad i \circ m = k$$

olur. $\forall x \ \epsilon \ E'$ için $k(x) = (i \circ n)(x) = i(n(x)) = n(x)$ ve $k(x) = (i \circ m)(x) = i(m(x)) = m(x)$ olduğundan $\forall x \ \epsilon \ E'$ için $n(x) = m(x)$ olur. Yani E' den E ye tanımlanan ve yukarıdaki diyagramı değişmeli yapan bir tek homomorfizm vardır. Böylece (E, i) ikilisi f ve g dönüşümlerinin bir eşitleyicisidir.

Önerme 4.6 P_2 Sharp geometrilerinin kategorisi olmak üzere bu kategoride geri çekimler vardır.

İspat: $\theta : A \rightarrow X$ ve $\phi : B \rightarrow X$ geometrik homomorfizmler ve

$$Y \ = \ \{(a, b) : \theta(a) = \phi(b)\}$$

olsun. $Y \subseteq A \times B$ olup $A \times B$ üzerinde tanımlanan çarpım kategorisinin alt geometrisidir. Gerçekten de $Y \subseteq A \times B$ ve $(e_A, e_B) \in Y$ dir.

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Y \text{ ve } ((a_1, b_1), (a_2, b_2)(x_1, x_2)) \in \Delta_{A \times B}$$

olsun. Çarpım kategorisinin tanımından

$$(a_1, a_2, x_1) \in A \text{ ve } (b_1, b_2, x_2) \in B$$

olur. θ ve ϕ birer homomorfizma olduklarından

$$(\theta(a_1), \theta(a_2), \theta(x_1)) \in X \quad \text{ve } (\phi(b_1), \phi(b_2), \phi(x_2)) \in X$$

elde edilir. $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Y$ olduğundan $\theta(a_1) = \phi(b_1), \theta(a_2) = \phi(b_2)$ olup, X sharp geometri olduğundan $\theta(x_1) = \phi(x_2)$ dir. Buradan $(x_1, x_2) \in Y$ elde edilir. Böylece Y bir altgeometridir.

Şimdi

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & Y & \to & A \\ & (a,b) & \to & a \end{array}$$

ve

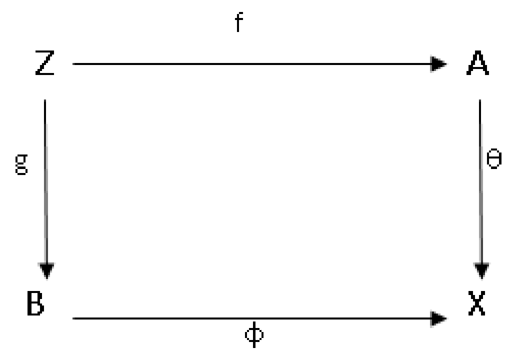
$$\begin{array}{rccc} \beta : & Y & \to & B \\ & (a,b) & \to & b \end{array}$$

dönüşümlerini tanımlayalım (bu dönüşümler birer homomorfizmdir). Açıkça görüldüğü gibi

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Şekil 4.4

diyagramı değişmelidir. Şimdi bu diyagramın bir geri çekme diyagramı olduğunu gösterelim. f ve g dönüşümleri birer homomorfizm ve Z bir geometri olmak üzere



Şekil 4.5

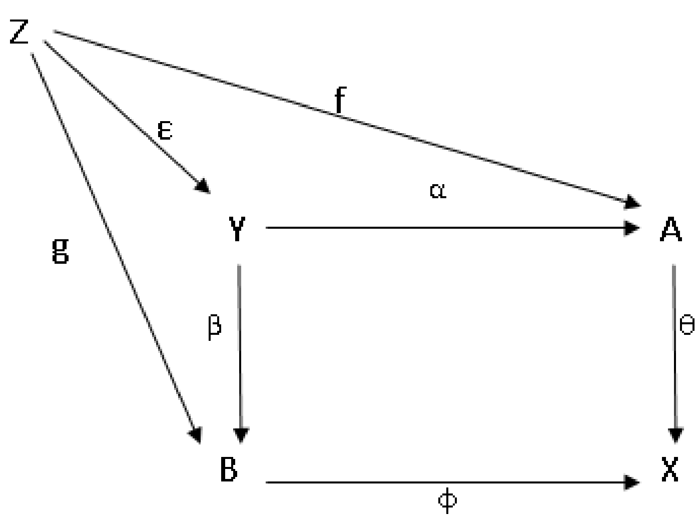
diyagramı değişmeli olsun. Yani $\theta \circ f = \phi \circ g$ olsun. Bu durumda her $x \epsilon Z$ için

$$(\theta \circ f)(x) = \theta(f(x)) \quad = \quad \phi(g(x)) = (\phi \circ g)(x)$$

olup $(f(x), g(x)) \epsilon Y$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon \ : \ Z &\rightarrow Y \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

olacak biçiminde bir dönüşüm tanımlayalım. Bu durumda



Şekil 4.6

diyagramında alt ve üst üçgenler değişmelidir.Şimdi $\varepsilon : Z \to Y$ dönüşümünün bir tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon' & : & Z \;\to\; Y \\ & & x \;\to\; (f'(x), g'(x)) \end{array}$$

dönüşümü için $\beta \circ \varepsilon' = g$ ve $\alpha \circ \varepsilon' = f$ olsun. Bu durumda

$$\beta(\varepsilon'(x)) = \beta((f'(x), g'(x)) = g'(x) = g(x)$$

ve

$$\alpha(\varepsilon'(x)) = \alpha((f'(x), g'(x)) = f'(x) = f(x)$$

olduğundan $\varepsilon = \varepsilon'$ elde edilir ki bu durumda $\varepsilon \ : \ Z \ \to \ Y$ dönüşümü bir tektir.

Önerme 4.7 P, Pasch geometriler kategorisini göstermek üzere, $Ob(\mathbf{P})$ deki her A, B geometrileri için $f, g \ \epsilon \ Mor_P(A, B)$ olmak üzere

$$f \sim g \Leftrightarrow \forall a \ \epsilon \ A \text{ için } f(a) = bg(a)b^{\#} \text{ olacak biçimde } b \ \epsilon \ B \text{ vardır.}$$

biçiminde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısı olup aynı zamanda bir kongüranstır.

İspat: Önce tanımlanan bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

1 (Yansıma özelliği): $f \sim f \Leftrightarrow \forall a \ \epsilon \ A$ için $f(a) = bf(a)b^{\#}$ olacak biçiminde $b \ \epsilon \ B$ vardır. $\forall a \ \epsilon \ A$ için $b = f(a)$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a)f(a)[f(a)]^{\#} \\ &= f(a)e_B \\ &= f(a) \end{aligned}$$

olup $f \sim f$ elde edilir.

2 (Simetri özelliği): $f \sim g \Rightarrow g \overset{?}{\sim} f$

$f \sim g$ olduğunda $\forall a \ \epsilon \ A$ için $f(a) = bg(a)b^{\#}$ olacak biçiminde $b \ \epsilon \ B$ nin var olduğunu biliyoruz. $\forall a \ \epsilon \ A$ için $d = b^{\#}$ alalım. Bu durumda

$$f(a) = bg(a)b^{\#} \ \Rightarrow \ b^{\#}f(a)b = g(a) \ \Rightarrow \ df(a)d^{\#} = g(a)$$

elde edilir. O halde $\forall a \in A$ için $g(a) = df(a)d^{\#}$ olacak biçiminde $d = b^{\#} \in B$ vardır. Sonuç olarak $g \sim f$ dir.

3 (Geçişkenlik özelliği): $f \sim g$ ve $g \sim h \Rightarrow f \overset{?}{\sim} h$

$f \sim g$ ve $g \sim h$ olduğundan $\forall a \in A$ için $f(a) = b_1 g(a) b_1^{\#}$ ve $g(a) = b_2 h(a) b_2^{\#}$ olacak biçiminde $b_1, b_2 \in B$ vardır.

$$\begin{aligned} f(a) &= b_1 g(a) b_1^{\#} \\ &= b_1(b_2 h(a) b_2^{\#}) b_1^{\#} \\ &= b_1 b_2 h(a) b_2^{\#} b_1^{\#} \\ &= (b_1 b_2) h(a) (b_1 b_2)^{\#} \end{aligned}$$

olup $f(a) = bh(a)b^{\#}$ olacak biçiminde $b = b_1 b_2 \in B$ vardır. Yani $f \sim h$ dır.

Böylece $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Şimdi bu bağıntının bir kongürans olduğunu gösterelim.

(i) $Ob(\mathbf{P})$ deki her A, B geometrileri için $f \in Mor_P(A, B)$ olmak üzere

$$[f]_{\sim} \;=\; \{g : g \in Mor_P(A, B),\ f \sim g\} \;\subseteq\; Mor_P(A, B)$$

dir.

ii) $[f] = [f']$ ve $[g] = [g']$ ise $[f] \circ [g] = [f'] \circ [g']$ yani $[g \circ f] = [g' \circ f']$ olduğunu gösterelim.

$$f, f' : A \to B \ \text{ ve } \ g, g' : B \to C$$

morfizmler olsun.

$f \sim f'$ olduğundan $\forall a \in A$ için $f(a) = b_1 f'(a) b_1^{\#}$ olacak biçimde $b_1 \in B$ vardır. Benzer şekilde $g \sim g'$ olduğundan $\forall b \in B$ için $g(b) = c_1 g'(b) c_1^{\#}$ olacak biçimde $c_1 \in C$ vardır.

$$\begin{aligned} \forall a \in A \text{ için} \quad (g \circ f)(a) &= g(f(a)) \\ &= g(b_1 f'(a) b_1^{\#}) \\ &= g(b_1) g(f'(a)) g(b_1)^{\#} \\ &= g(b_1) c_1 g'(f'(a)) c_1^{\#} g(b_1)^{\#} \\ &= (g(b_1) c_1)(g' \circ f')(a)(g(b_1) c_1)^{\#} \end{aligned}$$

$g(b_1)c_1 = c_2$ olsun. Bu durumda

$$(g \circ f)(a) = c_2(g' \circ f')(a)c_2^{\#}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$[g \circ f] = [g' \circ f']$$

dir.

(i) ve (ii) koşulları sağlandığından dolayı $\sim$ eşlenik bağıntısı $Mor(\mathbf{P})$ üzerinde bir kongüranstır.

Şimdi $\mathbf{P}$ nin bölüm kategorisini oluşturalım.

* $Ob(\mathbf{P}/\sim) = Ob(\mathbf{P})$

* $Mor(\mathbf{P}/\sim) = \{[f]_\sim | \sim$ eşlenik bağıntısı$\}$,

*$[f]_\sim = \{g \mid f \sim g \Leftrightarrow \forall a \epsilon A$ için $f(a) = bg(a)b^{\#}$ olacak biçiminde $b \epsilon B$ vardır.$\}$

* $[f], [g] \epsilon Ob(\mathbf{P}/\sim)$ olmak üzere kompozisyon işlemi $[f] \circ_{\mathbf{P}/\sim} [g] = [g \circ_P f]$ biçimindedir.

Bu işlemin K1,K2 şartlarını sağladığını gösterelim.

K1) $\forall f \epsilon Mor(A,B), g \epsilon Mor(B,C)$ ve $h \epsilon Mor(C,D)$ için $([f] \circ [g]) \circ [h] \stackrel{?}{=} [f] \circ ([g] \circ [h])$

$$\begin{aligned}
([f] \circ [g]) \circ [h] &= [g \circ f] \circ [h] \\
&= [h \circ (g \circ f)] \\
&= [(h \circ g) \circ f] \qquad \text{(P bir kategori olduğundan)} \\
&= [f] \circ [h \circ g] \\
&= [f] \circ ([g] \circ [h])
\end{aligned}$$

olduğundan $([f] \circ [g]) \circ [h] = [f] \circ ([g] \circ [h])$ elde edilir.

K2) $Ob(\mathbf{P}/\sim)$ deki her A objesi için $1_A : A \to A$ birim morfizmi var olup

$$f \epsilon Mor(X,Y)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
[1_X]_\sim \circ_{\mathbf{P}/\sim} [f]_\sim &= [f \circ_P 1_X] \\
&= [f]_\sim
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[f]_\sim \circ_{\mathbf{P}/\sim} [1_Y]_\sim &= [1_Y \circ_P f]_\sim \\
&= [f]_\sim
\end{aligned}$$

yani $[1_X]_\sim \circ_{\mathbf{P}/\sim} [f]_\sim = [f]_\sim = [f]_\sim \circ_{\mathbf{P}/\sim} [1_Y]_\sim$ dır. Böylece $\mathbf{P}/\sim$ bir bölüm kategorisidir.

KAYNAKLAR

Bican, Z. 2007. İlgili Kategoriler Üzerine, Yüksek lisans tezi. Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 81 s., Eskişehir.

Aytekin, A. 2010. Lie-Rinehart Cebirlerin Çaprazlanmış modülleri, Doktora tezi. Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 89 s., Eskişehir.

Oosten, J. V. 1995. Basic Category Theory, BRICS, Department of Computer Science University of Aarhus Ny Munkegade DK-8000 Aarhus C, Denmark.

Barr, M., Charles, W. 1999. Category Theory Lecture Notes For ESSLLI, Department of Mathematics and Statistics McGill Universty, Canada, Deparment of Mathematics Case Western reserve University, USA.

Blyth, T.S. 1986. Categories, Logman Publishing Group, Harlow/New York.

Fokkinga, M. M. 1992. A Gentle Introduction To Category Theory, University of Twente, dept. INF PO Box 217, The Netherlands.

Bhattarai, H. N. 1999. Categories Of Projective Geometries With Morphism and Homomorphism, Geometriae Dedicata 78: 111-120

Harrison, D. K. 1979. Double Coset And Orbit Spaces, Pacific J. Math, Vol. 80, No.2.

Bhattari, H. N. 1993. Orbit Spaces Over Commutative Rings And Projective As Semi-İsomorphisms, International Atomic Energy Agency.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Hidayet Hüda KÖSAL
Doğum Yeri	:	ANKARA
Doğum Tarihi	:	08.08.1987
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim	:	hhudakosal@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Mamak Lisesi, 2004.
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2009.
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.