İNMİŞ ve ARMENDARIZ HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice ASLAN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2009

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNMİŞ ve ARMENDARIZ HALKALAR

Hatice ASLAN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2009

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhittin BAŞER danışmanlığında,

Hatice ASLAN tarafından hazırlanan

İnmiş ve Armendariz Halkalar

başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

……./……/……..

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Kazım İLARSLAN

Üye : Doç. Dr. Muhittin BAŞER (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNMİŞ ve ARMENDARIZ HALKALAR

Hatice ASLAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tez çalışması için gerekli olan bazı temel kavramlar ve özellikler verilmiştir. İkinci bölümde, bir halkanın Armendarizlik özelliği tanıtılarak bu özelliğin verilen halkadan elde edilen bazı özel tipteki matris halkalarına taşınıp taşınamayacağı incelenmiştir. Üçüncü bölümde, Armendariz halkaların diğer halka sınıflarıyla arasındaki ilişki araştırılmıştır.

2009, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Armendariz halka, terslenebilir halka, yarı değişmeli halka, inmiş halka, klasik kesirler halkası.

ABSTRACT

Masters Thesis

REDUCED and ARMENDARIZ RINGS

Hatice ASLAN

Afyon Kocatepe University

Institute for the Natural and Applied Sciences

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhittin BAŞER

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, some basic defination and fundemental properties which will be used in the sequel are given. In the second section, by introducing consept of Armendariz rings we investigate whether the property of being Armendariz can be moved to some special matrix rings which is generalization of a ring or not. In the third chapter, we will search the relation between Armendariz rings and the other ring classes.

2009, Page 39

Key Words: Armendariz ring, reversible ring, semicommutative ring, reduced ring, classical quotient ring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada danışmanlığımı yapan sayın hocam Doç. Dr. Muhittin BAŞER’e ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Fatma KAYNARCA’ya ve desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Hatice ASLAN

AFYONKARAHİSAR, Haziran 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\subseteq$	Alt küme
$\in$	Elemanı
$\varnothing$	Boş küme
$\bigcap$	Kesişim
$\bigcup$	Birleşim
$\cong$	İzomorf olma bağıntısı
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$R[x]$	R halkasından katsayılı polinomlar halkası
$R\left[\lvert x\rvert\right]$	R halkasından katsayılı formal kuvvet seriler halkası
$R[x;\alpha]$	Skew polinom halkası
$M_n(R)$	R halkası üzerindeki matrislerin halkası
$T_n(R)$	Üst üçgensel matris halkası
M_R Sağ	R -modül
${}_RM$	Sol R -modül
$T(R,M)$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi

1. GİRİŞ

Bu tezde, Nan Kyun Kim ve Yang Lee'nin 'Armendariz and Reduced Rings' başlıklı çalışmaları esas alınarak Armendariz halkalar ve özellikleri, Armendarizlik özelliğinin R'den elde edilen yeni halkalara taşınıp taşınamayacağı ve Armendariz halka sınıflarının diğer halka sınıflarıyla olan ilişkileri incelenecektir.

R birimli bir halka olmak üzere R'den katsayılı polinomların halkası $R[x]$ ile gösterilir. Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa R halkası *inmiş (reduced) halka* olarak adlandırılır. Rege ve Chhawchharia 1997'de $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x)=0$ iken her bir $0\le i\le m$, $0\le j\le n$ için $a_ib_j=0$ oluyorsa, R halkasını *Armendariz halka* olarak adlandırmışlardır. Bu ismin seçiliş sebebi şudur ki; Armendariz 1974'de inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını ispatlamıştır. Yani her inmiş halka Armendarizdir.

Bu çalışmada (Anderson ve Camillo 1998), (Armendariz 1974), (Rege ve Chhawchharia 1997)'de elde edilen sonuçlara paralel olarak Armendariz halkaların özellikleri ve karakterizasyonları verilecektir.

Diğer taraftan Armendariz halkaların alt halkalarının Armendariz olduğu açıktır. Fakat Armendariz olmayan halkaların Armendariz olan alt halkalarını bulunabileceği de bu çalışmada gösterilecektir. İlk olarak Armendariz olan ve Armendariz olmayan halka sınıflarına örnekler verilecektir. (Rege ve Chhawchharia 1997)'de $n\ge 2$ için herhangi bir halka üzerindeki $n\times n$ tipindeki matris halkasının Armendariz olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Biz bu çalışmada $n\times n$ tipindeki matris halkalarının bazı özel tipteki alt halkalarının hangi şartlar altında Armendariz halka olduğunu araştıracağız.

Bir R halkasının her bir temel sağ ideali projektif ise ya da denk olarak R'nin her bir elemanının sağ sıfırlayanı bir eşkare tarafından üretiliyorsa R halkasına bir sağ p.p.-halka denir. Yani R'nin her a elemanı için $r_R(a)=eR$ olacak şekilde bir eşkare $e\in R$ elemanı varsa R'ye sağ p.p.-halka denir. R halkasının her boştan farklı alt kümesinin sağ sıfırlayanı bir eşkare tarafından üretiliyorsa bir R halkasını Baer olarak adlandırılır. Yani R halkasının boştan farklı her X alt kümesi için $r_R(X)=eR$ olacak şekilde

R'nin e eşkare elemanı varsa R halkasına Baer halkası denir. Denk olarak R halkasının boştan farklı her X alt kümesi için $l_R(X) = Rf$ olacak şekilde R'nin f eşkare elemanı varsa R halkasına Baer halkası denir. Bir halkanın p.p özelliği ya da Baer halka olma gibi özelliklerin halkanın bir genişlemesi olan $R[x]$ polinom halkasına hangi durumda taşınabileceği araştırılacaktır.

Son olarak bir halkanın klasik sağ kesirler halkası ile Armendariz ve inmiş olması arasındaki ilişkiler incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir. Bu bölüm için temel referansımız (Anderson ve Fuller 1992) olacaktır.

2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Tanım 2.1.1 R boştan farklı bir küme ve R üzerinde iki ikili işlem $(+)$ ile $(.)$ olsun. R kümesinin farklı iki elemanı 0 ve 1 olmak üzere, eğer $(R,+,0)$ bir değişmeli grup, $(R,.,1)$ bir monoid ve çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği varsa, bu durumda $(R,+,.,0,1)$ sistemine bir *halka* denir. Eğer çarpma işleminin değişme özelliği varsa bu durumda R halkasına değişmelidir denir.

Genellikle halkaların birimsiz olarak tanımlandığını görürüz. Fakat birimsiz her bir halka doğal bir yöntemle birimli bir halka içerisine gömülebilir. Bu sebeple üzerinde çalışılan halkanın birimli olduğunu kabul etmek teori açısından hiçbir zorluk çıkarmaz.

Tanım 2.1.2 R bir halka ve $\varnothing \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S; R'nin toplamsal alt grubu ve S; R'nin çarpımsal alt monoidi ise, bu durumda S'ye R'nin bir *alt halka*sıdır denir ve $S \leq R$ şeklinde gösterilir.

1; R'nin çarpımsal birimi olmak üzere S; R'nin bir alt halkası ise $1 \in S$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.3 R bir halka ve $\varnothing \neq I \subseteq R$ olsun. I; R'nin bir toplamsal alt grubu olmak üzere eğer her $x \in I$ ve her $a,b \in R$ için $axb \in I$ oluyorsa bu durumda I'ya R'nin bir *(iki yanlı) ideali* denir.

$\{0\}$ ve R; R'nin idealleridir ve bu ideallere R'nin *aşikar idealleri* denir. R'nin bu ideallerinden farklı ideallerine *öz ideal* denir. R halkasının $\{0\}$ ideali kısaca 0 ile gösterilir ve *sıfır ideal* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4 Eğer bir R halkasının 0'dan ve R'den başka bir ideali yoksa bu durumda R'ye *basit* (*simple*) halka denir.

Tanım 2.1.5 R bir halka ve $X \subset R$ olmak üzere

$l_R(X) = \{r \in R \mid Her\, x \in X \text{ için } rx = 0\}$ biçiminde tanımlanan kümeye X'in R'de *sol sıfırlayanı (left annihilator)* denir. $l_R(X)$ R'nin sol idealidir. Benzer şekilde $Y \subset R$ $r_R(Y) = \{r \in R \mid yr = 0 \text{ her } y \in Y \text{ için}\}$ biçiminde tanımlanan kümeye Y'nin R'de *sağ sıfırlayanı (right annihilator)* denir. Kolayca görülebilir ki, $r_R(Y)$; R'nin sağ idealidir.

Tanım 2.1.6 R değişmeli bir halka olmak üzere R'nin $ab \in I$ için $a \in I$ veya $b \in I$ şartını sağlayan I idealine bir *asal ideal (prime ideal)* denir.

Tanım 2.1.7 Bir R halkasının asal ideallerinin kesişimine R'nin *asal radikali (prime radical)* denir.

Tanım 2.1.8 R ve S iki halka ve $\phi : R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

i) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$,

ii) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

oluyorsa bu durumda ϕ'ye bir halka *homomorfizması* denir.

Bir $\phi : R \to R$ halka homomorfizmasına R'nin bir *endomorfizması* denir. Eğer $\phi : R \to S$ halka homomorfizması bire-bir ise ϕ'ye *monomorfizma,* örten ise ϕ'ye *epimorfizma* denir. $\phi : R \to S$ halka homomorfizması hem bire-bir hem de örten ise ϕ'ye bir (halka) *izomorfizması* denir. Eğer böyle bir ϕ izomorfizması varsa R ve S halkalarına *izomorf halkalar* denir ve $S \cong R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 $\phi : R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere ϕ'nin *çekirdeği (kernel)* $Ker\phi = \{x \in R \mid \phi(x) = 0\}$ ve ϕ'nin *görüntüsü (image)* $\operatorname{Im}\phi = \{\phi(x) \mid x \in R\}$ ile tanımlanır.

Açık olarak $\operatorname{Im}\phi$; S'nin bir alt halkası ve $Ker\phi$; R'nin bir idealidir.

Önerme 2.1.10 R ile S iki halka ve $\phi : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda;

(1) ϕ örtendir $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}\phi = S$ dir.

(2) ϕ bire-birdir $\Leftrightarrow$ $Ker\phi = 0$ dir.

Tanım 1.1.11 R bir halka ve I ; R 'nin bir ideali olsun. Bu durumda I yardımıyla R üzerinde toplamsal ve çarpımsal bir kongrüans bağlantısı aşağıdaki gibi tanımlıdır. $a,b \in R$ olmak üzere

$$a \equiv b(\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow a-b \in I \text{ dir.}$$

Bir $a \in R$ elemanının yukarıdaki denklik bağıntısına göre denklik sınıfı $a+I = \{a+x \mid x \in I\}$ biçimindedir.

Tüm böyle denklik sınıflarının kümesi R/I ile gösterilir. R/I kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$$

$$(a+I)(b+I) = (ab)+I$$

biçiminde tanımlıdır. Bu işlemlerle birlikte R/I kümesi bir halkadır. R/I halkasına R 'nin I idealine göre *bölüm halkası* denir. R/I bölüm halkasının toplama ve çarpma işlemlerine göre birimleri sırasıyla $0+I$ ve $1+I$ dır.

Tanım 2.1.12 R bir halka ve I ; R 'nin bir ideali olmak üzere $a \in R$ için $\eta_I(a) = a+I$ ile tanımlı $\eta_I : R \to R/I$ fonksiyonu $Ker(\eta_I) = I$ olan örten bir halka homomorfizmasıdır. η_I 'ya *doğal epimorfizma* denir.

Tanım 2.1.13 R bir halka olsun. $CenR = \{r \in R \mid rx = xr (x \in R)\}$ kümesine *R 'nin merkezi* (*centre*) denir.

$CenR$ kümesinin R'nin bir alt halkası olduğu açıktır. Ayrıca $CenR$ değişmelidir. Fakat genel olarak $CenR$ maksimal değişmeli bir alt halka değildir. Eğer $r \in CenR$ ise bu durumda $r \in R$ elemanına *merkezildir (central)* denir.

Tanım 2.1.14 R bir halka ve $e \in R$ olmak üzere eğer $e^2 = e$ oluyorsa, bu durumda $e \in R$ elemanına bir *eşkare (idempotent)* denir.

0 halkanın toplamsal birimini ve 1 halkanın çarpımsal birimini göstermek üzere bir halka her zaman 0 ve 1 eşkare elemanlarına sahiptir.

Eğer bir eşkare eleman halkanın merkezine ait ise, bu durumda bu elemana bir *merkezil eşkare* denir.

Örnek 2.1.15 Eğer $e \in R$ bir eşkare ise, bu durumda $1-e$ elemanı da R'de bir eşkaredir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}(1-e)^2 &= (1-e)(1-e)\\ &= 1-e-e+e^2\\ &= 1-e-e+e\\ &= 1-e\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca e merkezil eşkare ise $1-e$'de merkezil eşkaredir.

Tanım 2.1.16 R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa, bu durumda $x \in R$'ye bir *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir. $x^n = 0$ koşulunu sağlayan n tamsayılarının en küçüğüne x'in *üstel sıfırlık indeksi* denir.

Tanım 2.1.17 R bir halka olsun. $M \neq 0$ toplamsal değişmeli bir grup olmak üzere, eğer $\lambda : R \to End^l(M)$ fonksiyonu bir halka homomorfizması ise, bu durumda (M, λ) çiftine bir *sol R-modül* denir. Bunun anlamı şudur; her bir $a \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir $\lambda(a) : M \to M$ fonksiyonunun olmasıdır.

Her $a, b \in R$ ve $x, y \in M$ için

(1) $\lambda(a)(x+y)=\lambda(a)(x)+\lambda(a)(y)$

(2) $\lambda(ab)(x)=\lambda(a)\left[\lambda(b)(x)\right]$

(3) $\lambda(a+b)(x)=\lambda(a)(x)+\lambda(b)(x)$

(4) $\lambda(1)(x)=x$

Pratikte genelde λ ve parantezler ihmal edilir. Yani $\lambda(a)(x)$ yerine sadece ax yazılarak λ fonksiyonu $(a,x)\mapsto ax$ ile tanımlı bir sol skaler çarpım gibi düşünülür. Böylece yukarıda yazılan aksiyomlar kısaca;

(1) $a(x+y)=ax+ay$

(2) $(ab)x=a(bx)$

(3) $(a+b)x=ax+bx$

(4) $1x=x$

biçiminde gösterilir. Aynı zamanda (M,λ) yerine kısaca M bir sol R modüldür denir ve ${}_RM$ ile gösterilir. Benzer şekilde bir sağ R-modül (M_R) tanımlanabilir.

Tanım 2.1.18 R ve S iki halka olsun. Eğer M hem bir sol R-modül hem de bir sağ S-modül ise ve ayrıca her $r\in R$, $s\in S$, $x\in M$ için

$r(xs)=(rx)s$

özelliği sağlanıyorsa, bu durumda M 'ye bir *sol* R*, sağ* S*- bimodül* denir ve ${}_RM_S$ ile gösterilir.

2.2 Bir Halkadan Elde Edilen Yeni Halkalar

Bu bölümde, verilen bir halka yardımıyla elde edilen bazı yeni halkalar verilecektir.

Tanım 2.2.1 R'deki sıfırdan farklı her bir e eşkare elemanı yardımıyla aşağıdaki gibi yeni bir halka elde edilebilir.

$eRe=\{exe \mid x\in R\}$ kümesi R'deki toplama ve çarpma işlemlerine göre sırasıyla $0=e0e$ ve $e=e1e$ toplamsal ve çarpımsal birimlerine sahip bir halkadır.

Eğer $e\neq 1$ ise, bu durumda eRe; R'nin homomorfik bir görüntüsü olmak zorunda değildir. Açık olarak, eğer e merkezi eşkare ise, bu durumda $x\in R$ için

$$\tau_e : x \mapsto exe$$

biçiminde tanımlı τ_e fonksiyonu R'den eRe üzerine $(1-e)R(1-e)$ çekirdeğine sahip örten bir halka homomorfizmasıdır.

Tanım 2.2.2 Halkaların boştan farklı bir ailesi $\{R_i \mid i\in I\}$ ve R_i toplamsal değişmeli grupların direkt çarpımı $\prod_{i\in I} R_i$ olsun. Bu durumda $\prod_{i\in I} R_i$ değişmeli grubu $(a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I}=(a_ib_i)_{i\in I}$ şeklinde tanımlanan çarpma ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya $\{R_i \mid i\in I\}$ halkalar ailesinin (dış) direkt çarpımı denir. Eğer indis kümesi $I=\{1,2,...,n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise, bu durumda $\prod_{i\in I} R_i$ yerine $R_1\times R_2\times...\times R_n$ yazarız.

$\bigoplus_{i\in I} R=\{(a_i)_{i\in I} \mid \text{sonlu tanesi dışında } a_i=0, a_i\in R\}$ kümesi bileşensel toplama ve çarpma işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya R'nin *dik toplamı* denir. Açık olarak $\bigoplus_{i\in I} R$ halkası $\prod_{i\in I} R$ halkasının bir alt halkasıdır.

Tanım 2.2.3 R bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere R'den katsayılı polinomların kümesi $R[x]=\{a_0x^0+a_1x^1+...+a_nx^n \mid a_i\in R\}$ ile gösterilir. $R[x]$ kümesi aşağıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. $f(x)=a_0+a_1x^1+...+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x^1+...+b_mx^m \in R[x]$ olmak üzere;

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+...+(a_k+b_k)x^k+...+a_nx^n \quad (n\geq m)$$

$$f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+...+(a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_kb_0)x^k+...+a_nb_mx^{m+n}$$

$R[x]$'e R'den katsayılı den katsayılı *polinom halkası* denir. R değişmeli ise $R[x]$'in değişmeli ve R birimli ise $R[x]$ 'in de birimli olduğu açıktır.

Tanım 2.2.4 R bir halka olmak üzere $R[[x]]=\{a_0x^0+a_1x^1+...+a_nx^n+...\mid a_i\in R\}$ kümesi yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır ve bu halkaya *formal kuvvet seriler halkası* denir.

Tanım 2.2.5 R bir halka ve $\alpha: R\to R$ bir endomorfizma olsun. Her $a,b\in R$ için

(1) $\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b)$,

(2) $\delta(ab)=\delta(a)b+\alpha(a)\delta(b)$

özelliklerini sağlayan bir $\delta: R\to R$ dönüşümüne R'nin bir $\alpha-$*türevi* ($\alpha-$*derivation*) denir.

Tanım 2.2.6 R bir halka α; R'nin bir endomorfizması ve δ; R'nin bir $\alpha-$*türevi* olmak üzere $R[x;\alpha,\delta]=\{a_0+a_1x^1+...+a_nx^n \mid a_i\in R\}$ kümesi polinomlardaki toplama ve $xr=\alpha(r)x+\delta(r)$ biçiminde tanımlanan yeni çarpma işlemi ile bir halkadır.

$R[x;\alpha,\delta]$ 'ya R halkasının *Ore genişlemesi (Ore extension)* denir.

Tanım 2.2.7 Yukarıdaki tanımda özel olarak $\delta=0$ alınırsa $R[x;\alpha,0]=R[x;\alpha]$ elde edilir ve bu halkaya *skew polinom halkası* denir. Dolayısıyla $R[x;\alpha]$'daki çarpma işlemi $r\in R$ olmak üzere $xr=\alpha(r)x$ biçiminde olur.

Tanım 2.2.8 R bir halka olmak üzere bileşenleri R'den alınan $n\times n$ tipindeki matrislerin kümesi $M_n\left(R\right)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \mid a_{ij}\in R\right\}$ ile gösterilir. $M_n\left(R\right)$ kümesi matrislerdeki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. $M_n\left(R\right)$'ye *matris halkası* denir.

$M_n\left(R\right)$ halkasının

$$T_n\left(R\right)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} \mid a_{i,j}\in R\right\}$$

alt kümesi $M_n\left(R\right)$'nin bir alt halkasıdır. $T_n\left(R\right)$'ye *üst üçgensel matris halkası* denir.

Tanım 2.2.9 R bir halka ve ${}_R M_R$ bir bimodül olsun. $T\left(R,M\right)=R\oplus M$ kümesi her $\left(r_1,m_1\right),\left(r_2,m_2\right)\in T\left(R,M\right)$ için;

$$\left(r_1,m_1\right)+\left(r_2,m_2\right)=\left(r_1+r_2,m_1+m_2\right)$$
$$\left(r_1,m_1\right)\left(r_2,m_2\right)=\left(r_1r_2,r_1m_2+m_1r_2\right)$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir halkadır. $T\left(R,M\right)$ 'ye R'nin M ile *aşikar genişlemesi* (*trivial extension*) denir.

$T\left(R,M\right)$ kümesi $r\in R, m\in M$ olmak üzere tüm $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r\end{pmatrix}$ biçimindeki tüm matrislerin halkasına izomorftur. Yani $T(R,M)\cong\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ o & r\end{pmatrix} \mid r\in R, m\in M\right\}$ dir.

R halkası herhangi bir (p) özelliği sağlarken *eRe* ve $\mathrm{M_n}\left(R\right)$ halkaları da aynı (p) özelliğini sağlıyorsa, bu durumda bu (p) özelliğine *Morita invaryant özellik* denir.

2.3 Bazı Halka Sınıfları

Tanım 2.2.3.1 a; R'nin sıfırdan farklı bir elemanı olmak üzere $ab=0$ olacak şekilde R'nin sıfırdan farklı bir b elemanı varsa a'ya *sol sıfır böleni (left zero divisor)* denir. Benzer şekilde sıfırdan farklı a elemanı için $ca=0$ olacak şekilde sıfırdan farklı c elemanı varsa a'ya *sağ sıfır bölen (right zero divisor)* denir. Bir eleman hem sağ hem sol sıfırlayan ise *sıfır bölen (divisor)* adını alır.

Tanım 2.2.3.2 R bir halka olmak üzere R'nin bir elemanı R'de sağ ya da sol sıfır bölen değilse *düzgün (regüler)* adını alır.

Tanım 2.2.3.3 R bir Q halkasının alt halkası olmak üzere eğer,

(1) R'nin her düzgün elemanı Q'da terslenebilir,

(2) Q'nun her elemanı $x, y \in R$ ve x düzgün olmak üzere $x^{-1}y$ formunda yazılabilir,

ise bu durumda Q halkası R'nin *klasik sol kesirler halkası (left classical ring of quotients)* olarak adlandırırlır.

Tanım 2.2.3.4 Bir R halkasında sıfırdan farklı üstel sıfır elemanlar yoksa ($a \in R$ için $a^2=0$ ise $a=0$ koşulu sağlanıyorsa) R halkası *inmiş (reduced)* olarak adlandırılır. Açık olarak inmiş bir halkanın her alt halkası de inmiştir.

Tanım 2.2.3.5 R bir halka olmak üzere $a,b \in R$ için $ab=0$ iken $ba=0$ oluyorsa R halkası terslenebilir (reversible) olarak adlandırılır.(Cohn 1999)

Her inmiş halka terslenebilirdir. Gerçekten $ab=0$ olsun. $(ba)^2=baba=0$ ve R inmiş olduğundan $ba=0$ elde edilir.

Tanım 2.2.3.6 $a,b \in R$ için $ab=0$ iken $aRb=0$ oluyorsa bu durumda R'ye yarı değişmeli (semicommutative) bir halka denir.

Lemma 2.2.3.7 R terslenebilir bir halka ise bu durumda R yarı değişmelidir.

İspat $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve her $r \in R$ için $bar = 0$ olup tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ dır. Sonuç olarak R yarı değişmelidir.

3. ARMENDARIZ VE İNMİŞ HALKALAR

Son yıllarda pek çok halka teorici tarafından çalışılan Armendariz halkalar, son dönemlerin oldukça popüler bir konusu haline gelmiştir. Bu çalışmaların hemen hemen hepsine ışık tutan N.K. Kim ve Y. Lee nin 2000 yılında yazdıkları "Armendariz rings and reduced rings" başlıklı çalışmadır. Bu bölümde bu çalışmayı ayrıntıları ile inceleyeceğiz. Bu sebeple bu bölüm için temel referansımız yukarıda bahsedilen çalışma olacaktır.

Tanım 3.1 R bir halka ve $f(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m$, $g(x)=b_0+b_1x+...+b_nx^n \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x)=0$ olduğunda her $0\leq i\leq m$ ve $0\leq j\leq n$ için $a_ib_j=0$ oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

(Armendariz 1974)'de inmiş her halkanın Armendariz olduğunu ispatladığı için yukarıdaki özelliğe sahip olan halkalara Armendariz halka adı verilmiştir. Şimdi bunu görelim.

Teorem 3.2 Her inmiş halka Armendarizdir.

İspat R inmiş olsun. R'nin Armendariz olduğunu gösterelim.

$f(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m$, $g(x)=b_0+b_1x+...+b_nx^n \in R[x]$ için $f(x)g(x)=0$ olsun. Bu durumda,

$$a_0b_0=0 \tag{0}$$

$$a_0b_1+a_1b_0=0 \tag{1}$$

$$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0 \tag{2}$$

$$a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=0 \tag{3}$$

$$\vdots$$

$$a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_{k-1}b_1+a_kb_0=0 \tag{k}$$

$\vdots$

$$a_m b_n = 0$$
$$(m+n)$$

dir.

R inmiş olduğundan R yarı değişmelidir. Böylece (0) denkleminden $a_0 R b_0 = 0$ olur. (1) denklemini sağdan b_0 ile çarparsak $a_0 b_1 b_0 + a_1 b_0^{\ 2} = 0$ ve buradan $a_1 b_0^{\ 2} = 0$ elde ederiz. Böylece $b_0 a_1 b_0 = 0$ dır. Şimdi; $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = 0$ olup R inmiş olduğundan $a_1 b_0 = 0$ bulunur. Bu (1) denkleminde yerine yazılırsa $a_0 b_1 = 0$ elde edilir. Şu halde $a_0 R b_1 = a_1 R b_0 = 0$ dir. Şimdi (2) denklemini sağdan b_0 ile çarpalım. Böylece $a_2 b_0^2 = 0$ olur. Tekrar yukarıdaki gibi $a_2 b_0 = 0$ elde edilir. Böylece (2) denklemi $a_0 b_2 + a_1 b_1 = 0$ haline gelir. Bu denklemi sağdan b_1 ile çarparsak $a_1 b_1 b_1 = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan $a_1 b_1 = 0$ olur ve böylece $a_0 b_2 = 0$ elde edilir. Böyle devam edilirse her $0 \le i \le m$ ve $0 \le j \le n$ için $a_i b_j = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R halkası Armendarizdir.

Lemma 3.3 Armendariz halkaların alt halkaları da Armendarizdir.

İspat. R bir Armendariz halka ve S, R'nin bir alt halkası olsun. $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$, $g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n \in S[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olsun. her i, j için $\mathrm{a_i}, b_j \in S$ ve S; R'nin alt halkası olduğundan $\mathrm{a_i}, b_j \in R$ dir. R halkası Armendariz ve $f(x)g(x) = 0$ olduğundan her i, j için $a_i b_j = 0$ dır. Bundan dolayı S halkası Armendarizdir.

Herhangi bir halka üzerine kurulan matris halkasının Armendariz olup olmadığı merak edilebilir. Aşağıdaki örnekle bunun mümkün olmadığını görürüz.

Örnek 3. 4 R bir halka olmak üzere $n \ge 2$ için $T_n(R)$ Armendariz değildir.

$T_n(R)$'nin Armendariz olmadığını göstermek için R halkası üzerindeki 2×2 tipinde üst üçgen matris halkasının Armendariz olmadığını göstermek yeterlidir.

R halkası için $T_2(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in R\right\}$ halkasını göz önüne alalım. $f(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x$, $g(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x\in S[x]$ alalım. Bu durumda $f(x)g(x)=O$ dır. Fakat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$ olduğundan S halkası Armendariz değildir. Böylece $n\geq 2$ için R üzerindeki $n\times n$ tipinde üst üçgensel matrislerin halkası $T_n(R)$ Armendariz değildir. Böylece lemma 3.3 gereğince R üzerindeki $n\times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası $M_n(R)$ de Armendariz değildir.

Bununla beraber 3×3 tipindeki üst üçgensel matrisler halkasının Armendariz olan bazı alt halkaları vardır. Bu alt halkaları vermeden önce çalışmamız boyunca kullanacağımız aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.5 R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ ' in inmiş olmasıdır.

İspat. $R[x]$ inmiş olsun. R; $R[x]$'in bir alt halkası olduğundan R de bir inmiş halkadır.

Tersine R inmiş bir halka olsun. $R[x]$ halkasının inmiş olduğunu gösterelim. $R[x]$'in bir $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ elemanı için $(f(x))^2=0$ olsun. Bu durumda

$$0=(f(x))^2=\left(a_0+a_1x+...+a_nx^n\right)\left(a_0+a_1x+...+a_nx^n\right)$$

dan

$$0=a_0{}^2+\left(a_0a_1+a_1a_0\right)x+\left(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0\right)x^2+...+\left(a_n^2\right)x^{2n}$$

elde edilir. Böylece $a_0{}^2=0$ ve R inmiş olduğundan $a_0=0$ dır. Diğer taraftan x^2'nin katsayısının sıfır olmasından $a_1=0$ elde edilir ve x^4'ün katsayısının sıfır olmasından

$a_2 = 0$ elde edilir. Böyle devamla her $0 \le i \le n$ için $a_i = 0$ elde edilir ki bu da bize $f(x) = 0$ olduğunu verir. Sonuç olarak $R[x]$ inmiş halkadır.

Aşağıdaki önerme R 'nin inmiş bir halka olması durumunda $T_3(R)$ 'nin Armendariz bir alt halkasının var olduğunu gösterir.

Önerme 3.6 R inmiş bir halka olmak üzere

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in R \right\}$$

halkası Armendarizdir.

İspat İlk olarak S_3 halkasının bir $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ elemanını (a,b,c,d) biçiminde göz önüne alabiliriz. Dolayısıyla S_3 halkası üzerindeki toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2\ ,d_1+d_2)$$
$$(a_1,b_1,c_1,d_1).(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2,a_1b_2+b_1a_2,a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2,a_1d_2+d_1a_2)$$

$S_3[x]$ halkasındaki her polinom $R[x]$ halkasındaki uygun $p_i(x)$ polinomları için $(p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ formunda yazılabilir. $S_3[x]$ halkasının

$f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ ve $g(x) = (g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ elemanları için

$f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \qquad (0)$$

$$f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x)=0 \quad (1)$$

$$f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x)=0 \quad (2)$$

$$f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x)=0 \quad (3)$$

denklemlerini elde ederiz. Şimdi bu denklemlerde görünen her bir terimin sıfır olduğunu gösterelim. R halkası inmiş olduğundan Lemma 3.5 gereğince $R[x]$ de inmiştir ve böylece $R[x]$ yarı değişmelidir. (1) denklemini sağdan $g_0(x)$ ile çarparsak $f_1(x)g_o(x)g_0(x)=0$ bulunur. $R[x]$ halkası inmiş olduğundan $f_1(x)g_0(x)=0$ dır. Böylece (1) denkleminden $f_0(x)g_1(x)=0$ elde edilir. (3) denklemi sağdan $g_0(x)$ ile çarpılırsa $f_3(x)g_0^2(x)=0$ olur. Tekrar $R[x]$ halkası inmiş olduğundan $f_3(x)g_0(x)=0$ bulunur. Böylece (3) denkleminden $f_0(x)g_3(x)=0$ elde edilir. (2) denklemi sağdan $g_0(x)$ ile çarpılırsa $f_2(x)g_0(x)g_0(x)=0$ olur. $R[x]$ halkası inmiş olduğundan $f_2(x)g_0(x)=0$ bulunur. Böylece (2) denkleminden $f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)=0$ olur. Bu son denklemi sağdan $g_3(x)$ ile çarparsak $f_1(x)g_3(x)g_3(x)=0$ ve buradan da $f_1(x)g_3(x)=0$ bulunur. Böylece $f_0(x)g_2(x)=0$ elde edilir. Şimdi;

$$f_0(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\ ,\ f_1(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\ ,\ f_2(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i\ ,\ f_3(x)=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i$$

$$g_0(x)=\sum_{j=0}^{m}a'_jx^j\ ,\ g_1(x)=\sum_{j=0}^{m}b'_jx^j\ ,\ g_2(x)=\sum_{j=0}^{m}c'_jx^j\ ,\ g_3(x)=\sum_{j=0}^{m}d'_jx^j$$

olmak üzere; $f(x)=\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}x^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ 0 & a'_j & d'_j \\ 0 & 0 & a'_j \end{pmatrix}x^j$ olsun. R halkası Armendariz ve $f_0(x)g_0(x)=0$ olduğundan $a_ia'_j=0$, $f_0(x)g_1(x)=0$ dan $a_ib'_j=0$, $f_1(x)g_0(x)=0$ dan $b_ia'_j=0$, $f_0(x)g_3(x)=0$ dan $a_id'_j=0$, $f_3(x)g_0(x)=0$ dan $d_ia'_j=0$, $f_0(x)g_2(x)=0$ dan $a_ic'_j=0$, $f_1(x)g_3(x)=0$ dan $b_id'_j=0$ ve

$f_2(x)g_0(x)=0$ dan $c_i a_j^{'}=0$ elde edilir. Sonuç olarak her i, j için

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j^{'} & b_j^{'} & c_j^{'} \\ 0 & a_j^{'} & d_j^{'} \\ 0 & 0 & a_j^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_i a_j^{'} & a_i b_j^{'}+b_i a_j^{'} & a_i c_j^{'}+b_i d_j^{'}+c_i a_j^{'} \\ 0 & a_i a_j^{'} & a_i d_j^{'}+d_i a_j^{'} \\ 0 & 0 & a_i a_j^{'} \end{pmatrix}=O$$ olup S_3 halkası

Armendarizdir.

Önerme 3.6'yı göz önünde bulundurarak; $n \geq 4$ için S_n matris halkasının da Armendariz olduğundan şüphe edilebilir. Fakat

R inmiş bir halka ve $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$ olmak üzere $n \geq 4$ için

S_n Armendariz değildir. Şimdi bunu bir örnekle görelim.

Örnek 3.7 R herhangi bir halka olmak üzere $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$

halkasını göz önüne alalım. $S_4[x]$ halkasının

$$f(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x \quad \text{ve} \quad g(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x$$

elemanlarını göz önüne alalım. Bu durumda $f(x)g(x)=O$ dır. Fakat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan S_4 Armendariz halka değildir.

Şimdi önerme 3.6'nın bir direkt sonucunu görelim.

Sonuç 3.8 R inmiş bir halka olmak üzere $T(R,R)$ aşikar genişlemesi de Armendarizdir.

İspat R inmiş bir halka olmak üzere, ${}_R R_R$ bimodülünü göz önüne alalım. $T(R,R)=R\oplus R$ aşikar genişlemesinin $\left\{\begin{pmatrix} r & s \\ o & r \end{pmatrix} \mid r,s\in R\right\}$ halkasına izomorf olduğunu biliyoruz. S_3'ün $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b\in R\right\}$ alt halkası ile $\left\{\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r,s\in R\right\}$ halkası izomorf halkalardır. Yani $T(R,R)\cong U=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b\in R\right\}$ dir. S_3 halkası Armendariz ve Armendariz halkaların alt halkaları da Armendariz olduğundan U halkası Armendarizdir. Bundan dolayı $T(R,R)$ Armendarizdir.

Sonuç 3.8'de, R halkası inmiş halka ise $T(R,R)$ aşikar genişlemesinin Armendariz olduğunu gösterdik. Diğer taraftan R Armendariz halka ise $T(R,R)$'nin Armendariz olup olmadığından şüphe edilebilir Fakat aşağıdaki örnek bu şüpheyi ortadan kaldırır.

Örnek 3.9 H inmiş bir halka olsun. Bu durumda Sonuç 3.8'den dolayı

$T(H,H)\cong\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b\in H\right\}$ aşikar genişlemesi Armendariz halkadır. Bununla beraber

$T(T(H,H),T(H,H))\cong\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A,B\in T(H,H)\right\}$ halkası Armendariz değildir. Gerçekten; $T(T(H,H),T(H,H))$ halkasının

$$f(x)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}x$$

$$g(x)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}x$$

elemanlarını göz önüne alalım. Bu durumda $f(x)g(x)=O$ dır.

Fakat $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\neq O$

olduğundan $T(T(H,H),T(H,H))$ halkası Armendariz değildir.

Anderson ve Camillo Armendariz halkalar üzerindeki polinom halkalarının Armendariz olduklarını ispatlamıştır. Yani R halkası Armendariz ise $R[x]$ polinom halkası da Armendarizdir. Bir R halkasının Ore genişlemesi $R[x;\alpha,\delta]$ ile gösterilir. Burada $\alpha: R\to R$ .bir halka endomorfizması ve $\delta: R\to R$ bir $\alpha-$türevidir Yani her $a,b\in R$ için

$$\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b)$$
$$\delta(ab)=\alpha(a)\delta(b)+\delta(a)b$$

eşitlikleri sağlanır. $R[x;\alpha,\delta]$. da polinomların çarpımı her $r\in R$ için

$xr=\alpha(r)x+\delta(r)$ ile tanımlıdır. $\delta=0$ ise $R[x;\alpha,\delta]$ Ore genişlemesi $R[x;\alpha]$ skew polinom halkası olur. Yani $R[x;\alpha,0]=R[x;\alpha]$ dır. Anderson ve Camillo'nun sonucundan esinlenerek Armendariz bir halkanın üzerindeki skew polinom halkasının da Armendariz olabileceğinden şüphe edilmiştir.

Örnek 3.10 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ olmak üzere $R=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ halkasını göz önüne alalım. . Kolayca görülebilir ki R inmiş halkadır dolayısıyla R halkası Armendarizdir. Şimdi

$$\alpha:\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$$

$$(\mathrm{a,b}) \mapsto \alpha\big((a,b)\big) = (b,a)$$

endomorfizmasını göz önüne alalım. α; R' nin bir otomorfizmasıdır. $R[x;\alpha]$ skew polinom halkası Armendariz değildir. Gerçekten $R[x;\alpha][y]$'nin

$$f(y) = (1,0) + [(1,0)x]y \text{ ve } g(y) = (0,1) + [(1,0)x]y$$

elemanlarını göz önüne alalım. Bu durumda $f(y)g(y) = 0$ olur. Fakat $(1,0)[(1,0)x] = (1,0)x \neq 0$ olduğundan $R[x;\alpha]$ Armendariz değildir.

Şimdi abelian halkaların sınıfı ile Armendariz halkaların sınıfı arasındaki ilişkiyi verelim. Yani Armendariz halkaların abelian olduğunu ispatlayalım. Bunun ispatı için aşağıdaki iki lemmaya ihtiyacımız olacak.

Lemma 3.11 R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda her $a,b \in R$ için $b_R r(a) \cap a r_R(b) = 0$ dır

İspat Kabul edelim ki $br_R(a) \cap ar_R(b) \neq 0$ olsun. Bu durumda $br_R(a) \cap ar_R(b)$'nin sıfırdan farklı en az bir c elemanı vardır. $0 \neq c \in br_R(a) \cap ar_R(b)$ olduğundan $c = bt$ olacak şekilde $t \in r_R(a)$ ve $c = as$ olacak şekilde $s \in r_R(b)$ vardır. Buradan $at = 0$ ve $bs = 0$ dır. $R[x]$ halkasında $f(x) = a - bx$ ve $g(x) = t + sx$ elemanlarını göz önüne alalım. Bu durumda $f(x)g(x) = (a-bx)(t+sx) = at + (as-bt)x - (bs)x^2 = 0$ dır. Fakat $bt = c \neq 0$ olması R halkasının Armendariz olması ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlıştır. Sonuç olarak $br_R(a) \cap ar_R(b) = 0$ olmalıdır.

Lemma 3.12 R Armendariz bir halka ve R'nin iki eşkare elemanı e ve f olmak üzere, eğer $fe = 0$ ise bu durumda $ef = 0$ dır.

İspat $fe = 0$ olsun. Lemma 3.11'de $b = e$ ve $a = 1 - f$ alınırsa $r(a) = fR$ ve $r(b) = (1-e)R$ olduğundan

$br_R(a) \cap ar_R(b) = 0$ elde edilir. Buradan $0 = br(a) \cap ar(b) = efR \cap (1-f)(1-e)R$ dir. Böylece $ef = (1-f)(1-e)(-f) = -f + ef + f + fef = ef$ olduğundan $ef = (1-f)(1-e)(-f)$ biçiminde yazılabilir. $ef = (1-f)(1-e)(-f) \in (1-f)(1-e)R$ olup

$ef \in efR$ olduğundan $ef \in efR \cap (1-f)(1-e)R = 0$ olur ki buradan $ef = 0$ elde edilir.

Lemma 3.13 her Armendariz halka ise abeliandır.

İspat R Armendariz bir halka olsun. e, R'nin $e^2 = e$ olacak şekilde bir elemanı olmak üzere R'nin her r elemanı için $er = re$ olduğunu gösterelim. R'nin her r elemanı için $f = e + er(1-e)$ elemanı R'nin bir eşkare elemandır. Ayrıca e eşkare olduğundan $(1-e)$ de eşkaredir. $(1-e)f = (1-e)(e + er(1-e))$ $= (1-e)e + (1-e)er(1-e) = e - e = 0$ olur. Yani

$(1-e)f = 0$ olup Lemma 3.12'den $f(1-e) = 0$ elde edilir.

$0 = f(1-e) = (e + er(1-e))(1-e)$ olduğundan $er - ere = 0$ yani $er = ere$ elde edilir. diğer taraftan R'nin her r elemanı için R'nin $g = (1-e) + (1-e)re$ elemanı bir eşkare elemandır.

$eg = e((1-e) + (1-e)re) = e(1-e) + e(1-e)re = e - e + ere - ere = 0$ olup

Lemma 3.12'den $ge = 0$ elde edilir. Böylece $0 = ge = ((1-e) + (1-e)re)e$ den $re - ere = 0$ yani $re = ere$ elde edilir.

Sonuç olarak $er = re$ olup R'deki her eşkare merkezi olduğundan R halkası abeliandır.

Bir R halkası üzerindeki formal kuvvet serilerinin halkası $R[|x|]$ ile gösterilir. Aşağıdaki lemma $R[x]$ ve $R[|x|]$ halkalarındaki eşkare elemanların R'deki eşkare elemanlar olduğunu göstermektedir.

Lemma 3.14 R abelian bir halka olmak üzere;

(1) $R[x]$ halkasındaki her eşkare eleman R halkasındadır ve $R[x]$ halkası abeliandır.

(2) $R[|x|]$ halkasındaki her eşkare eleman R halkasındadır ve $R[|x|]$ halkası abeliandır.

İspat $R[x]$ halkası $R[|x|]$ 'in bir alt halkası olduğundan (2)'yi ispatlamak yeterlidir.

$f(x) = e_0 + e_1 x + \ldots + e_n x^n + \ldots \in R[|x|]$ bir eşkare elemanı olsun. f 'nin R halkasının elemanı olduğunu gösterelim.

$[f(x)]^2 = f(x)$ eşitliğinden

$$e_0^{\ 2} = e_0 \tag{0}$$

$$e_0 e_1 + e_1 e_0 = e_1 \tag{1}$$

$$e_0 e_2 + e_1 e_1 + e_2 e_0 = e_2 \tag{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$e_0 e_k + e_1 e_{k-1} + \ldots + e_k e_0 = e_k \tag{k}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$e_n^2 = e_n$$

(2n)

denklemlerini elde ederiz. (0) denkleminde $e_0^{\ 2} = e_0$ olup R 'nin e_0 elemanı eşkaredir. R halkası abelian olduğundan R 'nin e_0 eşkare elemanı merkezidir. (1) denklemi soldan e_0 ile çarpılırsa $e_0 e_1 e_0 = 0$ bulunur ve e_0 merkezi olduğundan $e_0 e_1 = 0$ olur. (1) denkleminden $e_1 e_0 = e_1$ elde edilir. Diğer taraftan e_0 merkezi olduğundan $e_1 e_0 = e_0 e_1 = e_1 = 0$ elde edilir. (2) denklemi soldan e_0 ile çarpılırsa $e_0 e_2 e_0 = 0$ elde edilir ve e_0 merkezi olduğundan $e_0e_2=0$ olur. (2) denkleminden $e_2e_0=e_2$ olup e_0 merkezi olduğundan $e_2e_0=e_0e_2=e_2=0$ bulunur. Böyle devamla her $i\geq 1$ için $e_i=0$ bulunur. Sonuç olarak $f=e_0\in R$ bulunur. Şimdi $R\left[|x|\right]$ halkasının abelian olduğunu gösterelim. Bunun için $R\left[|x|\right]$ halkasındaki her eşkarenin merkezi olduğunu göstermeliyiz. $R\left[|x|\right]$ halkasının her f eşkare elemanı için $f=e_0\in R$ olduğunu gösterdik. $R\left[|x|\right]$ halkasının her g elemanı için $fg=gf$ olduğunu göstermeliyiz. $R\left[|x|\right]$ halkasının bir elemanı $g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m+...$ olmak üzere

$$f(x)g(x)=e_0\left(b_0+b_1x+...+b_mx^m+...\right)=e_0b_0+e_0b_1x+...+e_0b_mx^m+...$$
$$=b_0e_0+b_1e_0x+...+b_me_0x^m+...=\left(b_0+b_1x+...+b_mx^m+...\right)e_0=g(x)f(x)$$

elde edilir. Böylece $R\left[|x|\right]$ halkasının her f eşkare elemanı merkezidir. Yani $R\left[|x|\right]$ halkası abeliandır.

Tanım 3.15 (Kaplansky 1968)'de bir R halkasının boştan farklı her alt kümesinin sağ sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa bu R halkasını *Baer* olarak adlandırmıştır. Yani R halkasının boştan farklı her X alt kümesi için $r_R(X)=eR$ olacak şekilde R'nin bir e eşkare elemanı varsa R halkasına *Baer halka*sı denir. Buna denk olarak R halkasının boştan farklı her X alt kümesi için $l_R(X)=Rf$ olacak şekilde R'nin bir f eşkare elemanı varsa R halkasına *Baer halka* denir.

Önerme 3.16 Bir R halkasının boş olmayan her bir alt kümesinin sağ sıfırlayanının bir eşkare tarafından üretilmesi için gerek ve yeter şart R halkasının boştan farklı her bir alt kümesinin sol sıfırlayanının bir eşkare tarafından üretilmesidir.

İspat R halkasının boş olmayan her bir alt kümesinin sağ sıfırlayanı bir eşkare tarafından üretilsin. $\varnothing\neq X\subseteq R$ olsun. Bu durumda $\varnothing\neq l_R(X)\subseteq R$ dir. Kabul gereği $r_R(l_R(X))=eR$ olacak şekilde bir $e^2=e\in R$ vardır. Buradan $l_R(X)=l_R\left(r_R\left(l_R(X)\right)\right)=l_R(eR)=Rf$ olacak şekilde $f^2=f\in R$ vardır. Burada $f=1-e$ dir.

Tersine olarak X ; R 'nin boş olmayan alt kümesi olsun. Bu durumda $r_R(X)$; R 'nin boş olmayan alt kümesidir. Kabul gereği $l_R r_R(X) = Rf$ olacak şekilde R $f^2 = f \in R$ vardır. Böylece $r_R(X) = r_R l_R r_R(X) = r_R(Rf) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Burada $e = 1 - f$ dir.

Tanım 3.17 Bir R halkasının her bir temel sağ ideali projektif ise ya da denk olarak R nin her bir elemanının sağ sıfırlayanı bir eşkare tarafından üretiliyorsa R halkasına bir sağ p.p.-halka denir. Yani R 'nin her bir a elemanı için $r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ varsa, bu durumda R 'ye sağ p.p.-halka denir. Benzer olarak R nin her bir elemanının sol sıfırlayanı bir eşkare tarafından üretiliyorsa R halkasına bir sol p.p.-halka denir. Yani R 'nin her bir a elemanı için $l_R(a) = Rf$ olacak şekilde f eşkare elemanı varsa R 'ye sol p.p.-halka denir. Bir R halkası hem sağ p.p.-halka hem de sol p.p.-halka ise p.p.-halka olarak adlandırılır. Yani R bir p.p.-halka ise R bir sağ p.p.-halka ve bir sol p.p.-halkadır. Her Baer halka p.p.-halkadır. Şimdi bunu görelim.

Lemma 3.18 R bir Baer halka ise, bu durumda R bir p.p.- halkadır

İspat R halkası Baer halka olsun. R 'nin p.p.-halka olduğunu gösterelim. R 'nin her a elemanı için $\{a\}$ tek nokta kümesini göz önüne alalım. R 'nin boş olmayan $\{a\}$ alt kümesi için R Baer halka olduğundan $r_R(\{a\}) = r_R(a) = eR$ olacak şekilde R 'nin e eşkare elemanı vardır. Bundan dolayı R halkası bir sağ p.p.-halkadır. Aynı zamanda R 'nin boş olmayan $\{a\}$ alt kümesi için R halkası Baer halka olduğundan $l_R(\{a\}) = l_R(a) = Rf$ olacak şekilde R 'nin f eşkare elemanı vardır. Bundan dolayı R halkası bir sol p.p.-halkadır. Sonuç olarak R halkası hem sağ p.p.-halka hem de sol p.p.-halka olduğundan R bir p.p.- halkadır.

Lemma 3.19 Bir R halkası abelian ve sağ p.p.-halka ise, bu durumda R inmiş halkadır.

İspat R halkası abelian ve sağ p.p.-halka olsun. R 'nin bir a elemanı için $a^2 = 0$ ise $a = 0$ olduğunu göstermeliyiz. R halkası sağ p.p.-halka olduğundan $r_R(a) = eR$ olacak şekilde R halkasının e eşkare elemanı vardır. R halkası abelian olduğundan R'nin bu e eşkare elemanı merkezidir. Kabulden $a^2 = aa = 0$ olduğundan $a \in r_R(a)$ ve $r_R(a) = eR$ olduğundan a; eR nin elemanıdır. Yani $a = er$ olacak şekilde R'nin r elemanı vardır. e merkezi olduğundan $a = er = re$ dir. Diğer taraftan $e = e1_R$ olduğundan $e \in eR$ dir. $eR = r_R(a)$ olduğundan $ae = 0$ dır. Böylece $a = er = re$ ise $ae = ere = re^2 = 0 \Rightarrow ae = er = re = a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R halkası inmiştir.

Örnek 3.20 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası Baer halkadır. Gerçekten; $\mathbb{Z}$'nin boş olmayan her bir X altkümesi için $r_{\mathbb{Z}}(X) = e\mathbb{Z}$ olacak şekilde e eşkare elemanının olduğunu gösterelim. Eğer $\mathbb{Z}$'nin boştan farklı alt kümesi $X = \{0\}$ tek nokta kümesi ise,bu durumda $r_{\mathbb{Z}}(X) = \mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$ olacak şekilde 1 eşkare elemanı vardır. $\mathbb{Z}$'nin $\{0\}$ olmayan boştan farklı X kümesi için $r_{\mathbb{Z}}(X) = \{0\} = 0\mathbb{Z}$ olacak şekilde 0 eşkare elemanı vardır. Böylece $\mathbb{Z}$ halkası Baer halkadır. Daha genel olarak; benzer biçimde her tamlık bölgesinin bir Baer halka olduğu gösterilebilir.

Örnek 3.21 $\mathbb{Z}_6 = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\right\}$ halkası p.p.-halkadır. Gerçekten; $\mathbb{Z}_6$'nin her $\bar{a}$ elemanı için $r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{a}\right) = \bar{e}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\bar{e}$ eşkare elemanının olduğunu görelim. Gerçekten

$r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{0}\right) = \mathbb{Z}_6 = \bar{1}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\left(\bar{1}\right)^2 = \bar{1} \in \mathbb{Z}_6$ vardır.

$r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{1}\right) = \left\{\bar{0}\right\} = \bar{0}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\left(\bar{0}\right)^2 = \bar{0} \in \mathbb{Z}_6$ vardır.

$r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{2}\right) = \bar{3}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\left(\bar{3}\right)^2 = \bar{3} \in \mathbb{Z}_6$ vardır.

$r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{3}\right) = \bar{4}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\left(\bar{4}\right)^2 = \bar{4} \in \mathbb{Z}_6$ vardır.

$r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{4}\right)=\bar{3}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\left(\bar{3}\right)^2=\bar{3}\in\mathbb{Z}_6$ vardır.

$r_{\mathbb{Z}_6}\left(\bar{5}\right)=\bar{0}\mathbb{Z}_6$ olacak şekilde $\left(\bar{0}\right)^2=\bar{0}\in\mathbb{Z}_6$ vardır.

Böylece $\mathbb{Z}_6$ bir sağ p.p.-halkadır. Benzer şekilde $\mathbb{Z}_6$ bir sol p.p.-halkadır Sonuç olarak $\mathbb{Z}_6$ bir p.p.-hakladır.

Aşağıdaki teorem R'nin Armendariz olması durumunda, R halkasının p.p.-halka olma özelliğinin $R[x]$ polinom halkasına taşınmadığını göstermektedir.

Teorem 3.22 R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda R halkasının p.p.-halka olması için gerek ve yeter şart $R[x]$ halkasının p.p.-halka olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ R halkası p.p.-halka olsun. $R[x]$ halkasının da p.p.-halka olduğunu gösterelim. $R[x]$'in her bir $p(x)$ elemanı için $r_{R[x]}\left(p(x)\right)=e(x)R[x]$ olacak şekilde $e(x)$ eşkare elemanının var olduğunu gösterelim. $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ biçiminde olsun. R halkası p.p.-halka olduğundan her $i=0,1,...,n$ için $r_R\left(a_i\right)=e_iR$ olacak şekilde $e_i^2=e_i\in R$ vardır. R halkası Armendariz olduğundan Lemma 3.13 gereğince R abeliandır. Böylece Lemma 3.14'den $R[x]$ halkasındaki eşkareler R'dedir. Bundan dolayı $R[x]$'in her $e(x)$ eşkare elemanı için $e(x)=e$, olacak şekilde bir $e^2=e\in R$ vardır. R abelian olduğundan R halkasındaki her e_i eşkare elemanı merkezidir. Şimdi $e=e_0e_1...e_n$ olsun. Bu durumda $e^2=\left(e_0e_1...e_n\right)^2=\left(e_0e_1...e_n\right)\left(e_0e_1...e_n\right)$ ve e_i'ler merkezi olduğundan $e^2=e_0e_1...e_n=e$ dir. Böylece R'nin e elemanı eşkaredir. Ayrıca $eR=\bigcap_{i=0}^{n}r_R\left(a_i\right)$ dir. Gerçekten t; eR'nin elemanı olmak üzere $t=er$ olacak şekilde R'nin r elemanı vardır. Buradan $t=\left(e_0e_1...e_n\right)r$ olur. Böylece $a_0t=0$ olup $t\in r_R\left(a_0\right)$; $a_1t=0$ olup $t\in r_R\left(a_1\right)$ ve benzer şekilde $a_nt=0$ olup $t\in r_R\left(a_n\right)$ dır. Her

$i=0,1,2,...,n$ için $t\in r_R(a_i)$ ise, bu durumda $t\in\bigcap_{i=0}^{n} r_R(a_i)$ dir. Böylece $eR\subseteq\bigcap_{i=0}^{n} r_R(a_i)$ elde edilir. Şimdi $y\in\bigcap_{i=0}^{n} r_R(a_i)$ olsun. Bu durumda her $i=0,1,2,...,n$ için $y\in r_R(a_i)=e_iR$ olup $y=e_ir_i$ olacak şekilde R'nin r_i elemanı vardır. $y=e_ir_i$ ise $y=e_0e_1...e_nr_n\ =er_n$ olacak şekilde R'nin r_n elemanı vardır. Böylece $y\in eR$ dir. Buradan $\bigcap_{i=0}^{n} r_R(a_i)\subseteq eR$ bulunur. Sonuç olarak $\bigcap_{i=0}^{n} r_R(a_i)=eR$ dir. Şimdi $r_{R[x]}(p(x))=eR[x]$ olduğunu gösterelim. $f(x)\in eR[x]$ için $f(x)=eg(x)$ olacak şekilde $g(x)\in R[x]$ vardır. $p(x)f(x)\ =p(x)(eg(x))\ =0$ olduğundan $f(x)\in r_{R[x]}(p(x))$ dir. O halde $eR[x]\subseteq r_{R[x]}(p(x))$ dir. $q(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m\in r_{R[x]}(p(x))$ olsun. Bu durumda $p(x)q(x)=0$ dır. R halkası Armendariz olduğundan her $i=0,1,...,n$ ve $j=0,1,...,m$ için $a_ib_j=0$ dır. Bundan dolayı her $i=0,1,...,n$ için $b_j\in r_R(a_i)$ olur. Buradan $b_j\in\bigcap_{i=0}^{n} r_R(a_i)=eR$ dir. $b_j\in e_iR$ ise, bu durumda $b_j=er_j$ olacak şekilde R'nin r_j elemanı vardır. O halde $q(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m=e(r_0+r_1x+...+r_mx^m)\in eR[x]$ olur. Böylece $r_{R[x]}(p(x))\subseteq eR[x]$ bulunur. Sonuç olarak $r_{R[x]}(p(x))=eR[x]$ elde edilir. Böylece $R[x]$ halkası bir sağ p.p-halkadır. Benzer şekilde $R[x]$'in her bir $p(x)$ elemanı için $l_{R[x]}(p)=R[x]f$ olacak şekilde f eşkare elemanının var olduğunu gösterelim. $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\in R[x]$ olsun. R halkası p.p-halka olduğundan her $i=0,1,...,n$ için R'nin $l_R(a_i)=Rf_i$ olacak şekilde f_i eşkare elemanı vardır. $f=f_0f_1...f_n$ olsun. Bu durumda f, R'nin eşkare elemanı ve $Rf=\bigcap_{i=1}^{n} l_R(a_i)$ dir. Gerçekten; $g(x)\in R[x]f$ ise, bu durumda $g(x)=q(x)f$ olacak şekilde $g(x)\in R[x]$ vardır. O halde $g(x)p(x)=(q(x)f)p(x)=0$ dır. Buradan $g(x)\in l_R(p)$ olup $R[x]f\subseteq l_{R[x]}(p)$ bulunur. $g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m\in l_{R[x]}(p)$ olduğundan

$g(x)p(x)=0$ dır. R halkası Armendariz ve $g(x)p(x)=0$ olduğundan her i,j için $b_j a_i = 0$ dır. Bu durumda her $i=0,1,...,n$ için $b_j \in l_R(a_i)$ dir. Her $i=0,1,...,n$ için $b_j \in l_R(a_i)$ olduğundan $b_j \in \bigcap_{i=1}^{n} l_R(a_i) = Rf$ dir. Buradan $b_j = r_j f$ olacak şekilde R'nin r_j elemanı vardır. O halde $g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m = (r_0 + r_1 x + ... + r_m x^m) f$ olacak şekilde $R[x]$'in $r_0 + r_1 x + ... + r_m x^m$ elemanı vardır. Böylece $g(x) \in R[x] f$ olup $l_{R[x]}(p) \subseteq R[x] f$ bulunur. Sonuç olarak $l_{R[x]}(p) = R[x] f$ olup $R[x]$ halkası sol p.p-halkadır. Sonuç olarak $R[x]$, hem sağ p.p halka hem de sol p.p-halka olduğundan p.p-halkadır.

$(\Leftarrow)$ $R[x]$ halkası p.p-halka olsun. R halkasının p.p-halka olduğunu gösterelim. $a \in R$ olsun. R halkası $R[x]$ halkasının alt halkası olduğundan a, $R[x]$'in de elemanıdır. $R[x]$ halkası p.p-halka olduğundan $r_{R[x]}(a) = eR[x]$ olacak şekilde R'nin e eşkare elemanı vardır. $r_{R[x]}(a) = eR[x]$ ise, bu durumda $r_{R[x]}(a) \cap R = eR[x] \cap R$ olup $r_R(a) = eR$ olacak şekilde R'nin e eşkare elemanı olduğundan R halkası bir sağ p.p.-halkadır. Benzer şekilde $R[x]$ halkası p.p-halka olduğundan $R[x]$'in a elemanı için $l_{R[x]}(a) = R[x] f$ olacak şekilde R'nin f eşkare elemanı vardır. $l_{R[x]}(a) = R[x] f$ ise, bu durumda $l_{R[x]}(a) \cap R = R[x] f \cap R$ olup $l_R(a) = Rf$ olacak şekilde R'nin f eşkare elemanı olduğundan R halkası bir sol p.p-halkadır. Sonuç olarak R halkası hem sağ p.p-halka hem sol p.p halka olduğundan p.p-halkadır.

Teorem 3.23 R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda R halkasının Baer halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ halkasının Baer olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ R halkası Baer halka olsun. $R[x]$ halkasının Baer olduğunu gösterelim. A, $R[x]$'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $r_{R[x]}(A) = e(x) R[x]$ olacak şekilde $R[x]$'in e eşkare elemanının var olduğunu gösterelim. Öncelikle Lemma 3.13 gereğince R halkası Armendariz olduğundan abeliandır ve Lemma 3.14'den $R[x]$

halkasındaki her $e(x)=e$ eşkare elemanı R'dedir. A^*; A'daki polinomların tüm katsayılarının kümesi olsun. Bu durumda A^*; R halkasının boş olmayan bir alt kümesidir. R halkası Baer halka olduğundan $r_R(A^*)=eR$ olacak şekilde R'nin e eşkare elemanı vardır. $r_{R[x]}(A)=eR[x]$ olduğunu gösterelim. $f(x)\in eR[x]$ olsun bu durumda $f(x)=eg(x)$ olacak şekilde $R[x]$'in $g(x)$ elemanı olduğundan $Af(x)=A(eg(x))=(Ae)g(x)$ olup A'nın her $g(x)$ elemanı için $Af(x)=(g(x)e)g(x)=0$ olduğundan $f(x)\in r_{R[x]}(A)$ dır. Böylece $eR[x]\subseteq r_{R[x]}(A)$ dır. $g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$ olmak üzere $g(x)\in r_{R[x]}(A)$ olsun. Bu durumda $Ag(x)=0$ dır. Yani A'nın her $f(x)$ elemanı için $f(x)g(x)=0$ dır. R halkası Armendariz ve $f(x)g(x)=0$ olduğundan her i,j için $a_ib_j=0$ dır. Bundan dolayı $b_0,b_1,...,b_t\in r_R(A^*)$ dır. Her j için $b_j\in r_R(A^*)$olduğundan $b_j=er_j$ olacak şekilde R'nin r_j elemanı vardır. $g(x)=b_0+b_1x+...+b_tx^t=e(r_0+r_1x+...+r_tx^t)$ olacak şekilde $R[x]$'in $r_0+r_1x+...+r_tx^t$ elemanı vardır. Böylece $g(x)\in eR[x]$ olup $r_{R[x]}(A)\subseteq eR[x]$ dir. Sonuç olarak $r_{R[x]}(A)=eR[x]$ olup $R[x]$ halkası Baer halkadır.

$(\Leftarrow)$ $R[x]$ halkası Baer halka olsun. R halkasının Baer halka olduğun gösterelim. B ; R'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. R halkası $R[x]$ halkasının alt halkası olduğundan B; $R[x]$'in de alt kümesidir. $R[x]$ halkası Baer halka olduğundan $r_{R[x]}(B)=eR[x]$ olacak şekilde R'nin e eşkare elemanı vardır. $r_{R[x]}(B)=eR[x]\Rightarrow r_{R[x]}(B)\cap R=eR[x]\cap R\Rightarrow r_R(B)=eR$ olacak şekilde R'nin e eşkare elemanı olduğundan R halkası Baer halkadır.

Benzer sonuçlar formal kuvvet seriler halkası için aşağıdaki gibi elde edilir.

Önerme 3.24 R abelian bir halka olsun. Bu durumda

(1) $R[|x|]$ halkası p.p-halka ise, bu durumda R halkası p.p-halkadır.

(2) $R\left[\left|x\right|\right]$ halkası Baer halka ise, bu durumda R halkası Baer halkadır.

İspat İspat Teorem 3.24 ve Teorem 3.25'in ispatındaki metoda benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.25 R Armendariz bir halka olsun.

(1) $R\left[\left|x\right|\right]$ halkası p.p-halka ise, bu durumda R halkası p.p-halkadır.

(2) $R\left[\left|x\right|\right]$ halkası Baer halka ise, bu durumda R halkası Baer halkadır.

İspat Lemma 3.13'den R halkası Armendariz halka ise abeliandır. Önerme 3.24'ten R halkası Abel ise (1) ve (2) sağlanır.

Lemma 3.26 Her Boolean halka, bir inmiş halkadır.

İspat R bir Boolean halka olsun. Bu durumda R'nin her a elemanı için $a^2 = a$ dır. R'nin a elemanı için $a^2 = 0$ ise $a^2 = a = 0 \Rightarrow a = 0$ olur. Sonuç olarak R halkası inmiş halkadır.

Şimdi R bir inmiş halka olsun. Sonuç 3.8'den $T = T(R,R)$ aşikar genişlemesi Armendarizdir. T'nin asal radikali $P(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r \in R \right\}$ olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 3.27 R bir halka ve P; R'den farklı R'nin bir ideali olsun. Eğer R'nin A ve B idealleri için $AB \subset P$ iken $A \subset P$ veya $B \subset P$ oluyorsa bu durumda P'ye R'nin bir *asal ideali (prime ideal)* denir.

Önerme 3.28 R'nin herhangi bir P ideali için aşağıdakiler denktir.

(1) P asal idealdir.

(2) $a, b \in R$ için $(a)(b) \subset P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $a, b \in R$ için $aRb \subset P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(4) R'nin A, B sol idealleri için $AB \subset P$ iken $A \subset P$ veya $B \subset P$ dir.

(5) R'nin A, B sağ idealleri için $AB \subset P$ iken $A \subset P$ veya $B \subset P$ dir.

Tanım 3.29 R'nin tüm asal ideallerinin ara kesitine R'nin *asal radikali (prime radikal)* denir ve $rad(R)$ ile gösterilir.

Şimdi $P(T)$ asal radikalinin Armandariz olduğunu gösterelim.

$P(T)[x]$'in $f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+...+\alpha_n x^n$ ve $g(x)=\beta_0+\beta_1 x+...+\beta_m x^m$ elemanları için $f(x)g(x)=0$ olsun. Bu durumda her $0\leq i\leq n$ ve $0\leq j\leq m$ için $\alpha_i=\begin{pmatrix}0 & r_i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\beta_j=\begin{pmatrix}0 & s_j\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ olmak üzere $\alpha_i\beta_j=\begin{pmatrix}0 & r_i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & s_j\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$ olduğundan $P(T)$ halkası Armendarizdir. Diğer taraftan $T/P(T)$ ve R izomorf halkalardır. Gerçekten;

$\lambda: T\to R$; $\lambda\left(\begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r\end{pmatrix}\right)=r$ dönüşümü bir örten homomorfizmadır. T'nin $\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}$ elemanları için $\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}$ ise $r_1=r_2$ ve $s_1=s_2$ dir. $\lambda\left(\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}\right)=r_1=r_2=\lambda\left(\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}\right)$ olduğundan λ iyi tanımlıdır. T'nin her $\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}$ elemanları için $\lambda\left(\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}\right)+\lambda\left(\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}\right)$ ve $\lambda\left(\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{pmatrix}r_1 & s_1\\ 0 & r_1\end{pmatrix}\right)\lambda\left(\begin{pmatrix}r_2 & s_2\\ 0 & r_2\end{pmatrix}\right)$ olduğundan λ homomorfizmadır.

$\operatorname{Im}\lambda=\left\{\lambda\left(\begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r\end{pmatrix}\right) \mid \begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r\end{pmatrix}\in T\right\}=R$ olduğundan λ örtendir.

$Ker\lambda=\left\{\begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r\end{pmatrix}\in T \mid \lambda\left(\begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r\end{pmatrix}\right)=O\right\}=P(T)$ dir. Bu durumda 1. izomorfizma teoremi gereğince $T/P(T)\cong R$ dir. R halkası inmiş olduğundan Armendarizdir. Bundan dolayı $T/P(T)$ Armendarizdir.

R bir abelian halka ve $P(R)$, R'nin asal radkali olmak üzere $R/P(R)$ ve $P(R)$ Armendariz ise R halkasının Armendariz olmasından şüphe edilebilir fakat aşağıdaki örnek bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 3.30 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $R=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a-b\equiv c\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\right\}$ olsun. Bu durumda R'nin asal radikali $P(R)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\right\}$ dir. $P(R)$'nin Armendariz olduğu açıktır. Ayrıca R'nin eşkare elemanları sadece $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ merkezidir. R'nin her eşkare elemanı merkezi olduğundan R halkası abeliandır. $R/P(R)\cong\{(a,b)\mid a-b\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\}$ dir. $(a,b)^2=0$ ise $a=0$ ve $b=0$ olup $(a,b)=(0,0)$ olduğundan $R/P(R)$ inmiştir. Bundan dolayı $R/P(R)$ halkası Armendarizdir. R halkasının Armendariz olmadığını iddia ediyoruz. $R[x]$'in iki elemanı $f(x)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x$ ve $g(x)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x$ elemanları için $f(x)g(x)=0$ fakat $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$ olduğundan R halkası Armendariz değildir.

Aşağıda R halkasının sıfırdan farklı herhangi bir I öz ideali için I ve R/I Armendariz iken R halkasının Armendariz olmayacağına dair bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.31 F bir cisim olmak üzere $R=\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkasını göz önüne alalım. Örnek 3.5'den R halkası Armendariz değildir. R'nin sıfırdan farklı bir I öz ideali için I'nın ve R/I'nın Armendariz olduğunu gösterelim. F cisim olduğundan 0'dan ve F'den başka ideali yoktur. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri sadece $\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir. ilk olarak $I=\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. R/I; F'ye izomorf ve F inmiş olduğundan R/I inmiştir. Bundan dolayı R/I Armendarizdir. I'nın Armendariz olduğunu gösterelim. $I[x]$'in iki elemanı $f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+...+\alpha_nx^n$ ve $g(x)=\beta_0+\beta_1x+...+\beta_mx^m$ olmak üzere $f(x)g(x)=0$ olsun. $0\le i\le n$ ve $0\le j\le m$ için $\alpha_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta_j=\begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $\alpha_0\beta_0=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0c_0 & a_0d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$ dan $a_0c_0=0=a_0d_0$ elde edilir.. Kabul edelim ki $\alpha_0\ne 0$ ve $\beta_0\ne 0$ olsun. Bu durumda $\alpha_0\ne 0$ ise $a_0\ne 0$ veya $b_0\ne 0$ olur. $a_0\ne 0$ ise $c_0=0=d_0$ buradan $\beta_0=0$ olur ki bu $\beta_0\ne 0$ kabulü ile çelişir. O halde $a_0=0$ ve $b_0\ne 0$ olmalıdır. $a_0=0$ ve $b_0\ne 0$ ise her $0\le j\le m$ için $\alpha_0\beta_j=0$ olur. Böylece $f(x)g(x)=\alpha_1\beta_0x+(\ldots)x^2+...+(\ldots)x^{m+n}=0$ olur. Buradan da $\alpha_1\beta_0=0$ dır. Yani $\alpha_1\beta_0=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$ dan $a_1c_0=0=a_1d_0$ elde edilir. Kabul edelim ki $\alpha_1\ne 0$ ve $\beta_0\ne 0$ olsun. Bu durumda $\alpha_1\ne 0$ ise $a_1\ne 0$ veya $b_1\ne 0$ olur. $a_1\ne 0$ ise $c_0=0=d_0$ buradan $\beta_0=0$ olur ki $\beta_0\ne 0$ kabulü ile çelişir. O halde $a_1=0$ ve $b_1\ne 0$ olmalıdır. $a_1=0$ ve $b_1\ne 0$ ise her $0\le j\le m$ için $\alpha_1\beta_j=0$ olur. Bu şekilde devam edilirse her i,j için $\alpha_i\beta_j=0$ olur. Böylece I Armendarizdir. I ve R/I Armendariz iken R Armendariz değildir. $J=\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. R/J; F'ye izomorf ve F inmiş olduğundan R/J inmiştir. Bundan dolayı R/J Armendarizdir. Aynı metotla J Armendarizdir. Son olarak $K=\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. R/K; $F\oplus F$'ye izomorftur. $F\oplus F$ inmiş olduğundan R/K inmiştir. Bundan dolayı R/K Armendarizdir. $K^2=0$ dır. Yani K'nın her $\alpha=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\beta=\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları için $\alpha\beta=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$ dır. Bundan dolayı K Armendarizdir.

Lemma 3.32 R'nin aşikar olmayan herhangi bir e eşkare elemanı için R halkası Armendariz ise eRe halkası Armendarizdir.

İspat R halkası Armendariz olsun. $eRe[x]$'in $p(x)=ep_0e+ep_1ex+ep_nex^n$ ve $q(x)=eq_0e+eq_1ex+eq_mex^m$ elemanları $R[x]$'in de elemanları olduğundan ve R Armendariz olduğundan $p(x)q(x)=0$ ise her i,j için $p_iq_j=0$ dır. Sonuç olarak $e\mathrm{R}e$ halkası Armendarizdir. Fakat örnek 3.5'den $M_n(R)$ halkası Armendariz değildir. Bundan dolayı 'Armendariz' olma bir Morita İnvaryant özellik değildir.

Tanım 3.33 R halkası bir (p) özelliğini sağlarken eRe ve $M_n(R)$ halkaları da (p) özelliğini sağlıyorsa (p) özelliğine Morita İnvaryant özellik denir.

R'nin aşikar olmayan herhangi e eşkare elemanı için genelde eRe halkası Armendariz iken R halkasının Armendariz olmadığını aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 3.34 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ ve $R=\begin{pmatrix}\mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2\\ 0 & \mathbb{Z}_2\end{pmatrix}$ olsun. Örnek 3.5'den dolayı R halkası Armendariz değildir. R halkasının birimden farklı aşikar olmayan eşkare elemanları $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dir. $e_1Re_1\cong\mathbb{Z}_2$ ve $\mathbb{Z}_2$ inmiş olduğundan e_1Re_1 inmiştir. Bundan dolayı e_1Re_1 Armendarizdir. Benzer şekilde e_2Re_2, e_3Re_3 ve e_4Re_4 halkaları da Armendarizdir. Sonuç olarak eRe halkası Armendariz iken R halkası Armendariz değildir.

Anderson ve Camillo 1998'de inmiş olan R halkası için R halkasının klasik kesirler halkası $Q(R)$'nin inmiş olmayabileceğini ileri sürmüştür. Fakat aşağıda bu sorunun cevabının olumlu olduğunu görüyoruz.

Teorem 3.35 Bir R halkasının $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $Q(R)$ halkasının inmiş olmasıdır.

İspat $(\Leftarrow)$ $Q(R)$ halkasının inmiş olsun. R halkasının inmiş olduğunu gösterelim. R'nin a elemanı için $a^2=0$ olsun. $\frac{a}{1}\in Q(R)$ dir. $Q(R)$ halkası inmiş halka olduğundan $\left(\dfrac{a}{1}\right)^2 = 0$ ise $\dfrac{a}{1} = 0$ dır. buradan $a = 0$ olduğundan R halkası inmiş halkadır.

R halkası inmiş olsun $\square(R)$ halkasının inmiş olduğunu gösterelim. $\square(R)$'nin q elemanı için $q^2 = 0$ olsun. $q = 0$ dır. Gerçekten; $q^2 = 0$ ise $\left(ab^{-1}\right)^2 = 0 \Rightarrow a\left(b^{-1}a\right)b^{-1} = 0$ dır. $b^{-1}a \in \square(R)$ ise, bu durumda $b^{-1}a = cd^{-1}$ olacak şekilde R'nin c elemanı ve d düzgün elemanı vardır. O halde $a\left(cd^{-1}\right)b^{-1} = 0 \Rightarrow ac = 0$ olur. c düzgün olduğundan $a = 0$ dır. Buradan $(ca)^2 = 0$ olup $ca \in R$ ve R inmiş olduğundan $(ca)^2 = 0$ ise $ca = 0$ dır. $b^{-1}a = cd^{-1}$ ise $ada = 0$ olur. Buradan $(ad)^2 = 0$ bulunur. ad ; R'nin elemanı ve R inmiş olduğundan $ad = 0$ dır. d düzgün olduğundan $ad = 0$ ise $a = 0$ ve $q = ab^{-1} = 0$ dır. Sonuç olarak $\square(R)$ halkası inmiştir.

Anderson ve Camillo; bir yarı asal sol ve sağ Noetherian R halkası için; R halkasının Armendariz olması için gerek ve yeter şartın $\square(R)$ halkasının inmiş olması olduğunu ileri sürer. Buna aşağıdaki sonuçta başka şartlar ilave edilmiştir.

Sonuç 3.36 R bir von Neumann düzgün halka olsun ve R'nin $\square(R)$ klasik sağ kesir halkasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R halkası Armendarizdir.

(2) R halkası inmiştir.

(3) $\square(R)$ halkası inmiştir.

(4) $\square(R)$ halkası Armendarizdir.

İspat (1) $\Leftrightarrow$ (2) Teorem 3.35'den açıktır. (4) $\Rightarrow$ (1) $\square(R)$ halkası Armendariz olsun. R halkasının Armendariz olduğunu gösterelim. $R[x]$'in iki elemanı

$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ ve $g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$ olmak üzere $f(x)g(x)=0$ olsun. $f(x)=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{1}x+...+\frac{a_n}{1}x^n$ ve $g(x)=\frac{b_0}{1}+\frac{b_1}{1}x+...+\frac{b_m}{1}x^m$ olduğundan $f(x),g(x)$; □ $(R)[x]$, 'in de elemanıdır. □ $(R)[x]$ Armendariz olduğundan $f(x)g(x)=0$ ise her i, j için $\frac{a_i}{1}\frac{b_j}{1}=\frac{0}{1}$ dır. Buradan her i, j için $a_ib_j=0$ dır. Sonuç olarak R halkası Armendarizdir. (2) $\Rightarrow$ (1) inmiş halkalar Armendariz olduğundan açıktır. (3) $\Rightarrow$ (4) inmiş halkalar Armendariz olduğundan açıktır. (1) $\Rightarrow$ (3) R halkası Armendariz olsun. □ (R) halkasının inmiş olduğunu gösterelim. Lemma 3.13'den R halkası Armendariz ise Abeldir. R halkası Abel von Neumann düzgün halka ise inmiştir. Gerçekten; Lemma 3.17'den abel sağ p.p-halkaların inmiş olduğunu biliyoruz. Bu durumda R halkası Abel von Neumann düzgün halka ise R'nin abel sağ p.p-halka olduğunu gösterelim. R halkası Abel von Neumann düzgün halka olsun. $a\in R$ için $ara=a$ olacak şekilde r elemanı vardır. R'nin sağ p.p-halka olması için $r_R(a)=(1-ra)R$ olacak şekilde R'nin $(1-ra)^2=1-ra$ eşkare elemanı olmalıdır. $(ra)^2=ra$ olduğundan ra eşkaredir. Bu durumda $1-ra$ eşkaredir. x; $(1-ra)R$'nin elemanı ise $x=(1-ra)r_1$ olacak şekilde R'nin r_1 elemanı olduğundan $ax=0$ olup x; $r_R(a)$'nın elemanıdır. Buradan $(1-ra)R\subseteq r_R(a)$ elde edilir. $y\in r_R(a)$'nın elemanı ise, bu durumda $ay=0\Rightarrow y=(1-ra)y\Rightarrow y=y$ olduğundan $y=y(1-ra)\in(1-ra)R$ dir. Böylece $r_R(a)\subseteq(1-ra)R$ olur. Sonuç olarak $r_R(a)=(1-ra)R$ dir. Böylece R halkası Abel von Neumann düzgün halka ise abel sağ p.p halkadır. Sonuç olarak R halkası inmiştir. Teorem 3.35'den R halkası inmiş ise □ (R) halkası inmiştir.

Anderson ve Camillo 1998'de R halkası sol ve sağ Noetherian olan bir asal halka olmak üzere R halkasının Armendariz olması için gerek ve yeter şartın R halkasının inmiş olması olduğunu ispatladılar.

KAYNAKLAR

Anderson, D.D. and Camillo, V. 1998, “Armendariz rings and Gaussian rings”, Comm. Algebra 26 (7) 2265-2272.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1974, “Rings and Categories of Modules”, Springer-Verlag, New York.

Armendariz, E.P. 1974, “A note on extensions of Baer and P.P.-rings”, J. Austral. Math. Soc. 18, 470-473.

Başer, M. 2006, “On Armendariz and quasi-Armendariz modules”, Note di Matematica, 26 (1) 173-177.

Cohn, P.M. 1999, “Reversible rings”, Bull. London Math. Soc. 31, 641-648.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2000, “Ore extensions of Baer and p.p.-rings”, J. Pure and Appl. Algebra 151 (3) 215-226.

Hong, C.Y., Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. 2006, “Extensions of generalized Armendariz rings”, Algebra Colloq. 13(2) 253-266.

Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A. 2002, “Armendariz rings and semicommutative rings, Comm. Algebra 30(2) 751-761.

Hungerford W.T. 1974, “Algebra”, Holt, Rinehart and Winston, inc. New York.

Kaplansky, I. 1968, “Rings of Operators”, Benjamin, New York.

Kim, N.K. and Lee, Y. 2000, “Armendariz rings and reduced rings”, J. Algebra 223 477-488.

Krempa, J. 1996, “Some examples of reduced rings”, Algebra Colloq. 3 (4)289-300.

Lam, T.Y. 2000, “A First Course in Noncommutative Rings”, Springer-Verlag, New York.

Lee, T.K. and Wong, T.L. 2005, “On Armendariz Rings”, Houston J. Math. 3,583-593.

Lee, T.K. and Zhou, Y.Q. 2004, “Armendariz and reduced rings”, Comm. Algebra 32, 2287-2299.

McConnell, J.C. and Robson, J.C. 1987, “Noncommutative Noetherian Rings”, Wiley, New York.

Rege, M.B. and Chhawchharia, S. 1997, “Armendariz rings”, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73,14-17.

Shin, G.Y. 1973, “Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring”, Trans. Amer. Math. Soc. 184, 43-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice ASLAN

Doğum Yeri : Afyon

Doğum Tarihi : 06. 06. 1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Afyon Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2001

Lisans : Selçuk Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümü, 2006

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Özel Samanyolu Cemal Şaşmaz Lisesi, 2006-…