3- BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NORMAL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim GÜNGÖR

DANIŞMAN
Yrd.Doç.Dr. Derya SAĞLAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2007

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3- BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NORMAL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

İbrahim GÜNGÖR

DANIŞMAN
Yrd.Doç.Dr.Derya SAĞLAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2007

ONAY SAYFASI

Yrd.Doç.Dr. Derya SAĞLAM danışmanlığında,

İbrahim GÜNGÖR tarafından hazırlanan

3-Boyutlu Minkowski Uzayında Normal Eğrilerin Karakterizasyonları

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

15/06/2007

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

yüksek lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç.Dr. Emine SOYTÜRK	
Üye	Yrd.Doç.Dr. Derya SAĞLAM	
Üye	Yrd.Doç.Dr. Murat PEKER	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$\mathbb{E}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA NORMAL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

İbrahim GÜNGÖR

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Derya SAĞLAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışma için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında uzaysı (spacelike), zamansı (timelike) ve ışıksı (null) eğrilerin Frenet denklemleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında asli normali uzaysı, zamansı veya ışıksı olan uzaysı normal eğrilerin bazı karakterizasyonları verilmiştir. Beşinci bölümde $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında yer vektörü daima normal düzlemde yatan zamansı ve ışıksı eğrilerin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

2007, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Normal Düzlem, Normal Eğri, Frenet Denklemleri, 3-boyutlu Minkowski Uzayı,Yer Vektörü.

ABSTRACT

MSc Thesis

CHARACTERIZATIONS OF NORMAL CURVES IN MINKOWSKI SPACE $\mathbb{E}_1^3$

İbrahim GÜNGÖR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Derya SAĞLAM

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted the introduction. The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necassary theorems that will be needed for later use. In the third chapter, Frenet equation of spacelike, timelike and null curves in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ are studied. In the fourth chapter, some characterizations of spacelike normal curves with spacelike, timelike or principal normal in the Minkowski 3-space $\mathbb{E}_1^3$ are studied. In the fifth chapter, some characterizations of timelike and null curves for which the position vector always lies in their normal plane in the Minkowski 3-space $\mathbb{E}_1^3$ are given.

2007, Page 51

Keywords: Normal Plane, Normal Curve, Frenet Equation, Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$, Position Vector.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Derya SAĞLAM'a, manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İbrahim GÜNGÖR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

T	:	Eğrinin teğet vektör alanı
N	:	Eğrinin asli normal vektör alanı
B	:	Eğrinin binormal vektör alanı
g	:	Lorentz metriği
k_i	:	Eğrinin i-yinci eğrilik fonksiyonu
V_i	:	Eğrinin i-yinci Frenet vektör alanları
κ	:	Eğrinin eğrilik fonksiyonu
τ	:	Eğrinin burulma fonksiyonu
α	:	Diferensiyellenebilir birim hızlı eğri
λ	:	Diferensiyellenebilir fonksiyon
μ	:	Diferensiyellenebilir fonksiyon
$\Vert u \Vert$	:	u nun normu
$\mathbb{E}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^n$	:	n-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	:	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{S}_1^2(m,r)$	:	yarı-Riemann küresi
$\mathbb{H}_0^2(m,r)$	:	yarı-Riemann hiperbolik uzayı
$C(m)$	:	yarı-Riemann ışık konisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1.GİRİŞ

Diferensiyel geometride eğriler teorisi çok önemli bir yere sahiptir. Eğriler konusu üzerinde yoğun olarak çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle özel eğriler çok fazla ilgi duyulan konu olmuştur. Eğriler geometrisinde, Frenet denklemleri (bu denklemler Serret-Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir-Frenet 1847, Serret 1851) ve eğrinin eğrilikleri önemli iki kavramdır. Bu kavramlar sayesinde özel eğrilerin karakterizasyonları ortaya konulmaktadır. Bu çalışmada $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında zamansı, uzaysı ve ışıksı normal eğriler ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

2.GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1 (Öklid Uzayı): $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ **uzayının doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olmak üzere, $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \|x\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur.Buna göre, $\mathbb{R}^n$ uzayı normlu bir vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Her metrik uzay bir topolojik uzay olduğundan $\mathbb{R}^n$ topolojik uzaydır.Bu uzaya **Öklid Uzayı** denir ve kimi zaman $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.2: I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir **eğri** denir [12].

Tanım 2.3: $\mathbb{E}^n$ uzayında, $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için;

$$\forall s \in I \text{ için } \quad \left\| \alpha^{'}(s) \right\| = 1$$

ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir.

Tanım 2.4: $\mathbb{E}^3$ üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$T(s) = \alpha^{'}(s)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir.T, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **birim teğet vektör alanı** denir.

Tanım 2.5: $\mathbb{E}^3$ üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \longrightarrow R, \quad \kappa(s) = \left\| T^{'}(s) \right\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir.

Tanım 2.6: $\mathbb{E}^3$ üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T^{'}(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normali** denir. N, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **asli vektör alanı** denir.

Tanım 2.7: $\mathbb{E}^3$ üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrininin $\alpha(s)$ noktasındaki **binormal vektörü** denir ve B vektör alanına da α eğrisinin binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.8: $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir. T, N, B vektör alanlarına **Frenet vektör alanları** denir.

Tanım 2.9: $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau : I \longrightarrow R, \qquad \tau(s) = -\langle B^{'}(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir.

Teorem 2.10: $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\begin{aligned} T^{'} &= \kappa N \\ N^{'} &= -\kappa T + \tau B \\ B^{'} &= -\tau N \end{aligned}$$

dir[10].

Tanım 2.11: Teorem 2.10 da elde edilen eşitliklere $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir eğri için **Frenet formülleri** denir.

Tanım 2.12: $s \in I \subset \mathbb{R}$ için,$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme,$\alpha(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlemi** ya da **dokunum düzlemi** denir.$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **doğrultman düzlemi** ya da **rektifiyan düzlemi** denir. $\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** denir [2], [10].

Tanım 2.13: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere,

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

iç çarpımına **Lorentz(Minkowski) iç çarpımı** denir ve g metriğine **Lorentz (Minkowski) metriği** denir.

Tanım 2.14: Lorentz iç çarpımı ile tanımlı Öklid uzayına **Lorentz uzayı ya da Minkowski uzayı** denir ve $\mathbb{E}_1^n$ ile gösterilir.

Özel olarak n=3 alınır ise, $\mathbb{E}_1^3$ uzayına **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Bu durumda bu uzayın standart metriği, $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

$$g(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

dir.

Tanım 2.15: $x \in \mathbb{E}_1^3$olmak üzere,

(i) $g(x, x) > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne **uzaysı(spacelike)** vektör,

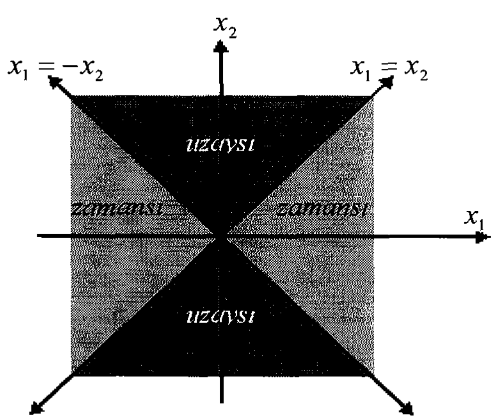
(ii)$g(x, x) < 0$ ise x vektörüne **zamansı(timelike)** vektör,

(iii)$g(x, x) = 0$ ve $x \neq 0$ ise,bu durumda x vektörüne **ışıksı(lightlike,null veya isotropik)** vektör denir [4], [7].

Örnek 2.16: a) $\mathbb{E}_1^2$ uzayında uzaysı, zamansı ve ışıksı vektörleri araştıralım:

$$\begin{aligned} g(x,x) &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ x_1 &= \pm x_2 \end{aligned}$$

dir. Bu denklemler $\mathbb{R}^2$ de I. ve II. açıortay doğrularını göstermektedir. Bu doğrular üzerindeki vektörler ışıksı vektörlerdir ($\overrightarrow{0}$ hariç).

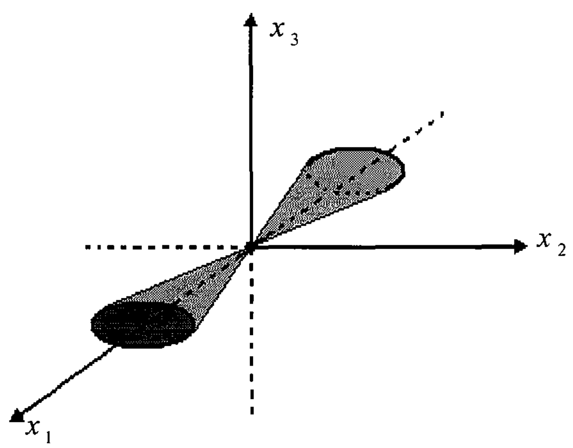


Şekil 2.1 $\mathbb{E}_1^2$ de uzaysı, zamansı ve ışıksı vektörler

b) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında uzaysı, zamansı ve ışıksı vektörleri elde edelim:

$$\begin{aligned} g(x,x) &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_2^2 + x_3^2 &= x_1^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bir koni denklemidir ve bu koniye ışık konisi denir. Koni yüzeyinde yatan vektörler ışıksı, koninin iç bölgesinde yatan vektörler zamansı, dış bölgesindeki vektörler uzaysı vektörlerdir.



Şekil 2.2 $\mathbb{E}_1^3$ de ışık konisi

Tanım 2.17: $\mathbb{E}_1^3$ de m sabit bir nokta ve $r > 0$ olmak üzere,

$$\mathbb{S}_1^2(m,r) = \{u \in \mathbb{E}_1^3 : g(u-m, u-m) = r^2\},$$

cümlesine yarı-Riemann küresi,

$$\mathbb{H}_0^2(m,r) = \{u \in \mathbb{E}_1^3 : g(u-m, u-m) = -r^2\},$$

cümlesine yarı-Riemann hiperbolik uzayı,

$$C(m) = \{u \in \mathbb{E}_1^3 : g(u-m, u-m) = 0\},$$

cümlesine yarı Riemann ışık konisi(quadrik koni) denir [8], [9].

Tanım 2.18: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

(i) $g(T,T) > 0$ ise α eğrisine **uzaysı(spacelike)** eğri,

(ii) $g(T,T) < 0$ ise α eğrisine **zamansı(timelike)** eğri,

(iii) $g(T,T) = 0$ ise α eğrisine **ışıksı(lightlike veya null)** eğri denir [1], [9], [11].

Tanım 2.19: $\lambda : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\mu : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için α nın yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

biçiminde ise, α eğrisine **normal eğri** denir. Başka bir deyişle α eğrisi normal düzlemde yatıyor ise, α eğrisine normal eğri denir.

Teorem 2.20: $\mathbb{E}_1^n (n \geqslant 3)$ Minkowski uzayı ve $\alpha : I \subset R \longrightarrow \mathbb{E}_1^n$ de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vetörleri $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ ve $\epsilon_{i-1} = g(V_i, V_i)$ olmak üzere, α eğrisinin eğrilikleri,

$$k_i = \epsilon_i g(V_i^{'}, V_{i+1})$$

dir [3].

Özel olarak $n = 3$ olsun.$V_1 = T, V_2 = N$ ve $V_3 = B$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= g(T,T) \\ \epsilon_1 &= g(N,N) \\ \epsilon_2 &= g(B,B) \end{aligned}$$

dir. Buradan eğrilikler,

$$\begin{aligned} k_1 &= \epsilon_1 g(T', N) \\ k_2 &= \epsilon_2 g(N', B) \end{aligned}$$

olarak bulunur.$\square$

3.$\mathbb{E}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA UZAYSI (SPACELIKE), ZAMANSI (TIMELIKE),VE IŞIKSI (NULL) EĞRİLERİN FRENET DENKLEMLERİ

3.1. Uzaysı Eğrilerin Frenet Denklemleri

3.1.1 Asli Normali Uzaysı veya Zamansı Olan Uzaysı Eğrilerin Frenet Denklemleri

α uzaysı bir eğri ve asli normali N, zamansı veya uzaysı olsun. Bu durumda, $g(T,T) = 1$, $g(N,N) = \epsilon = \pm 1$, $g(B,B) = -\epsilon$, $g(T,N) = 0$, $g(T,B) = 0$, $g(N,B) = 0$ olmak üzere,

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{k_1} \Rightarrow T' = k_1 N \tag{3.1}$$

olarak bulunur. $\mathbb{E}_1^3$ deki vektörler $\{T, N, B\}$ nin lineer bileşimi olarak yazılabileceğinden;

$$N' = aT + bN + cB \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir. (3.2) eşitliği T ile çarpılırsa,

$$g(N', T) = ag(T,T) + bg(N,T) + cg(B,T)$$

$$g(N'T) = a$$

olur. $g(T,N) = 0$ eşitliğinin her iki yanının türev alınıp (3.1) kulanılırsa,

$$\begin{aligned} g(T',N) + g(T,N') = 0 \Rightarrow \quad & g(N',T) = -g(T',N) \\ & g(N',T) = -g(k_1 N, N) \\ & g(N',T) = -k_1 g(N,N) \\ & g(N',T) = -\epsilon k_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $a = g(N',T) = -\epsilon k_1$ dir. Şimdi de (3.2) eşitliği N ile çarpılırsa,

$$g(N', N) = ag(T,N) + bg(N,N) + cg(B,N),$$

bulunur. Buradan,

$$g(N', N) = \epsilon b$$

olur. $g(N,N)=\epsilon$ eşitliğinde türev alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N^{'},N)+g(N,N^{'}) &= 0 \\ 2g(N^{'},N) &= 0 \\ g(N^{'},N) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $b=g(N^{'},N)=0$ elde edilir. Son olarak (3.2) eşitliği B ile çarpılır ise,

$$g(N^{'},B)=ag(T,B)+bg(N,B)+cg(B,B)$$

$$g(N^{'},B)=-c\epsilon$$

dir. Burada eğer N uzaysı ise $\epsilon=1$, $g(N^{'},B)=-k_2$ ve $g(B,B)=-1$, eğer N zamansı ise $\epsilon=-1$, $g(N^{'},B)=k_2$ ve $g(B,B)=1$ olur ki her iki durumda da $c=k_2$ bulunur . $a=-\epsilon k_1$, $b=0$ ve $c=k_2$ den,

$$N^{'}=-\epsilon k_1 T+k_2 B \tag{3.3}$$

dir. Benzer olarak,

$$B^{'}=aT+bN+cB \tag{3.4}$$

eşitliği T ile çarpılır ise,

$$g(B^{'},T)=a$$

bulunur ve

$$g(T,B)=0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(T^{'},B)+g(T,B^{'}) &= 0 \\ g(B^{'},T) &= -g(T^{'},B) \\ g(B^{'},T) &= -g(k_1 N,B) \\ g(B^{'},T) &= 0 \end{aligned}$$

dir. Öyleyse $a=0$ dır. (3.4) eşitliği N ile çarpılır ise,

$$g(B^{'},N)=b\epsilon$$

elde edilir ve

$$g(N, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N^{'}, B) + g(N, B^{'}) &= 0 \\ g(N^{'}, B) &= -g(N, B^{'}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada eğer N uzaysı ise $g(B^{'}, N) = -g(N^{'}, B) = k_2$ ve $g(B, B) = -1$, eğer N zamansı ise $g(B^{'}, N) = -g(N^{'}, B) = -k_2$ ve $g(B, B) = 1$ olur ki her iki durumda da $b = k_2$ elde edilir. Son olarak, (3.4) eşitliği B ile çarpılır ise,

$$g(B^{'}, B) = c\epsilon$$

olur ve

$$g(B, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise;

$$\begin{aligned} g(B^{'}, B) + g(B, B') &= 0 \\ g(B, B^{'}) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $c = 0$ bulunur. $a = 0$, $b = k_2$ ve $c = 0$ olduğundan (3.4) eşitliği,

$$B^{'} = k_2 N \tag{3.5}$$

biçimindedir. (3.1), (3.3) ve (3.5) den:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -\epsilon k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

elde edilir. Böylece asli normali ışıksı olmayan uzaysı bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur.

3.1.2 Asli Normali Işıksı Olan Uzaysı Eğrilerin Frenet Denklemleri

Şimdi de benzer şekilde asli normali ışıksı olan uzaysı bir eğrinin Frenet denklemlerini elde edelim. Bu durumda,

$$g(T,T)=1,\ g(N,N)=0,\ g(B,B)=0,\ g(T,N)=0,\ g(T,B)=0,\ g(N,B)=1$$

dir.

$$N=\frac{T^{'}}{\|T^{'}\|}=\frac{T^{'}}{k_1}\Rightarrow T^{'}=k_1N \tag{3.7}$$

elde edilir.

$$N^{'}=aT+bN+cB \tag{3.8}$$

olsun. (3.8), T ile çarpılır ise,

$$g(N^{'},T)=ag(T,T)+bg(N,T)+cg(B,T)\Rightarrow g(N^{'},T)=a$$

olur. $g(T,N)=0$ eşitliğinde türev alınır ise,

$$g(T^{'},N)+g(T,N^{'})=0$$

$$g(N^{'},T)=-g(T^{'},N)$$

$$g(N^{'},T)=-g(k_1N,N)=-k_1g(N,N)=0$$

olur ve $a=g(N^{'},T)=0$ elde edilir. (3.8), N ile çarpılır ise,

$$g(N^{'},N)=ag(T,N)+bg(N,N)+cg(B,N)$$

$$g(N^{'},N)=c,$$

olur.$g(N,N)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N^{'},N)+g(N,N^{'}) &= 0\\ 2g(N^{'},N) &= 0\\ g(N^{'},N) &= 0 \end{aligned}$$

olur ve $c=g(N^{'},N)=0$ elde edilir. (3.8), B ile çarpılır ise,

$$g(N^{'},B)=ag(T,B)+bg(N,B)+cg(B,B)$$

$$g(N^{'}, B) = b$$

dir. Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(N, B) &= 1 \\ g(N^{'}, B) + g(N, B^{'}) &= 0 \\ g(N^{'}, B) &= -g(N, B^{'}) = k_2 \end{aligned}$$

olur ve $b = k_2$ bulunur. $a = 0$, $b = k_2$ ve $c = 0$ olduğundan,

$$N^{'} = k_2 N \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Şimdi de,

$$B^{'} = aT + bN + cB \tag{3.10}$$

eşitliği T ile çarpılırsa,

$$g(B^{'}, T) = a$$

bulunur.

$$g(T, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(T^{'}, B) + g(T, B^{'}) &= 0 \\ g(B^{'}, T) &= -g(T^{'}, B) \\ g(B^{'}, T) &= -g(k_1 N, B) = -k_1 \end{aligned}$$

ve $a = -k_1$ olur. (3.10), N ile çarpılır ise,

$$g(B^{'}, N) = c$$

dir.

$$g(N, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N^{'}, B) + g(N, B^{'}) &= 0 \\ g(N^{'}, B) &= -g(N, B^{'}) = k_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve $c = -k_2$ olur. Son olarak (3.10), B ile çarpılır ise,

$$g(B', B) = b$$

dir.

$$g(B, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise;

$$\begin{aligned} g(B', B) + g(B, B') &= 0 \\ g(B, B') &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve $b = 0$ olarak bulunur. $a = -k_1$, $b = 0$ ve $c = -k_2$ olduğundan (3.10) eşitliği,

$$B' = -k_1 T - k_2 B \tag{3.11}$$

olarak bulunur. (3.7), (3.9) ve (3.11) den;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

olur. Böylelikle asli normali ışıksı olan uzaysı bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur.

3.2 Zamansı Eğrilerin Frenet Denklemleri

α zamansı bir eğri ve $g(T, T) = -1$, $g(N, N) = 1$, $g(B, B) = 1$, $g(T, N) = 0$, $g(T, B) = 0$, $g(N, B) = 0$ olmak üzere,

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{k_1}$$

$$T' = k_1 N \tag{3.13}$$

dir.

$$N' = aT + bN + cB \tag{3.14}$$

olsun. (3.14), denklemi T ile çarpılır ise,

$$g(N', T) = ag(T, T) + bg(N, T) + cg(B, T)$$

$$g(N^{'},T) = -a$$

olur. $g(T,N) = 0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T^{'},N) + g(T,N^{'}) = 0$$

$$g(N^{'},T) = -g(T^{'},N)$$

$$g(N^{'},T) = -g(k_1 N, N) = -k_1 g(N,N) = -k_1$$

olur ve $a = k_1$ elde edilir. (3.14), N ile çarpılır ise,

$$g(N^{'},N) = ag(T,N) + bg(N,N) + cg(B,N)$$

$$g(N^{'},N) = b$$

olur. $g(N,N) = 1$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N^{'},N) + g(N,N^{'}) &= 0 \\ 2g(N^{'},N) &= 0 \\ g(N^{'},N) &= 0 \end{aligned}$$

olur ve $b = 0$ elde edilir. (3.14) B ile çarpılır ise,

$$g(N^{'},B) = ag(T,B) + bg(N,B) + cg(B,B)$$

$$g(N^{'},B) = c$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} g(N,B) &= 0 \\ g(N^{'},B) + g(N,B^{'}) &= 0 \\ g(N^{'},B) &= -g(N,B^{'}) = c = k_2 \end{aligned}$$

bulunur. $a = k_1$, $b = 0$ ve $c = k_2$ olduğundan,

$$N^{'} = k_1 T + k_2 B \tag{3.15}$$

olarak elde edilir. Şimdi de,

$$B^{'} = aT + bN + cB \tag{3.16}$$

eşitliği T ile çarpılır ise,

$$g(B', T) = -a$$

dır.

$$g(T, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(T', B) + g(T, B') &= 0 \\ g(B', T) &= -g(T', B) \\ g(B', T) &= -g(k_1 N, B) = 0 \end{aligned}$$

ve $a = 0$ olur. (3.16), N ile çarpılır ise,

$$g(B', N) = b$$

bulunur ve

$$g(N, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N', B) + g(N, B') &= 0 \\ g(N', B) &= -g(N, B') = k_2 \end{aligned}$$

ve $b = -k_2$ olur. Son olarak (3.16), B ile çarpılır ise,

$$g(B', B) = c$$

dir.

$$g(B, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise;

$$\begin{aligned} g(B', B) + g(B, B') &= 0 \\ g(B, B') &= 0 \end{aligned}$$

ve $c = 0$ olarak bulunur. $a = 0$, $b = -k_2$ ve $c = 0$ olduğundan (3.16) eşitliği,

$$B' = -k_2 N \tag{3.17}$$

biçimindedir. (3.13), (3.15) ve (3.17) den;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

olur.

3.3. Işıksı Eğrilerin Frenet Denklemleri

α ışıksı bir eğri ve $g(T,T) = 0$, $g(N,N) = 1$, $g(B,B) = 0$, $g(T,N) = 0$, $g(T,B) = 1$, $g(N,B) = 0$ olmak üzere,

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{k_1}$$

$$T' = k_1 N \tag{3.19}$$

dir.

$$N' = aT + bN + cB \tag{3.20}$$

olsun. Bu eşitlik T ile çarpılır ise,

$$g(N', T) = ag(T,T) + bg(N,T) + cg(B,T)$$

$$g(N', T) = c$$

bulunur. $g(T, N) = 0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T', N) + g(T, N') = 0$$

$$g(N', T) = -g(T', N)$$

$$g(N', T) = -g(k_1 N, N) = -k_1 g(N, N) = -k_1$$

olur ve $c = -k_1$ elde edilir.(3.20), N ile çarpılır ise,

$$g(N', N) = ag(T, N) + bg(N, N) + cg(B, N)$$

$$g(N', N) = b$$

olur. $g(N,N)=1$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N',N)+g(N,N') &= 0 \\ 2g(N',N) &= 0 \\ g(N',N) &= 0 \end{aligned}$$

olur ve $b=0$ elde edilir. (3.20), B ile çarpılır ise,

$$g(N',B)=ag(T,B)+bg(N,B)+cg(B,B)$$

$$g(N',B)=a$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} g(N,B) &= 0 \\ g(N',B)+g(N,B') &= 0 \\ g(N',B) &= -g(N,B')=k_2 \end{aligned}$$

olur ve $a=k_2$ bulunur. $a=k_2$, $b=0$ ve $c=-k_1$ olduğundan,

$$N'=k_2T-k_1B \tag{3.21}$$

olarak elde edilir. Şimdi de,

$$B'=aT+bN+cB \tag{3.22}$$

eşitliği T ile çarpılır ise,

$$g(B',T)=c$$

dir.

$$g(T,B)=0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(T',B)+g(T,B') &= 0 \\ g(B',T) &= -g(T',B) \\ g(B',T) &= -g(k_1N,B)=0 \end{aligned}$$

dır ve $c = 0$ bulunur. (3.22), N ile çarpılır ise,

$$g(B^{'}, N) = b$$

dir.

$$g(N, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned} g(N^{'}, B) + g(N, B^{'}) &= 0 \\ g(N^{'}, B) &= -g(N, B^{'}) = k_2 \end{aligned}$$

ve $b = -k_2$ olur. Son olarak (3.22), B ile çarpılır ise

$$g(B^{'}, B) = a$$

dır.

$$g(B, B) = 0$$

eşitliğinin türevi alınır ise;

$$\begin{aligned} g(B^{'}, B) + g(B, B') &= 0 \\ g(B, B^{'}) &= 0 \end{aligned}$$

dır ve $a = 0$ olarak bulunur.$a = 0$, $b = -k_2$ ve $c = 0$ olduğundan (3.22) eşitliği,

$$B^{'} = -k_2 N \tag{3.23}$$

olarak bulunur. (3.19), (3.21) ve (3.23) den;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

olur$\square$.

4.$\mathbb{E}_1^3$ DE UZAYSI(SPACELIKE) NORMAL EĞRİLER

Bu bölümde üçüncü bölümde elde ettiğimiz Frenet denklemlerinden ve eğriliklerden yararlanarak, birim hızlı uzaysı normal eğrilerin bazı karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 4.1: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$ asli normali N zamansı veya uzaysı olan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve eğrilikleri $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_1(s) > 0$, $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar sağlanır:

(i)

$$\frac{1}{k_1(s)} = c_1 \cosh(\int k_2(s)ds) + c_2 \sinh(\int k_2(s)ds), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

(ii) Eğrinin yer vektörünün asli normali N ve binormali B için:

$$g(\alpha(s), N) = a_1 \cosh(\int k_2(s)ds) + a_2 \sinh(\int k_2(s)ds),$$

$$g(\alpha(s), B) = a_1 \sinh(\int k_2(s)ds) + a_2 \cosh(\int k_2(s)ds), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

(iii) Eğer eğrinin yer vektörü null vektör ise α yarı-Rieaman ışık konisi $C(m)$ de yatar ve eğrilikler,

$$\frac{1}{k_1(s)} = c_1 \left[\cosh(\int k_2(s)ds) \pm \sinh(\int k_2(s)ds)\right]$$

eşitliğini sağlarlar.

Karşıt olarak, $\alpha(s)$, $\mathbb{E}_1^3$ de aslinormali N zamansı ya da uzaysı olan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve eğrilikleri $k_1(s) > 0$, $k_2(s) \neq 0$ $\quad \forall s \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer (i) , (ii) ve (iii) durumlarından biri sağlanıyor ise α normal bir eğridir ya da normal bir eğriye denktir [5].

İspat: Öncelikle $\alpha(s)$ asli normali ışıksı olmayan, birim hızlı uzaysı normal bir eğri olsun. α normal bir eğri olduğundan

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

eşitliği sağlanır. Eşitliğin s ye göre türevi alınırsa,

$$\alpha' = \lambda' N + \lambda N' + \mu' B + \mu B'$$

elde edilir. (3.6) Frenet denklemlerinden N've B' yerlerine yazılırsa,

$$\alpha' = \lambda' N + \lambda(-\epsilon k_1 T + k_2 B) + \mu' B + \mu(k_2 N)$$

$$\alpha' = \lambda' N - \epsilon\lambda k_1 T + \lambda k_2 B + \mu' B + \mu k_2 N$$

$$\alpha' = -\epsilon\lambda k_1 T + (\lambda' + \mu k_2)N + (\lambda k_2 + \mu')B$$

elde edilir. $\alpha' = T$ olduğundan,

$$T = -\epsilon\lambda k_1 T + (\lambda' + \mu k_2)N + (\lambda k_2 + \mu')B$$

olur ve

$$\epsilon\lambda k_1 = -1, \ \lambda' + \mu k_2 = 0, \ \lambda k_2 + \mu' = 0 \tag{4.1}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1) eşitliklerinden

$$\lambda = -\frac{\epsilon}{k_1}, \quad \mu = \frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\alpha(s) = -\frac{\epsilon}{k_1}N + \frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' B \tag{4.3}$$

dir. (4.2) denklemleri (4.1) de yerine yazılırsa,

$$\lambda k_2 + \mu' = 0$$

$$\left(-\frac{\epsilon}{k_1}\right)k_2 + \left[\frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' = 0$$

$$\epsilon\left(-\frac{k_2}{k_1} + \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'\right) = 0$$

elde edilir.$\epsilon \neq 0$ olduğundan,

$$\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' - \frac{k_2}{k_1} = 0 \tag{4.4}$$

diferansiyel denklemi bulunur. $y(s) = \dfrac{1}{k_1}$ ve $p(s) = \dfrac{1}{k_2}$ eşitlikleri (4.4) de yerine yazılır ise,

$$\left(p(s)y'(s)\right)' - \frac{y(s)}{p(s)} = 0$$

elde edilir. Bu son denklemde $t = \int \frac{1}{p(s)} ds$ değişken değiştirmesi yapılır ise,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$y = c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t) \ , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. $y = \frac{1}{k_1}$ ve $t = \int \frac{1}{p(s)} ds$ eşitlikleri yerlerine yazılır ise,

$$\tfrac{1}{k_1(s)} = c_1 \cosh(\int k_2(s)ds) + c_2 \sinh(\int k_2(s)ds) \tag{4.5}$$

bulunur ve böylece (i) durumu sağlanmış olur. Şimdi (4.5) deki denklem (4.2) de yerine yazılır ise,

$$\lambda = -\frac{\epsilon}{k_1},$$

$$\lambda = -\epsilon \left[c_1 \cosh(\int k_2(s)ds) + c_2 \sinh(\int k_2(s)ds) \right] \tag{4.6}$$

$$\mu = \frac{\epsilon}{k_2} \left(\frac{1}{k_1} \right)'$$

$$\mu = \frac{\epsilon}{k_2} \left(c_1 \cosh(\int k_2(s)ds) + c_2 \sinh(\int k_2(s)ds) \right)'$$

$$\mu = \frac{\epsilon}{k_2} \left[k_2 \left(c_1 \sinh(\int k_2(s)ds) + c_2 \cosh(\int k_2(s)ds) \right) \right]$$

$$\mu = \epsilon \left[c_1 \sinh(\int k_2(s)ds) + c_2 \cosh(\int k_2(s)ds) \right] \tag{4.7}$$

bulunur. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri,

$$\alpha = \lambda N + \mu B$$

denkleminde yerlerine yazılır ise:

$$\begin{aligned} \alpha = &-\epsilon \left[c_1 \cosh(\textstyle\int k_2(s)ds) + c_2 \sinh(\textstyle\int k_2(s)ds) \right] N \\ &+\epsilon \left[c_1 \sinh(\textstyle\int k_2(s)ds) + c_2 \cosh(\textstyle\int k_2(s)ds) \right] B \end{aligned} \tag{4.8}$$

dir ve

$$\begin{aligned} g(\alpha, \alpha) = &\left[-\epsilon \left(c_1 \cosh(\textstyle\int k_2(s)ds) + c_2 \sinh(\textstyle\int k_2(s)ds) \right) \right]^2 g(N, N) \\ &+ \left[\epsilon \left(c_1 \sinh(\textstyle\int k_2(s)ds) + c_2 \cosh(\textstyle\int k_2(s)ds) \right) \right]^2 g(B, B) \end{aligned}$$

$g(N,N)=\epsilon$, $g(N,B)=0$ ve $g(B,B)=-\epsilon$ olduğundan

$$g(\alpha,\alpha)=\epsilon\left(c_1^2-c_2^2\right) \tag{4.9}$$

dir. (4.8) eşitliği N ve B ile çarpılır ise

$$g(\alpha(s),N)=a_1\cosh(\int k_2(s)ds)+a_2\sinh(\int k_2(s)ds) \tag{4.10}$$

$$g(\alpha(s),B)=a_1\sinh(\int k_2(s)ds)+a_2\cosh(\int k_2(s)ds) \tag{4.11}$$

bulunur. Burada $a_1=-c_1\in\mathbb{R}$, $a_2=-c_2\in\mathbb{R}$ dir. Böylelikle (ii) durumu da sağlanmış oldu. Şimdi de α normal eğri ve yer vektörü ışıksı olsun. Bu durumda $g(\alpha,\alpha)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\alpha,\alpha)=\epsilon\,(c_1^2-c_2^2)=0 \quad &\Rightarrow c_1^2=c_2^2 \\ &\Rightarrow c_1=\mp c_2 \end{aligned}$$

elde edilir ve eşitlik (4.5) den:

$$\frac{1}{k_1(s)}=c_1\left[\cosh(\int k_2(s)ds)\pm\sinh(\int k_2(s)ds)\right] \tag{4.12}$$

bulunur. (iii) durumunun sağlanması için geriye α nın $C(m)$ de yattığını göstermemiz gerekir. Bunun için m nin sabit olduğunu yani $m^{'}=0$ olduğunu ve dolayısı ile $g(\alpha-m,\alpha-m)=0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için,

$$m=\alpha(s)+\frac{\epsilon}{k_1}N-\frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}B$$

vektörünü göz önüne alalım. Bu vektör α nın yer vektörünün m noktasına ötelenmesidir. Şimdi s ye göre türev alınırsa;

$$m^{'}=\alpha^{'}+\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}N+\frac{\epsilon}{k_1}N^{'}-\epsilon\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}\right]^{'}B-\frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}B^{'}$$

elde edilir. (3.6) Frenet denklemlerinden $N^{'}$ve $B^{'}$yerlerine yazılırsa,

$$m^{'}=T+\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}N+\frac{\epsilon}{k_1}(-\epsilon k_1T+k_2B)-\epsilon\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}\right]^{'}B-\frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}(k_2N)$$

$$m^{'}=T+\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}N-T+\frac{\epsilon k_2}{k_1}B-\frac{\epsilon k_2}{k_1}B-\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}N=0$$

bulunur. Dolayısı ile m sabittir. $g(\alpha-m,\alpha-m)=0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu da α nın $C(m)$ de yattığını gösterir. Böylece (iii) durumuda sağlanmış olur.

Karşıt olarak, $\alpha(s)$, $\mathbb{E}_1^3$ de aslinormali N zamansı veya uzaysı olan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve $\forall s\in I\subset\mathbb{R}$ için eğrilikleri $k_1(s)>0$, $k_2(s)\neq 0$ olmak üzere, eğer (i) , (ii) ve (iii) durumlarından biri sağlanıyor ise α nın normal bir eğri ya da normal bir eğriye denk olduğunu gösterelim. Öncelikle (i) durumu sağlansın. O zaman,

$$\frac{1}{k_1(s)}=c_1\cosh(\int k_2(s)ds)+c_2\sinh(\int k_2(s)ds)$$

eşitliğinin s ye göre türev alınır ise,

$$\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)^{'}=c_1k_2(s)\sinh(\int k_2(s)ds)+c_2k_2(s)\cosh(\int k_2(s)ds)$$

$$\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)^{'}=k_2(s)\left(c_1\sinh(\int k_2(s)ds)+c_2\cosh(\int k_2(s)ds)\right)$$

$$\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)^{'}\frac{1}{k_2(s)}=c_1\sinh(\int k_2(s)ds)+c_2\cosh(\int k_2(s)ds)$$

elde edilir.Tekrar türev alınırsa,

$$\left[\frac{1}{k_2(s)}\left(\frac{1}{k_1(s)}\right)^{'}\right]^{'}=k_2(s)\left(c_1\cosh(\int k_2(s)ds)+c_2\sinh(\int k_2(s)ds)\right)$$

olur. Buradan da,

$$\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}\right]^{'}=\frac{k_2}{k_1}$$

bulunur ve (3.6)Frenet denklemlerinden,

$$\frac{d}{ds}\left[\alpha(s)+\frac{\epsilon_1}{k_1}N-\frac{\epsilon_1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'}B\right]=0$$

elde edilir ki bu da α nın normal bir eğrye denk oldugunu gösterir. Şimdi (ii) durumu sağlansın. (4.10) un türevi alınırsa,

$$g(\alpha^{'},N)+g(\alpha,N^{'})=k_2\left(a_1\sinh(\int k_2(s)ds)+a_2\cosh(\int k_2(s)ds)\right)$$

bulunur ve (4.11) den,

$$g(\alpha^{'},N)+g(\alpha,N^{'})=k_2g(\alpha,B)$$

$$\Rightarrow g(T,N)+g(\alpha,-\epsilon k_1T+k_2B)=k_2g(\alpha,B)$$

$$\Rightarrow g(T,N)+g(\alpha,-\epsilon k_1T)+g(\alpha,k_2B)=k_2g(\alpha,B)$$

$$\Rightarrow g(T,N)-\epsilon k_1g(\alpha,T)+k_2g(\alpha,B)=k_2g(\alpha,B)$$

olur ve $g(T,N)=0$ olduğundan,

$$-\epsilon k_1g(\alpha,T)=0 \;\Rightarrow\; g(\alpha,T)=0$$

elde edilir. Bu da α nın N ve B tarafından gerildiğini yani α nın normal bir eğri olduğunu gösterir. Son olarak (iii) durumu sağlansın. α, $C(m)$ de yatsın ve m sabit bir nokta olmak üzere, eğrilikler $k_1$ve k_2 (4.12) yi sağlasınlar. Bu durumda,

$$g(\alpha-m,\alpha-m)=0$$

dır. Bu eşitliğin türevini alırsak,

$$\begin{aligned} g(\alpha',\alpha-m)+g(\alpha-m,\alpha') &= 0\\ g(T,\alpha-m)+g(\alpha-m,T) &= 0 \end{aligned}$$

$$2g(T,\alpha-m)=0$$

$$g(T,\alpha-m)=0 \tag{4.13}$$

elde edilir. Son eşitliğin türevi alınırsa,

$$g(T',\alpha-m)+g(T,\alpha')=0$$

bulunur. (3.6) Frenet denklemlerinden,

$$g(k_1N,\alpha-m)+g(T,T)=0\Rightarrow k_1g(N,\alpha-m)=-1\Rightarrow g(N,\alpha-m)=-\frac{1}{k_1} \tag{4.14}$$

olur. Burada (3.6) Frenet denklemleri yerine yazılırsa,

$$-\epsilon k_1g(T,\alpha-m)+k_2g(B,\alpha-m)=-\left(\frac{1}{k_1}\right)'\Rightarrow k_2g(B,\alpha-m)=-\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$\Rightarrow g(B,\alpha-m)=-\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2} \tag{4.15}$$

bulunur. $\alpha(s) - m = aT + bN + cB$ biçiminde olduğundan, (4.13), (4.14) ve (4.15) den

$$\alpha(s) - m = -\frac{\epsilon}{k_1}N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B$$

olur ki bu da α nın m noktasına ötelenmesidir.Böylece α normal bir eğriye denk olur. Özellikle $m = 0$ alınırsa, yukarıdaki eşitlikten

$$g(\alpha, \alpha) = -\frac{\epsilon}{k_1}g(N, \alpha) + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} g(B, \alpha)$$

$$g(N, \alpha) = -\frac{\epsilon^2}{k_1} = -\frac{1}{k_1}$$

$$g(B, \alpha) = (\frac{-\epsilon^2}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} = (\frac{-1}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}$$

elde edilir. (4.12) in türevi alınır ise,

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} = c_1 k_2 \left[\sinh(\int k_2(s)ds) \pm \cosh(\int k_2(s)ds)\right]$$

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} = -\frac{k_2}{k_1}$$

bulunur. Bu durumda,

$$g(\alpha, \alpha) = \frac{\epsilon}{k_1^2} + (\frac{\epsilon}{k_2})(-\frac{k_2}{k_1})(\frac{-1}{k_2})(-\frac{k_2}{k_1})$$

$$\begin{aligned} g(\alpha, \alpha) &= \frac{\epsilon}{k_1^2} - \frac{\epsilon}{k_1^2} \\ g(\alpha, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da α nın yer vektörünün ışıksı olduğunu gösterir. Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur$\square$.

Teorem 4.2: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$, asli normali ve yer vektörü ışıksı olmayan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve eğrilikleri $k_1(s) > 0$, $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda:

(i) α nın yer vektörünün uzaysı olması için gerek ve yeter koşul α nın, $\mathbb{S}_1^2(m,r)$ de yatması ve

$$\tfrac{1}{k_1(s)} = \pm\sqrt{c^2+\epsilon r^2}\cosh(\int k_2(s)ds) + c\sinh(\int k_2(s)ds), c \in \mathbb{R}, \epsilon = \pm 1 \quad (4.16)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

(ii) α nın yer vektörünün timelike olması için gerek ve yeter koşul α nın $\mathbb{H}_0^2(m,r)$ de yatması ve

$$\tfrac{1}{k_1(s)} = \pm\sqrt{c^2-\epsilon r^2}\cosh(\int k_2(s)ds) + c\sinh(\int k_2(s)ds), c \in \mathbb{R}, \epsilon = \pm 1 \quad (4.17)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [5].

İspat

(i) α nın yer vektörü uzaysı olsun. O zaman $g(\alpha,\alpha) = r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$ dir ve (4.9) dan

$$g(\alpha,\alpha) = \epsilon\left(c_1^2 - c_2^2\right) = r^2 \Rightarrow c_1^2 - c_2^2 = \epsilon r^2 \Rightarrow c_1 = \pm\sqrt{c_2^2 + \epsilon r^2}$$

bulunur. $c_2 = c$ alınır ise,

$$c_1 = \pm\sqrt{c^2+\epsilon r^2}$$

olur. Bulunan bu değerler (4.5) eşitliğinde yerine yazılır ise,

$$\frac{1}{k_1(s)} = \pm\sqrt{c^2+\epsilon r^2}\cosh(\int k_2(s)ds) + c\sinh(\int k_2(s)ds), c \in \mathbb{R}, \epsilon = \pm 1$$

elde edilir. Böylelikle (4.16) sağlanmış oldu. Şimdi α nın $\mathbb{S}_1^2(m,r)$ de yattığını göstermeliyiz. Bunun için,

$$m = \alpha + \frac{\epsilon}{k_1}N - (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)' B$$

vektörünü düşünelim. Bu eşitliğin türevi alınır ise

$$m' = \alpha' + \epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)' N + \frac{\epsilon}{k_1}N' - \epsilon\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' B - \frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' B'$$

dir. (3.6) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
m' &= T+\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)' N+\frac{\epsilon}{k_1}(-\epsilon k_1 T+k_2 B)-\epsilon\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' B-\frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'(k_2 N) \\
&= T+\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)' N-T+\frac{\epsilon k_2}{k_1}B-\frac{\epsilon k_2}{k_1}B-\epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)' N \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu m nin sabit bir nokta olduğunu gösterir. $g(\alpha,\alpha)=r^2$ ve m sabit bir nokta olduğundan $g(\alpha-m,\alpha-m)=r^2$ olur ki bu da α nın $\mathbb{S}_1^2(m,r)$ de yattığını gösterir.

Karşıt olarak, α, $\mathbb{S}_1^2(m,r)$ de yatsın ve (4.16) eşitliği sağlansın. Bu durumda, $g(\alpha-m,\alpha-m)=r^2$, $r\in\mathbb{R}^+$ dır. Bu eşitliğin türevi alınır ise,

$$\begin{aligned}
g(\alpha',\alpha-m)+g(\alpha-m,\alpha') &= 0 \\
g(T,\alpha-m)+g(\alpha-m,T) &= 0
\end{aligned}$$

$$2g(T,\alpha-m)=0$$

$$g(T,\alpha-m)=0 \tag{4.18}$$

dır. Tekrar türev alınırsa;

$$g(T',\alpha-m)+g(T,\alpha')=0$$

ve (3.6) Frenet denklemlerinden,

$$g(k_1 N,\alpha-m)+g(T,T)=0$$

$$k_1 g(N,\alpha-m)=-1$$

$$g(N,\alpha-m)=-\frac{1}{k_1} \tag{4.19}$$

olur. Tekrar türev alınıp ve (3.6) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$-\epsilon k_1 g(T,\alpha-m)+k_2 g(B,\alpha-m)=-\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$k_2 g(B,\alpha-m)=-\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$g(B, \alpha - m) = -\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} \tag{4.20}$$

bulunur. (4.18) , (4.19) ve (4.20) den

$$\alpha - m = -\frac{\epsilon}{k_1}N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B$$

bulunur. Bu α nın bir m noktasına ötelenmesidir.Yani α normal bir eğriye denktir. Özellikle $m = 0$ alınır ise

$$\alpha = -\frac{\epsilon}{k_1}N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B$$

olur. Bu durumda α normal bir eğri olur. Buradan,

$$g(\alpha, \alpha) = g\left(-\frac{\epsilon}{k_1}N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B, -\frac{\epsilon}{k_1}N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B\right)$$

$$g(\alpha, \alpha) = \frac{\epsilon}{k_1^2} - \epsilon\left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}\right)^2 \tag{4.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.16) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} = k_2\left[\pm\sqrt{c^2 + \epsilon r^2}\sinh(\int k_2(s)ds) + c\cosh(\int k_2(s)ds)\right] \tag{4.22}$$

olur. (4.16) denkleminin ve (4.22) denklemlerinin kareleri alınıp (4.21) denkleminde yazılırsa,

$$g(\alpha, \alpha) = r^2$$

elde edilir. Bu ise α nın yer vektörünün uzaysı olduğunu gösterir. Böylece (i) nin ispatı tamamlanmış olur.

(ii) α nın yer vektörü zamansı olsun. O zaman $g(\alpha, \alpha) = -r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$ dir ve (4.9) dan

$$g(\alpha, \alpha) = \epsilon\left(c_1^2 - c_2^2\right) = -r^2,$$

$$c_1^2 - c_2^2 = -\epsilon r^2 \Rightarrow c_1 = \pm\sqrt{c_2^2 - \epsilon r^2}$$

dir. $c_2 = c$ alınır ise,

$$c_1 = \pm\sqrt{c^2 - \epsilon r^2}$$

olur. Bulunan bu değerler (4.5) eşitliğinde yerine yazılır ise,

$$\frac{1}{k_1(s)} = \pm\sqrt{c^2 - \epsilon r^2}\cosh(\int k_2(s)ds) + c\sinh(\int k_2(s)ds), c \in \mathbb{R}, \epsilon = \pm 1$$

elde edilir. Böylelikle (4.17) sağlanmış oldu. Şimdi α nın $\mathbb{H}_0^2(m,r)$ de yattığını göstermeliyiz. Bunun için,

$$m = \alpha + \frac{\epsilon}{k_1}N - (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B$$

vektörünü düşünelim. Türevi alınır ise,

$$m^{'} = \alpha^{'} + \epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} N + \frac{\epsilon}{k_1}N^{'} - \epsilon\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}\right]^{'} B - \frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} B^{'}$$

ve (3.6) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
m^{'} &= T + \epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} N + \frac{\epsilon}{k_1}(-\epsilon k_1 T + k_2 B) - \epsilon\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}\right]^{'} B - \frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}(k_2 N) \\
&= T + \epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} N - T + \frac{\epsilon k_2}{k_1}B - \frac{\epsilon k_2}{k_1}B - \epsilon\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} N \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu m nin sabit bir nokta olduğunu gösterir. $g(\alpha,\alpha) = -r^2$ ve m sabit bir nokta olduğundan $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$ olur ki bu da α nın $\mathbb{H}_0^2(m,r)$ de yattığını gösterir.

Karşıt olarak, α, $\mathbb{H}_0^2(m,r)$ de yatsın ve (4.17) eşitliği sağlansın. Bu durumda, $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$, $r \in \mathbb{R}^+$ dır. Bu eşitliğin türevi alınır ise

$$\begin{aligned}
g(\alpha^{'}, \alpha - m) + g(\alpha - m, \alpha^{'}) &= 0 \\
g(T, \alpha - m) + g(\alpha - m, T) &= 0
\end{aligned}$$

$$2g(T, \alpha - m) = 0$$

$$g(T, \alpha - m) = 0 \tag{4.23}$$

dır.Tekrar türev alınırsa,

$$g(T^{'}, \alpha - m) + g(T, \alpha^{'}) = 0$$

olur ve (3.6) Frenet denklemlerinden,

$$g(k_1 N, \alpha - m) + g(T, T) = 0$$

$$k_1 g(N, \alpha - m) = -1$$

$$g(N, \alpha - m) = -\frac{1}{k_1} \tag{4.24}$$

bulunur.Tekrar türev alınıp, (3.6) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$-\epsilon k_1 g(T, \alpha - m) + k_2 g(B, \alpha - m) = -\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$k_2 g(B, \alpha - m) = -\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

$$g(B, \alpha - m) = -\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' \tag{4.25}$$

bulunur. (4.23) ,(4.24) ve (4.25) den

$$\alpha - m = -\frac{\epsilon}{k_1} N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)' B$$

bulunur. Bu α nın bir m noktasına ötelenmesidir.Yani α normal bir eğriye denktir. Özellikle $m = 0$ alınır ise

$$\alpha = -\frac{\epsilon}{k_1} N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)' B$$

dir. Bu ise α nın normal bir eğri olması demektir. Buradan,

$$g(\alpha, \alpha) = g\left(-\frac{\epsilon}{k_1} N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)' B, -\frac{\epsilon}{k_1} N + (\frac{\epsilon}{k_2})\left(\frac{1}{k_1}\right)' B\right)$$

$$g(\alpha, \alpha) = \frac{\epsilon}{k_1^2} - \epsilon\left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)^2 \tag{4.26}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.17) eşitliğinin Türevi alınırsa,

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)' = k_2\left[\pm\sqrt{c^2 - \epsilon r^2}\sinh(\int k_2(s)ds) + c\cosh(\int k_2(s)ds)\right] \tag{4.27}$$

dir. (4.17) denkleminin ve (4.27) denklemlerinin kareleri alınıp (4.26) denkleminde yazılırsa,

$$g(\alpha, \alpha) = -r^2$$

bulunur. Bu ise α nın yer vektörünün zamansı olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur$\square$.

Teorem 4.3: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$, asli normali ışıksı olan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve $k_1 = 1$ olsun. Bu durumda α nın normal bir eğri olması için gerek ve yeter koşul asli normalinin ve binormalinin $g(\alpha, N) = -1$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $g(\alpha, B) = c$ eşitliklerini sağlamasıdır [5].

İspat: α normal bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

olur. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınır ise,

$$\alpha' = \lambda' N + \lambda N' + \mu' B + \mu B'$$

elde edilir. (3.12) Frenet denklemlerinden N've B' yerlerine yazılırsa;

$$\alpha' = \lambda' N + \lambda(k_2 N) + \mu' B + \mu(-k_1 T - k_2 B)$$

$$\alpha' = \lambda' N + \lambda k_2 N + \mu' B - \mu k_1 T - \mu k_2 B$$

$$\alpha' = -\mu k_1 T + (\lambda' + \lambda k_2)N + (\mu' - \mu k_2)B$$

elde edilir. $\alpha' = T$ olduğundan,

$$T = -\mu k_1 T + (\lambda' + \lambda k_2)N + (\mu' - \mu k_2)B$$

bulunur. $k_1 = 1$ olduğundan,

$$\mu = -1, \quad \lambda' + \lambda k_2 = 0, \text{ ve } \quad \mu' - \mu k_2 = 0 \tag{4.28}$$

dir. Bu denklemlerden,

$$\begin{aligned} \mu &= -1 \Rightarrow \mu' = 0 \\ \mu' - \mu k_2 &= 0 \Rightarrow k_2 = 0 \\ \lambda' + \lambda k_2 &= 0 \Rightarrow \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = c, \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir. $\mu = -1$ ve $\lambda = c$ olmak üzere,

$$\alpha = cN - B$$

olur. Bu son eşitlik sırası ile N ve B ile çarpılırsa,

$$g(\alpha, N) = -1 \text{ ve } g(\alpha, B) = c$$

bulunur.

Karşıt olarak, $g(\alpha, N) = -1$ ve $g(\alpha, B) = c$ olsun.

$$g(\alpha, N) = -1$$

eşitliğinin türevi alınır ise, (3.12) Frenet denklemlerinden

$$\begin{aligned} g(\alpha', N) + g(\alpha, N') &= 0 \Rightarrow g(T, N) + g(\alpha, k_2 N) = 0 \\ &\Rightarrow k_2 g(\alpha, N) = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $g(\alpha, B) = c$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha', B) + g(\alpha, B') &= 0 \Rightarrow g(T, B) + g(\alpha, B') = 0 \\ &\Rightarrow g(\alpha, -k_1 T - k_2 B) = 0 \\ &\Rightarrow -k_1 g(\alpha, T) - k_2 g(\alpha, B) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $k_1 = 1$ ve $k_2 = 0$ olduğundan $g(\alpha, T) = 0$ bulunur. Bu α nın normal düzleminde yattığını gösterir ve α normal bir eğridir.□

Teorem 4.4: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$, asli normali ışıksı olan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve $k_1 = 1$ olsun. α nın $\mathbb{S}_1^2(m, r)$ de yatması için gerek ve yeter koşul, α nın düzlemsel normal eğri olması ve $r \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha - m = -\frac{r^2}{2}N - B$ eşitliğinin sağlanmasıdır [5].

İspat: Öncelikle α, $\mathbb{S}_1^2(m, r)$ de yatsın. O zaman,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

dir.Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha', \alpha - m) + g(\alpha - m, \alpha') &= 0 \Rightarrow g(T, \alpha - m) + g(\alpha - m, T) = 0 \\ &\Rightarrow 2g(T, \alpha - m) = 0 \\ &\Rightarrow g(T, \alpha - m) = 0 \end{aligned}$$

olur. Tekrar türev alınırsa;

$$g(T^{'}, \alpha - m) + g(T, \alpha^{'}) = 0$$

dır ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$g(k_1 N, \alpha - m) + g(T, T) = 0$$

$$\begin{aligned} k_1 g(N, \alpha - m) &= -1 \\ g(N, \alpha - m) &= -1 \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar türev alırsak,

$$g(N', \alpha - m) + g(N, \alpha') = 0$$

olur ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$g(k_2 N, \alpha - m) + g(N, T) = 0 \Rightarrow k_2 g(N, \alpha - m) = 0$$

bulunur. $g(N, \alpha - m) = -1$ olduğundan $k_2 = 0$ olur ve α düzlemsel bir eğridir. Şimdi α nın normal eğri olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\alpha - m = aT + bN + cB \tag{4.29}$$

vektörünü göz önüne alalım. Burada $a = a(s)$, $b = b(s)$ ve $c = c(s)$ keyfi fonksiyonlardır. (4.29) eşitliği sırası ile T, N ve B ile çarpılırsa,
$g(\alpha - m, T) = 0 = a$, $g(\alpha - m, N) = c = -1$, $g(\alpha - m, B) = b$ olur. $g(\alpha - m, B) = b$ eşitliğinin türevi alınırsa, (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g(\alpha', B) + g(\alpha - m, B') &= b' \\ g(T, B) + g(\alpha - m, B') &= b' \\ g(\alpha - m, -k_1 T - k_2 B) &= b' \\ -k_1 g(\alpha, T) - k_2 g(\alpha, B) &= b' \\ b' &= 0 \end{aligned}$$

dir. $b = b_0$ sabit olmak üzere, $a = 0$ ve $c = -1$ olduğundan,

$$\alpha - m = b_0 N - B$$

dir. Buradan,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -2b_0 g(N, B) = -2b_0$$

dır. Diğer taraftan $g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2$ olduğundan ve $b_0 = -\frac{r^2}{2}$ dir. Bu durumda,

$$\alpha - m = -\frac{r^2}{2} N - B$$

dir ve α normal bir eğriye denktir.

Karşıt olarak, α düzlemsel normal eğri , $r \in \mathbb{R}^+$ ve $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere, $\alpha - m = -\frac{r^2}{2} N - B$ eşitliği sağlansın. α düzlemsel normal eğri olduğundan $k_2 = 0$ dır.

$$m = \alpha + \frac{r^2}{2} N + B$$

Eşitliğinin türevi alınırsa,

$$m' = \alpha' + \frac{r^2}{2} N' + B'$$

dür ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} m' &= T + \frac{r^2}{2} k_2 N - k_1 T - k_2 B \\ m' &= T + \frac{r^2}{2} k_2 N - k_1 T - k_2 B \end{aligned}$$

dir. $k_1 = 1$ ve $k_2 = 0$ olduğundan $m' = 0$ olur. Bu m nin sabit olduğunu gösterir.

$$\alpha - m = -\frac{r^2}{2} N - B$$

olmak üzere,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = \frac{r^4}{4} g(N, N) + 2.\frac{r^2}{2} g(N, B) + g(B, B) = r^2$$

dir. Bu ise α nın $\mathbb{S}_1^2(m, r)$ de yattığını gösterir.□

Teorem 4.5: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$, asli normali ışıksı olan birim hızlı uzaysı normal bir eğri ve $k_1 = 1$ olsun. α nın $\mathbb{H}_0^2(m, r)$ de yatması için gerek ve yeter koşul, α nın düzlemsel normal eğri olması ve $\alpha - m = \frac{r^2}{2} N - B$, $r \in \mathbb{R}^+$ eşitliğinin sağlanmasıdır [5].

İspat: Öncelikle α, $\mathbb{H}_0^2(m,r)$ de yatsın. O zaman,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

dir. Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha', \alpha - m) + g(\alpha - m, \alpha') &= 0 \\ g(T, \alpha - m) + g(\alpha - m, T) &= 0 \end{aligned}$$

$$2g(T, \alpha - m) = 0$$

$$g(T, \alpha - m) = 0$$

dir. Tekrar türev alınırsa,

$$g(T', \alpha - m) + g(T, \alpha') = 0$$

olur. (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g(k_1 N, \alpha - m) + g(T, T) &= 0 \Rightarrow k_1 g(N, \alpha - m) = -1 \\ &\Rightarrow g(N, \alpha - m) = -1 \end{aligned}$$

dir. Tekrar türev alırsak,

$$g(N', \alpha - m) + g(N, \alpha') = 0$$

olur ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g(k_2 N, \alpha - m) + g(N, T) &= 0 \\ k_2 g(N, \alpha - m) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $g(N, \alpha - m) = -1$ olduğundan $k_2 = 0$ olur ve α düzlemsel bir eğridir. Şimdi α nın normal eğri olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\alpha - m = aT + bN + cB \tag{4.30}$$

vektörünü göz önüne alalım. Burada $a = a(s)$, $b = b(s)$ ve $c = c(s)$ s nin keyfi fonksiyonlarıdır. (4.30) eşitliği sırası ile T, N ve B ile çarpılırsa,

$g(\alpha - m, T) = 0 = a$, $g(\alpha - m, N) = c = -1$, $g(\alpha - m, B) = b$ elde edilir. $g(\alpha - m, B) = b$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha', B) + g(\alpha - m, B') &= b' \\ g(T, B) + g(\alpha - m, B') &= b' \\ g(\alpha - m, -k_1 T - k_2 B) &= b' \\ -k_1 g(\alpha, T) - k_2 g(\alpha, B) &= b' \\ b' &= 0 \end{aligned}$$

dir. Öyleyse b sabit fonksiyondur. $b = b_0$ sabit olmak üzere, $a = 0$ ve $c = -1$ olduğundan,

$$\alpha - m = b_0 N - B,$$

dir. Buradan,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -2b_0$$

dır. Diğer taraftan $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$ olduğundan $b_0 = \dfrac{r^2}{2}$ dir. Bu durumda,

$$\alpha - m = \frac{r^2}{2} N - B$$

dir ve α normal bir eğriye denktir.

Karşıt olarak, α düzlemsel normal eğri , $r \in \mathbb{R}^+$ ve $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere, $\alpha - m = \frac{r^2}{2} N - B$ eşitliği sağlansın. α düzlemsel normal eğri olduğundan $k_2 = 0$ dır. Bu durumda

$$m = \alpha - \frac{r^2}{2} N + B$$

dir. Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$m' = \alpha' - \frac{r^2}{2} N' + B'$$

olur ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} m' &= T - \frac{r^2}{2} k_2 N - k_1 T - k_2 B \\ &= T - \frac{r^2}{2} k_2 N - k_1 T - k_2 B \end{aligned}$$

dir. $k_1 = 1$ ve $k_2 = 0$ olduğundan $m' = 0$ olur. Bu m nin sabit olduğunu gösterir.

$$\alpha - m = \frac{r^2}{2} N - B$$

olmak üzere,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = \frac{r^4}{4} g(N, N) - 2.\frac{r^2}{2} g(N, B) + g(B, B) = -r^2$$

dir. Bu ise α nın $\mathbb{H}_0^2(m, r)$ de yattığını gösterir$\square$.

Teorem 4.6: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$, asli normali ışıksı olan birim hızlı uzay-sı normal bir eğri ve $k_1 = 1$ olsun. α nın $C(m)$ de yatması için gerek ve yeter koşul, α nın normal bir eğriye denk olması ve $\alpha(s) = -B(s)$ eşitliğinin sağlanmasıdır [5].

İspat: α, tepe noktası $m \in \mathbb{E}_1^3$ olan ışık konisi $C(m)$ de yatsın. Bu durumda,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = 0$$

dir. Bu eşitliğin türevini alırsak,

$$\begin{aligned} g(\alpha', \alpha - m) + g(\alpha - m, \alpha') &= 0 \\ g(T, \alpha - m) + g(\alpha - m, T) &= 0 \end{aligned}$$

$$2g(T, \alpha - m) = 0$$

$$g(T, \alpha - m) = 0$$

dir. Tekrar türev alınırsa;

$$g(T', \alpha - m) + g(T, \alpha') = 0$$

olur ve (3.12) Frenet denklemlerinden,dir.Tekrar türev alırsak,

$$g(N', \alpha - m) + g(N, \alpha') = 0$$

$$\begin{aligned} g(k_1 N, \alpha - m) + g(T, T) &= 0 \Rightarrow k_1 g(N, \alpha - m) = -1 \\ &\Rightarrow g(N, \alpha - m) = -1 \qquad (1) \end{aligned}$$

olur ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} g(k_2N, \alpha - m) + g(N, T) &= 0 \\ k_2 g(N, \alpha - m) &= 0 \end{aligned}$$

dir. $g(N, \alpha - m) = -1$ olduğundan $k_2 = 0$ olur.

$$\alpha - m = aT + bN + cB \tag{4.31}$$

vektörünü göz önüne alalım. Burada $a = a(s)$, $b = b(s)$ ve $c = c(s)$ keyfi fonksiyonlardır. (4.31) eşitliği sırası ile T, N ve B ile çarpılırsa,
$g(\alpha - m, T) = 0 = a$, $g(\alpha - m, N) = c = -1$, $g(\alpha - m, B) = b$ olur. $g(\alpha - m, B) = b$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha', B) + g(\alpha - m, B') &= b' \\ g(T, B) + g(\alpha - m, B') &= b' \\ g(\alpha - m, -k_1T - k_2B) &= b' \\ -k_1 g(\alpha, T) - k_2 g(\alpha, B) &= b' \\ b' &= 0 \end{aligned}$$

dir. $b = b_0$ sabit olmak üzere, $a = 0$ ve $c = -1$ olduğundan,

$$\alpha - m = b_0N - B$$

dir. Buradan,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -2b_0$$

dır. Diğer taraftan $g(\alpha - m, \alpha - m) = 0$ olduğundan $b_0 = 0$ dır. Bu durumda,

$$\alpha - m = -B$$

dir. Bu α nın bir m vektörüne ötelenmesidir. Buradan, α normal bir eğriye denktir ve $\alpha = -B$ dir.

Karşıt olarak, α normal bir eğriye denk ve $\alpha = -B$ eşitliği sağlansın. Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\alpha' = -B'$$

olur ve (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$T = k_1 T + k_2 B$$

dir. $k_1 = 1$ olduğundan $k_2 = 0$ bulunur. $m = \alpha + B$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$m' = \alpha' + B'$$

dür. (3.12) Frenet denklemlerinden,

$$m' = T - k_1 T - k_2 B = 0$$

bulunur. Bu da m nin sabit olduğunu gösterir. Diğer taraftan,

$$\alpha - m = -B$$

olmak üzere,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = g(B, B) = 0$$

bulunur. Bu ise α nın $C(m)$ de yattığını gösterir.□

5. $\mathbb{E}_1^3$ DE ZAMANSI(TIMELIKE) VE IŞIKSI(NULL) NORMAL EĞRİLER

Bu bölümde üçüncü bölümde elde ettiğimiz Frenet denklemlerinden ve eğriliklerden yararlanarak, birim hızlı zamansı ve ışıksı normal eğrilerin bazı karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 5.1: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı zamansı bir eğri ve$\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için eğrilikleri $k_1(s) > 0$, $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda α nın normal bir eğri olması için gerek ve yeter koşul, α nın yer vektörünün asli normalinin ve binormalinin $g(\alpha, N) = \dfrac{1}{k_1}$, $g(\alpha, B) = \left(\dfrac{1}{k_2}\right)\left(\dfrac{1}{k_1}\right)^{'}$ eşitliklerini sağlamasıdır [6].

İspat: Öncelikle $\alpha(s)$ normal bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

dir. s ye göre türev alınır ise,

$$\alpha^{'} = \lambda^{'}N + \lambda N^{'} + \mu^{'}B + \mu B^{'}$$

elde edilir. (3.18) Frenet denklemlerinden $N^{'}$ve $B^{'}$ yerlerine yazılırsa;

$$\alpha^{'} = \lambda^{'}N + \lambda(k_1T + k_2B) + \mu^{'}B + \mu(-k_2N)$$

$$\alpha^{'} = \lambda^{'}N + \lambda k_1T + \lambda k_2B + \mu^{'}B - \mu k_2N$$

$$\alpha^{'} = \lambda k_1T + (\lambda^{'} - \mu k_2)N + (\lambda k_2 + \mu^{'})B$$

elde edilir. $\alpha^{'} = T$ olduğundan,

$$T = \lambda k_1T + (\lambda^{'} - \mu k_2)N + (\lambda k_2 + \mu^{'})B$$

olur. Buradan da

$$\lambda k_1 = 1,\ \lambda^{'} - \mu k_2 = 0,\ \lambda k_2 + \mu^{'} = 0 \tag{5.1}$$

eşitlikleri bulunur. (5.1) eşitliklerinden,

$$\lambda = \frac{1}{k_1},\quad \mu = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}$$

elde edilir.Bu durumda,

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_1}N + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' B \tag{5.2}$$

olur. (5.2) eşitliği sırası ile N ve B ile çarpılır ise,

$$g(\alpha, N) = \frac{1}{k_1} \quad \text{ve} \quad g(\alpha, B) = \left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

elde edilir.

Karşıt olarak, $g(\alpha, N) = \frac{1}{k_1}$ ve $g(\alpha, B) = \left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)'$ sağlansın. $g(\alpha, N) = \frac{1}{k_1}$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(T, N) + g(\alpha, k_1 T + k_2 B) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \\ k_1 g(\alpha, T) + k_2 g(\alpha, B) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \end{aligned}$$

dir. $g(\alpha, B) = \left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)'$ olduğundan,

$$k_1 g(\alpha, T) + k_2 \left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)' = \left(\frac{1}{k_1}\right)' \Rightarrow g(\alpha, T) = 0$$

bulunur. Öyleyse α normal bir eğridir.□

Teorem 5.2: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı zamansı bir eğri ve eğrilikleri $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_1(s) > 0$, $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda α nın normal bir eğriye denk olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{k_2}{k_1} = -\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' \tag{5.3}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [6].

İspat: Öncelikle α normal bir eğriye denk olsun. Bu durumda $m \in \mathbb{E}_1^3$ sabit bir nokta olmak üzere $(m' = 0)$,

$$\alpha - m = \lambda N + \mu B$$

dir. Buradan

$$m = \alpha - \lambda N - \mu B$$

eşitliğinin türevi alınır ve (3.18) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$0 = \alpha' - \lambda k_1 T - (\lambda' - \mu k_2) N - (\lambda k_2 + \mu') B$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \alpha' &= \lambda k_1 T + (\lambda' - \mu k_2) N + (\lambda k_2 + \mu') B \\ T &= \lambda k_1 T + (\lambda' - \mu k_2) N + (\lambda k_2 + \mu') B \end{aligned}$$

olur ve

$$\lambda k_1 = 1, \; \lambda' - \mu k_2 = 0, \; \lambda k_2 + \mu' = 0$$

eşitlikleri bulunur. İlk iki denklemden

$$\lambda = \frac{1}{k_1}, \quad \text{ve } \mu = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

elde edilir ve bunlar üçüncü denklemde yerine yazılırsa

$$\lambda k_2 + \mu' = 0 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = -\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'$$

olur. Böylece (5.3) eşitliği sağlanmış olur.

Karşıt olarak, (5.3) eşitliği sağlansın. $m \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

$$\alpha - m = \frac{1}{k_1} N + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' B$$

eşitliğini göz önüne alalım.

$$m = \alpha - \frac{1}{k_1} N - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' B$$

eşitliğinin türevi alınırsa,

$$m' = \alpha' - \left(\frac{1}{k_1}\right)' N - \frac{1}{k_1} N' - \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' B - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' B'$$

olur ve (3.18) Frenet denklemlerinden,

$$m' = T - \left(\frac{1}{k_1}\right)' N - \frac{1}{k_1}(k_1 T + k_2 B) - \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]' B - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' (-k_2 N)$$

elde edilir ve (5.3) eşitliğinden,

$$m^{'} = T - \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} N - T - \frac{k_2}{k_1} B + \frac{k_2}{k_1} B + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} N = 0$$

dır. Bu m nin sabit olduğunu ve α nın normal bir eğriye denk olduğunu gösterir.□

Teorem 5.3: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı zamansı bir eğri ve eğrilikleri $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_1(s) > 0, k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda α nın $\mathbb{S}_1^2(m, r)$ de yatması için gerek ve yeter koşul α nın normal eğri olmasıdır [6].

İspat: Öncelikle α, $\mathbb{S}_1^2(m, r)$ de yatsın.O zaman,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha^{'}, \alpha - m) + g(\alpha - m, \alpha^{'}) &= 0 \\ g(T, \alpha - m) + g(\alpha - m, T) &= 0 \end{aligned}$$

$$2g(T, \alpha - m) = 0$$

$$g(T, \alpha - m) = 0 \tag{5.4}$$

olur. Tekrar türev alınırsa;

$$g(T^{'}, \alpha - m) + g(T, \alpha^{'}) = 0$$

dır. (3.18) Frenet denklemlerinden,

$$g(k_1 N, \alpha - m) + g(T, T) = 0$$

$$k_1 g(N, \alpha - m) = 1$$

$$g(N, \alpha - m) = \frac{1}{k_1} \tag{5.5}$$

bulunur.Tekrar türev alırsak,

$$g(N', \alpha - m) + g(N, \alpha') = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'}$$

olur ve Frenet denklemlerinden(3.18),

$$\begin{aligned} g(k_1T+k_2B,\alpha-m)+g(N,T) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \\ k_1g(T,\alpha-m)+k_2g(B,\alpha-m) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \\ k_2g(B,\alpha-m) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \end{aligned}$$

$$g(B,\alpha-m)=\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)' \tag{5.6}$$

bulunur. (5.4) , (5.5) ve (5.6) denklemlerinden;

$$\alpha-m=\frac{1}{k_1}N+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'B$$

elde edilir. Bu α nın m noktasına ötelenmesidir ve α normal bir eğridir.

Karşıt olarak, α normal bir eğri olsun. Teorem 5.2 den,

$$\frac{k_2}{k_1}=-\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'$$

olmak üzere,

$$m=\alpha-\frac{1}{k_1}N-\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'B$$

vektörünü düşünelim. Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$m'=\alpha'-\left(\frac{1}{k_1}\right)'N-\frac{1}{k_1}N'-\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'B-\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'B'$$

ve (3.18) Frenet denklemlerinden,

$$\begin{aligned} m' &= T-\left(\frac{1}{k_1}\right)'N-\frac{1}{k_1}(k_1T+k_2B)-\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]'B-\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'(-k_2N) \\ &= T-\left(\frac{1}{k_1}\right)'N-T-\frac{k_2}{k_1}B+\frac{k_2}{k_1}B+\left(\frac{1}{k_1}\right)'N \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. $m'=0$ olduğundan m sabittir.

$$\alpha-m=\frac{1}{k_1}N+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'B$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(\alpha - m, \alpha - m) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 g(N,N) - 2\left(\frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' g(N,B) \\ &\quad + \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]^2 g(B,B) \\ g(\alpha - m, \alpha - m) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right]^2 = c = \text{sabit} > 0 \end{aligned}$$

dır. $c = r^2$ olursa $g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2$ olur ve α, $\mathbb{S}_1^2(m,r)$ de yatar.□

Teorem 5.4: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$ ışıksı bir eğri ve eğrilikleri $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda α nın normal bir eğri olması için gerek ve yeter koşul, α nın yer vektörünün teğetinin ve asli normalinin

$$g(\alpha, T) = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)' \text{ ve } g(\alpha, N) = \frac{1}{k_2} \tag{5.7}$$

eşitliklerinin sağlamasıdır [6].

İspat: Öncelikle α normal bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\alpha = \lambda N + \mu B \tag{5.8}$$

dir. Bu eşitliğinin türevi alınıp, (3.24) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$\lambda k_2 = 1,\ \lambda' - \mu k_2 = 0,\ \mu' - \lambda = 0 \tag{5.9}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lambda = \frac{1}{k_2},\ \mu = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'$$

bulunur. (5.8) denklemi sırası ile T ve N ile çarpılır ise,

$$g(\alpha, T) = \mu = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)' \text{ ve } g(\alpha, N) = \lambda = \frac{1}{k_2}$$

elde edilir. Böylece (5.7) eşitlikleri sağlanmış olur.

Karşıt olarak, $g(\alpha,T)=\mu=\dfrac{1}{k_2}\left(\dfrac{1}{k_2}\right)'$ ve $g(\alpha,N)=\lambda=\dfrac{1}{k_2}$ eşitlikleri sağlansın. $g(\alpha,N)=\lambda=\dfrac{1}{k_2}$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
g(T,N)+g(\alpha,k_2T-k_1B) &= \left(\frac{1}{k_2}\right)' \\
k_2g(\alpha,T)+k_1g(\alpha,B) &= \left(\frac{1}{k_2}\right)' \\
k_2\left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right)+g(\alpha,B) &= \left(\frac{1}{k_2}\right)' \\
g(\alpha,B) &= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\alpha=aT+bN+cB \tag{5.10}$$

vektörünü göz önüne alalım. Burada $a=a(s)$, $b=b(s)$ ve $c=c(s)$ keyfi fonksiyonlardır. (5.10) eşitliği sırası ile T,N ve B ile çarpılırsa,

$$g(\alpha,T)=c=\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)',\ g(\alpha,N)=b=\frac{1}{k_2},\ g(\alpha,B)=a=0$$

olur. Bu değerler (5.10) da yerlerine yazılır ise,

$$\alpha=\frac{1}{k_2}N+\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'B$$

elde edilir. Bu da α nın normal bir eğri olduğunu gösterir.□

Teorem 5.5: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha=\alpha(s)$ ışıksı bir eğri ve eğrilikleri $\forall s\in I\subset\mathbb{R}$ için $k_1(s)=1$, $k_2(s)\neq 0$ olsun. Bu durumda α nın normal bir eğriye denk olması için gerek ve yeter koşul

$$\left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]'=\frac{1}{k_2} \tag{5.11}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [6].

İspat: Öncelikle α normal bir eğriye denk olsun. Bu durumda $m\in\mathbb{E}_1^3$ sabit bir nokta olmak üzere $(m'=0)$,

$$\alpha-m=\lambda N+\mu B$$

dir.

$$m=\alpha-\lambda N-\mu B$$

eşitliğinin türevi alınır ve (3.24) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha^{'} - \lambda N^{'} - \lambda^{'} N - \mu^{'} B - \mu B^{'} \\
0 &= \alpha^{'} - \lambda(k_2 T - k_1 B) - \lambda^{'} N - \mu^{'} B - \mu(-k_2 N) \\
0 &= \alpha^{'} - \lambda k_2 T + (-\lambda^{'} + \mu k_2) N + (\lambda k_1 - \mu^{'}) B
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\alpha^{'} &= \lambda k_2 T + (\lambda^{'} - \mu k_2) N + (\mu^{'} - \lambda k_1) B \\
T &= \lambda k_2 T + (\lambda^{'} - \mu k_2) N + (\mu^{'} - \lambda k_1) B \\
T &= \lambda k_2 T + (\lambda^{'} - \mu k_2) N + (\mu^{'} - \lambda) B
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda k_2 = 1,\ \lambda^{'} - \mu k_2 = 0,\ \mu^{'} - \lambda = 0$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerden,

$$\lambda = \frac{1}{k_2}, \quad \text{ve } \mu = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'}$$

bulunur. $\mu^{'} - \lambda = 0$ olduğundan

$$\frac{1}{k_2} = \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'}\right]^{'}$$

elde edilir. Böylece (5.11) eşitliği sağlanmış olur.

Karşıt olarak, (5.11) eşitliği sağlansın. $m \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

$$\alpha - m = \frac{1}{k_2} N + \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'} B$$

eşitliğini göz önüne alalım.

$$m = \alpha - \frac{1}{k_2} N - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'} B$$

eşitliğinin türevi alınırsa,

$$m^{'} = \alpha^{'} - \left(\frac{1}{k_2}\right)^{'} N - \frac{1}{k_2} N^{'} - \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'}\right]^{'} B - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)^{'} B^{'}$$

olur ve (3.24) Frenet denklemlerinden,

$$m' = T - \left(\frac{1}{k_2}\right)' N - \frac{1}{k_2}(k_2T - k_1B) - \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]' B - \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'(-k_2N)$$

bulunur. (5.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} m' &= T - \left(\frac{1}{k_2}\right)' N - T + \frac{k_1}{k_2}B - \left[\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]' B + \left(\frac{1}{k_2}\right)' N \\ &= T - \left(\frac{1}{k_2}\right)' N - T + \frac{1}{k_2}B - \frac{1}{k_2}B + \left(\frac{1}{k_2}\right)' N \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu m nin sabit olduğunu ve α nın normal bir eğriye denk olduğunu gösterir.□

Teorem 5.6: $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(s)$ ışıksı bir eğri ve eğrilikleri $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için $k_1(s) = 1,\ k_2(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda α nın normal bir eğri olması için gerek ve yeter koşul, α nın yer vektörünün,

$$g(\alpha, \alpha) = \left(\frac{1}{k_2}\right)^2 \tag{5.12}$$

eşitliğini sağlamasıdır [6].

İspat: Öncelikle α normal bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\alpha = \lambda N + \mu B$$

dir. Bu eşitliğin türevi alınıp, (3.24) Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$\lambda k_2 = 1,\ \lambda' - \mu k_2 = 0,\ \mu' - \lambda = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\lambda = \frac{1}{k_2},\ \mu = \frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_2}\right)'$$

bulunur.

$$\begin{aligned} g(\alpha, \alpha) &= \lambda^2 g(N, N) + 2\lambda\mu g(N, B) + \mu^2 g(B, B) \\ &= \lambda^2 = \left(\frac{1}{k_2}\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (5.12) eşitliği sağlanmış olur.

Karşıt olarak, (5.12) eşitliği sağlansın. Bu eşitliğin türevi alırsa,

$$\begin{aligned} g(\alpha,\alpha) &= \left(\frac{1}{k_2}\right)^2 \\ 2g(\alpha',\alpha) &= 2\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)' \end{aligned}$$

$$g(\alpha,T) = \left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)' \tag{5.13}$$

dir. (5.13) ün tekrar türevi alınırsa,

$$g(\alpha,N) = \left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]' \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.14) ün tekrar türevi alınırsa,

$$g(\alpha,B) = \left(\frac{1}{k_2}\right)' - \left[\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]'\right]' \tag{5.15}$$

elde edilir.

$$\alpha = aT + bN + cB \tag{5.16}$$

vektörünü göz önüne alalım. Burada $a = a(s)$, $b = b(s)$ ve $c = c(s)$ keyfi fonksiyonlardır. (5.10) eşitliği sırası ile T, N ve B ile çarpılırsa,

$$g(\alpha,T) = c, g(\alpha,N) = b, g(\alpha,B) = a \tag{5.17}$$

dır.

$$g(\alpha,\alpha) = \left(\frac{1}{k_2}\right)^2 = b^2 + 2ac$$

olmak üzere (5.13), (5.14), (5.15) ve (5.17) den,

$$\left(\frac{1}{k_2}\right)^2 = \left(\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]'\right)^2 + 2\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)'\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)' - \left[\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]'\right]'\right]$$

bulunur ve

$$\frac{1}{k_2} = \left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_2}\right)'\right]'$$

elde edilir. Teorem 5.5 den α normal bir eğridir$\square$.

KAYNAKLAR

1.BonnorW.B. "Null Curves in a Minkowski space-time"

2.Chen. B.Y. "When does the position vector of a space curve always lie inits rectifing plane?", Amer. Math. Mounthly, 110, 2003, 147-152.

3.Ekmekci,N. and İlarslan,K. "Higher Curvates of a Regular Curve in Lorentzian Space", Journal of Institute of Math. Nd Comp. Sci., Vol 11, No. 2,1998, 97-102

4.İlarslan K., E.Nešoviċ and Petroviċ-Torgašev, M."Some Characterizations of Rectefiyng curves in the Minkowski 3-space", Novi Sad J. Math. Vol 33, No. 2, 2003, 23-32

5.İlarslan K. "Spacelike Normal Curves in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$", Turk. J. Math, 29(2005), 53-63.

6. İlarslan K. "Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$", Indian J. Pure Appl. Math. 35 (2004), No. 7, 881-888.

7. İlarslan K. "Öklid olmayan manifoldlar üzerindeki bazı özel eğriler", doktora tezi, Ankara, 2002.

8.Petroviċ-Torgašev, M. and Šuċuroviċ,E. "Some Characterizations of curves lying on the pseudohyperbolic space $\mathbb{H}_0^2$ in the Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$", Kragujevac, J. Math., 22, 2000, 71-82.

9.Petroviċ-Torgašev, M. and Šuċuroviċ,E. "Some Characterizations of Lorentzian spherical spacelike curves with the timelike and null principal normal", Mathematica Moravica, 4, 200, 83-92.

10.Sabuncuoğlu, A. "Diferensiyel Geometri", Ankara 2004.

11.Soytürk E., İlarslan K. ve Sağlam D. "Osculating Spheres and Osculating Cırcles of a Curve in Semi-Riemannian Space", Commu. Fac. Sci Univ. Ank. Series A1,V.54.(No.2) pp.39-48(2005).

12.Walrave, J.: "Curves and Surfaces in Minkowski Space", Ph.D. thesis, K.U.Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	İbrahim GÜNGÖR
Doğum Yeri	:	Eşme-UŞAK
Doğum Tarihi	:	1978
Medi Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	Almanca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Uşak Lisesi, 1996
Lisans	:	Hacettepe Üniversitesi(Mat. Öğrt.), 2001
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniv. Fen Bilimleri Enst., 2007

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl Aralığı

Milli Eğitim Bakanlığı Matematik Öğretmenliği, 2001