Fuzzy n-Normlu Uzaylarda Çift Dizilerin Lacunary İdeal Yakınsaklığı

Muhammed Recai TÜRKMEN, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Türkiye, mrtmath@gmail.com
Erdinç DÜNDAR, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Türkiye, edundar@aku.edu.tr
Uğur ULUSU, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Türkiye, uulusu@aku.edu.tr

Öz

İstatistiksel yakınsaklık kavramı reel sayı dizilerinin yakınsaklık kavramının genişletilmesiyle ortaya çıkmıştır. İstatistiksel yakınsak diziler üzerinde yapılan çalışmalarda metrik uzaylardaki birçok klasik yakınsaklığın özelliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Aynı zamanda bu çalışmalar genişletilerek ideal yakınsaklık kavramı ortaya çıkarılmıştır. İdeal yakınsaklık tanımı doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin ideal yapısına dayanan bir tanımdır. Bu tanımla birlikte lacunary dizi ve lacunary yakınsaklık kavramları ortaya çıkmış ve birçok araştırmacı yakınsama kavramının çeşitlerini araştırmaya başlamışlardır. Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalarda istatistiksel yakınsaklığın çift diziler içinde tanımlanmasıyla bu çalışmalar hız kazanmıştır. İdeal yakınsaklık, lacunary dizi ve çift dizi kavramlarının bir araya gelmesiyle son yapılan çalışmalar çift diziler için lacunary ideal yakınsaklık üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmamızda biz bu yakınsaklığı fuzzy n - normlu uzaylardan faydalanarak yeniden tanımladık ve bu tanımlar ışığında bazı temel tanım ve teoremleri fuzzy n - normlu uzaylar için yeniden düzenledik. Yaptığımız bu çalışma ileriki çalışmalara temel oluşturması açısından önemli bir çalışmadır. Buradaki tanım ve teoremler kullanılarak lacunary yakınsaklığın fuzzy n - normlu uzaylarda tanımlanması ve bunların lacunary ideal yakınsaklıkla ilişkisinin incelenmesi mümkün olacaktır. Ayrıca fuzzy n - normlu uzaylarda lacunary ideal Cauhy dizilerinden bahsedilebilecektir. Yaptığımız çalışmada temel aldığımız çalışmalara benzer sonuçlar elde etmemiz yaptığımız çalışmaların daha farklı uzaylarda da denenebileceğini aynı zamanda bu uzaylar arasında bazı ilişkilerin kurulabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy n-normlu uzay, lacunary dizi, ideal yakınsaklık, çift dizi.

Abstract

The concept of statistical convergence has emerged with the expansion of convergence concept of real number sequences. Studies on statistical convergent sequences have shown that many classical convergences in metric spaces are provided. At the same time, the concept of ideal convergence was introduced by expanding these studies. The definition of ideal convergence is a definition based on the ideal structure of the subset of natural numbers. With this definition, the concepts of lacunary sequence and lacunary convergence have emerged and many researchers have started to investigate the types of convergence concept. In recent studies, statistical convergence has been accelerated with the definition of double sequences. The combination of double sequence, lacunary sequence, and ideal convergence concepts has focused on lacunary ideal convergence for double sequences. In this study, we redefined this convergence by using fuzzy n - normed spaces, and thanks to these definitions, we reconstructed some basic definitions and theorems for fuzzy n - normed spaces. This study is an important study as a basis for further studies. By using the definitions and theorems here, it will be possible to define lacunary convergence in fuzzy n - normed spaces and to investigate their relationship with lacunary ideal convergence. In addition, fuzzy n - normed spaces, lacunary ideal Cauhy sequences can be mentioned. In our study, similar results with other studies showed that our studies could be tried in different spaces.

Keywords: Fuzzy n-normed spaces, lacunary sequence, ideal convergence, double sequence.

Giriş ve Ön Bilgiler

İstatiksel yakınsaklığın çift dizilere genişletilmesi ilk defa Mursaleen ve Edely (2003) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmadan sonra başta Tripathy ve Tripathy (2005), Dündar ve Altay (2014), Dündar vd. (2016) ve Türkmen ve Dündar (2018) olmak üzere birçok araştırmacı çift diziler üzerine araştırmalar yapmışlardır. Bu çalışmalara yön verecek farklı bir dizi ilk defa Matloka (1986) tarafından fuzzy sayıların klasik yakınsaması ile ilgili "fuzzy sayı dizileri" adlı çalışmasında verilmiş ve bu çalışmada bazı fuzzy sayı dizilerinin temel teoremleri ispat edilmiştir. Fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını ve istatiksel Cauchy dizilerini ise ilk defa Nuray ve Savas (1995) çalışmıştır. Bu çalışmalardan sonra Şençimen ve Pehlivan (2008) istatiksel yakınsaklık ve istatiksel Cauchy kavramlarını ve Hazarika (2013) ideal yakınsaklık ve ideal Cauchy kavramlarını fuzzy normlu uzaylarda tanımlamış, Dündar ve Talo (2013a, 2013b) fuzzy sayıların çift dizileri için $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2$-Cauchy kavramlarını tanımlamış, Hazarika ve Kumar (2014) çift diziler için fuzzy reel değerli $\mathcal{I}$-yakınsaklık, Türkmen ve Çınar (2017) ise lacunary istatiksel yakınsaklık kavramlarını fuzzy normlu uzaylarda tanımlamışlardır.

Bir vektör uzayı üzerinde fuzzy norm kavramı ilk defa Katsaras (1984) tarafından ortaya atılmış, daha sonra ise Felbin (1992) tarafından fuzzy normlu uzay kavramı tanımlanmıştır. Narayanan ve Vijayabalaji (2005) ise fuzzy n-normlu uzaylar üzerinde ilk çalışmaları yapmışlardır. n-normlu uzaylarda istatiksel yakınsaklığı ve bazı sonuçlarını Reddy (2010) çalıştıktan sonra Reddy ve Srinivas (2015) bu çalışmayı fuzzy n-normlu uzaylarda yapmışlardır. Biz ise bu çalışmamızda daha önce Türkmen (2018) tarafından yapılan çalışmalardan ilham alarak lacunary ideal yakınsaklığı çift diziler için fuzzy n-normlu uzaylarda tanımlayıp bazı özelliklerini ve sonuçlarını vereceğiz. Şimdi fuzzy sayı, fuzzy norm, fuzzy n-norm, çift dizi, lacunary dizi, ideal, ideal yakınsaklık, gibi bazı temel tanım ve teoremleri; Bag ve Samanta (2008), Diamond ve Kloeden (1994), Mizumoto ve Tanaka (1979), Kumar (2007), Nanda (1989), Nuray (1989), Pringsheim (1900), Rath ve Tripaty (1994), Tripathy vd (2012), Türkmen ve Çınar (2018), Zadeh (1965) ve Türkmen den ve daha önce bahsettiğimiz kişilerden faydalanarak hatırlatalım.

İlk olarak fuzzy sayılardan bahsedecek olursak, her bir $x \in X$ elemanı, $[0,1]$ kapalı aralığında bir değere sahip olan $u(x)$ üyelik derecesine sahip bir elamana karşılık gelmektedir. Burada $u(x) = 0$ olması üye olmadığı, $u(x) = 1$ olması tam üye olduğu anlamına gelirken, $0 < u(x) < 1$ olması ise kısmi üye olması anlamına gelir. Zadeh e göre X in bir fuzzy alt kümesi, bazı $u: X \to [0,1]$ fonksiyonları için $X \times [0,1]$ in boştan farklı bir $\{(x, u(x)): x \in X\}$ alt kümesine denir. Burada u fonksiyonu genellikle fuzzy küme olarak kullanılır.

$\mathbb{R}$ üzerinde bir u fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa fuzzy sayı olarak adlandırılır.

i. u normaldir, yani en azından bir $x_0 \in \mathbb{R}$ var öyle ki $u(x_0) = 1$
ii. u fuzzy konvekstir, yani $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)]$;
iii. u üst yarı süreklidir;
iv. $[u]_0$, ile gösterilen $supp\ u = cl\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$, kümesi kompakttır.

Fuzzy sayıların tümünü $L(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Eğer $t < 0$ için $u \in L(\mathbb{R})$ ve $u(t) = 0$ ise u ya negatif olmayan fuzzy sayı denir. Tüm negatif olmayan fuzzy sayıların kümesini $L^*(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $u \in L^*(\mathbb{R})$ olabilmesi için gerek ve yeter şart herbir $\alpha \in [0,1]$ için $u_\alpha^- \geq 0$ olmasıdır diyebiliriz. Açıkça $\tilde{0} \in L(\mathbb{R})$ olduğu görülüyor. $u \in L(\mathbb{R})$ için u nun α seviye kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}: u(x) \geq \alpha\}, & \alpha \in (0,1] \\ \quad supp\ u \quad , & \alpha = 0. \end{cases}$$

α-seviye kümeleriyle ilgili bazı aritmetik işlemler ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$\alpha \in (0,1]$ ve $u, v \in L(\mathbb{R})$ için $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ ve $[v]_\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$ ise,

$[u \oplus v]_\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+]$, $[u \ominus v]_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^+, u_\alpha^+ - v_\alpha^-]$,

$[u \odot v]_\alpha = [u_\alpha^- . v_\alpha^-, u_\alpha^+ . v_\alpha^+]$, $[\tilde{1} \oslash u]_\alpha = \left[\frac{1}{u_\alpha^+}, \frac{1}{u_\alpha^-}\right]$, $u_\alpha^- > 0$ dır.

$u, v \in L(\mathbb{R})$ için $L(\mathbb{R})$ üzerinde supremum metriği

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u_\alpha^- - v_\alpha^-|, |u_\alpha^+ - v_\alpha^+|\}$$

şeklinde tanımlanır. $L(\mathbb{R})$ üzerinde D nin bir metrik olduğu ve $(L(\mathbb{R}), D)$ nin bir tam metrik uzay olduğu gösterilebilir. $x = (x_k)$ fuzzy sayıların bir dizisi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için en azından bir k_0 pozitif sayısı var öyle ki $k > k_0$ için $D(x_k, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi x_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir. Ayrıca fuzzy sayıların $x = (x_k)$ dizisi x_0 fuzzy sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1)$ için $[x_k]_\alpha = [(x_k)_\alpha^-, (x_k)_\alpha^+]$ ve $[x_0]_\alpha = [(x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+]$ olmak üzere $\lim_{k\to\infty} [x_k]_\alpha = [x_0]_\alpha^-$ ve $\lim_{k\to\infty} [x_k]_\alpha = [x_0]_\alpha^+$ olmasıdır.

Fuzzy sayıların istatistiksel yakınsaklığı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır;

$X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n: \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına istatiksel yakınsaktır denir. Bu tanımdan sonra, birçok matematikçi fuzzy sayıların istatistiksel yakınsaklığı üzerinde çalışmış ve bu çalışmaları fuzzy normlu uzaylara genişletmişlerdir.

Şimdi ise fuzzy norm tanımını ve fuzzy normlu uzaylarda yapılan yakınsaklık tanımlarını verelim.

X, $\mathbb{R}$ üzeride bir vektör uzayı, $\|.\|: X \to L^*(\mathbb{R})$ ve sırasıyla sol ve sağ norm olarak adlandırılan $L; R: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dönüşümleri $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ şartlarını sağlayan simetrik ve azalmayan dönüşümler olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $(X, \|.\|, L, R)$ dörtlüsüne fuzzy normlu lineer uzay yada kısaca $(X, \|.\|)$ FNS denir ve $\|.\|$ dönüşümüne de fuzzy norm denir;

1. $\|x\| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $x = 0$,

2. $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$ için $\|rx\| = |r|\|x\|$,

3. Her $x, y \in X$ için

(a) $\|x + y\|(s + t) \geq L\big(\|x\|(s), \|y\|(t)\big)$, her ne zaman $s \leq \|x\|_1^-$, $t \leq \|y\|_1^-$ ve $s + t \leq \|x + y\|_1^-$,

(b) $\|x + y\|(s + t) \leq R\big(\|x\|(s), \|y\|(t)\big)$, her ne zaman $s \geq \|x\|_1^-$, $t \geq \|y\|_1^-$ ve $s + t \geq \|x + y\|_1^-$.

$(X, \|.\|)$ fuzzy normlu uzayın topolojik yapısı düşünüldüğünde herhangi bir $\varepsilon > 0, \alpha \in [0,1]$ ve $x \in X$, için x in (ε, α) −komşuluğu $\mathcal{N}_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X: \| x - y \|_\alpha^+ < \varepsilon\}$ kümesi ile gösterilir.

Şençimen ve Pehlivan fuzzy normlu uzaylarda yakınsaklığı şöyle tanımlamıştır;

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay ve $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, X de bir dizi olsun. Eğer $(D) - \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \tilde{0}$ ise bu dizi $x \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy norma göre yakınsaktır denir ve $x_n \overset{FN}{\rightarrow} x$ şeklinde gösterilir. Yani her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $n \geq N(\varepsilon)$ için $D\big(\|x_n - x\|, \tilde{0}\big) < \varepsilon$ dur. Bu da her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $n \geq N(\varepsilon)$ için $\sup_{\alpha\in[0,1]}\|x_n - x\|_\alpha^+ = \|x_n - x\|_0^+ < \varepsilon$ olması demektir.

İstatistiksel yakınsaklığın fuzzy normlu uzaylarda tanımı ise aşağıdaki şekildedir;

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\big(\{k \in \mathbb{N}: D\big(\|x_k - L\|, \tilde{0}\big) \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

ise bu dizi $L \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy norma göre istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_n \overset{FS}{\rightarrow} x$ şeklinde gösterilir. Buda her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}: \|x_k - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olması demektir. Kısaca, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için $\|x_k - L\|_0^+ < \varepsilon$ olması demektir.

Çift diziler için yakınsaklık tanımları işe şu şekildedir;

$x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ reel sayıların bir çift dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ için $|x_{mn} - L| < \varepsilon$ oluyorsa (x_{mn}) dizisi Pringsheim anlamında L noktasına yakınsaktır denir ve $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ şeklinde gösterilir.

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyleki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ için $D\big(\|x_{mn} - x\|, \tilde{0}\big) < \varepsilon$ oluyorsa (x_{mn}) dizisi fuzzy norma göre x noktasına yakınsaktır denir ve $x_{mn} \overset{FN}{\rightarrow} x$ şeklinde gösterilir.

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2\big(\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: D(\|x_{mn} - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

ise bu dizi $L \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy norma göre istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_{mn} \overset{FS_2}{\rightarrow} L$ şeklinde gösterilir.

İdeal ve filtre tanımları ise aşağıdaki şekildedir;

X boştan farklı bir küme olmak üzere X in alt kümelerinin bir $\mathcal{I}$ sınıfı ;

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

2. $A, B \in \mathcal{I}$ iken $A \cup B \in \mathcal{I}$,

3. $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ iken $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlanıyorsa X in bir ideali olduğu söylenir. $X \not\in \mathcal{I}$ ise aşikar olmayan ideal denir.

X boştan farklı bir küme olmak üzere X in alt kümelerinin $\mathcal{F}$ sınıfı ;

1. $\emptyset \not\in \mathcal{F}$,

2. $A, B \in \mathcal{F}$ iken $A \cap B \in \mathcal{F}$,

3. $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ iken $B \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa X in bir filtresi olduğu söylenir. $\mathcal{I}$ aşikar olmayan ideal ve X boştan farklı bir küme ise $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X: (\exists A \in \mathcal{I})(M = X \backslash A)\}$ sınıfına X üzerinde $\mathcal{I}$ ile ilişkili filtre denir.

Aşikar olmayan bir $\mathcal{I}$ ideali, her $x \in X$ için eğer $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise admissible ideal olarak adlandırılır.

Aşikar olmayan bir $\mathcal{I}_2$ ideali her $i \in \mathbb{N}$ için eğer $\{i\} \times \mathbb{N} \in \mathcal{I}_2$ ve $\mathbb{N} \times \{i\} \in \mathcal{I}_2$ ise kuvvetli admissible ideal olarak adlandırılır.

Bu tanımlar kullanılarak ideal yakınsaklığın fuzzy normlu uzaylardaki ifadesi şu şekildedir;

$(X, \|.\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N}: \|x_{mn} - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_2$ ye ait ise bu diziye fuzzy norma göre $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2$ −yakınsaktır denir ve $x_{mn} \xrightarrow{\mathcal{I}_2} L$ şeklinde gösterilir.

Şimdi lacunary dizi tanımını vererek çift diziler için lacunary ideal yakınsaklık tanımından bahsedelim. $\theta_2 = \{(k_r, j_s)\}$ dizisi $k_0 = 0$, $j_0 = 0$ ve $r, u \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$, $\bar{h}_u = j_u - j_{u-1} \to \infty$ olacak şekilde artan bir tamsayı dizisi ise bu diziye çift lacunary dizi denir. θ_2 tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $J_u = (j_{u-1}, j_u]$ şeklinde gösterilirken $I_{ru} = I_r \times J_u$ ve $h_{ru} = h_r . \bar{h}_u$ olarak alınır.

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(r,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \frac{1}{h_{ru}} \sum_{(m,n)\in I_{ru}} D\left(\| x_{mn} - L \|, \tilde{0}\right) \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi $\mathcal{I}_2$ ye ait ise $x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ dizisine X üzerindeki fuzzy norma göre $L \in X$ noktasına lacunary $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir. Bu durumda $x_{mn} \xrightarrow{F\mathcal{I}_2^\theta} L$ veya $x_{mn} \to L(F\mathcal{I}_2^\theta)$ veya $F\mathcal{I}_2^\theta - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ şeklide gösterilir.

Buraya kadar verdiğimiz tanımlarda gördüğümüz gibi kullandığımız normlar klasik ve fuzzy normların tek boyutluları idi. Şimdi ise son verdiğimiz tanımı fuzzy n-normlu uzaylarda gösterebilmek için fuzzy n-norm tanımını yapacağız.

$2 \leq d < \infty$ olmak üzere X uzayı d boyutlu bir lineer uzay olmak üzere ve $\|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|: X^n \to L^*(\mathbb{R})$ olsun. Sırasıyla sol ve sağ norm olarak adlandırılan $L; R: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dönüşümleri $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ şartlarını sağlayan simetrik ve azalmayan dönüşümler olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $(X, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|, L, R)$ dörtlüsüne fuzzy n-normlu lineer uzay yada kısaca $(X, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|, L, R)$ FnNS denir ve $\|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|$ dönüşümünede fuzzy n-norm denir;

Her $y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ve $s, t \in \mathbb{R}$ için

fnN_1: $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \tilde{0}$ ancak ve ancak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineer bağımlı vektörlerdir,

fnN_2: $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ değeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nin herhangi bir permütasyonunda değişmeyendir,

fnN_3: Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\| = |\alpha|\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ dir,

fnN_4: $\|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|(s + t) \geq L\left(\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|(s), \|y, x_2, \ldots, x_n\|(t)\right)$

her ne zaman $s \leq \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$, $t \leq \|y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ve $s + t \leq \|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ise

fnN_5: $\|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|(s + t) \leq R\left(\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|(s), \|y, x_2, \ldots, x_n\|(t)\right)$

her ne zaman $s \geq \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$, $t \geq \|y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ve $s + t \geq \|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\|_1^-$ ise .

Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $0 \leq \alpha \leq 1$ için,

$$[\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|]_\alpha = [\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_\alpha^-, \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_\alpha^+]$$

ve $\inf_{\alpha\in[0,1]} \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|_\alpha^- > 0$ dir. Böylece $\|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|$ normu X üzerinde fuzzy n-norm ve $(X, \|\cdot,\cdot,\ldots,\cdot\|)$ çiftide fuzzy n-normlu uzay olarak adlandırılır. Şimdi fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için lacunary $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık tanımını verebiliriz. İlerki aşamalarda tekrardan kaçınmak için aksi belirtilmediği sürece $\mathcal{I}_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi admissible ideal, $\theta_{kl} = \{(r_k, t_l)\}$ çift lacunary dizi, $(X, \|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ fuzzy n-normlu uzay, $x = (x_{rt})_{(r,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ X de bir çift dizi ve $z_2, z_3, \ldots z_n \in X$ olarak alınacaktır.

2. Lacunary $\mathcal{J}_2$ −Yakınsaklık

Bu bölümde fuzzy n-normlu uzaylarda çift diziler için lacunary ideal yakınsaklık kavramı ve ilgili teoremleri verilecektir. Aksi belirtilmediği sürece $\theta_{kl} = \{(r_k, t_l)\}$ tarafından belirlenen aralıklar $J_k = (r_{k-1}, r_k]$ ve $\bar{J}_l = (t_{l-1}, t_l]$ olmak üzere, $J_{kl} = J_k \times \bar{J}_l$ ve $h_k = r_k - r_{k-1}$, $\bar{h}_l = t_l - t_{l-1}$ olmak üzere $h_{kl} = h_k . \bar{h}_l$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.1. $x = (x_{rt})_{(r,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ dizisi X de bir çift dizi olmak üzere, herbir $\varepsilon > 0$ için, eğer

$$\left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} D\left(\|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|, \tilde{0}\right) \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi $\mathcal{J}_2$ ya ait ise, x dizisi $L_1 \in X$ noktasına X üzerindeki fuzzy n-norma göre lacunary $\mathcal{J}_2$ −yakınsaktır denir. Bu durumda $x_{rt} \overset{Fn\mathcal{J}_2^{\theta}}{\rightarrow} L_1$, $x_{rt} \rightarrow L_1(Fn\mathcal{J}_2^{\theta})$ veya $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim_{r,t\to\infty} x_{rt} = L_1$ gösterimlerinden birini kullanabiliriz. L_1 değerine ise (x_{rt}) nin $Fn\mathcal{J}_2^{\theta}$ −limiti denir.

Teorem 2.1. X üzerindeki fuzzy n-norma göre $x = (x_{rt})$ dizisi lacunary $\mathcal{J}_2$ −yakınsak ise yakınsadığı nokta tektir yani $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x$ tektir.

İspat: Varsayalım ki $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x = L_1$ ve $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x = L_2$ olsun. Bu durumda herbir $\varepsilon > 0$, için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım;

$$A_1 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$A_2 = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}: \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x = L_1$ ve $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x = L_2$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A_1 \in \mathcal{J}_2$ ve $A_2 \in \mathcal{J}_2$ dir. O halde $A_3 = A_1 \cup A_2$ olarak aldığımızda da $A_3 \in \mathcal{J}_2$ olacaktır. Bu durumda $(A_3)^c$ kümesi $F(\mathcal{J}_2)$ içerisinde boştan farklı bir küme olacaktır. $(k,l) \in (A_3)^c$ olacak şekilde bir eleman aldığımızda ise

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Açıkça, alacağımız en azından bir $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\left\|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\left\|x_{pq} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ < \frac{1}{h_{kl}} \sum_{(r,t)\in J_{kl}} \|x_{rt} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde ederiz. Buda bizim

$$\|L_1 - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\|_0^+ \leq \left\|x_{pq} - L_1, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ + \left\|x_{pq} - L_2, z_2, z_3, \dots z_n\right\|_0^+ < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde etmemizi sağlar. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\|L_1 - L_2, z_2, z_3, \dots, z_n\|_0^+ = 0$ elde ederiz. Buda bize $L_1 = L_2$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x$ in tek olduğu sonucuna varırız.

Teorem 2.2. (x_{rt}) ve (y_{rt}) X de iki çift dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki aritmetik işlemler vardır.

i) Eğer $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x_{rt} = L_1$ ve $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim y_{rt} = L_2$ ise $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim(x_{rt} \mp y_{rt}) = L_1 \mp L_2$ dir.

ii) Eğer $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim x_{rt} = L_1$ ise $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $Fn\mathcal{J}_2^{\theta} - \lim c x_{rt} = cL_1$ dir.

İspat: i) Bu ispatın sadece toplama kısmını göstermemiz yeterli olacaktır. Yani $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim x_{rt}=L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim y_{rt}=L_2$, ise $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim(x_{rt}+y_{rt})=L_1+L_2$ dir. Çıkarma kısmı benzer şekilde yapılabilir. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım;

$$A_1=\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$A_2=\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|y_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

$Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim x=L_1$ ve $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim y=L_2$ olduğundan her $\varepsilon>0$ için $A_1\in\mathcal{I}_2$ ve $A_2\in\mathcal{I}_2$ dir. O halde $A_3=A_1\cup A_2$ olarak aldığımızda da $A_3\in\mathcal{I}_2$ olacaktır. Bu durumda $(A_3)^c$ kümesi $F(\mathcal{I}_2)$ içerisinde boştan farklı bir küme olacaktır. Şimdi ise

$$(A_3)^c\subset\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1+y_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\varepsilon\right\}$$

kapsamasının doğru olduğunu gösterelim.

$(k,l)\in(A_3)^c$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Buradan, alacağımız bir $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\|x_{pq}-L_1,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\|y_{pq}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|y_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{\varepsilon}{2}$$

elde ederiz. Buda bize

$$\|x_{rt}-L_1+y_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+\leq\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^++\|y_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\varepsilon$$

eşitsizliğini verir. Bu durumda aşağıdaki kapsama gösterilmiş olur.

$$(A_3)^c\subset\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1+y_{rt}-L_2,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\varepsilon\right\}.$$

$(A_3)^c\in F(\mathcal{I})$ olduğundan

$$\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_r}\|(x_{rt}+y_{rt})-(L_1+L_2),z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}_2$$

dır. Böylece $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim(x_{rt}+y_{rt})=L_1+L_2$ elde edilir.

ii) $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim x_{rt}=L_1$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon>0$ ve $c\in\mathbb{R}-\{0\}$ için,

$$A_1=\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\ldots z_n\|_0^+<\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $A_1\in F(\mathcal{I}_2)$ dir. $(k,l)\in A_1$ olacak şekilde bir eleman aldığımızda

$$\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\dots z_n\|_0^+<\frac{\varepsilon}{|c|}\Rightarrow\frac{|c|}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|x_{rt}-L_1,z_2,z_3,\dots z_n\|_0^+<|c|.\frac{\varepsilon}{|c|}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}|c|\|x_m-L_1,z_2,z_3,\dots z_n\|_0^+<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|c.x_{rt}-c.L_1,z_2,z_3,\dots z_n\|_0^+<\varepsilon$$

elde edilir. Böylece,

$$A_1\subset\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|cx_{rt}-cL_1,z_2,z_3,\dots z_n\|_0^+<\varepsilon\right\}$$

ve

$$\left\{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{h_{kl}}\sum_{(r,t)\in J_{kl}}\|cx_{rt}-cL_1,z_2,z_3,\dots z_n\|_0^+<\varepsilon\right\}\in F(\mathcal{I}_2)$$

elde edilir. Buradan $Fn\mathcal{I}_2^{\theta}-\lim cx_{rt}=cL_1$ elde edilir.

3. Kaynaklar

Bag, T. and Samanta, S. K. (2008). Fixed point theorems in Felbin's type fuzzy normed linear spaces. *J. Fuzzy Math.*, 16(1), 243–260.

Diamond, P. and Kloeden, P. (1994). Metric Spaces of Fuzzy Sets-Theory and Applications. *World Scientific Publishing,* Singapore.

Dündar, E. and Talo, Ö. (2013a). $\mathcal{I}_2$-convergence of double sequences of fuzzy numbers. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 10(3), 37–50.

Dündar, E. and Talo, Ö. (2013b). $\mathcal{I}_2$-Cauchy Double Sequences of Fuzzy Numbers. *Gen. Math. Notes*, 16(2), 103-114.

Dündar, E. and Altay, B. (2014). $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of double sequences. *Acta Mathematica Scientia*, 34(2), 343–353.

Dündar, E., Ulusu, U. and Pancaroğlu, N. (2016). Strongly $\mathcal{I}_2$-Lacunary Convergence and $\mathcal{I}_2$-Lacunary Cauchy Double Sequences of Sets. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 35(1,2), 1–15.

Felbin, C. (1992). Finite-dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and Systems*, 48(2), 239–248.

Hazarika, B. (2013). On ideal convergent sequences in fuzzy normed linear spaces. *Afrika Matematika*, 25(4), 987–999.

Hazarika, B. and Kumar, V. (2014). Fuzzy real valued $\mathcal{I}$-convergent double sequences in fuzzy normed spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 26, 2323–2332.

Kumar, V. (2007). On $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergence of double sequences. *Math. Commun.*, 12. 171–181.

Matloka, M. (1986). Sequences of fuzzy numbers *Busefal*, 28. 28–37.

Mizumoto, M. and Tanaka, K. (1979). Some properties of fuzzy numbers Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. *North-Holland* Amsterdam.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H. (2003). Statistical convergence of double sequences. *J. Math. Anal. Appl.*, 28, 223–231.

Nanda, S. (1989). On sequences of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets Systems*, 33, 123–126.

Narayan, A. L. and Vijayabalaji, S. (2005). Fuzzy n-normed linear space. *International journal of mathematics and mathematical sciences*, 24. 3963-3977

Nuray, F. (1989). Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 99, 353–355.

Nuray, F. and Savaş, E. (1995). Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Math. Slovaca*, 45(3), 269–273.

Pringsheim, A. (1900). Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. *Math. Ann.*, 53, 289–321.

Rath, D. and Tripaty, B. C. (1994). On statistically convergence and statistically Cauchy sequences. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25(4), 381–386.

Reddy, B. S. (2010). Statistical convergence in n-normed spaces. *International Mathematical Forum*, 5(24), 1185-1193.

Reddy, B. S. and Srinivas, M. (2015). Statistical Convergence in Fuzzy n-Normed Spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 104(1), 29-42.

Şencimen, C. and Pehlivan, S. (2008). Statistical convergence in fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 361–370.

Tripathy, B. and Tripathy, B. C. (2005). On I-convergent double sequences. *Soochow J. Math.,* 31,549–560.

Tripathy, B. C., Hazarika, B. and Choudhary, B. (2012). Lacunary I -convergent sequences. *Kyungpook Math. J.,* 52, 473 482.

Türkmen, M. R. (2019). On Lacunary ideal convergence and some properties in fuzzy normed spaces. *under communication.*

Türkmen, M. R. and Çınar, M. (2017). Lacunary Statistical Convergence in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Applied and Computational Mathematics,* 6(5), 233–237.

Türkmen, M. R. and Çınar, M., 2018. λ-Statistical Convergence in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 34(6), 4023–4030.

Türkmen, M. R. and Dündar, E. (2018). On Lacunary Statistical Convergence of Double Sequences and Some Properties in Fuzzy Normed Spaces. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* DOI:10. 3233/JIFS-18841.

Türkmen, M. R. (2019). On Lacunary İdeal Convergence and Some Properties in Fuzzy n-Normed Spaces. *under communication.*

Türkmen, M. R. (2018). On Lacunary Statistical Convergence and Some Properties in Fuzzy n-Normed Spaces. *i-manager's Journal on Mathematics*.,7(3), preprint.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inform. Contr.,* 8, 29-44.