KUVVETLİ TERSLENEBİLİR HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim ÖZER

Danışman
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUVVETLİ TERSLENEBİLİR HALKALAR

İbrahim ÖZER

Danışman
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

TEZ ONAY SAYFASI

İbrahim ÖZER tarafından hazırlanan "Kuvvetli Terslenebilir Halkalar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi Fen Fak.

Üye : Prof. Dr. Muhittin BAŞER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/06/2019

İbrahim ÖZER

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

KUVVETLİ TERSLENEBİLİR HALKALAR

İbrahim ÖZER
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları verilmiştir. Üçüncü bölümde, kuvvetli terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olan kuvvetli $\gamma -$ terslenebilir halkalar ve özellikleri verilmiştir. Son bölümde ise $\gamma -$ terslenebilir halkaların genişlemeleri irdelenmiştir.

2019, v + 36 sayfa

Anahtar Kelimeler: İnmiş Halkalar, Terslenebilir Halkalar, Genelleştirilmiş Terslenebilir halkalar, Armendariz Halkalar.

ABSTRACT
M.Sc Thesis

STRONG REVERSIBLE RINGS

İbrahim ÖZER
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Muhittin BAŞER

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, some ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, strong $\gamma -$ reversible rings, which is a generalization of reversible rings and their basic properties, are given. In the last chapter extensions of strong $\gamma -$ reversible rings are studied.

2019, v + 36 pages

Keywords: Reduced Rings, Reversible Rings, Generalized Reversible Rings, Armendariz Rings.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda danışmanlığımı yapan sayın kıymetli hocam Prof. Dr. Muhittin BAŞER' e göstermiş olduğu sabır, ilgi, destek ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam boyunca samimi desteklerini esirgemeyen Doç. Dr Oğuzhan DEMİREL, Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ' a ve bana fevkalade sabır gösteren sevgili eşim ve çocuklarıma sonsuz teşekkür ederim.

İbrahim ÖZER

AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

γ	R halkasının bir endomorfizması
$\bar{\gamma}$	R nin bir γ endomorfizmasının R nin bir genişlemesine genişletilmişi
D	R halkasının Dorroh genişlemesi
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
I_R	R halkasının birim endomorfizması
${}_R M_R$	$R - R$ bimodülü
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
R^A	Bir A kümesinden R halkasına tüm fonksiyonların kümesi
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x; x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x; \gamma]$	R nin skew polinom halkası
$T(R, M)$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası
$\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının x^n tarafından üretilen ideali

1. GİRİŞ

R bir halka olmak üzere, eğer R değişmeli bir halka ise bu durumda $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması açık olarak $ba = 0$ olmasını gerektirir. Bununla birlikte değişmeli olmayan birçok halkada da bu özelliğin sağlandığı fark edilmiştir. Bu özelliğe sahip halkalar ilk defa Habeb (1990) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra, bu halka sınıfları ile ilgili birçok ilginç sonuçlar elde eden Cohn (1999), bu halka sınıflarına terslenebilir (reversible) halka ismini vermiştir. Daha sonraları bu halka sınıfları bu isim ile çalışılmıştır. Yani R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için;

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına terslenebilir halka denir. Bu özelliğe sahip halkalar halka teoride pek fazla öneme sahiptir. Yakın zamanlarda birçok matematikçi bu halka sınıflarının çeşitli genelleştirmelerini yaparak teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce terslenebilir halkalarla ilgili bu güne kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgileri verelim. Eğer bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa veya denk olarak $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R ye inmiş (reduced) halka denir. Her tamlık bölgesinin inmiş bir halka olduğu açıktır. Ayrıca inmiş halkaların sınıfının terslenebilir halkaların sınıfını kapsadığı bilinmektedir. Diğer taraftan, her değişmeli halkanın terslenebilir olduğu da açıktır. İnmiş halkaların sınıfının diğer bir genelleştirilmesi Armendariz halkalardır. Rege ve Chhawchharia (1997) da Armendariz halka tanımını şu şekilde vermişlerdir. $R[x]$; R üzerindeki polinomların halkası olmak üzere

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \qquad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$$

polinomları için $p(x)q(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası Armendariz halka olarak adlandırılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalara Armendariz halka denilmesinin sebebi; inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını 1974 de gösteren kişinin E.P. Armendariz olmasıdır. Halkaların Armendarizlik özelliği üzerine birçok makale yazılmıştır. Bunlardan bazıları Armendariz (1974), Hong vd. (2003, 2005, 2006) ve Kim ve Lee (2000) tarafından yapılan çalışmalardır.

R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olmak üzere R halkasından katsayılı polinomların kümesi, polinomlarda bilinen toplama işlemi ve herhangi bir $a \in R$ için $xa = \gamma(a)x$ ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya endomorfizma tipinin Ore genişlemesi (ya da Skew polinom halkası) denir ve $R[x;\gamma]$ ile gösterilir. Krempa (1996) da γ, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için,

$$a\gamma(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda γ yı katı (rigid) endomorfizma olarak adlandırmıştır. Daha sonra Hong vd. (2003) bir R halkasının katı bir γ endomorfizmasının var olması durumunda R yi γ −katı (γ −rigid) halka olarak adlandırmışlardır. Kolayca görülebilir ki; I_R, R nin birim endomorfizması olmak üzere R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin I_R −katı olmasıdır. Bir R halkasının herhangi bir katı endomorfizması bir monomorfizmadır. Hong vd. (2000) de γ −katı halkaların inmiş halka olduğunu ispatlamışlardır.

Terslenebilir halkaların genelleştirmeleri üzerine olan çalışmalar Başer vd. (2009) tarafından devam ettirilmiştir. Bu çalışmada γ bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere γ −terslenebilir halka tanımı verilmiş ve bu halka sınıflarının özellikleri çalışılmıştır.

Şu ana kadar verilen bilgilerin ışığı altında bu çalışmada Başer ve Kwak (2010) tarafından yapılan çalışma referans alınarak bir R halkasının bir γ −endomorfizması için kuvvetli γ −terslenebilir halka tanımı verilecektir. Bu halka sınıflarının bazı karekterizasyonları yapılacak ve diğer halka sınıfları ile ilişkisi araştırılacaktır.

Çalışmamız boyunca R birimli bir halka ve aksi söylenmedikçe de γ, R nin sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizması olacaktır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, sonraki bölümde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlerle birlikte polinom halkları, matris halkaları gibi bazı özel halka sınıfları verilecektir.

Üçüncü bölümde Başer ve Kwak (2010) tarafından yapılan çalışmadan yararlanarak kuvvetli $\gamma -$terslenebilir halkalar karakterize edilecek ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenecektir.

Diğer taraftan kuvvetli $\gamma -$terslenebilir halkaların bazı genişlemelerinin hangi şartlar altında $\bar{\gamma} -$kuvvetli terslenebilir oldukları araştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan halka teorisinin bazı temel kavramları ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız bazı halka sınıfları verilecektir.

2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Tanım 2.1.1 R boştan farklı bir küme ve R üzerinde, iki ikili işlem " $+$ " toplama ve " $.$ " çarpma olsun. Eğer;

(i) $(R,+)$ bir değişmeli grup,

(ii) Her $a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$,

(iii) Her $a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$

oluyorsa, bu durumda R ye bu ikili işlemlerle birlikte bir *halka* denir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a,b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmeli halka* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* ve 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Önerme 2.1.2 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a,b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a,b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a,b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

Tanım 2.1.3 R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir.

Tanım 2.1.4 $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının hiçbir sıfır böleni yoksa bu R halkasına bir *tamlık bölgesi* denir. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda R halkasına bir *cisim* denir.

Tanım 2.1.5 R ile S iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \text{ve} \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

oluyorsa, bu durumda f ye bir *halka homomorfizması* denir. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, f birebir ise, bu durumda f ye bir *monomorfizma*, örten ise, bu durumda f ye bir *epimorfizma* denir. Eğer bir $f: R \to S$ halka homomorfizması hem birebir hem de örten ise, bu durumda f ye bir izomorfizma ve R ile S halkalarına da *izomorf* halkalar denir. Bu durum $R \cong S$ ile gösterilir. Bir $f: R \to R$ homomorfizmasına R halkasının bir *endomorfizması* denir. Bir $f: R \to R$ izomorfizmayada R halkasının bir *otomorfizması* denir.

Örnek 2.1.6 R bir halka olmak üzere

$$0: R \to R, 0(a) = 0_R \quad \text{ve} \quad I_R: R \to R, I_R(a) = a$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar R halkasının endomorfizmalarıdır. Bunlara sırasıyla R nin *sıfır endomorfizması* ve *birim endomorfizması* adı verilir.

Uyarı 2.1.7 $\gamma: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\gamma(0_R) = 0_S$ dir. Bununla beraber R ile S birimli halkalar ise $\gamma(1_R) = 1_S$ olmak zorunda değildir. Gerçekten $\gamma: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\gamma(a) = (a, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir halka homomorfizmasıdır. Fakat $\gamma(1) = (1,0) \neq (1,1)$ dir. Bununla beraber eğer $\gamma: R \to S$ örten bir halka homomorfizması ise, bu durumda $\gamma(1_R) = 1_S$ olur.

Önerme 2.1.8 R, S, T üç halka, $\gamma: R \to S$, $\beta: S \to T$ halka homomorfizmaları olmak üzere $\beta \circ \gamma: R \to T$ bileşke fonksiyonu da bir halka homomorfizmasıdır. Eğer $\gamma: R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda $\gamma \circ \gamma = \gamma^2$ hatta daha genel olarak $i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, $\gamma^i = \underbrace{\gamma \circ \gamma \circ \ldots \circ \gamma}_{i\ tane}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9 R bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

Tanım 2.1.10 Bir R halkasının $a^2 = a$ özelliğini sağlayan bir a elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.11 R bir halka olmak üzere

$$M(R) = \{m \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } mr = rm\}$$

kümesine R halkasının *merkezi* denir.

2.2 Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1 R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer S, R deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise, bu durumda S ye R nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Örnek 2.2.2 R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve R, R nin idealleridir.

R bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n$, R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, \qquad i = 1,2,\dots,n\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve B, R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B, \qquad n \in \mathbb{N}^*\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \{ab \mid b \in B\}$ olur.

Örnek 2.2.3 R bir halka ve a de R de bir merkezil eşkare eleman olmak üzere $1_R - a$ da bir merkezil eşkaredir. Ayrıca aR ve $(1_R - a)R$ kümeleri R nin idealleridir.

R bir halka ve I da R nin bir ideali olmak üzere $R/_I = \{a + I |\ a \in R\}$ kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/_I$ değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin I ya göre *bölüm halkası* denir. R değişmeli ise $R/_I$ nında değişmeli ve R birimli ise $R/_I$ da birimlidir.

2.3 Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bir R halkasını kullanarak yeni halkalar elde etmek mümkündür. Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız bu yeni halkaları vereceğiz.

Tanım 2.3.1 R birimli bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki bir formal toplama R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n |\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır. n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek;

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i$$

şeklinde tanımlanır.

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$$

şeklinde tanımlanır. c_l katsayıları daha açık bir ifadeyle;

$$c_l = a_0 b_l + a_1 b_{l-1} + a_2 b_{l-2} + \cdots + a_{l-2} b_2 + a_{l-1} b_1 + a_l b_0$$

şeklindedir. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2 R bir halka olmak üzere;

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \quad (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.3 R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olsun. $(R[x], +)$ değişmeli grubunu göz önüne alalım $R[x]$ de yeni çarpma işlemini şöyle tanımlayalım. İki polinom çarpılırken $r \in R$ için $xr = \gamma(r)x$ yazalım. Bu çarpma işlemi ile birlikte $R[x]$ bir halka olur. Bu halkaya endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* denir ve $R[x; \gamma]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4 R bir halka ve $(M, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$ fonksiyonu varsa, bu durumda M ye bir *sol* R *−modül* denir. Her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için;

(i) $r(x + y) = rx + ry$

(ii) $(r + s)x = rx + sx$

(iii) $r(sx) = (rs)x$

ve R, 1_R birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, ek olarak her $x \in M$ için $1_R x = x$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda M ye bir *birimsel sol* R *−modül* denir.

Tanım 2.3.5 R ile S iki halka ve $(M, +)$ değişmeli grubu bir sol R −modül ve bir sağ S −modül olsun. Eğer her $r \in R$, her $x \in M$ ve her $s \in S$ için $(rx)s = r(xs)$ oluyorsa, bu durumda M ye bir sol R, sağ S *−bimodül* denir.

Tanım 2.3.6 R bir halka ve M bir (R,R) $-$bimodül olsun. Bu durumda

$$T(R,M) = R \oplus M = \{(r,m)|r \in R, m \in M\}$$

kümesi

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2),\ (r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R halkasının M bimodülü ile aşikâr genişlemesi denir. Bu halka $\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R,\ m \in M\right\}$ matris halkasına izomorftur.

2.4 Bazı Halka Sınıfları

Şimdi de, daha önceden çalışılan bir takım halka sınıflarını verelim.

Tanım 2.4.1 Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya buna denk olarak; $b \in R$ için, $b^2 = 0 \implies b = 0$ oluyorsa, bu durumda R ye bir *inmiş* (*reduced*) *halka* denir. Her sıfır bölensiz halka bir inmiş halkadır. Örneğin $\bar{0} \neq \bar{3} \in \mathbb{Z}_9$ için $(\bar{3})^2 = \bar{3}\bar{3} = \bar{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_9$ halkası inmiş bir halka değildir. Diğer taraftan $O \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olduğundan $M_2(\mathbb{Z})$ halkası bir inmiş halka değildir. Tüm cisimlerin inmiş halka olduğu açıktır.

R bir değişmeli halka olmak üzere; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması açık olarak $ba = 0$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan değişmeli olmadığı halde bu özelliğe sahip halkalar vardır.

Tanım 2.4.2 R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için, $ab = 0 \implies ba = 0$ sağlanıyorsa, bu durumda R halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

Lemma 2.4.3 R bir inmiş halka ise bu durumda R terslenebilirdir.

İspat. R bir inmiş halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Buda bize R halkasının terslenebilir olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.4.4 R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için, $ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı değişmeli* (*semicommitative*) olarak adlandırılır. Bir R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter şart koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ $(l_R(a))$ kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı değişmelidir. Gerçekten R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece her $r \in R$ için $bar = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.5 R bir halka olmak üzere $a \in R$ için, $aRa = 0 \Longrightarrow a = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.6 R bir halka ve

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere, $p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$ oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır. Her inmiş halkanın bir Armendariz halka olduğu iyi bilinen bir gerçektir.

Tanım 2.4.7 R bir halka ve $\gamma: R \rightarrow R$ bir endomorfizma olsun. $a \in R$ için, $a\gamma(a) = 0 \ \Longrightarrow a = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkasına γ *−katı* (α *−rigid*) halka denir.

R bir γ −katı halka olmak üzere, $\gamma(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan R nin her S alt halkası da γ −katı bir halkadır. Diğer taraftan I_R, R nin birim endomorfizması olmak üzere; R nin γ −katı olması için gerek ve yeter koşul R nin inmiş bir halka olmasıdır.

Lemma 2.4.8 R bir γ −katı halka olsun. Bu durumda γ bir monomorfizmadır.

İspat. $a \in R$ için $\gamma(a) = 0$ olsun. Buradan $a\gamma(a) = a0 = 0$ olup R, γ −katı olduğundan $a = 0$ bulunurki bu da γ nın bir monomorfizma olduğunu gösterir. ■

R inmiş olmayan bir halka olmak üzere R nin I_R birim endomorfizması bir monomorfizmadır. Fakat R, I_R −katı değildir. Yani yukarıdaki Lemma ‘nın tersi doğru değildir.

Lemma 2.4.9 R bir halka ve $\gamma: R \to R$ bir endomorfizma olsun. Eğer R, γ −katı ise, bu durumda R bir inmiş halkadır.

İspat. R, γ − katı bir halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$a\gamma(a)\alpha\big(a\alpha(a)\big) = a\gamma(a^2)\gamma^2(a) = a\gamma(0)\gamma^2(a) = a0\gamma^2(a) = 0$$

olup, R, γ −katı olduğundan $a\gamma(a) = 0$ ve tekrar R, γ −katı olduğundan $a = 0$ elde edilir. Yani R bir inmiş halkadır. ■

Lemma 2.4.10 Her inmiş halka yarı asaldır.

İspat R inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve R inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da R nin yarı asal olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.4.11 R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i\gamma^i(b_j) = 0 \quad (0 \le i \le n, 0 \le j \le m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına γ −*skew Armendariz* halka denir.

Tanım 2.4.12 R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\gamma]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına γ −*Armendariz* halka denir.

Aşağıdaki verilen önermedeki gerektirmeler Hong vd. (2003) tarafından verilmiştir.

Önerme 2.3.13 R bir halka ve γ; R nin bir endomorfizması olsun.

(i) Eğer R, γ −katı ise, bu durumda R, γ −Armendarizdir.

(ii) Eğer R, γ −Armendariz ise, bu durumda R, γ −skew Armendarizdir.

(iii) R nin γ −katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\gamma]$ halkasının inmiş olmasıdır.

Son olarak yukarıda tanıtılan halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Bu gerektirmelerin hiçbirinin tersi doğru değildir.

R, γ −katı $\Longrightarrow$ R inmiş $\Longrightarrow$ R terslenebilir $\Longrightarrow$ R yarı değişmelidir.

3. KUVVETLİ TERSLENEBİLİR HALKALAR

Bu bölümde terslenebilir halkaların bir genelleştirilmesi olan kuvvetli terslenebilir halkalar ve bu halka sınıflarının bir takım özellikleri verilecektir. Hatırlanacağı üzere, R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için $ab = 0 \implies ba = 0$ koşulu sağlanıyor ise, bu durumda R halkasına terslenebilir bir halka denir. Son yıllarda terslenebilir halkaların birçok genelleştirilmesi yapılmıştır. Bunlardan bir tanesi de Başer ve Kwak (2009) tarafından yapılan çalışmadır. Bu tanıma göre γ bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere, $a, b \in R$ için $ab = 0 \Rightarrow b\gamma(a) = 0 \quad (\gamma(b)a = 0)$ koşulu sağlanıyor ise, bu durumda R halkasına sağ (sol) $\gamma -$terslenebilir olarak adlandırılmıştır. Eğer R halkası hem sağ ve hem de sol $\gamma -$terslenebilir ise bu durumda $\gamma -$terslenebilir olarak adlandırılır. Şimdi bir halkanın sağ $\gamma -$terslenebilir olma koşulunun karşıtını göz önüne alalım. $a, b \in R$ için

$$a\gamma(b) = 0 \Rightarrow ba = 0 \qquad (*)$$

olsun. Aşağıdaki örnek $(*)$ koşulunu sağlamayan bir sağ $\gamma -$terslenebilir halkanın var olduğunu göstermektedir. Bu bölüm için temel referansımız Başer ve Kwak (2010) tarafından yapılan çalışma olacaktır. Bu bölümdeki tüm sonuçlar ve örneklerin çoğu adı geçen çalışmadan alınmıştır.

Örnek 3.1 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ halkasını ve bu halkanın

$$\gamma: R \to R, \qquad \gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

endomorfizmasını göz önüne alalım. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olmasına rağmen

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan R halkası terslenebilir değildir. Şimdi R halkasının sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterelim. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$ için $AB = O$ olsun. Bu durumda

$$O = AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

olup $aa' = 0$, $ab' + bc' = 0$ ve $cc' = 0$ elde edilir. Diğer taraftan

$$B\gamma(A) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olduğundan R halkası sağ γ −terslenebilirdir. Diğer taraftan R halkası $(*)$ koşulunu sağlamaz. Gerçekten $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$A\gamma(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olmasına rağmen

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

dır.

Önerme 3.2 R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda

(i) R nin $(*)$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul R nin sağ γ −terslenebilir halka ve γ nın bir monomorfizma olmasıdır.

(ii) R nin γ −katı halka olması için gerek ve yeter koşul R nin $(*)$ koşulunu sağlayan bir yarı asal halka olmasıdır.

İspat (i): R halkası $(*)$ koşulunu sağlasın. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $\gamma(ab) = \gamma(0)$ olup, buradan $\gamma(a)\gamma(b) = 0$ elde ederiz. R halkası $(*)$ koşulunu sağladığından $b\gamma(a) = 0$ olur. Yani R bir sağ γ −terslenebilir halkadır. Şimdi γ nın bire-bir olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $\gamma(a) = \gamma(b)$ olsun. Buradan $\gamma(a) - \gamma(b) = 0$ olup böylece $\gamma(a - b) = 0$ olur. R halkası birimli olduğundan $1_R\gamma(a - b) = 0$ ve $(*)$ koşulundan da $(a - b)1_R = 0$ olur ki, buradan $a = b$ elde ederiz. Bu da bize γ nın bire bir olduğunu gösterir. R sağ γ −terslenebilir halka ve γ monomorfizma olmak üzere $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olsun. R sağ γ −terslenebilir olduğundan $\gamma(b)\gamma(a) = 0$ olup, buradan $\gamma(ba) = 0$ ve γ bire bir olduğundan $ba = 0$ olur ki, bu da bize R nin $(*)$ koşulunu sağladığını gösterir.

(ii): R,γ −katı halka olsun. $a,b\in R$ için $a\gamma(b)=0$ olsun.

$$\gamma(ba)\gamma\big(\gamma(ba)\big)=\gamma(b)\gamma(a)\gamma\big(\gamma(ba)\big)=\gamma(b)\gamma(a)\gamma\big(\gamma(b)\gamma(a)\big)$$
$$=\gamma(b)\gamma\big(a\gamma(b)\big)\gamma\big(\gamma(a)\big)=\gamma(b)\gamma(0)\gamma\big(\gamma(a)\big)=\gamma(b)0\gamma\big(\gamma(a)\big)=0$$

olup R,γ −katı olduğundan $\gamma(ba)=0$ olur. R,γ −katı halka olduğundan γ bire birdir. Böylece $ba=0$ elde edilir ki, bu da bize R nin $(*)$ koşulunu sağladığını gösterir. Diğer taraftan her γ −katı halkanın bir inmiş halka olduğu iyi bilenmektedir. Şimdi R nin yarı asal olduğunu gösterelim. Bunun için $a\in R$ olmak üzere $aRa=0$ olsun. Bu durumda $1\in R$ içinde $a1a=0$ yani $a^2=0$ olacağından ve R bir inmiş halka olduğundan $a=0$ elde edilir ki, bu da bize R nin bir yarı asal halka olduğunu gösterir. Şimdi R yarı asal ve $(*)$ koşulunu sağlayan bir halka olsun. $a\in R$ için $a\gamma(a)=0$ olsun. Herhangi bir $r\in R$ için $a\gamma(a)\gamma(r)=0\gamma(r)=0$ olup buradan $a\gamma(ar)=0$ elde edilir. R, $(*)$ koşulunu sağladığından $ara=0$ yani $aRa=0$ olur. Diğer taraftan R yarı asal olduğundan $a=0$ olur. Buda bize R nin bir γ −katı halka olduğunu gösterir. ■

Sonuç 3.3 Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin yarı asal ve terslenebilir halka olmasıdır.

İspat Önerme 3.2 de $\gamma=I_R: R\to R$ özdeşlik homomorfizması alınırsa ispat açıktır. ■

Aşağıdaki örnekten; Önerme 3.2 (ii) deki "R nin yarı asal" ve "R nin $(*)$ koşulunu sağlar" olma koşullarının gereksiz olmadığını görürüz.

Örnek 3.4 (a): $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}_4\right\}$ halkasını ve bu halkanın

$$\gamma: R\to R, \gamma\left(\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & -b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

otomorfizmasını göz önüne alalım. $O\neq A=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R$ için

$$A\gamma(A)=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\gamma\left(\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$$

olduğundan R halkası γ −katı değildir. Diğer taraftan da her $\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\in R$ için

$$A\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$$

olduğundan R halkası yarı asal değildir.

Fakat R halkası sağ γ −terslenebilirdir. Şimdi bunu görelim.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \text{ için } AB = O$$

olsun. Bu durumda

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} = O$$

eşitliğinden $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ elde edilir.

$$B\gamma(A) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & -cb+da \\ 0 & ca \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac & ad+ad \\ 0 & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 2ad \\ 0 & ac \end{pmatrix}$$

$ac = 0$ eşitliğinin sağlanmasından üç durum elde edilir.

1. Durum: $a = 0$ olabilir. Bu durumda $ad = 0$ olacağından

$$B\gamma(A) = \begin{pmatrix} ac & 2ad \\ 0 & ac \end{pmatrix} = O$$

   olur.

2. Durum: $c = 0$ olabilir. Bu durumda $ad + bc = 0$ eşitliğinden $ad = 0$ olur. Böylece $B\gamma(A) = O$ olur.

3. Durum: $a = c = 2$ olabilir. Bu durumda tekrar

$$B\gamma(A) = \begin{pmatrix} ac & 2ad \\ 0 & ac \end{pmatrix} = O$$

   elde edilir. Böylece R halkası sağ γ −terslenebilirdir.

Diğer taraftan γ bire-bir olduğundan Önerme 3.2 (i) gereğince R halkası $(*)$ koşulunu sağlar.

(b): F bir cisim olmak üzere $R = F[x]$ olsun. $\gamma: R \to R$, $\gamma(p(x)) = p(0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon açık olarak R nin bir endomorfizmasıdır. R değişmeli bir tamlık bölgesi olduğundan R halkası bir yarı asal halkadır. γ bire-bir olmadığından Önerme 3.2 (i) gereğince R halkası $(*)$ koşulunu sağlamaz. $0 \neq p(x) = x + x^2 \in R = F[x]$ için $p(x)\gamma(p(x)) = (x + x^2)0 = 0$ olduğundan R halkası γ −katı değildir. Önerme 3.2 yi göz önünde bulundurarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.5 R bir halka ve γ da R nin bir endomorfizması olsun. Eğer $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ ($\gamma(a)b = 0$) olması $ba = 0$ olmasını gerektiriyor ise, bu durumda γ endomorfizmasına *kuvvetli sağ (sol) terslenebilirdir* denir. Eğer bir R halkasının bir kuvvetli sağ (sol) terslenebilir endomorfizması var ise, bu durumda R halkasına *kuvvetli sağ (sol)* γ *−terslenebilir halka* denir.

Uyarı 3.6 (1) $\gamma: R \to R$ bir halka homomorfizması olsun.

(i) S, R nin bir alt halkası olmak üzere eğer $\gamma(S) \subset S$ oluyorsa, bu durumda $\gamma|_S$, S halkasının bir endomorfizması olur. Eğer R kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir bir halka ise, bu durumda S alt halkası da kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilirdir.

(ii) Eğer R halkası terslenebilir ise, bu durumda R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir olması R nin kuvvetli sol γ −terslenebilir olmasına denktir. Gerçekten; R terslenebilir ve kuvvetli sağ γ −terslenebilir olsun. Şimdi R nin kuvvetli sol γ −terslenebilir olduğunu görelim. $a, b \in R$ için $\gamma(a)b = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $b\gamma(a) = 0$ ve R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $ab = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. R nin kuvvetli sol γ −terslenebilir olmasının R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olmasını gerektirdiği de benzer olarak görülür.

(iii) R bir γ −katı halka olsun. Bu durumda R terslenebilir bir halkadır. Önerme 3.2 (ii) den R kuvvetli sağ γ −terslenebilirdir. R terslenebilir olduğundan R kuvvetli sol γ −terslenebilirdir. Böylece R halkası kuvvetli γ −terslenebilirdir. Her kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir halka sağ (sol) γ −terslenebilirdir. Şimdi bunu görelim kuvvetli sağ γ −terslenebilir ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $\gamma(ab) = \gamma(0) = 0$ olup $\gamma(a)\gamma(b) = 0$ elde edilir. R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $b\gamma(a) = 0$ olur. Sonuç olarak R sağ γ −terslenebilirdir. Ayrıca Örnek 3.1 den her sağ γ −terslenebilir halkanın kuvvetli sağ γ −terslenebilir olmadığını görüyoruz.

(iv) I_R, R nin birim endomorfizması olmak üzere R nin terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul R nin kuvvetli sağ (sol) I_R −terslenebilir olmasıdır.

(v) Eğer $\gamma^2 = \gamma \circ \gamma = I_R$ ise, bu durumda R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul kuvvetli sol γ −terslenebilir olmasıdır. Şimdi bunu görelim. $\gamma^2 = I_R$ ve R kuvvetli sol γ −terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olsun. Buradan $\gamma\big(a\gamma(b)\big) = \gamma(0) = 0$ ve böylece $\gamma(a)b = 0$ olur. R sol kuvvetli γ −terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Bu da bize R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir. Diğer gerektirmede benzer olarak görülür.

(2) γ bir R halkasının bir endomorfizması ve β da bir S halkasının bir endomorfizması olmak üzere

$$(\gamma, \beta): R \oplus S \to R \oplus S, \qquad (\gamma, \beta)(r, s) = \big(\gamma(r), \beta(s)\big)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda açık olarak $R \oplus S$ halkasının bir endomorfizmasıdır. Diğer taraftan kolayca görülebilir ki $R \oplus S$ halkasının kuvvetli sağ (sol) (γ, β) −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R halkasının kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir ve S halkasının kuvvetli sağ (sol) β −terslenebilir olmasıdır.

R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. Bu durumda

$$l_R(S) = \{a \in R \mid aS = 0\}$$
$$r_R(S) = \{a \in R \mid Sa = 0\}$$

kümelerine sırayla R içinde S nin *sol ve sağ sıfırlayanı* denir.

Önerme 3.7 R bir halka ve γ da R nin bir endomorfizması olmak üzere aşağıdaki durumlar denktir.

(1) R kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilirdir.

(2) R nin her bir S altkümesi için $l_R\big(\gamma(S)\big) = r_R(S)$ $\big(r_R\big(\gamma(S)\big) = l_R(S)\big)$ dir.

(3) Her bir $a \in R$ için $I_R\big(\gamma(a)\big) = r_R(a)$ $\Big(r_R\big(\gamma(a)\big) = l_R(a)\Big)$ dır.

(4) R nin boştan farklı herhangi iki A ve B alt kümeleri için $A\gamma(B) = O$ $(\gamma(A)B = O$) olması için gerek ve yeter koşul $BA = O$ olmasıdır.

İspat (1) $\Longrightarrow$ (2): R kuvvetli sağ γ −terslenebilir ve $S \subset R$ olsun. $a \in l_R\big(\gamma(S)\big)$ olsun. Bu durumda $a\gamma(S) = 0$ olup buradan her $s \in S$ için $a\gamma(s) = 0$ olur. R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $sa = 0$ ve böylece $Sa = 0$ olurki buradan $a \in r_a(S)$ olur. Şimdi $b \in r_R(S)$ olsun. Bu durumda $Sb = 0$ ve böylece her $s \in S$ için $sb = 0$ olur. Buradan $\gamma(sb) = \gamma(s)\gamma(b) = \gamma(0)$ elde edilir. R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $b\gamma(s) = 0$ ve buradan $b\alpha(S) = 0$ elde edilir. Böylece $b \in l_R(\gamma(S))$ olur. Sonuç olarak $l(\gamma(S)) = r_R(S)$ bulunur.

$(2) \Longrightarrow (3)$: (2) sağlansın. Bu durumda özel olarak $S = \{a\}$ içinde (2) sağlanacağından (3) sağlanmış olur.

$(3) \Longrightarrow (4)$: (3) sağlansın. A ve B, R nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. Bu durumda herhangi $a \in A$ ve $b \in B$ için $A\gamma(B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a\gamma(b) = 0$ olmasıdır. Böylece $a \in l_R(\gamma(b)) = r_R(b)$ olması için gerek ve yeter koşul $ba = 0$ olur. Bunun olması için gerek ve yeter koşul da $BA = O$ olmasıdır.

$(4) \Longrightarrow (1)$: (4) sağlansın ve $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olsun. (4) de $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ alınırsa $A\gamma(B) = 0$ olur. (4) den $BA = 0$ ve buradan $ba = 0$ elde edilirki buda bize R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir. Kuvvetli sol γ −terslenebilir durum içinde ispatlar benzer olarak yapılabilir. ■

Eğer R halkası tek yanlı kuvvetli I_R −terslenebilir ise, bu durumda R halkası terslenebilirdir. Açık olarak, eğer R halkası kuvvetli sağ ya da kuvvetli sol I_R −terslenebilir ise, bu durumda R halkası terslenebilirdir.

Şimdi R bir tamlık bölgesi ve $\gamma: R \to R$ bir monomorfizma olsun. Eğer $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ ise, R bir tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ veya $\gamma(b) = 0$ dır. γ bir monomorfizma olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ dır. Böylece $ba = 0$ olurki bu da bize R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir. Benzer şekilde R halkasının kuvvetli sol γ −terslenebilir olduğu gösterilebilir.

Aşağıdaki örnek bize kuvvetli sağ γ −terslenebilir olmadığı halde değişmeli inmiş halkaların var olduğunu gösterir.

Örnek 3.8 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkasını göz önüne alalım. Bu durumda açık olarak R halkası değişmeli ve inmiştir. $\gamma: R \to R$, $\gamma(u, v) = (v, u)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon açık olarak R nin bir otomorfizmasıdır. $(1,0) \in R$ için $(1,0)\gamma(1,0) = (0,0)$ olmasına rağmen $(1,0)(1,0) = (1,0) \neq (0,0)$ olduğundan R halkası kuvvetli sağ γ −terslenebilir değildir.

Önerme 3.9 Terslenebilir bir R halkası ve R nin bir γ endomorfizması için aşağıdaki durumlar denktir.

(1) R kuvvetli $\gamma -$terslenebilirdir.

(2) R kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilirdir.

(3) $a, b \in R$ ve pozitif bir n tamsayısı için eğer $a\gamma^n(b) = 0$ veya $\gamma^n(a)b = 0$ ise, bu durumda $ab = 0$ dır. Tersine $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması herhangi bir pozitif m sayısı için $a\gamma^m(b) = 0$ ve $\gamma^m(a)b = 0$ olmasını gerektirir.

(4) $a, b \in R$ için $ab = 0 \Leftrightarrow a\gamma(b) = 0$ dır.

İspat $(1) \Rightarrow (2)$: Kuvvetli $\gamma -$terslenebilir halka tanımından ispat açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$: (3) sağlansın. $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olsun. Bu durumda (3) de $n = 1$ alınırsa $ab = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Bu da bize R nin kuvvetli $\gamma -$terslenebilir olduğunu gösterir.

$(3) \Rightarrow (4)$: $m = n = 1$ alınırsa ispat açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$: R kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir olsun. $a, b \in R$ ve bir n pozitif tamsayısı için $a\gamma^n(b) = 0$ olsun. Bu durumda $a\gamma^{n-1}(b) = 0$ olup R kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir olduğundan $\gamma^{n-1}(b)a = 0$ olur. R, $\gamma -$terslenebilir olduğundan $a\gamma^{n-1}(b) = 0$ olur. Yukarıdaki işlemler tekrarlanarak

$$a\gamma^{n-2}(b) = a\gamma^{n-3}(b) = \cdots = ba = ab = 0$$

elde edilir. Benzer olarak $\gamma^n(a)b = 0$ den $ab = 0$ elde edilir. Şimdi $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece

$$0 = \gamma(0) = \gamma(ba) = \gamma(b)\gamma(a)$$

olur. R kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir olduğundan $a\gamma(b) = 0$ olur. Bu durum tekrarlanarak $a\gamma^2(b) = 0$ olduğu görülür. Böylece herhangi bir m pozitif tamsayısı için $a\gamma^m(b) = 0$ elde edilir.

$(4) \Rightarrow (1)$: İspatı açıktır. ■

R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olmak üzere eğer R halkası $\gamma -$katı ise, bu durumda R halkası $\gamma -$skew Armenderizdir. Başer vd. (2009, Theorem 2.9-i) ne göre her inmiş ve sağ $\gamma -$terslenebilir halka $\gamma -$skew Armenderiz dir. Böylece inmiş ve kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir halkalar $\gamma -$skew Armenderizdir. Üstelik her yarı asal ve kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir halka $\gamma -$katıdır. Bu yüzden R terslenebilir ve kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir olduğunda R nin $\gamma -$skew Armenderiz halka olup olmadığını sorgulayabiliriz. Bununla beraber, Örnek 3.4 (a) bu olasılığı ortadan kaldırır.

Örnek 3.4 (a) daki $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_4\right\}$ halkasını ve bu halkanın

$$\gamma: R \to R, \qquad \gamma\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

otomorfizmasını göz önüne alalım. İlk olarak R nin terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ için $AB = O$ olsun. Yani

$$O = AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}$$

olsun. Buradan $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ olur. Böylece $ca = 0$ ve $cb + da = 0$ olur. Sonuç olarak

$$BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{pmatrix} = O$$

elde edilir ki bu da bize R halkasının terslenebilir olduğunu gösterir. Şimdi de R halkasının kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere $A\gamma(B) = O$ olsun. Böylece

$$O = A\gamma(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & -ad + bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}$$

olup $ac = 0$ ve $-ad + bc = 0$ elde edilir. Diğer taraftan

$$BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2ad \\ 0 & a \end{pmatrix} = O$$

elde edilir. Bu da bize R halkasının kuvvetli sağ $\gamma -$terslenebilir olduğunu gösterir. Benzer olarak R halkasının kuvvetli sol $\gamma -$terslenebilir olduğu gösterilir. Şimdi $p(x) = q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x \in R[x;\gamma]$ için

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x^2 = O \end{aligned}$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \gamma \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan R halkası γ −skew Armenderiz değildir.

Teorem 3.10 R bir halka γ, R nin bir endomorfizması ve R, γ −skew Armenderiz halka olsun. Bu durumda R nin terslenebilir ve kuvvetli γ −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\gamma]$ halkasının terslenebilir olmasıdır.

İspat R, γ −skew Armendariz halka olsun. Kabul edelim ki R halkası terslenebilir ve kuvvetli γ −terslenebilir olsun. $R[x;\gamma]$ halkasının terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \,, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere $p(x)q(x) = 0$ olsun. R, γ −skew Armenderiz halka olduğundan her $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_i\gamma^i(b_j) = 0$ dır. Önerme 3.9 dan $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $b_j a_i = 0$ ve böylece $b_j\gamma^j(a_i) = 0$ olur. Buradan $q(x)p(x) = 0$ olur ki buda bize $R[x;\gamma]$ nın terslenebilir olduğunu gösterir. Tersine, $R[x;\gamma]$ nın terslenebilir olduğunu kabul edelim. Açık olarak R halkası terslenebilirdir. Şimdi R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterelim.

Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $a\gamma(b) = 0$ olsun. $p(x) = ax$, $q(x) = b \in R[x;\gamma]$ diyelim. $p(x)q(x) = axb = a\gamma(b)x = 0x = 0$ olur. $R[x;\gamma]$ terslenebilir olduğundan $q(x)p(x) = 0$ dır. Buradan $bax = 0$ olur ki, böylece $ba = 0$ elde ederiz. Buda bize R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir. Benzer olarak R nin kuvvetli sol γ −terslenebilir olduğu gösterilir. ■

Sonuç 3.11 R bir Armendariz halka olmak üzere R nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ halkasının terslenebilir olmasıdır.

İspat Önerme 3.10 da $\gamma = I_R$ alınır. ■

4. KUVVETLİ TERSLENEBİLİR HALKALARIN GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde bir R halkası ve bu halkanın bir γ endomorfizması verildiğinde R halkasının kuvvetli γ −terslenebilirlik özelliğinin R nin hangi genişlemelerine hangi şartlar altında taşınabileceğini araştıracağız.

Bu bölümde vereceğimiz tüm sonuçlar ve örnekler Başer ve Kwak (2010) dan alınmıştır. Bu bölüme çalışmamız boyunca kullanacağımız aşağıdaki lemma ile başlıyoruz.

Lemma 4.1 R bir halka, γ, R nin bir endomorfizması ve R halkasının birimi 1_R olsun. Eğer R kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir ise, bu durumda $\gamma(1_R) = 1_R$ dir. Ayrıca her $e^2 = e \in R$ için $\gamma(e) = e$ dir.

İspat R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olsun.

$$[1_R - \gamma(1_R)]\gamma(1_R) = 1_R\gamma(1_R) - \gamma(1_R)\gamma(1_R) = \gamma(1_R) - \gamma(1_R1_R) = \gamma(1_R) - \gamma(1_R) = 0$$

olup, R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $1_R[1_R - \gamma(1_R)] = 0$ olur. Buradan $\gamma(1_R) = 1_R$ elde edilir. Benzer olarak R halkasının kuvvetli sol γ −terslenebilir olması durumunda da $\gamma(1_R) = 1_R$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $(1-e)e = e - e^2 = e - e = 0$ ve $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$ olur. Böylece $\gamma\big((1-e)e\big) = \gamma(0) = 0$ ve $\gamma\big(e(1-e)\big) = \gamma(0) = 0$ olup, buradan $\gamma(1-e)\gamma(e) = 0$ ve $\gamma(e)\gamma(1-e) = 0$ olur. R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $e\gamma(1-e) = 0$ ve $(1-e)\gamma(e) = 0$ olur. Böylece $e[\gamma(1) - \gamma(e)] = 0$ ve $e\gamma(e) - \gamma(e) = 0$ ya da $e - e\gamma(e) = 0$ ve $e\gamma(e) = \gamma(e)$ olur. Sonuç olarak $\gamma(e) = e$ elde edilir. Benzer olarak R halkasının kuvvetli sol γ −terslenebilir olduğu durumda da $\gamma(e) = e$ olduğu gösterilir. ■

Yukarıdaki lemmada R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir olma şartı kaldırılamaz. Bunu örnekte aşağıdaki görüyoruz.

Örnek 4.2 $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ halkasının $\gamma: R \to R,\ \ \gamma\big((u,v)\big) = (u,0)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir değildir. Gerçekten; $a = (0,2),\ b = (1,1) \in R$ için

$$a\gamma(b) = (0,2)\gamma\big((1,1)\big) = (0,2)(1,0) = (0,0)$$

olmasına rağmen $ba = (1,1)(0,2) = (0,2) \neq (0,0)$ dır. Diğer taraftan $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ halkasının birimi $(1,1)$ olup $\gamma\big((1,1)\big) = (1,0) \neq (1,1)$ olur.

Örnek 4.3 $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{Z}_2\right\}$ halkasını göz önüne alalım. Bu durumda R halkasının $e^2 = e$ koşulunu sağlayan tüm elemanları (eş kare elemanları) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. R halkasının

$$\gamma: R \to R, \qquad \gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\gamma(e) = \gamma\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

olduğundan R halkası kuvvetli sağ γ −terslenebilir değildir.

Önerme 4.4 R bir halka ve $\gamma: R \to R$, R nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda

(i) S bir halka ve $\beta: R \to S$ bir halka izomorfizması olsun. Bu durumda R halkasının kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul S halkasının kuvvetli sağ (sol) $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olmasıdır.

(ii) $e^2 = e \in M(R)$ $(M(R)$, R halkasının merkezi$)$ olsun. Bu durumda eR ve $(1-e)R$ halkalarının kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R halkasının kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilir olmasıdır.

İspat (i): γ, R halkasının bir endomorfizması ve $\beta: R \to S$ bir halka izomorfizması olmak üzere, açık olarak $\beta\gamma\beta^{-1}$ fonksiyonuda S halkasının bir endomorfizmasıdır. Şimdi R halkası kuvvetli sağ γ −terslenebilir olsun. S halkasının kuvvetli sağ $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $s_1, s_2 \in S$ için $s_1(\beta\gamma\beta^{-1})(s_2) = 0_s$ olsun. β bir izomorfizma olduğundan örtendir. Böylece $\beta(r_1) = s_1$ ve $\beta(r_2) = s_2$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Böylece

$$\beta(0_R) = 0_s = s_1(\beta\gamma\beta^{-1})(s_2) = \beta(r_1)(\beta\gamma\beta^{-1})\big(\beta(r_2)\big) = \beta(r_1)\beta\big(\gamma(r_2)\big) = \beta\big(r_1\gamma(r_2)\big)$$

olup β bire-bir olduğundan $r_1\gamma(r_2) = 0_R$ olur. R halkası kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $r_1r_2 = 0_R$ olur. Buradan $\beta(r_2r_1) = \beta(0_R) = 0_s$ ve böylece $\beta(r_2)\beta(r_1) = 0_s$ ya da $s_2s_1 = 0_s$ elde edilir ki bu da bize S halkasının kuvvetli sağ $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olduğunu gösterir. R halkasının kuvvetli sol γ −terslenebilir olması durumunda S halkasının kuvvetli sol $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olduğu da benzer olarak gösterilir. Şimdi tersine S halkası kuvvetli sağ $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olsun. R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0_R$ olsun. Bu durumda $\beta\big(a\gamma(b)\big) = \beta(0_R) = 0_s$ olup, böylece $\beta(a)(\beta\gamma\beta^{-1})\big(\beta(b)\big) = 0_s$ olur. Fakat S halkası kuvvetli sağ $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olduğundan $\beta(a)(\beta\gamma\beta^{-1})\big(\beta(b)\big) = 0_s$ olur. Fakat S halkası $\beta\gamma\beta^{-1}$ −terslenebilir olduğundan $\beta(b)\beta(a) = 0_s$ olur. Buradan $\beta(ba) = \beta(0_R)$ olup β bire-bir olduğundan $ba = 0_R$ elde edilir ki bu da bize R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir.

(ii): R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olsun. Bu durumda $e^2 = e \in R$ bir merkezi eşkare eleman olmak üzere Lemma 4.1 den dolayı $\gamma(e) = e$ olur. Böylece $er \in eR$ için $\gamma(er) = \gamma(e)\gamma(r) = e\gamma(r) \in eR$ olup $\gamma(eR) \subset eR$ elde edilir. Yani γ yı eR alt halkasının bir endomorfizması gibi göz önüne alabiliriz. Aynı durum $(1_R - e)R$ içinde geçerlidir. Sonuç olarak eR ve $(1_R - e)R$ halkaları kuvvetli sağ γ −terslenebilir halkalardır. Şimdi tersine olarak eR ve $(1_R - e)R$ halkaları kuvvetli sağ γ −terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olduğunu kabul edelim. $ea, eb \in eR$ için

$$ea\gamma(eb) = ea\gamma(e)\gamma(b) = eae\gamma(b) = e^2a\gamma(b) = e0 = 0$$

olup eR kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $ebea = 0$ olur. Buradan $eba = 0$ elde ederiz. Diğer taraftan $(1_R - e)a\,, (1_R - e)b \in (1_R - e)R$ için

$$\begin{aligned}(1_R - e)a\gamma\big((1_R - e)b\big) &= (1_R - e)a\gamma(1_R - e)\gamma(b) = (1_R - e)a(1_R - e)\gamma(b)\\ &= (1_R - e)^2a\gamma(b) = (1_R - e)a\gamma(b) = (1_R - e)0 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. $(1_R - e)R$ kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $(1_R - e)b(1_R - e)a = 0$ olur. Ya da $(1_R - e)ba = 0$ olur. Sonuç olarak $ba = eba + (1_R - e)ba = 0 + 0 = 0$ olur ki, bu da bize R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir. ■

R bir halka, γ R halkasının bir endomorfizması ve R nin aşikâr genişlemesi $T(R,R)$ olsun. Bu durumda

$$\bar{\gamma}: T(R,R) \to T(R,R)\,, \qquad \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \gamma(a) & \gamma(b) \\ 0 & \gamma(a) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $T(R,R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır. Gerçekten; Her $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) &= \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \gamma(a+c) & \gamma(b+d) \\ 0 & \gamma(a+c) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma(a)+\gamma(c) & \gamma(b)+\gamma(d) \\ 0 & \gamma(a)+\gamma(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(a) & \gamma(b) \\ 0 & \gamma(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(c) & \gamma(d) \\ 0 & \gamma(c) \end{pmatrix} \\
&= \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) + \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) &= \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \gamma(ac) & \gamma(ad+bc) \\ 0 & \gamma(ac) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma(a)\gamma(c) & \gamma(b)\gamma(d)+\gamma(b)\gamma(c) \\ 0 & \gamma(a)\gamma(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(a) & \gamma(b) \\ 0 & \gamma(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma(c) & \gamma(d) \\ 0 & \gamma(c) \end{pmatrix} \\
&= \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

olur.

Önerme 4.5 R bir inmiş halka ve γ , R halkasının bir endomorfizması olsun. Bu durumda R halkasının kuvvetli γ −terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $T(R,R)$ aşikâr genişlemesinin bir kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir halka olmasıdır.

İspat R bir inmiş halka ve kuvvetli γ −terslenebilir olsun. Ayrıca

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için $A\bar{\gamma}(B) = O$ olsun. Bu durumda

$$O = A\bar{\gamma}(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma(c) & \gamma(d) \\ 0 & \gamma(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma(c) & a\gamma(d)+b\gamma(c) \\ 0 & a\gamma(c) \end{pmatrix}$$

den $a\gamma(c) = 0$ ve $a\gamma(d) + b\gamma(c) = 0$ elde edilir. R halkası kuvvetli γ −terslenebilir olduğundan $ca = 0$ olur. $a\gamma(d) + b\gamma(c) = 0$ eşitliğini soldan c ile çarparsak $c\big(a\gamma(d) + b\gamma(c)\big) = c0 = 0$ olup, buradan $ca\gamma(d) + cb\gamma(c) = 0$ olur.

$ca = 0$ olduğundan $(cb)\gamma(c) = 0$ elde edilir. R halkası kuvvetli $\gamma -$terslenebilir olduğundan $c(cb) = 0$ yani $c^2b = 0$ olur. R inmiş olduğundan $cb = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan R terslenebilirdir. Böylece $cb = 0$ olmasından $bc = 0$ olduğunu elde ederiz. Önerme 3.9 gereğince $b\gamma(c) = 0$ elde ederiz. $a\gamma(d) + b\gamma(c) = 0$ eşitliğinde $b\gamma(c) = 0$ yazılırsa $a\gamma(d) = 0$ elde edilir. R halkası kuvvetli $\gamma -$terslenebilir olduğundan $da = 0$ bulur. Sonuç olarak

$$BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 + 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

elde ederiz. Buda bize $T(R, R)$ halkasının kuvvetli $\bar{\gamma} -$terslenebilir olduğunu gösterir. Tersine olarak $T(R, R)$ halkasının kuvvetli $\bar{\gamma} -$terslenebilir olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olsun. $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in T(R, R)$ için

$$C\bar{\gamma}(D) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma(b) & \gamma(0) \\ 0 & \gamma(b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma(b) & 0 \\ 0 & \gamma(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\gamma(b) & a0 + 0\gamma(b) \\ 0 & a\gamma(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma(b) & 0 \\ 0 & a\gamma(b) \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

olup $T(R, R)$ halkası kuvvetli terslenebilir olduğundan $DC = O$ olur. Yani $O = DC = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{pmatrix}$ den $ba = 0$ elde ederiz ki bu da bize R halkasının kuvvetli $\gamma -$terslenebilir olduğunu gösterir. ■

Sonuç 4.6 Eğer R bir inmiş halka ise bu durumda $T(R, R)$ bir terslenebilir halkadır.

İspat Yukarıdaki önermede R nin γ endomorfizması yerine birim endomorfizması alınırsa ispat açıktır. ■

Önerme 4.5 deki "R nin inmiş halka olması" koşulu fazladan değildir. Bunu aşağıdaki örnekten görüyoruz.

Örnek 4.7 $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_4\right\}$ halkasını ve bu halkanın

$$\gamma: R \to R, \qquad \gamma\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım.

Örnek 3.4 (a) den R halkasının kuvvetli γ −terslenebilir olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan R halkası bir inmiş halka değildir. Gerçekten, $O \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = O$ dir.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için

$$A\bar{\gamma}(B) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \bar{\gamma} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \gamma\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \gamma\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \gamma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = O$$

olmasına rağmen

$$BA = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan $T(R,R)$ halkası kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir değildir.

R bir halka ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} | a_{ij} \in R \right\}$$

olsun. $\gamma: R \to R$ bir halka homomorfizması ise bu durumda $\bar{\gamma}: S_n(R) \to S_n(R)$, $\bar{\gamma}\left(\left(a_{ij}\right)\right) = \left(\gamma\left(a_{ij}\right)\right)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonda $S_n(R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır. R bir inmiş halka olmak üzere $n \geq 3$ için $S_n(R)$ halkasının kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olmadığını sorgulamak çok doğaldır. Fakat bir sonraki örnekten cevabın olumsuz olduğunu görüyoruz.

Örnek 4.8 γ bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R halkası γ −katı olsun. Bu durumda $e^2 = e \in R$ için $\gamma(e) = e$ olduğunu biliyoruz. Özel olarak $\gamma(1_R) = 1_R$ olur. $n \geq 3$ için $S_n(R)$ deki E_{ij} matrisini şu şekilde tanımlayalım. E_{ij} matrisinin (i, j). bileşeni 1_R diğer tüm bileşenleri 0_R olsun.

$$A = E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in S_n(R)$$

için $A\bar{\gamma}(B) = O$ olmasına rağmen $BA = O$ olur ki, bu da bize $S_n(R)$ kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olmadığını gösterir. Aynı matrisler kullanılarak γ −katı bir R halkası üzerindeki $M_n(R)$ matris halkasının da $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olmadığını görüyoruz.

R bir halka ve γ da R nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda

$$\bar{\gamma}: R[x] \to R[x]\,, \ \bar{\gamma}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} \gamma(a_i) x^i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda $R[x]$ polinom halkasının endomorfizması olur.

Benzer şekilde R halkasının bir γ endomorfizması $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkasına da genişletilebilir.

Teorem 4.9 R bir halka ve γ, R nin bir endomorfizması olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) $R[x]$ polinom halkası kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilirdir.

(2) $R[x;x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkası kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilirdir. Eğer R bir Armendariz halka ise bu durumda (1) ve (2) nin her ikiside (3) e denktir.

(3) R kuvvetli sağ (sol) γ –terslenebilir halkadır.

İspat $(2) \Longrightarrow (1)$: $R[x;x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkası kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olsun. Bu durumda $\bar{\gamma}(R) = \gamma(R) \subset R$ ve R, $R[x;x^{-1}]$ in alt halkası olduğundan R halkası kuvvetli sağ (sol) γ −terslenebilirdir.

$(1) \Longrightarrow (3)$: R halkası $R[x]$ polinomlar halkasının alt halkası olduğundan yukarıdaki şekilde ispat açıktır.

$(1) \Longrightarrow (2)$: $R[x]$ polinomlar halkası kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olsun. $p(x), q(x) \in R[x;x^{-1}]$ için $p(x)\bar{\gamma}\big(q(x)\big) = 0$ olsun. Bu durumda

$$p_1(x) = p(x)x^n, \qquad q_1(x) = q(x)x^n \in R[x]$$

olacak şekilde bir *n* pozitif tamsayısı vardır. Buradan

$$p_1(x)\bar{\gamma}\big(q_1(x)\big) = p(x)x^n\bar{\gamma}(q(x)x^n) = p(x)x^n\bar{\gamma}\big(q(x)\big)\bar{\gamma}(x^n) = p(x)x^n\bar{\gamma}\big(q(x)\big)x^n$$
$$= p(x)\bar{\gamma}\big(q(x)\big)x^{2n} = 0x^{2n} = 0$$

olup $R[x]$ kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olduğundan $q_1(x)p_1(x) = 0$ elde ederiz. Böylece

$$q(x)p(x) = q_1(x)x^{-n}p_1(x)x^{-n} = q_1(x)p_1(x)x^{-2n} = 0x^{-2n} = 0$$

olur ki bu da bize $R[x;x^{-1}]$ halkasının kuvvetli sağ $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olduğunu gösterir.

Şimdi R halkasının Armendariz olduğunu kabul edip $(3) \Longrightarrow (1)$ olduğunu gösterelim: Kabul edelim ki R halkası kuvvetli sağ γ −terslenebilir olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x] \text{ için } p(x)\bar{\gamma}\big(q(x)\big) = 0$$

olsun. Yani;

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m)\bar{\gamma}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m)(\gamma(b_0) + \gamma(b_1)x + \gamma(b_2)x^2 + \cdots + \gamma(b_n)x^n) = 0$$

olup R halkası Armendariz olduğundan $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i\gamma(b_j) = 0$ olur. Diğer taraftan R halkası kuvvetli sağ $\gamma-$terslenebilir olduğundan $b_ja_i = 0$ olur. Böylece $q(x)p(x) = 0$ elde ederiz ki bu da bize $R[x]$ halkasının kuvvetli sağ $\bar{\gamma}-$terslenebilir olduğunu gösterir. ■

Sonuç 4.10 R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) R terslenebilir bir halkadır.

(ii) $R[x]$ polinom halkası terslenebilirdir.

(iii) $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkası terslenebilirdir.

$f: R \to S$ bir halka homomorfizması ve R bir terslenebilir halka olsun. Bu durumda R nin homomorfik görüntüsü yani $f(R)$ halkası terslenebilir bir halka olmak zorunda değildir.

R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. γ, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere eğer $\gamma(I) \subset I$ ise, bu durumda

$$\bar{\gamma}: {}^{R}/_{I} \longrightarrow {}^{R}/_{I}\ , \qquad \bar{\gamma}(a+I) = \gamma(a) + I$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ${}^{R}/_{I}$ bölüm halkasının bir endomorfizmasıdır. Şimdi bunu görelim. İlk olarak $\bar{\gamma}$ nin bir fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için $a+I, b+I \in {}^{R}/_{I}$ için $a+I = b+I$ olsun. Bu durumda $a-b \in I$ ve $\gamma(a-b) \in \gamma(I)$ olur. Böylece $\gamma(a) - \gamma(b) \in \gamma(I) \subset I$ olup buradan $\gamma(a) - \gamma(b) \in I$ olur ki, bu da bize $\gamma(a) + I = \gamma(b) + I$ olduğunu gösterir. Yani $\bar{\gamma}(a+I) = \bar{\gamma}(b+I)$ dır. Diğer taraftan; her $a+I, b+I \in {}^{R}/_{I}$ için

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(a+I+b+I) &= \bar{\gamma}\big((a+b)+I\big) = \gamma(a+b) + I = \gamma(a) + \gamma(b) + I \\ &= [\gamma(a) + I] + [\gamma(b) + I] = \bar{\gamma}(a+I) + \bar{\gamma}(b+I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}\big((a+I)(b+I)\big) &= \bar{\gamma}(ab+I) = \gamma(ab) + I = \gamma(a)\gamma(b) + I = [\gamma(a)+I][\gamma(b)+I] \\ &= \bar{\gamma}(a+I)\bar{\gamma}(b+I)\end{aligned}$$

olduğundan $\bar{\gamma}$ bir homomorfizma yani ${}^{R}/_{I}$ nın bir endomorfizmasıdır.

Önerme 4.11 R bir halka ve γ da R nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda;

(i) I, R nin bir ideali ve $\gamma(I) \subset I$ olsun. Eğer $R/_I$ bölüm halkası kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilir ve I bir γ −katı halka ise, bu durumda R kuvvetli sağ (sol) γ –terslenebilir bir halkadır.

(ii) R bir inmiş halka ve $n \in Z^+$ olsun. Bu durumda R nin kuvvetli sağ γ −terslenebilir bir halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x]/_{\langle x^n \rangle}$ bölüm halkasının kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir bir halka olmasıdır.

İspat (i): $R/_I$ bölüm halkası kuvvetli sağ (sol) $\bar{\gamma}$ −terslenebilir ve I, γ −katı olsun. $a, b \in R$ için $a\gamma(b) = 0$ olsun. Bu durumda $a + I,\ b + I \in R/_I$ olup,

$$(a + I)\bar{\gamma}(b + I) = (a + I)(\gamma(b) + I) = a\gamma(b) + I = 0 + I = I$$

elde edilir. $R/_I$ halkası kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olduğundan $(b + I)(a + I) = I$ olup buradan $ba \in I$ elde edilir. Şimdi $ba\gamma(ba) = ba\gamma(b)\gamma(a) = b0\gamma(a) = 0$ olup I halkası γ −katı olduğundan $ba = 0$ elde edilir ki, bu da bize R halkasının kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğunu gösterir.

(ii): $R[x]/_{\langle x^n \rangle}$ bölüm halkasının kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olması durumunda R nin kuvvetli γ −terslenebilir bir halka olduğunu görmek kolaydır. Şimdi R bir inmiş halka ve kuvvetli γ −terslenebilir olsun. R halkasının bir inmiş halka olması için gerek ve yeter koşulun " $a^2b = 0 \Longrightarrow ab = 0$ " olduğunu hatırlatalım. Ayrıca her inmiş halka terslenebilirdir. Bu gerekçeleri aşağıda sıkça kullanacağız. $S = R[x]/_{\langle x^n \rangle}$ olsun. Eğer $n = 1$ ise, bu durumda $S \cong R$ dir. Eğer $n = 2$ ise, bu durumda $S \cong T(R, R)$ dir. Böylece Önerme 4.5 den S halkasıda kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilirdir. Şimdi $n \geq 3$ olsun. $\bar{x} = x + \langle x^n \rangle$ olmak üzere

$$p(x) = a_0 + a_1\bar{x} + \cdots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}, q(x) = b_0 + b_1\bar{x} + \cdots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} \in S$$

için $p(x)\bar{\gamma}(q(x)) = 0$ olsun. Her i ve j için $b_j a_i = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. $i + j \leq n - 1$ üzerine tümevarım uygulayarak ispatı yapacağız. Eğer $i + j \geq n$ ise, bu durumda $a_i\gamma(b_j)\bar{x}^{i+j} = 0$ dır. $p(x)\bar{\gamma}(q(x)) = 0$ olduğundan $a_0\gamma(b_0) = 0$ olup R kuvvetli γ −terslenebilir olduğundan $b_0 a_0 = 0$ olur. Yani $i + j = 0 + 0 = 0$ için iddia doğrudur. Şimdi $i+j \leq k-1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Yani $i+j \leq k-1$ için $b_j a_i = 0$ olsun. $i+j \leq k \leq n-1$ için

$$a_0\gamma(b_k) + a_1\gamma(b_{k-1}) + \cdots + a_k\gamma(b_0) = 0$$

olduğunu $p(x)\gamma\big(q(x)\big) = 0$ dan biliyoruz. Bu eşitliği soldan b_0 ile çarparsak

$$b_0a_0\gamma(b_k) + b_0a_1\gamma(b_{k-1}) + \cdots + b_0a_k\gamma(b_0) = 0$$

elde ederiz. Kabulden son eşitlik $b_0a_k\gamma(b_0) = 0$ haline dönüşür. R kuvvetli sağ γ −terslenebilir olduğundan $b_0b_0a_k = 0$ yani ${b_0}^2a_k = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan $b_0a_k = 0$ ve buradan da $a_kb_0 = 0$ olur. Böylece Önerme 3.9 dan $a_k\gamma(b_0) = 0$ olur. O halde yukarıdaki ilk denklemimiz

$$a_0\gamma(b_k) + a_1\gamma(b_{k-1}) + \cdots + a_{k-1}\gamma(b_1) = 0$$

haline dönüşür. Bu denklem soldan b_1 ile çarpılırsa $b_1a_{k-1}\gamma(b_1) = 0$ olur. Yukarıdaki gibi buradan $b_1a_{k-1} = 0$ elde edilir. Bu işlem devam ettirilirse $i+j = k$ için $b_ja_i = 0$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak her i ve j için $b_ja_i = 0$ elde edilir. Bu ise $q(x)p(x) = 0$ eşitliğini verir ki, bu da bize S nin kuvvetli sağ $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olduğunu gösterir. ■

Sonuç 4.12

(i) R nin her ideali için R/I bölüm halkası terslenebilir olsun. Eğer I inmiş bir halka ise, bu durumda R terslenebilirdir.

(ii) Eğer R bir inmiş halka ise, bu durumda herhangi bir pozitif n tamsayısı için $R[x]/\langle x^n\rangle$ terslenebilir bir halkadır.

Aşağıdaki örnek Önerme 4.11 (i) deki "I ideali γ −katı olsun" şartının fazladan olmadığını gösterir.

Örnek 4.13 F bir cisim olmak üzere $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in F\right\}$ halkasını ve bu halkanın $\gamma: R \to R$, $\gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ endomorfizmasını göz önüne alalım.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$A\gamma(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olmasına rağmen

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan R halkası sağ γ −terslenebilir değildir. R halkasının

$$I = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in F\right\}$$

idealini göz önüne alalım. Bu durumda $R/_I = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I \mid a, c \in F\right\}$ bölüm halkası inmiş ve

$$\bar{\gamma}: R/_I \to R/_I, \qquad \bar{\gamma}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

olduğundan $R/_I$ kuvvetli sağ $\bar{\gamma}$ −terslenebilirdir. Açık olarak I, γ −katı bir halka değildir.

R bir halka ve $n \geq 2$ bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$V_n(R) = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \dots, a_n \in R\right\}$$

olsun. $V_n(R)$, $M(R)$ halkasının bir alt halkasıdır. Eğer γ, R halkasının bir endomorfizması ise bu durumda $\bar{\gamma}\left((a_{ij})\right) = \left(\gamma(a_{ij})\right)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonda $V_n(R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır.

Sonuç 4.14 R bir inmiş halka ve R nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda R nin kuvvetli γ −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $n \geq 2$ için $V_n(R)$ nin kuvvetli $\bar{\gamma}$ −terslenebilir olmasıdır.

İspat $V_n(R) \cong R[x]/_{\langle x^n \rangle}$ olduğundan ispat Önerme 4.13 den açıktır. ■

KAYNAKLAR

Armendariz, E.P. (1974). A note on extension of Baer and P.P. -rings. *Australian Mathematical Society*, **18:** 470-473.

Başer, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K. (2009). On extended riversible rings. *Algebra Colloquium.*, **16**(1)**:** 37-48.

Başer, M., and Kwak, T.K. (2010). On strong reversible rings and their extensions. *Korean Journal of Mathematics.*,**18:** 119-132.

Cohn, P.M. (1999). Reversible rings. *Bulletion of London Mathematical Society*, **31**: 641-648.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p.-rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **151**(3)**:** 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2003). On skew Armendariz rings. *Communications in Algebra*, **31**(3)**:** 103-122.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2005). Extensions of generalized reduced rings. Algebra Colloquium, **12(2):** 229-240.

Hong, C.Y., Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. (2006). Extensions of generalized Armendariz rings. *Algebra Colloquium*, **13(2):** 253-266.

Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A. (2002). Armendariz rings and semicommutative rings, *Communications in* Algebra, **30(2):** 751-761.

Hungerford, T.W. (1982). Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Jordan, D.A. (1982). Bijective extensions of injective rings endomorphism. *Journal of London. Mathematical Society*, **25:** 435-448.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings, *Journal of Algebra*, **223:** 477-488.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2003). Extensions of reversible rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*,**185:** 207-223.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Coloquium*, **3(4):** 289-300.

Lee, T.K. and Zhou Y. Q. (2004). Armendariz and reduced rings. *Communications in Algebra* **32:** 2287-2299.

Rege, M. B. and Chhawchharia, S. (1997). Armendariz rings. *Japan Academy. Proceedings. Series A. Mathematical Sciences*, **73:** 14-17.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: İbrahim ÖZER
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar / 20.06.1978
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: fadaz2004@gmail.com / 0 505 566 17 09

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Afyon Lisesi	(1992-1995)
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü	(1995-1999)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Atatürk İlköğretim Okulu	(1999-2001)
Afyon Süleyman Demirel Fen Lisesi	(2001- …)