ZAYIF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elvan CEYLAN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAYIF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Elvan CEYLAN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2010

ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Fatih NURAY'ın danışmanlığında,
Elvan CEYLAN tarafından hazırlanan
"Zayıf İstatistiksel Yakınsaklık"
başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca
. . . ../. . . ../. . . ..
tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Fatih NURAY	....
Üye	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	....
Üye	Yrd. Doç. Dr. Murat PEKER	....

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../2010 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıstır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAYIF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Elvan CEYLAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Haziran 2010

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

İstatistiksel yakınsaklık son yıllarda çok önem kazanmış ve bu alanda pek çok makale yayınlanmıştır. Zayıf yakınsaklık fonksiyonel analizin önemli konularındandır. Zayıf istatistiksel yakınsaklığın tanımlanmasıyla literatürde önemli bir boşluk doldurulmuş olacaktır. Bu tez çalışmasında, normlu uzaylarda dizilerin zayıf istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Zayıf istatistiksel yakınsaklığın, zayıf yakınsaklığın bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bugüne kadar tanımlanmamış olan zayıf lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve incelenmiştir.

2010, 43 Sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, lacunary dizisi, zayıf yakınsaklık, zayıf istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

WEAK STATISTICAL CONVERGENCE

Elvan CEYLAN

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
June 2010

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

Recently, statistical convergence has become an active area of research and many articles were published in this area. Weak convergence is an important subject of functional analysis. After weak convergence was defined, a big gap in the literature was filled. In this thesis, weak statistical convergence of sequences in normed spaces was investigated. It was shown that weak statistical convergence is a generalization of the usual notion of weak convergence. Also we have introduced and examined a new concept of weak lacunary statistical convergence.

2010, 43 Pages

Key Words: Statistical convergence, almost convergence, lacunary sequence,weak convergence,weak statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinden başlayarak, çalışmamın her aşamasında değerli öneri ve uyarılarıyla önümü açan, yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Fatih NURAY'a,

Tezimin son halinin oluşmasına kadar her konuda bana yardımcı olan sayın Arş. Grv. Uğur ULUSU'a,

Çalışmamda çeşitli noktalara dikkatimi çeken ve fikirlerini paylaşmaktan çekinmeyen hocam sayın Arş. Grv. Hafize GÖK'e,

Yazım aşamasında yardımcı olan sayın Arş. Grv. Başak KARPUZ'a,

Çalışmam esnasında maddi ve manevi konuda desteklerini esirgemeyen değerli aileme,

En içten teşekkürlerimi sunarım.

Elvan CEYLAN, 2010.

SİMGELER DİZİNİ

$\lvert K_n \rvert$	:	K_n kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	:	K kümesinin yoğunluğu
(x_k)	:	dizi
(x_{k_n})	:	alt dizi
$\lvert x_k \rvert$	:	(x_k) dizisinin mutlak değeri
$\lvert\lvert x_k \rvert\rvert$	:	(x_k) dizisinin normu
L	:	Lineer uzay
F	:	Cisim
N	:	Normlu uzay
B	:	Banach uzayı
H	:	Hilbert uzayı
(X, d)	:	Metrik uzay
$(X, <, >)$	:	İç çarpım uzayı
l_∞	:	Tüm sınırlı diziler kümesi
c	:	Tüm yakınsak diziler kümesi
c_0	:	0 a yakınsayan diziler kümesi
l_p	:	$\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert^p < \infty$ o.ü. tüm (x_n) diziler kümesi
$spanA$	:	A kümesinin gereni
$\xrightarrow{st}$	.	İstatistiksek yakınsaklık
$\xrightarrow{w-st}$	:	Zayıf istatistiksel yakınsaklık
$\xrightarrow{w}$	:	Zayıf yakınsaklık
$\xrightarrow{S_\theta}$	:	Lacunary istatistiksel yakınsaklık
$\xrightarrow{WS_\theta}$	:	Zayıf Lacunary istatistiksel yakınsaklık
X^*	:	X uzayınn duali
$boyX$	:	X uzayının boyutu
w	:	Kuvvetli toplanabilir diziler uzayı
AC	:	Hemen hemen yakınsak diziler kümesi
WAC	:	Zayıf hemen hemen yakınsak diziler kümesi
$[AC]$	:	Kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler kümesi
$[WAC]$	:	Zayıf kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler kümesi

1 GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. 1951'de Steinhaus ve Fast'ın reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımlamasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve birçok genelleştirmesi Salat (1980), J.A.Fridy (1985), J.A.Fridy ve M.K.Khan (1998), H.I.Miller (1995), F.Nuray ve W.H.Ruckle (2000) tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık tanımının verilmesinden bu yana elli yıl geçmiş olmasına rağmen bu kavram son yıllarda araştırma alanında etkin olmuştur. Bu kavrama sayı teorisi (Erdös and Tenenbaum, 1989), ölçü teorisi (Miller, 1995), trigonometrik seriler (Zygmund, 1979), toplanabilme teorisi (Freedman and Sember, 1981), yerel yakınsak uzaylar (Maddox, 1988), güçlü integral toplanabilme çalışması (Connor and Swardson, 1993), turnpike teorisi (Makarov, Levin and Rubinov, 1995; Pehlivan and Mamedov, 2000) ve Banach uzaylar (Connor, Ganichev and Kadets, 2000) gibi çeşitli alanlarda başvurulmaktadır.

K kümesi $\mathbb{N}$ pozitif tamsayıların bir alt kümesi olsun. K_n, $\{k \in K : k \leq n\}$ kümesiyle tanımlansın. $|K_n|$, K_n kümesinin elemanlarının sayısını göstersin. K kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} |K_n|$ şeklindedir (Niven and Zuckerman, 1980). Eğer $\delta(K) = 1$ ise K istatistiksel yoğundur denir (Burgin and Duman). $\{3k : k = 1, 2, ...\}$ kümesi istatistiksel yoğun değil iken $\{k \in \mathbb{N} : k \neq m^2, m = 1, 2, ...\}$ kümesi istatistiksel yoğundur. Eğer bir dizinin elemanlarının bütün indekslerinin kümesi istatistiksel yoğun ise bu dizinin bir alt dizisi de istatistiksel yoğundur denilir (Burgin and Duman).Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise (x_k) dizisi (reel veya kompleks) L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st-\lim x_k = L$ şeklinde gösterilir.

Reel değerli diziler için istatistiksel yakınsak diziler çoğu kez yakınsak dizilerin alışılmış niteliklerinin istatistiksel benzerliklerini sağlar. Örneğin, istatistiksel yakınsak diziler istatistiksel sınırlıdır; bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart onun istatistiksel Cauchy olmasıdır,vs.(Fast, 1951)

$x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k'lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.k$ şeklinde gösterilir (Fridy, 1985).

Fridy (1985) istatistiksel Cauchy dizisi kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

olacak şekilde veya $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Fridy (1985), bir sayı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart o dizinin istatistiksel Cauchy olmasıdır ifadesini ispatladı. Skaler dizilerin yerine bir Banach uzayından alınan bütün diziler için bu ifadenin doğru olduğu Kolk (1991) tarafından gösterildi.

Fridy ve Orhan (1997) istatistiksel sınırlı diziyi aşağıdaki şekilde tanımladılar. $h.h.k$ için $|x_k| \leq B$ veya $\delta \{ k : |x_k| > B \} = 0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa $x = (x_k)$ sayı dizisi istatistiksel sınırlıdır denir.

Yine istatistiksel liminf ve limsup kavramları Fridy ve Orhan (1997) tarafından tanımlandı.

Maddox (1988), istatistiksel yakınsaklık kavramını keyfi yerel konveks Hausdorff topolojik vektör uzayındaki dizilere genişletmiştir. Kolk (1991) da Banach uzayındaki istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerinde çalışmıştır.

Oldukça yakın zamanda, Connor, Ganichev ve Kadets (2000) zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladılar ve zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramı aracılığıyla ayrılabilir duallerle Banach uzayını tanımladılar.

2 GENEL BİLGİLER

Bu bölümde konuyu iyi anlayabilmek için bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye F üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

A. L, $+$ işlemine göre değişmeli grup olmalı
G1. $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$
G2. $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$
G3. $\forall x \in L$ için $x + \theta = x = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ var
G4. $\forall x \in L$ için $x + (-x) = \theta = (-x) + x$ olacak şekilde $-x \in L$ var
G5. $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$

B. $\begin{array}{ccc} F \times L & \rightarrow & L \\ (\alpha, x) & \rightarrow & \alpha x \end{array}$ biçiminde, adına skaler çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular. $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y \in L$ için
L1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
L2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
L3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
L4. $1x = x$ $\quad$ (1, F nin birim elemanı) (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2 (Fonksiyon): A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı,
(i) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ var,
(ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$
özelliklerine sahipse f'ye A'dan B'ye bir fonksiyondur denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.3 (Normlu Uzay): N, bir lineer uzay olsun. $\|.\| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değeri $\|x\|$ olsun. Bu fonksiyon için,
N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad (\alpha \in F)$
N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\qquad$ (üçgen eşitsizliği)
şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ ifadesine N de bir norm denir. Normlu uzaylar $(N, \|.\|)$ şeklinde gösterilir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.4 (Dizi): Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye *reel terimli dizi*, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olan diziye *rasyonel terimli dizi* adı verilir. Dizi $x = (x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.5 (Alt Dizi): $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ k(n) = k_n$$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$$(xok) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir alt dizisi adı verilir ve

$$(xok)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.6 (Ortonormal Küme): V iç çarpım uzayında, $\langle u, v\rangle = \mathbf{0}$ ise u vektörü, v vektörüne diktir (veya ortogonaldir) denir.
Her vektörü sıfırdan farklı olan bir S kümesinin vektörleri ikişer ikişer birbirine dik ise bu S kümesine ortogonal küme denir. $u \in V$ ve $u \neq 0$ olmak üzere, $\{u\}$ kümesi ortogonal bir küme olarak düşünülür.
Normu 1 olan vektöre birim vektör denir. Ortogonal bir kümenin her vektörü birim vektör ise bu kümeye ortonormal küme adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7 (Bessel Eşitsizliği): V bir reel iç çarpım uzayı ve $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ ortonormal bir küme olsun.

$$\forall u \in V, \quad \sum_{j=1}^{k} |\langle u, \alpha_j\rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

eşitsizliğine Bessel eşitsizliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.8 (Komşuluk): $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x : |x - a| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine a nın ε-komşuluğu denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.9 (Yakınsak Dizi): (x_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε' na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi a ya yakınsaktır denir ve

$$\lim x_n = a \text{ veya } (x_n) \to a$$

şeklinde gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.10 (Sınırlı Dizi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.11 (Cauchy Dizisi): (x_n) bir reel terimli dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Balcı, 1999).

Teorem 2.1 (Cauchy Yakınsaklık Testi): (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır (Balcı, 1999).

Tanım 2.12 (Metrik Uzay):$X \neq \varnothing$ olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,
M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
M2. $d(x, y) = d(y, x)$
M3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X'e metrik uzay denir. Bu genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilmiştir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.13 (Cauchy Dizisi ve Tam Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. X deki her (x_n) Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına *tam metrik uzay* veya kısaca tam denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.14 (İç Çarpım Uzayı): X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.
$\langle , \rangle : X \times X \to F$ fonksiyonu,
(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$
(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonu tanımlanan vektör uzayına iç çarpım uzayı denir ve $(X, \langle , \rangle)$ şeklinde gösterilir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.15 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\|.\|$ iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzaydır. İç çarpım normu ile tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X' e Hilbert uzayı denir. Bu tanımdan anlaşılmaktadırki Hilbert uzayları özel Banach uzaylarıdır (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.16 (Banach Uzay): $(N, \|.\|)$ normlu lineer uzay olsun. N norm metriğine göre tam ise N'ye Banach uzayı denir (Bayraktar, 2000).

$$\underbrace{d(x, y) = \|x - y\|}_{\text{norm metriği}}$$

Tanım 2.17 (Fonksiyonel): $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olmak üzere L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $f : L \to F$ operatörüne fonksiyonel denir. f aynı zamanda lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.18 (Sürekli Dual): $N^* = C(N, F) = \{f : f : N \to F, sürekli\}$ kümesine N'nin sürekli duali denir.

Tanım 2.19 (Limit Noktası): (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (x_n) dizisinin bir limit noktası denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.20 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir (Balcı, 1999).

Tanım 2.21 (Fonksiyon Dizisi): $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi adı verilir (Balcı, 1997).

Teorem 2.2 (Banach-Steinhaus Teoremi): Eğer (A_n), bir X Banach Uzayından normlu Y uzayı içinde sınırlı lineer dönüşümlerin bir dizisi ve X üzerinde

$$\lim_n \sup \|A_n(x)\| < \infty$$

ise bu taktirde

$$\sup_n \|A_n\| < \infty$$

dır.

Tanım 2.22 (l_p Uzayı):

$$l_p = \left\{ (x_n) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\} \qquad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlı dizilerin uzayına l_p uzayı denir.

Tanım 2.23 (c_0 Uzayı): Sıfır dizilerinin uzayıdır.
Yani $x = (x_k) \in c_0 \Rightarrow (x_k) \to 0$ dır.

Tanım 2.24 (Taban): V, K cismi üstünde bir vektör uzayı ve $\varphi \in V$ olsun. φ lineer bağımsız ve $Sp\varphi = V$ ise φ'ye V vektör uzayının bir tabanı denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.25 (Sonlu boyutlu uzay): K cisim olmak üzere, K cismi üzerindeki bir X lineer uzayının tabanının eleman sayısına o uzayın boyutu denir ve boyX ile gösterilir. X'in sonlu bir tabanı varsa X'e sonlu boyutlu uzay, aksi halde sonsuz boyutlu uzay denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.26 (Karakteristik fonksiyon): X bir küme, A$\subset$X olsun.$\chi_A : X \to \{0,1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in X \setminus A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 2.27 (Yarınorm): X bir reel lineer uzay, $P : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağlarsa, P'ye X'de bir alt yarınorm denir.
(i) $\forall \lambda \geq 0$, $P(\lambda x) = \lambda P(x)$
(ii) $\forall x, y \in X$, $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

Görülüyorki her norm ve her yarınorm bir alt yarınormdur. P bir alt yarınorm ise $P(B) = 0$ ve $\forall x \in X$, $P'(x) = P(-x)$ ile tanımlı P' de bir alt yarınormdur.
$N = P + P'$ ile tanımlı N fonksiyonu
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in X$ için
(i) $N(\lambda x) = P(\lambda x) + P(-\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(ii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
koşullarını sağladığından bir yarınormdur (Kızmaz, 1993).

Teorem 2.3 (Reel Lineer Uzaylarda Hahn-Banach Teoremi): X bir reel lineer uzay, $M \subset X$ bir alt uzay ve P de X üzerinde bir alt yarınorm olsun. $f \in L(M, \mathbb{R})$ ve $\forall x \in M$, $f(x) \leq P(x)$ koşulu sağlansın. Bu taktirde f'in X'e bir F lineer genişletilmişi vardır, öyleki $\forall x \in X$ için $F(x) \leq P(x)$ dir (Kızmaz, 1993).

Teorem 2.4 (Kompleks Lineer Uzaylarda Hahn-Banach Teoremi): X bir lineer uzay, $M \subset X$ bir alt uzay ve P de X üzerinde bir yarınorm olsun. $f \in L(M, \mathbb{C}) = M$ ve $\forall x \in M, |f(x)| \leq P(x)$ ise, f'in X'e genişletilmişi bir $F \in L(X, \mathbb{C})$ vardır öyleki $\forall x \in X, |F(x)| \leq P(x)$ dir (Kızmaz, 1993).

Tanım 2.28 (Reflexive Uzay): X bir Banach uzay olsun. X'in sürekli dualini X^* ile tanımlayalım. Yani X'den $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'ye bütün sürekli lineer dönüşümlerin uzayı olsun. Bu yüzden X^* bir Banach uzaydır. X^{**}, X^*'nın sürekli dualidir. $\forall \varphi \in X^*$ ve $\forall x \in X$ için $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ ile tanımlanan $J : X \to X^{**}$ sürekli lineer dönüşümü vardır.Hahn-Banach teoremine göre J norm koruma özelliğine sahiptir. Yani $\|J(x)\| = \|x\|$ eşitliği vardır. Bu yüzden J örtendir. Eğer J birebir ise X uzayına reflexive uzay denir (Kızmaz, 1993).

3 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE ZAYIF YAKINSAKLIK

Bu bölümde yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve zayıf yakınsaklık kavramları ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık tanımını vermeden önce bu kavramın ortaya çıkmasına neden olan yoğunluk kavramını verelim.

Bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını $|K|$ ile gösterelim. Yani $|K| := cardK$ olsun.

Tanım 3.1.1: $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Buna göre K kümesinin *alt* ve *üst yoğunluğu* sırasıyla

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{|K_n|}{n}, \qquad \overline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|K_n|}{n}$$

olarak verilir. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması ($\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$) durumunda bu limite K kümesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani,

$$\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dir (Niven vd., 1991).

Doğal yoğunluk kavramının daha iyi anlaşılması için Gürdal tarafından 2004 de verilen aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1.1: $K = \{1,\ 4,5,6,\ \ 13,14,...,24,\ \ \ 49,50,...,96,\ \ 193,194,...\}$ şeklinde verilsin. K indeks kümesi için $\dfrac{|K|}{n}$ ifadesini oluşturalım.

(a) $\dfrac{|K|}{n}$ ifadesinin üst limitini ($\limsup$) oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3}$$

şeklindedir.

(b) $\dfrac{|K|}{n}$ ifadesinin alt limitini ($\liminf$) oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu örnek için

$$\begin{aligned} \underline{\delta}(K) &= \lim_{n\to\infty} \inf \tfrac{|K_n|}{n} = \tfrac{1}{3} \\ \overline{\delta}(K) &= \lim_{n\to\infty} \sup \tfrac{|K_n|}{n} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

olduğundan $\underline{\delta}(K) \neq \overline{\delta}(K)$ dir. Bu nedenle K kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi alt ve üst yoğunluğu olmasına rağmen doğal yoğunluğu olmayan kümeler de vardır. $\delta(K)$ veya $\delta(\mathbb{N}\backslash K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N}\backslash K)$ dır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K) = 0$, yani doğal yoğunluğu sıfırdır.

$x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi *hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor* denir ve "h.h.k." şeklinde gösterilir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını verebiliriz.

Tanım 3.1.2 (İstatistiksel Yakınsaklık): $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\right| = 0$$

ise yani

$$K := K(\varepsilon) := |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geqslant \varepsilon\}|$$

kümesinin yoğunluğu sıfır ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim x = L$$

biçiminde yazılır (Steinhaus 1951, Fast 1951, Fridy 1985).

Adi anlamda yakınsaklık kavramının tanımını hatırlayarak istatistiksel yakınsaklık fikrinin nereden kaynaklandığını açıklamaya çalışıp bu iki kavram arasındaki bağlantıyı kurmaya çalışalım. Bilindiği gibi, adi yakınsaklıkta x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise, L nin her bir ε komşuluğu dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi bu kavramı biraz daha genelleştirerek L noktasının her bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda da elemanının kalabileceğinin kabul edelim. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre çok daha azdır. Yani dizinin "hemen hemen" tüm elemanları, L nin ε komşuluğu içerisindedir. Bu durumda x dizisinin L noktasına "hemen hemen" yakınsak olduğu sonucunu çıkarabiliriz. İstatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanlarının sayısının "az" olması, böyle elemanlarının doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir (Pehlivan, 2001).

Adi anlamda yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak bir dizi olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü x dizisi L ye yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için $K = \{k : |x_k - L| \ge \varepsilon\}$ kümesi sonlu sayıda eleman içerdiğinden yoğunluğu sıfırdır. Yani $\delta(K) = 0$ dır. Fakat bu ifadenin tersi doğru olmayabilir. Yani istatistiksel yakınsak her dizi adi anlamda yakınsak olmayabilir.

Şimdi de Fridy tarafından 1985 te verilen istatistiksel Cauchy dizisi tanımını verelim.

Tanım 3.1.3 (İstatistiksel Cauchy Dizisi) : $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde veya h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy, 1985)

Teorem 3.1.1: İstatistiksel yakınsak her dizi bir istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy, 1985).

İspat: Bu teoremin ispatında "yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir" teoreminin ispatına benzer bir yol izlenecektir. $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise $st-\lim x = L$ dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve h.h.$k.$ için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N, $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L|$$

$$\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (h.h.k.\ \text{ için})$$

elde edilir.

Tanım 3.1.4 (İstatistiksel Limit Noktası): Bir $x = (x_k)$ dizisinin $\lambda \in \mathbb{X}$ sayısına yakınsayan seyrek olmayan (yani $\delta(K) > 0$) bir alt dizisi varsa, λ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel limit noktası* denir. Yani $K = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ ve $\delta(K) \neq 0$ olmak üzere $k \to \infty$ için $(x_{n_k}) \to \lambda$ ise λ, x in bir istatistiksel limit noktasıdır (Fridy, 1993).

Tanım 3.1.5 (İstatistiksel Yoğun): K nın doğal yoğunluğu $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} |K_n|$ şeklindedir. Eğer $\delta(K) = 1$ ise K istatistiksel yoğundur.

Tanım 3.1.6 (İstatistiksel Sınırlılık): $h.h.k$ için $|x_k| \leq B$ veya $\delta(\{k : |x_k| > B\}) = 0$ olacak şekilde bir B sayısı var ise $x = (x_k)$ sayı dizisi istatistiksel sınırlıdır.

Tanım 3.1.7 (İstatistiksel Alt ve Üst Limit): Reel sayılar dizisi x için

$$A_x = \{a\epsilon\mathbb{R} : \delta\left(\{k : x_k < a\}\right) \neq 0\}$$
$$B_x = \{b\epsilon\mathbb{R} : \delta\left(\{k : x_k > b\}\right) \neq 0\}$$

olmak üzere

x in istatistiksel üst limiti,

$$st - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x \ ,B_x \neq \varnothing \text{ise} \\ -\infty, B_x = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

x in istatistiksel alt limiti,

$$st - \liminf x = \begin{cases} \inf A_x, A_x \neq \varnothing \text{ ise} \\ +\infty, A_x = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir (Fridy and Orhan, 1997).

3.2 Zayıf Yakınsaklık

(x_n) bir X normlu lineer uzayında bir dizi ise,
$x_n \to a\,(n \to \infty) \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq N$ için $\|x_n - a\| < \varepsilon$ yakınsaklık tanımı verildi. Bu yakınsaklığa "norm yakınsaklığı" veya "kuvvetli yakınsaklık" denildi. Şimdi normlu lineer uzaylarda başka bir yakınsaklık kavramı vereceğiz.

Tanım 3.2.1 (Zayıf Yakınsaklık): (x_n) , X normlu uzayında bir dizi ve $a \in X$ olmak üzere, $\forall f \in X^*$ için $(f(x_n))$ dizisi $\mathbb{C}$'de $f(a) \in \mathbb{C}$'ye kuvvetli yakınsarsa (x_n), $a \in X$'e "zayıf yakınsıyor" denir ve $x_n \underrightarrow{w} a$ gösterimi kullanılır. $a \in X$ de (x_n)'nin zayıf limiti denir.

$$x_n \underrightarrow{w} a \iff \forall f \in X^* \ , \ |f(x_n) - f(a)| \to 0 \ (n \to \infty)$$

(x_n)'nin her alt dizisi de a'ya zayıf yakınsar.

Teorem 3.2.1: Kuvvetli yakınsak her dizi zayıf yakınsaktır.

İspat: X normlu, (x_n) X'de bir dizi ve $x_n \to a\,(n \to \infty)$ olsun.$f \in X^*$ ise

$$|f(x_n) - f(a)| = |f(x_n - a)| \leq \|f\|\,\|x_n - a\| \to 0 \ \ (n \to \infty) \Longrightarrow x_n \underrightarrow{w} a$$

dır.

Teorem 3.2.2: X normlu (x_n) de X'de zayıf yakınsak bir dizi olsun.
(i) (x_n)'nin zayıf limiti tektir.
(ii)(x_n) kuvvetli yakınsamayabilir.
(iii)(x_n) sınırlıdır. Yani $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$ dır.

Teorem 3.2.3: X, Y normlu, $f \in B(X,Y)$, (x_n) X'de bir dizi ve $x_n \underrightarrow{w} a \Longrightarrow f(x_n) \underrightarrow{w} f(a)$ dır.

İspat:
$g \in Y^*$ olsun. $h = gof$ ise açık olarak $h \in X^*$'dır.
$x_n \underrightarrow{w} a \Longrightarrow h(x_n) \to h(a)$ $(n \to \infty)$ dır.
$h(x_n) = (gof)(x_n) = g(f(x_n))$ ve $h(a) = g(f(a))$ olduğundan $\forall g \in M^*$ için
$g(f(x_n)) \to g(f(a))$ $(n \to \infty)$ olduğu görülür. O halde $f(x_n) \underrightarrow{w} f(a)$ dır.

Teorem 3.2.4: X sonlu boyutlu, (x_n) X'de bir dizi olsun. $x_n \underrightarrow{w} a \iff x_n \to a$ $(n \to \infty)$ dır.

İspat:
$x_n \underrightarrow{w} a \Longrightarrow x_n \to a$ olduğunu göstermek yeterlidir.
X n-boyutlu ve $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ X için bir baz olsun. X 'de maksimum normunu dikkate alalım. (x_m) X'de bir dizi ise, herbir $m \in \mathbb{N}$ için $x_m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^m b_i$ şeklindedir.
$x_n \underrightarrow{w} a \Longrightarrow \forall f \in X^*$, $f(x_m) \to f(a)$ $(m \to \infty)$ dir. Herbir $i \in \mathbb{N}$ için,

$$f_i(b_k) = \begin{cases} 1 & , \quad i = k \\ 0 & , \quad i \neq k \end{cases}$$

olacak şekilde $f_i \in X^*$ fonksiyonellerini gözönüne alalım.

$$a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i b_i$$

ise $f_i(x_m) = \lambda_i^{(m)}$ ve $f_i(a) = \lambda_i$ dır.

$f_i(x_m) \to f_i(a)$ $(m \to \infty)$ olduğuna göre $\lambda_i^{(m)} \to \lambda_i$ $(m \to \infty)$ dur. $M = \underset{1 \le k \le n}{maks} \|b_k\|$ ise $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall m > N$ için $\left|\lambda_i^{(m)} - \lambda_i\right| < \dfrac{\varepsilon}{Mn}$ dir. Dolayısıyla,

$$\|x_m - a\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^{(m)} - \lambda_i\right) b_i\right\| < \varepsilon \Longrightarrow x_m \longrightarrow a \ (n \to \infty)$$

dır.

Tanım 3.2.2 (Zayıf Cauchy Dizisi): Normlu bir X uzayı ve $(x_n) \in X$ dizisi verilsin. Eğer her $f \in X^*$ için $(f(x_n))$ bir Cauchy dizisi ise (x_n) dizisine X'te zayıf Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.2.3 (Zayıf Tam Uzay): Normlu bir X uzayındaki her zayıf Cauchy dizisi, X'e zayıf yakınsak ise, X'e zayıf tamdır denir.

4 ZAYIF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsaklık ve zayıf istatistiksel Cauchy dizisi kavramları ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

4.1 Zayıf İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.1 (İstatistiksel Yakınsaklık): X normlu lineer uzay olsun. (x_k), X-değerli bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta(\{k : \|x_k - x\| \geq \varepsilon\}) = 0$ oluyorsa (x_k) dizisi x'e normlu istatistiksel yakınsaktır denir ve bu ifade,

$$st - \lim_k x_k = x$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.2 (Zayıf İstatistiksel Yakınsaklık): X'in sürekli duali olan X^* içindeki her f için $(f(x_k - x))$ dizisi 0'a istatistiksel yakınsak ise (x_k) dizisi x'e zayıf istatistiksel yakınsaktır denir. Bu ifade,

$$w - st - \lim_k x_k = x$$

şeklinde yazılır ve $x, (x_k)$ dizisinin zayıf istatistiksel limitidir denir. Yani,
$X^* = \{f : f : X \to F, \text{ sürekli}\}$, $\forall f \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |f(x_k - x) - 0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (x_k) dizisi x'e zayıf istatistiksel yakınsaktır.

Hanh-Banach teoremine göre kolayca görülürki zayıf istatistiksel yakınsak dizilerin zayıf istatistiksel limiti tektir.

Zayıf istatistiksel yakınsaklık, alışılmış anlamda zayıf yakınsaklığın genellemesidir. Bunu gösterebilmek için iyi bilinen aşağıdaki lemmalara gerek duyulmaktadır.

Lemma 4.1.1 : Eğer $st - \lim x_k = l$ ve her reel x için tanımlanan $g(x)$ fonksiyonu $x = l$ de sürekli ise

$$st - \lim g(x_k) = g(l)$$

dir (Schoenberg, 1959).

Lemma 4.1.2 : (x_k) sayı dizisi l'ye istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = l$ olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır (Salat, 1980).

Lemma 4.1.3 : Eğer $st - \lim x_k = l$, $st - \lim y_k = m$ ve α bir reel sayı ise,
(i) $st - \lim(x_k + y_k) = l + m$
(ii) $st - \lim(\alpha x_k) = \alpha l$
dir (Salat,1980).

Lemma 4.1.4 : (x_k) sayı dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve (x_{k_n}) sınırlı olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır (Tripathy,1997).

Lemma 4.1.5 : $h.h.k$ için $x_k \leq y_k$ olsun. Eğer $st - \lim x_k$ ve $st - \lim y_k$ var ise

$$st - \lim x_k \leq st - \lim y_k$$

dır (Tripathy, 1998).

Lemma 4.1.6 : İstatistiksel yakınsak bir dizinin istatistiksel yoğun bir alt dizisi istatistiksel yakınsaktır (Burgin and Duman).

Mutlak p-toplanabilir skaler dizilerin uzayı $l_p \quad (1 \leq p < \infty)$ uzayıyla tanımlansın ve bu uzay $x = (x_k) \in l_p$ için,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan normla birlikte normlu lineer bir uzaydır. c_{00} uzayıyla herbiri sadece sonlu sayıda sıfır olmayan terimleri içeren $x = (x_k)$ skaler dizilerinin uzayını gösterilsin.

$$c_{00} \subset l_p \qquad (1 \leq p < \infty)$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.1.1 : (x_k) dizisi normlu X uzayında zayıf yakınsak bir dizi ve $w - \lim x_k = x$ olsun. O halde (x_k) dizisi X'de zayıf istatistiksel yakınsaktır. Tersi genelde doğru değildir.

İspat : (x_k) dizisi X normlu uzayında x'e zayıf yakınsak olsun. Yani, $w - \lim x_k = x$ olsun. Zayıf yakınsaklığın tanımından her $f \in X^*$ için $f(x_k) \to f(x)$ dır $((f(x_k))$ dizisi $f(x)$'e yakınsar). O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $|f(x_k - x)| \geq \varepsilon$ olacak şekildeki kümeler sonlu sayıda eleman içerir. Bu ise bu kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olması demektir. Yani, $(f(x_k))$ dizisi $f(x)$ e istatistiksel yakınsaktır.

$$st - \lim f(x_k) = f(x)$$

elde edilir. Zayıf istatistiksel yakınsaklığın tanımından,

$$w - st - \lim x_k = x$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1' in tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilecektir.

Örnek 4.1.1:

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} m &, \quad j \leq k \quad , \quad k = m^2 \text{ ise} \\ \frac{1}{k} &, \quad j \leq k \quad , \quad k \neq m^2 \text{ ise} \\ 0 &, \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlanan $(x_k) \in l_p$ $(1 < p < \infty)$ dizisi var olsun.

(x_k) dizisi zayıf istatistiksel yakınsak ancak zayıf yakınsak değildir. Bunu gösterelim.

$k \neq m^2$ ve keyfi $f \in l_p^*$ için tek $y \in l_q$ vardır. Öyleki,

$$\begin{aligned} |f(x_k)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{(k)} y_j \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(k)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Hölder Eşitsizliğinden)} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k^p} \right)^{\frac{1}{p}} M^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Bazı sabit pozitif } M\text{'ler için)} \\ &= \frac{1}{k} M^{\frac{1}{q}} \to 0, \quad k \to \infty \quad \text{iken} \end{aligned}$$

O halde $(f(x_k))$ dizisi 0'a yakınsaktır. Her yakınsak dizi istatistiksel yakınsak olduğundan $(f(x_k))$ dizisi 0'a istatistiksel yakınsaktır. $(f(x_k))$ dizisi $f(0)$'a istatistiksel yakınsaktır. O halde (x_k) dizisi de 0'a zayıf istatistiksel yakınsaktır.

$k = m^2$ için $f_1(x) = x_1$ şeklindeki l_p üzerinde tanımlı f_1 fonksiyonelini düşünelim. Burada $x = (x_k) \in l_p$ dir.

$$f_1(x_k) = x_1^{(k)} = \sqrt{k} \to \infty, \qquad k \to \infty \text{ iken}$$

olduğu açıktır. Bu yüzden (x_k) zayıf yakınsak değildir. $f_1(x_k) \to f_1(x)$ olmalıydı.

Sonlu boyutlu normlu uzaylardaki normlu istatistiksel yakınsaklıkla zayıf istatistiksel yakınsaklık uyuşmaktadır.

Teorem 4.1.2: Normlu X uzayında (x_k) dizisi,
(i) Normlu istatistiksel yakınsak ise aynı limite zayıf istatistiksel yakınsaktır.
(ii) **(i)** nin tersi genelde doğru değildir.
(iii) Eğer X sonlu boyutlu ise zayıf istatistiksel yakınsaklık normlu istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

İspat:
(i) $st - \lim x_k = l$ ve her reel x için tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu $x = l$ de sürekli olsun. Lemma 4.1.1'den

$$st - \lim f(x_k) = f(l)$$

dir. Zayıf istatistiksel yakınsaklığın tanımından,

$$w - st - \lim x_k = x$$

elde edilir.

(ii) (e_k) H Hilbert uzayında ortonormal bir dizi olsun. Her $f \in H^*, f(x) = \langle x, z \rangle$ Riesz gösterimine sahip olsun. Buradan $f(e_k) = \langle e_k, z \rangle$ dir. (e_k) dizisi zayıf istatistiksel yakınsaktır ama normlu istatistiksel yakınsak değildir.
Bessel eşitsizliğinden,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, z \rangle|^2 \leq \|z\|^2$$

dir.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(e_k)| < \infty$ olduğundan $f(e_k) = \langle e_k, z \rangle$ 0'a yakınsaktır. O halde 0'a istatistiksel yakınsaktır.$(f(e_k))$ dizisi $f(0)$'a istatistiksel yakınsak olduğundan (e_k) dizisi 0'a zayıf istatistiksel yakınsaktır. $w - st - \lim e_k = 0$ dır.

(e_k) normlu istatistiksel yakınsak olsun. O halde (e_k) istatistiksel Cauchy dizisidir. $\forall \varepsilon > 0$ ve $h.h.k$ için $\|e_k - e_N\| < \varepsilon$ olacak şekilde $N = (N(\varepsilon))$ pozitif sayısı vardır.

$$\delta(\{k : \|e_k - e_N\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ifadesi anlamsızdır. Çünkü $\|e_k - e_N\| = \sqrt{2}$ dir.$(k \neq N)$

$$\begin{aligned} \|e_k - e_N\| &= \sqrt{\langle e_k - e_N, e_k - e_N \rangle} \\ &= \sqrt{\langle e_k, e_k \rangle - \langle e_k, e_N \rangle - \langle e_N, e_k \rangle + \langle e_N, e_N \rangle} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Diğer bir örnek olarak,

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} m & , \quad j \leq k \quad , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad j > k \quad , \quad k = m^2 \\ 1 & , \quad j = k \quad , \quad k \neq m^2 \\ 0 & , \quad j \neq k \quad , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi l_p $(1 < p < \infty)$ uzayında bir dizi olsun. Kolayca görülebilirki (x_k) zayıf istatistiksel sıfır dizisidir. Fakat normlu istatistiksel sıfır dizisi değildir.

(iii) Bir dizi,

$$\begin{array}{ccc} \text{Normlu istatistiksel} & \Rightarrow & \text{Zayıf istatistiksel} \\ \text{yakınsak} & \overset{boyX<\infty}{\Leftarrow} & \text{yakınsak} \end{array}$$

$boyX < \infty$ iken (x_k) dizisi zayıf istatistiksel yakınsak olsun.
$\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ X in herhangi bir tabanı ve
$w - st - \lim x_k = x$ olsun. O halde,

$$x_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} e_i \ \ (k = 1, 2, ..) \quad \text{ve} \quad x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$$

dir.

$$f_j(e_j) = 1 \quad , \quad f_j(e_k) = 0 \quad (j \neq k)$$

ile tanımlanan $f_j \in X^*$ $(1 \leq j \leq m)$ lineer fonksiyonellerini düşünelim.
$w - st - \lim x_k = x$ olduğundan her $j = 1, 2, ..., m$ için

$$st - \lim_k f_j(x_k) = f_j(x)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} f_j(x_k) &= f_j\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} e_i\right) \quad \left(\begin{array}{c} f_j(e_i) = 1, i = j \\ f_j(e_i) = 0, i \neq j \end{array}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} f_j(e_i) \\ &= \alpha_j^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_j\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_j(e_i) \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

$$st - \lim_k f_j(x_k) = f_j(x) \Rightarrow st - \lim \alpha_j^{(k)} = \alpha_j$$

Her ε ve $h.h.k$ için $\left|\alpha_j^{(k)} - \alpha_j\right| < \dfrac{\varepsilon}{Km}$ dir. $K = \max\limits_j \|e_j\|$ dir.

$$\begin{aligned} \|x_k - x\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j\right) e_j \right\| \\ &\leq K \sum_{j=1}^{m} \left|\alpha_j^{(k)} - \alpha_j\right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$st - \lim x_k = x$$

dir.

Şimdi normlu bir uzayda zayıf istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanımlayalım.

Tanım 4.1.2 (Zayıf İstatistiksel Cauchy Dizisi): X normlu uzayında (x_k) bir dizi olsun. Her $f \in X^*$ için $(f(x_k))$ istatistiksel Cauchy dizisi ise (x_k) dizisine zayıf istatistiksel Cauchy dizisi denir. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |f(x_k - x_N)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $(f(x_k))$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi, (x_k) dizisine ise zayıf istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Normlu bir uzayda her zayıf istatistiksel yakınsak dizi zayıf istatistiksel Cauchy olduğu açıktır. Ancak tersi doğru olmayabilir.

Örnek 4.1.2: $\|.\|_p$, $\quad 1 < p < \infty$ normu ile c_{00} normlu lineer uzayını düşünelim. $(x_k) \in c_{00}$ dizisi,

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} j \ , & j \leq k \ , \quad k = m^2 \\ \frac{1}{j} \ , & j \leq k \ , \quad k \neq m^2 \\ 0 \ , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Standart tekniklerin kullanılmasıyla bu dizinin zayıf istatistiksel Cauchy olduğu fakat zayıf istatistiksel yakınsak olmadığı kolayca görülebilir.

Eğer uzay Reflexive (dönüşlü) ise her zayıf istatistiksel Cauchy dizisi zayıf istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.1.3: Eğer normlu uzay Reflexive (dönüşlü) ise her zayıf istatistiksel Cauchy dizisi zayıf istatistiksel yakınsaktır.

Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.1.7 : Normlu bir uzayda her zayıf istatistiksel Cauchy dizisi istatistiksel sınırlıdır.

İspat: X normlu uzayında, (x_k) zayıf istatistiksel Cauchy dizisi olsun.Bu taktirde $(f(x_k))$ her $f \in X^*$ için istatistiksel Cauchy dizisidir ve dolayısıyla istatistiksel sınırlıdır. Lemma 4.1.4'e göre her $f \in X^*$ için $\delta(K) = 1$ ve $(f(x_{k_n}))$ dizisi sınırlı olacak şekilde $K = \{k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır.

Her $x \in X$ için $C(x) = g_x$ ile tanımlanan $C : X \to X^{**}$ doğal dönüşümü düşünelim. Burada $g_x \in X^{**}$ her $f \in X^*$ için $g_x(f) = f(x)$ ile tanımlanır. Her zaman $\|g_x\| = \|x\|$ dir. Her $f \in X^*$ için,

$$\sup_n |g_{k_n}(f)| = \sup_n |f(x_{k_n})| < \infty$$

dur. X^* bir Banach uzay olduğundan Banach-Steinhaus teoreminden,

$$\sup_n \left\| g_{x_{k_n}} \right\| < \infty$$

ve buradan,

$$\sup_n \|x_{k_n}\| < \infty$$

elde edilir. Tekrar Lemma 4.1.4'ten (x_k) dizisinin istatistiksel sınırlı olduğu açıktır.

Sonuç 4.1.1: Normlu bir uzayda her zayıf istatistiksel yakınsak dizi istatistiksel sınırlıdır.

Lemma 4.1.7'nin tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 4.1.3: $\mathbb{R}$ de (x_k) dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k \text{ kare} \\ 0 & , \quad k \text{ çift kare} \\ 1 & , \quad k \text{ tek kare} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (x_k) dizisi istatistiksel sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir dolayısıyla zayıf istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 4.1.3 ispatı: (x_k) dizisinin X'de zayıf istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. Yani, her $f \in X^*$ için $(f(x_k))$ istatistiksel Cauchy dizisi olsun.
Lemma 4.1.7'de tanımlandığı gibi $C : X \to X^{**}$ doğal dönüşümünü düşünelim. $(C_{x_k}(f))$ istatistiksel Cauchy'dir ve böylece her $f \in X^*$ için skalerlerin istatistiksel yakınsak bir dizisidir.

$$y(f) = st - \lim_{k\to\infty} C_{x_k}(f)$$

şeklinde tanımlansın. Lemma 4.1.3'ten y lineerdir. Ayrıca Lemma 4.1.7'den (x_k) dizisi istatistiksel sınırlıdır. Bu yüzden $h.h.k$ için $\|x_k\| \le M$ olacak şekilde M pozitif sayısı vardır. Bundan dolayı herhangi bir $f \in X^*$ ve $h.h.k$ için,

$$|C_{x_k}(f)| = |f(x_k)| \le M\|f\|$$

dir. Lemma 4.1.5'ten dolayı,

$$st - \lim_{k\to\infty} C_{x_k}(f) \le M\|f\|$$

dir. Bu ise,

$$|y(f)| \le M\|f\|$$

olmasını gerektirir. Böylece $y \in X^{**}$ dir. X Reflexive uzay olduğundan $y \in C_x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.Bu yüzden her $f \in X^*$ için,

$$st - \lim f(x_k) = y(f) = C_x(f) = f(x)$$

dirki bu $w - st - \lim x_k = x$ olduğunu gösterir.

Önerme 4.1.1: X normlu uzayında $w - st - \lim x_k = x$ ise,

$$\|x\| \le st - \liminf \|x_k\|$$

dir.

İspat: Her bir $f \in X^*$ için, Lemma 4.1.1'den,

$$\begin{aligned} |f(x_k)| &= st-\lim |f(x_k)| \\ &= st-\liminf |f(x_k)| \\ &\leq \|f\| .st-\liminf \|x_k\| \end{aligned}$$

elde edilir. $\|f\| = 1$ olacak şekildeki tüm $f \in X^*$ ler üzerinden supremum alınırsa,

$$\|x\| \leq st-\liminf \|x_k\|$$

elde edilir.

Zayıf yakınsak dizilerin her alt dizisinin de yine zayıf yakınsak olduğunu biliyoruz. Ancak bu zayıf istatistiksel yakınsaklık için doğru değildir.

Örnek 4.1.4: $\mathbb{R}$ de (x_k) dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k = m^2 \\ \frac{1}{k} & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (x_k) dizisi istatistiksel yakınsaktır. Dolayısıyla (x_k) zayıf istatistiksel yakınsaktır fakat onun istatistiksel ıraksak olan $\{x_{k^2}, k = 1, 2, ...\}$ alt dizisi zayıf istatistiksel yakınsak değildir.

Aşağıdaki teorem alt dizileri zayıf istatistiksel yakınsak olan dizilerin de zayıf istatistiksel yakınsak olduğunu ifade eder.

Teorem 4.1.4:
(i) Zayıf istatistiksel yakınsak dizinin her istatistiksel yoğun alt dizisi zayıf istatistiksel yakınsaktır.
(ii) **(i)** in tersi genelde doğru değildir.

İspat:
(i) Lemma 4.1.6'dan açıktır.
(ii) **(i)** in tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 4.1.5: $\mathbb{R}$ deki (x_k) dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (x_k) istatistiksel yakınsaktır ve bu yüzden zayıf istatistiksel yakınsaktır (0 noktasına). Dizinin $\{1, 1, ...\}$ alt kümesi zayıf istatistiksel yakınsaktır ancak istatistiksel yoğun değildir.

4.2 l_p $(1 < p < \infty)$ uzayında Zayıf İstatistiksel Yakınsaklık

Teorem 4.2.1: l_p uzayında $w - st - \lim x_k = x$ olması için gerek ve yeter şart
(i) $(\|x_k\|)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır.
(ii) Her sabit j için $st - \lim x_j^{(k)} = x_j$ dir.Burada $x_k = \left(x_j^{(k)}\right)$ ve $x = (x_j)$ dir.

Lemma 4.2.1: X normlu bir uzay olsun. $w - st - \lim x_k = x$ olması için gerek ve yeter şart
(i) $(\|x_k\|)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır.
(ii) X^* nın bir total M alt kümesinin her f elemanı için $st - \lim f(x_k) = f(x)$ dir.

İspat: Zayıf istatistiksel yakınsaklık durumundan, **(i)** sonuç 4.1.1den elde edilir ve **(ii)** durumu açıktır. Tersine **(i)** ve **(ii)** var olsun. Yani, her bir $h \in X^*$ için $st - \lim h(x_k) = h(x)$ olduğu gösterilecektir. Bu iki adımda yapılır.

İlk adımda, bunun her $h \in spanM$ ve ikinci adımda her $h \in \overline{spanM}$ için doğru olduğu gösterilecektir.İlk adımda, $g \in spanM$ olsun. Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ skalerleri ve $f_1, f_2, ..., f_n \in M$ için

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

olsun. **(ii)** hipotezinden her $i, 1 \leq i \leq n$ için

$$st - \lim f_i(x_k) = f_i(x)$$

dir ve Lemma 4.1.3 den

$$st - \lim g(x_k) = g(x)$$

dir. Böylece ilk sonuç ispatlanmış olur.

İkinci adımda, $h \in \overline{spanM}$ olsun. **(i)** hipotezinden $h.h.k$ için $\|x_k\| < c$ olacak şekilde $c > 0$ sabiti vardır ve böylece her bir $f \in M \subset X^*$ için $|f(x_k)| < c\|f\|$ olur. Her $h.h.k$ için Lemma 4.1.5'ten $\|x\| \leq c$ ifadesiyle birlikte $|f(x)| < c\|f\|$ elde edilir.
Böylece verilen $\varepsilon > 0, h \in \overline{spanM}$ ve her $j > n_0$ için

$$\|h - g_j\| < \frac{\varepsilon}{3c}$$

olacak şekilde $g_j \in spanM$ $(j = 1, 2, ...)$ vardır. $h.h.k$ için $j > n_0$ olmak şartıyla

$$\begin{aligned} |h(x_k) - h(x)| &\leq \|h - g_j\| \|x_k\| + |g_j(x_k) - g_j(x)| + \|g_j - h\| \|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c}c + |g_j(x_k) - g_j(x)| + \frac{\varepsilon}{3c}c \end{aligned}$$

olsun. $g_j \in spanM$ olduğu için, ispatın ilk bölümünden $st - \lim g_j(x_k) = g_j(x)$ ve böylece $h.h.k$ için $|g_j(x_k) - g_j(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ dır. Bu yüzden $h.h.k$ için $|h(x_k) - h(x)| < \varepsilon$ dır ve $w - st - \lim x_k = x$ elde edilir.

Önerme 4.2.1: H bir Hilbert uzay olmak üzere $w - st - \lim x_k = x$ olması için gerek ve yeter şart her $y \in H$ için $st - \lim \langle x_k, y \rangle = \langle x, y \rangle$ olmasıdır.

5 ZAYIF LACUNARY İSTATİSTİKSEL-YAKINSAKLIK

5.1 Zayıf Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.1.1 (Lacunary dizisi): $\mathbf{k}_0$ $= 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ şartlarını sağlayan $\theta = \{k_r\}$ artan tamsayı dizisine bir **Lacunary Dizisi** denir. $(k_{r-1}, k_r]$ aralığı I_r ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile gösterilecektir.

Kuvvetli Cesora toplanabilir diziler uzayı,

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0 \right\}$$

uzayı arasında doğal bir ilişki vardır (Fridy and Orhan,1993).

Örnek 5.1.1: $\theta = (2^r)$ dizisi bir lacunary dizisidir.

$$\begin{aligned} \theta &= (2^r) \\ &= (2, 2^2, 2^3, 2^4, ...) \end{aligned}$$

artan bir dizidir.

$$h_r = 2^r - 2^{r-1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} (2^r - 2^{r-1}) &= \lim_{r\to\infty} 2^{r-1}(2-1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$I_r = (2^{r-1}, 2^r]$$

Tanım 5.1.2 (Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık): θ , bir lacunary dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi L ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu ifade,

$$S_\theta - \lim x_k = L \quad \text{veya} \quad x_k \to L\,(S_\theta)$$

şeklinde gösterilir. Burada,

$$S_\theta = \{x = (x_k) : S_\theta - \lim x_k = L\}$$

şeklindedir (Fridy and Orhan,1993).

Tanım 5.1.3 (Zayıf Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık): X in sürekli duali olan X^* içindeki her f fonksiyoneli için $(f\,(x_k - x))$ dizisi 0'a lacunary istatistiksel yakınsak ise (x_k) dizisi x'e zayıf lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu ifade,

$$WS_\theta - \lim x_k = x$$

şeklinde yazılır ve x'e (x_k) dizisinin zayıf lacunary istatistiksel limitidir denir.Yani,

$$X^* = \{f : f : X \to F, \text{ sürekli}\}$$

$\forall f \in X^*$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |f\,(x_k - x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0 \tag{1}$$

ise x_k dizisi x'e zayıf lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 5.1.4: $\forall f \in X^*$ için

$$WN_\theta = \left\{ x = (x_k) \in X : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |f\,(x_k - x)| = 0 \right\}$$

kümesine zayıf kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayı denir.

Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için $WN_\theta-$yakınsaklık ve $WS_\theta-$yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle gösterilecektir.

Teorem 5.1.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. O halde, $x_k \to x\,(WN_\theta)$ olması için gerek ve yeter şart $x_k \to x\,(WS_\theta)$ olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow):\ x_k \to x\,(WN_\theta)$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall f\in X^*$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|f(x_k-x)|=0$$

dir.

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r}|f(x_k-x)| &\geq \sum_{\substack{k\in I_r\\ |f(x_k-x)|\geq\varepsilon}}|f(x_k-x)|\\ &\geq \varepsilon\,|\{k\in I_r : |f(x_k-x)|\geq\varepsilon\}|\end{aligned}$$

Buradan,

$$x_k\to x\,(WS_\theta)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow):\ x_k \to x\,(WS_\theta)$ olsun. $\forall f\in X^*$ olduğundan f fonksiyoneli sınırlıdır. Yani, her k için $|f(x_k-x)|\leq M$ olacak şekilde M pozitif sayısı vardır.
$\forall\varepsilon>0$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|f(x_k-x)| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |f(x_k-x)|\geq\varepsilon}}|f(x_k-x)|+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |f(x_k-x)|<\varepsilon}}|f(x_k-x)|\\ &\leq \frac{M}{h_r}|\{k\in I_r : |f(x_k-x)|\geq\varepsilon\}|+\varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan,

$$x_k\to x\,(WN_\theta)$$

elde edilir.

Herhangi bir $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi için $WS-$yakınsaklık ve $WS_\theta-$yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki lemmalarla ifade edilecektir.

Lemma 5.1.1: θ herhangi bir lacunary dizisi olsun. $WS-\lim x_k=x$ ifadesinin $WS_\theta-\lim x_k=x$ ifadesini gerektirmesi için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r>1$ olmasıdır.

İspat: $\liminf_r q_r>1$ olsun. O halde yeterince büyük r için $q_r\geq 1+\delta$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı vardır.

$$\tfrac{h_r}{k_r}\geq\tfrac{\delta}{1+\delta}$$

$x_k \to x\,(WS)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{k_r}\left|\{k \le k_r : |f(x_k - x)| \ge \varepsilon\}\right| &\ge \tfrac{1}{k_r}\left|\{k \in I_r : |f(x_k - x)| \ge \varepsilon\}\right| \\ &\ge \tfrac{\delta}{1+\delta}\tfrac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |f(x_k - x)| \ge \varepsilon\}\right| \end{aligned}$$

olduğundan,

$$x_k \to x\,(WS_\theta)$$

elde edilir.

Lemma 5.1.2: θ herhangi bir lacunary dizisi olsun. $WS_\theta - \lim x_k = x$ ifadesinin $WS - \lim x_k = x$ ifadesini gerektirmesi için gerek ve yeter şart $\limsup q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat:
$\limsup\limits_{r} q_r < \infty$ olduğu kabul edilsin. O halde her r için $q_r < H$ olacak şekilde $H > 0$ sayısı vardır. Farzedelimki,

$$x_k \to x\,(WS_\theta)$$

ve

$$WN_r = \left|\{k \in I_r : |f(x_k - x)| \ge \varepsilon\}\right|$$

olsun. $(\varepsilon > 0)$ (1) tarafından her $r > r_0$ için $\dfrac{WN_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $M = \max\{WN_r : 1 \le r \le r_0\}$ olsun ve $k_{r-1} < n \le k_r$ şartını sağlayan herhangi bir n tamsayısı alınsın.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |f(x_k - x)| \geq \varepsilon\}\right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}}\left|\{k \leq k_r : |f(x_k - x)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\{WN_1 + WN_2 + ... + WN_{r_0} + WN_{r_0+1} + ... + WN_r\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}}r_0 + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{h_{r_0+1}\frac{WN_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + ... + h_r\frac{WN_r}{h_r}\right\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{r>r_0}\frac{WN_r}{h_r}\right)\{h_{r_0+1} + ... + h_r\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon\frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r \\
&\leq \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \varepsilon H
\end{aligned}
$$

Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.1.2 birleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1.2: θ bir lacunary dizisi olsun. $WS = WS_\theta$ olması için gerek ve yeter şart,

$$1 < \lim_r \inf q_r \leq \lim_r \sup q_r < \infty$$

olmasıdır. Aynı zamanda,

$$WS - \lim x_k = x \quad \text{ve} \quad WS_\theta - \lim x_k = x$$

dır.

5.2 $WS_\theta-$Limitinin Tekliği ve Lacunary Refinement

Tanım 5.2.1: Eğer $\{k_r\} \subseteq \left\{k_r'\right\}$ oluyorsa $\theta' = \left\{k_r'\right\}$ lacunary dizisine $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir lacunary refinementi denir.

Herhangi bir θ lacunary dizisinin $WS_\theta -$ limiti tektir.

Teorem 5.2.1: $(x_k) \in WS \cap WS_\theta$ ise $WS - \lim x_k = WS_\theta - \lim x_k$ dir.

İspat: Farzedelimki, $WS - \lim x_k = x$, $WS_\theta - \lim x_k = y$ ve $x \neq y$ olsun.

$$\varepsilon < \tfrac{1}{2}|x-y|$$

için,

$$\lim_n \tfrac{1}{n}\left|\{k \leq n : |f(x_k - y)| \geq \varepsilon\}\right| = 1$$

alınsın. Zayıf istatistiksel limit ifadesinin k_m'inci terimini düşünelim.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |f(x_k-y)| \geq \varepsilon\}\right| &= \frac{1}{k_m}\left|\left\{k \in \bigcup_{r=1}^{m} I_r : |f(x_k-y)| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{k_m}\sum_{r=1}^{m}\left|\{k \in I_r : |f(x_k-y)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{1}{\sum_{r=1}^{m} h_r}\sum_{r=1}^{m} h_r t_r
\end{aligned} \tag{2}$$

$x_k \to y\,(WS_\theta)$ olduğundan,

$$t_r = \tfrac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |f(x_k-y)| \geq \varepsilon\}\right| \to 0$$

dır. θ Lacunary dizisi için , (2) t nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür. Bu dönüşüm $m \to \infty$ iken 0'a yakınsar. Aynı zamanda,

$$\left\{\tfrac{1}{n}\left|\{k \leq n : |f(x_k-y)| \geq \varepsilon\}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$$

kümesinin alt kümesidir. Buradan,

$$\tfrac{1}{n}\left|\{k \leq n : |f(x_k-y)| \geq \varepsilon\}\right| \nrightarrow 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, $x = y$ elde edilir.

Teorem 5.2.2: θ' lacunary dizisi, θ lacunary dizisinin bir lacunary refinementi olsun. $x_k \to x\left(WS_{\theta'}\right)$ ise $x_k \to x\,(WS_\theta)$ dır.

İspat: $k_{r-1} < k'_{r,1} < k'_{r,2} < ... < k'_{r,v(r)} = k_r$ olacak şekilde θ' nın $\left\{k'_{r,i}\right\}_{i=1}^{v(r)}$ noktalarını içeren θ nın her bir I_r aralığını düşünelim. Burada,

$$I'_{r,i} = \left(k'_{r,i-1}, k'_{r,i}\right]$$

şeklindedir. $\{k_r\} \subseteq \left\{k_r^{'}\right\}$ olması sebebiyle her r için $v(r) \geq 1$ dir. Sağ bitiş noktasına doğru artarak sıralanan $\left\{I_{r,i}^{'}\right\}$ aralıklarının dizisi $\left\{I_j^*\right\}_{j=1}^{\infty}$ olsun. $x_k \to x\left(WS_{\theta'}\right)$ olduğundan, $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_j \sum_{I_j^* \subset I_r} \frac{1}{h_r^*}\left|\left\{k \in I_j^* : |f(x_k - x)| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3}$$

yazılır.

Daha önce yazıldığı gibi,

$$h_r = k_r - k_{r-1}\ ,\ h_{r,i}^{'} = k_{r,i}^{'} - k_{r,i-1}^{'} \quad \text{ve} \quad h_{r,1}^{'} = k_{r,1}^{'} - k_{r-1}$$

dir.

$\forall\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |f(x_k - x)| \geq \varepsilon\}\right| &= \frac{1}{h_r}\sum_{I_j^* \subseteq I_r} h_j^* \tfrac{1}{h_j^*}\left|\left\{k \in I_j^* : |f(x_k - x)| \geq \varepsilon\right\}\right| \\ &= \frac{1}{h_r}\sum_{I_j^* \subseteq I_r} h_j^*(C_{\theta'}\varkappa_K)_j \end{aligned} \tag{4}$$

elde edilir. Burada $\varkappa_K$, $K = \{k \in \mathbb{N} : |f(x_k - x)| \geq \varepsilon\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur. (3) den $\left(C_{\theta'}\varkappa_K\right)$bir sıfır dizisidir. (4) $C_{\theta'}\varkappa_K$ nın regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür. Bu yüzden (4) dönüşümü $r \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

Bu teoremin geçerli olması için lacunary dizilerinin birinin diğerinin lacunary refinementi olması gerekir.

5.3 Zayıf Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık ve WS$_\theta$-yakınsaklık

Tanım 5.3.1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}(x_i-L)=0 \quad , \quad m=0,1,2,...\text{ye göre düzgün}$$

oluyorsa (x_k) dizisi L ye hemen hemen yakınsaktır denir. Hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi AC ile gösterilir.

Tanım 5.3.2: $\forall f\in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}(f(x_i-x))=0 \quad , \quad m=0,1,2,...\text{ye göre düzgün}$$

oluyorsa (x_k) dizisi x'e zayıf hemen hemen yakınsaktır denir. Zayıf hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı WAC şeklinde gösterilir.

Tanım 5.3.3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}|x_i-L|=0 \quad , \quad m=0,1,2,...\text{ye göre düzgün}$$

oluyorsa (x_k) dizisi L ye kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir. Kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $[AC]$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5.3.4: $\forall f\in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}|f(x_i-x)|=0 \quad , \quad m=0,1,2,...\text{ye göre düzgün}$$

oluyorsa (x_k) dizisi x'e zayıf kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir. Zayıf kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $[WAC]$ şeklinde gösterilir.

$$[AC]\subsetneqq AC$$

olduğu bilinmektedir.

$$[WAC] \subsetneqq WAC$$

olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 5.3.1: Her θ lacunary dizisi için $[AC] \subset N_\theta$ dır.

İspat:
$x \in [AC]$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $n > N$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - L| < \varepsilon, m = 0, 1, 2, ...\text{ye göre düzgün}$$

olacak şekilde L ve $N > 0$ sayısı vardır. θ lacunary dizisi olduğundan, $h_r > N$ eşitsizliğini gerektiren $r \geq R$ olacak şekildeki $R > 0$ sayısını seçebiliriz. Sonuç olarak, $t_r < \varepsilon$ dır. Bu yüzden $x \in N_\theta$ elde edilir.

$$x_i = \begin{cases} 1, & k_{r-1} < i \leq k_{r-1} + \sqrt[2]{h_r} \text{ olacak şekildeki } r\text{' ler için} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_i)$ dizisi N_θ uzayı içinde olup $[AC]$ içinde olmayan bir dizidir.

Çünkü,

$$t_r = \frac{1}{h_r}\sum_{I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r}\left[\sqrt[2]{h_r}\right]$$

dönüşümü $r \to \infty$ iken sıfıra yakınsar. Ama x dizisi kuvvetli hemen hemen yakınsak değildir.

Lemma 5.3.2: Her θ lacunary dizisi için $[WAC] \subset WN_\theta$ dır.

İspat: $x \in [WAC]$ olsun. $\varepsilon > 0$, $f \in X^*$ ve $n > N$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n} |f(x_i - x)| < \varepsilon, \quad m = 0, 1, 2, ...\text{ye göre düzgün}$$

olacak şekilde x ve $N > 0$ sayısı vardır. θ lacunary dizisi olduğundan $h_r > N$ eşitsizliğini gerektiren $r \geq R$ olacak şekilde $R > 0$ sayısını seçebiliriz. Sonuç olarak, $t_r < \varepsilon$ dır. Bu yüzden $x \in WN_\theta$ elde edilir. f fonksiyoneli altındaki görüntüsü,

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & k_{r-1} < i \leq k_{r-1} + \sqrt[2]{h_r} \text{ olacak şekildeki } r\text{' ler için} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_i)$ dizisi için $x \in WN_\theta$ olup $x \notin [WAC]$ dir. Çünkü,

$$t_r = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |f(x_i)| = \frac{1}{h_r} \left[\sqrt[2]{h_r} \right]$$

dönüşümü $r \to \infty$ iken sıfıra yakınsar. Ama x dizisi zayıf kuvvetli hemen hemen yakınsak değildir.

Kuvvetli Cesaro toplanabilir dizilerin uzay,

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - L| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Teorem 5.3.1: $[AC] = \cap N_\theta$

İspat: $x \notin [AC]$ iken $x \notin N_\theta$ olacak şekilde bir lacunary dizisinin varlığını göstermek yeterli olacaktır. Farzedelimki x kuvvetli Cesaro toplanabilir bir dizi olsun. Sonuç olarak,

$$t^{-1} \sum_i |x_i - L| \to 0$$

olacak şekilde bir tek L sayısı vardır. $x \notin [AC]$ olduğundan $\varepsilon > 0$ ve her N için

$$n^{-1} \sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - L| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir m tamsayısı ve $n > N$ sayısı vardır.
$\theta = (k_r)$ lacunary dizisi aşağıdaki gibi seçilmiş olsun.

$$\begin{array}{rcccc}
 & , & k_1 = m_1 & , & \\
k_2 = m_1 + n_1 & , & k_3 = m_{r_2} & , & m_{r_2} > 2k_2 \\
k_4 = m_{r_2} + n_{r_2} & , & k_5 = m_{r_3} & , & m_{r_3} > 2k_4 \\
k_6 = m_{r_3} + n_{r_3} & , & ... & , & ... \\
... & , & k_{2r-1} = m_r & , & m_r > 2k_{2r-2} \\
k_{2i} = m_{r_i} + n_{r_i} & , & ... & , & ... \\
... & , & ... & , & ...
\end{array}$$

θ nın lacunary dizisi olduğu açıktır ve $r = 2j$ için

$$t_r = (n_r^{-1}) \sum_i |x_i - L| \geq \varepsilon$$

elde edilir. Burada toplam $i = m_{r_j}$ den $i = m_{r_j} + n_{r_j}$ e gider. $x \in |\sigma_1| \cap N_\theta$ iken $L_{|\sigma_1|}(x) = L_\theta(x)$ olduğundan $x \notin N_\theta$ elde edilir.

Teorem 5.3.2: $[WAC] = \cap WN_\theta$

İspat: $x \notin [WAC]$ iken $x \notin WN_\theta$ olacak şekilde bir zayıf lacunary dizisinin varlığını göstermek yeterli olacaktır. Farzedelimki x zayıf kuvvetli Cesaro toplanabilir bir dizi olsun.Yani,

$$t^{-1}\sum_i |f(x_i - x)| \to 0$$

olacak şekilde bir tek L sayısı vardır. $x \notin [WAC]$ olduğundan $\varepsilon > 0$ ve her N için,

$$n^{-1} \sum_{i=m+1}^{m+n} |f(x_i - x)| \geq \epsilon$$

olacak şekilde bir m tamsayısı ve $n > N$ sayısı vardır.
$\theta = (k_r)$ lacunary dizisi aşağıdaki gibi seçilmiş olsun.

$$\begin{array}{rcccc}
 & , & k_1 = m_1 & , & \\
k_2 = m_1 + n_1 & , & k_3 = m_{r_2} & , & m_{r_2} > 2k_2 \\
k_4 = m_{r_2} + n_{r_2} & , & k_5 = m_{r_3} & , & m_{r_3} > 2k_4 \\
k_6 = m_{r_3} + n_{r_3} & , & \ldots & , & \ldots \\
\ldots & , & k_{2r-1} = m_r & , & m_r > 2k_{2r-2} \\
k_{2i} = m_{r_i} + n_{r_i} & , & \ldots & , & \ldots \\
\ldots & , & \ldots & , & \ldots
\end{array}$$

θ nın lacunary dizisi olduğu açıktır ve $r = 2j$ için

$$t_r = (n_r^{-1}) \sum_i |f(x_i - x)| \geq \varepsilon$$

elde edilir. Burada toplam $i = m_{r_j} + 1$ den $i = m_{r_j} + n_{r_j}$ e gider. $x \in |\sigma_1| \cap WN_\theta$ iken $L_{|\sigma_1|}(x) = L_\theta(x)$ olduğundan $x \notin WN_\theta$ elde edilir.

Teorem 5.3.3: Bütün lacunary dizilerinin kümesi $\mathcal{L}$ ile tanımlansın

$$[WAC] = \bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} WS_\theta$$

dır.

İspat: Teorem 5.1.1'den,

$$\begin{aligned}[WAC] &= \bigcap_{\theta\in\mathcal{L}} WN_\theta \\ &= \bigcap_{\theta\in\mathcal{L}} WS_\theta\end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Bachman, G. and Narici, L.,1966, Functional Analysis, Academic Press, New York, NY, USA.

Balcı,M. 1997. "Matematik Analiz", Bilim Kitap Kırtasiye, Cilt II, 2. Baskı, Ankara.

Balcı,M. 1999. "Matematik Analiz", Balcı Yayınları, Cilt I, 6. Baskı, Ankara.

Bayraktar, M. 2000. "Fonksiyonel Analiz", Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Burgin, M. and Duman, O., "Statistical convergence and convergence in statistics," preprint.

Connor, J and Swardson, M.A.,1993, "Strong integral summability and the Stone-Cech compactification of the half-line," Pacific Journal of Mathematics, vol. 157, no.2, pp. 201-224.

Connor, J., Ganichev and Kadets, V., 2000, "A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence," Journal of Mathematical analysis and Applications, vol. 244,no.1,pp.251-261.

Erdös, P. and Tenenbaum, G., 1989, "Sur les densites de certains suites d'entiers, "Proceedings of the London Mathematical Society,vol.59,no.3,pp.417-438.

Fast, H., 1951, "Sur la convergence statistique," Colloquium Mathematicum, vol.2,pp.241-244.

Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978, Some Cesaro type summability spaces, Proc. London Math. Soc. ,37,508-520.

Freedman, A.R. and Sember, J.J., 1981, "Densities and summability," Pacific Journal of Mathematics, vol.95,no.2,pp.293-305.

Fridy, J.A., 1985, "On statistical convergence," Analysis, vol. 5,no.4,pp.301-313.

Fridy, J.A., 1993, "Statistical limit points," Proceedings of the American Mathematical Society, vol.118,no.4,pp.1187-1192.

Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993, "Lacunary Statistical Convergence," Pacific Journal of Mathematics,vol.160,no.1.

Fridy, J.A. and Orhan, C., 1997, "Statistical Limit superior and limit inferior," Proceedings of the American Mathematical Society, vol.125,no.12,pp.3625-3631.

Fridy, J.A., Khan, M.K.1998. "Tauberian Theorems via Statistical Convergence", J. Math. Anal. Appl.228,73-95..

Gürdal, M. 2004. "Some Types of Convergence", Süleyman Demirel Üni. Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Math. Ph. D. Thesis.

Kızmaz, H., 1993, Fonksiyonel Analize Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Kolk, E., 1991, "The Statistical convergence in Banach Spaces," Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis, no.928,pp.41-52.

Maddox, I.J., 1988, "Statistical convergence in a locally convex space," Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol.104,no.1,pp.141-145.

Makarov, V.L., Levin, M.J. and Rubinov, A.M., 1995, Mathematical Economic Theory : Pure and Mixed Types of Economic Mechanisms, vol. 33 of Advanced Textbooks in Economics, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.

Mckenzie, L.W., 1976, "Turnpike theory", Econometrica, vol.44,no.5,pp.841-865.

Miller, H.I., 1995, "A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence," Transactions of the American Mathematical Society, vol. 347,no.5,pp.1811-1819.

Niven, I. Zuckerman, H. S., 1980, Montgomery, H.L. 1991. "An Introduction to the Theory of Numbers", Fifth Edition, John Wiley and Jons, Inc., p.529.

Niven, I. and Zuckerman, H.S.,1980, An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley&Sons, New York, NY, USA, 4th edition.

Niven, I. and Zuckerman, H.S., Montgomery, H. L. 1991, "An Introduvtion to the Theory of Numbers",Fifth Edition, John Wiley and Jons, Inc., p. 529.

Nuray, F., Ruckle, W.H.2000."Generalized Statistical Convergence and Convergence Free Spaces", J. Math.Anal. Appl. 245, 513-527.

Pehlivan, S. and Mamedov, M.A., 2000, "Statistical Cluster points and turnpike", Optimization, vol. 48, no. 1, pp. 93-106.

Pehlivan, S. 2001, "İstatistisel Yakınsaklık Üzerine Ders Notları", Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.

Pehlivan, S. and Karaev, M.T., 2004, "Some result related with statistical convergence and Berezin symbols," Journal of Mathematical Analysis and Applications,vol.299,no.2,pp.333-340.

Salat, T., 1980, "On statistically convergent sequences of real numbers," Mathematica Slovaca,vol.30,no.2,pp.139-150.

Schoenberg, I.J., 1959, "The integrability of certain functions and related summability methods," The American Mathematical Monthly, vol.66,no.5,pp.361-375.

Steinhaus, H. 1951, "Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique," Colloquium Mathematicum, vol.2,pp.73-74.

Tripathy, B.C., 1997, "On statistically convergent and statistically bounded sequences," Malaysian Mathematical Society. Bulletin. Second Series, vol.20,no.1,pp.31-33.

Tripathy, B.C., 1998," On statistically convergent sequences," Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,vol.90,no.4,pp.259-262.

Zygmund, A., 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Elvan CEYLAN

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Lise	: Keçiborlu Anadolu Lisesi – 2002.
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2003-2007.
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2007-2010.

Kişisel Bilgiler

Doğum Yeri ve Yılı	: Gelendost 15.05.1984
Cinsiyeti	: Kız
Yabancı Dili	: İngilizce