İSTATİSTİKSEL EPİ-YAKINSAKLIK

DOKTORA TEZİ

Şükrü TORTOP

Danışman
Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mart 2020

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİKSEL EPİ-YAKINSAKLIK

Şükrü TORTOP

Danışman
Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mart 2020

TEZ ONAY SAYFASI

Şükrü TORTOP tarafından hazırlanan "İstatistiksel Epi-Yakınsaklık" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 27/03/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yurdal SEVER

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Prof. Dr. Salih AYTAR
Süleyman Demirel Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Ulaş YAMANCI
Süleyman Demirel Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2020 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/03/2020

Şükrü TORTOP

ÖZET

Doktora Tezi

İSTATİSTİKSEL EPİ-YAKINSAKLIK

Şükrü TORTOP

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yurdal SEVER

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu ile ilgili temel kavramların tarihsel gelişimi ve elde edilen sonuçlar üzerinde duruldu. İkinci bölümde, tezde çalışılan konular için tanım, teorem ve lemmalara yer verildi. Üçüncü bölümde, istatistiksel epi-yakınsaklık tanımlanıp örneklerle anlatıldı. Bu yakınsaklık çeşidinin seviye kümeleriyle ilişkisi ve fonksiyonların monotonluk durumları incelendi. Bu bölümün son kısmında ise istatistiksel epi-yakınsaklık ile istatistiksel noktasal yakınsaklığın örtüşmesi için gereken şartlar elde edildi. Dördüncü bölümde, istatistiksel epi-yakınsaklık ile ilgili temel özellikler incelendi. Beşinci bölümde, küme dizilerinde istatistiksel yakınsaklığın açık ve kapalı kümeler yardımıyla çeşitli tanımları verildi ve bu tanımlar epi-limitler ile epigraflara aktarıldı. Altıncı bölümde, istatistiksel epi-yakınsaklık için dizisel karakterizasyonlar üzerinde duruldu. Son bölümde ise, bir önceki bölümde elde edilen karakterizasyonların ve teoremlerin optimizasyon problemlerinin çözümlerine sağladığı katkıyı gösteren uygulamalara yer verildi.

2020, v + 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, epi-yakınsaklık, epigraf, küme dizisi, optimizasyon.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

STATISTICAL EPI-CONVERGENCE

Şükrü TORTOP

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Yurdal SEVER

The thesis consists of seven chapters.

The first chapter includes the historical development of the basic concepts related to the thesis topic and the results. In the second chapter, definitions, theorems and lemmas are given for the topics studied in the thesis. In the third chapter, statistical epi-convergence is defined and explained with examples. The relationship of this type of convergence with level sets and the case of monotony of functions are examined. In the last part of this chapter, the requirements for the overlap of statistical epi-convergence and statistical pointwise convergence are expressed. In the fourth chapter, the basic features of statistical epi-convergence are studied. In the fifth chapter, various definitions related to statistical convergence of sequence of sets are obtained by using open and closed sets and transferred to epigraphs and epi-limits. In the sixth chapter, sequential characterizations for statistical epi-convergence have been focused on. In the last chapter, the applications that show the contribution of the characterizations and theorems obtained in the previous chapter to the solutions of optimization problems are included.

2020, v + 52 pages

Keywords: Statistical convergence, epi-convergence, epigraph, sequence of sets, optimization.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda daima yol gösteren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Yurdal SEVER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Derin bilgi ve tecrübesiyle her zaman yanımda olan ve yol gösteren Prof. Dr. Fatih NURAY'a teşekkür ederim.

Tezimi yazdığım süreç boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen ve beni yönlendiren Doç. Dr. Uğur ULUSU ve Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a da teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Şükrü TORTOP
Afyonkarahisar, 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
(x_n)	Reel sayı dizisi
$\delta(K)$	K kümesinin asimtotik yoğunluğu
$st\text{-}\lim_n x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$e\text{-}\lim_n f_n$	(f_n) dizisinin epi-limiti
$e_{st}\text{-}\lim_n f_n$	(f_n) dizisinin istatistiksel epi-limiti
$\Lambda_{(x_n)}$	(x_n) dizisinin istatistiksel limit noktaları kümesi
$\Gamma_{(x_n)}$	(x_n) dizisinin yığılma noktaları kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$\mathcal{N}(x)$	x noktasının tüm komşulukları kümesi
$B(x, \varepsilon)$	x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}(x, \varepsilon)$	x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar
(A_n)	Küme dizisi
$\mathcal{N}$	Doğal sayıların tümleyeni sonlu olan alt kümeleri
$\mathcal{N}^{\#}$	Doğal sayıların tüm sonsuz elemanlı alt kümeleri
$\mathcal{S}$	Doğal sayıların yoğunluğu 1 olan alt kümeleri
$\mathcal{S}^{\#}$	Doğal sayıların yoğunluğu 0 dan farklı alt kümeleri
$epi f$	f fonksiyonunun epigrafı
$lev_{\leq\alpha} f$	f fonksiyonunun seviye kümesi
$sc^{-} f$	f fonksiyonunun alttan yarı sürekli zarfı
$f_n \stackrel{st}{\rightarrow} f$	(f_n) dizisinin f ye istatistiksel noktasal yakınsaklığı
$f_n \stackrel{st\text{-}u}{\rightarrow} f$	(f_n) dizisinin f ye istatistiksel düzgün yakınsaklığı
$f_n \stackrel{e}{\rightarrow} f$	(f_n) dizisinin f ye epi-yakınsaklığı
$f_n \stackrel{e_{st}}{\rightarrow} f$	(f_n) dizisinin f ye istatistiksel epi-yakınsaklığı
$st\text{-}\liminf_n A_n$	(A_n) küme dizisinin istatistiksel alt limit kümesi
$st\text{-}\limsup_n A_n$	(A_n) küme dizisinin istatistiksel üst limit kümesi
$st\text{-}\lim_n A_n$	(A_n) dizisinin istatistiksel Kuratowski yakınsaklığı

1. GİRİŞ

Epi yakınsaklık, infimal yakınsaklık adı altında ilk olarak Wijsman (1964, 1966) tarafından bulunmuş ve konveks fonksiyonların yakınsaklığı üzerinde çalışılmıştır. Bu yakınsaklığın bulunmasında ve çalışılmasında en önemli etmenler optimizasyon ve verimlilik olmuştur.

Konveks fonksiyonların eşlenikleri ile olan bağlantısının önemi, matematikçilerin ilgisini epi-yakınsaklık üzerinde çalışmaya çekmiş ve Wijsman'ın katkılarından sonra epi-yakınsaklık temel olarak konveks analizin bir konusu haline gelmiştir. Bu kapsamda epi-yakınsaklık, konveks optimizasyon problemlerine yaklaşımlar için bir araç olarak kullanılmıştır. Bu durum matematikçilerin çalışmalarına da yansımıştır. Özel olarak Mosco (1969) varyasyonel eşitsizlikler üzerinde, Joly (1973) topolojik yapılar üzerinde, Salinetti ve Wets (1977) yarı sürekli konveks fonksiyonlarda, Attouch (1977) konveks fonksiyonlarda epi yakınsaklık ve bu fonksiyonların gradyan altı dönüşümlerinin grafiksel yakınsaklıklarında, McLinden ve Bergstrom (1981) konveks fonksiyonlara uygulanan çeşitli işlemlerde epi-yakınsaklığın korunması üzerinde çalışmışlardır. Bu yakınsaklığa epi-yakınsaklık adını ilk defa veren Wets (1980) de bu konuya katkı sağlayan matematikçiler arasındadır.

Epi-yakınsaklık üzerindeki çalışmalar artarken, 1970'lerin sonlarına doğru epi-yakınsaklık ve konvekslik arasındaki yakın ilişki zayıfladı ve bu yakınsaklık konveks olmayan fonksiyonların optimizasyon hesaplamalarında da kullanılan doğal bir yakınsaklık çeşidi olarak yerini aldı. Konvekslik ile epi-yakınsaklık arasındaki bu ilişkinin zayıflamasında yeni tip problemlerin üzerinde çalışan De Giorgi ve öğrencileri etkili oldu. Böylece epi-yakınsaklık tanımlarına farklı bir açıdan bakıldı ve konvekslik bu tanımlamalarda temel bir gereksinim olmaktan çıktı. De Giorgi ve Franzoni (1975, 1979), Buttazzo (1977), De Giorgi ve Dal Maso (1981) bu yakınsaklığı Gamma-yakınsaklık (Γ-convergence) olarak adlandırdılar. Bu konuda Dal Maso (1993) tarafından yazılan kitap bahsi geçen matematikçilerin çalışmalarını içermektedir. Diğer yandan Attouch ve Wets (1981, 1983) lineer olmayan programlama problemlerine yaklaşımlar üzerinde, Dolecki vd. (1983) alttan eş yarı süreklilik kavramları üzerinde çalışarak epi-yakınsaklık konusuna katkı sağlamışlardır.

Epi-yakınsaklığın kullanılmasındaki temel gereksinim bu yakınsaklık çeşidinin fonksiyon dizilerinin infimum noktalarını ve bu noktalarda alınan değerleri bulmasıdır. Böylece optimizasyon problemlerinin çözümünde kolaylık sağlanır. Özel olarak epi-yakınsaklık bu problemlerin çözümlerinde tutarlılığı ölçer. İstatistik alanında maksimum olasılık teorisi, tahmin edici fonksiyonların oluşturulması için kullanılan metodlardan biridir. Bu tahmin edici fonksiyonların taşıması gereken en önemli özellik tutarlılıktır. Hess (1996) epi-yakınsaklığı tahmin edici fonksiyonlarda tutarlılığı ölçmek için kullanmıştır. Konveks stokastik optimizasyon problemlerinin çözümlerinde epi-yakınsaklık yardımıyla tutarlılığı ölçen bir diğer çalışma King ve Wets (1991) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, örnek gözlemlerin sayısı arttıkça yaklaşımların doğru sonuç vermesi için fonksiyon dizisinin epi-yakınsak olması beklenir. Özellikle bu makaledeki Önerme 3.1, epi-yakınsaklığın minimizasyon işlemlerindeki önemini ortaya koyar. Epi-yakınsaklığın optimizasyon problemlerinin çözümünde tutarlılığı ölçtüğü diğer çalışmalar Dupacōvá ve Wets (1988), Arstein ve Wets (1988) tarafından yapılmıştır. Stokastik problemlerin çözümünde Pennanen (2005) epi-yakınsaklığı kullanmıştır. Özellikle bu çalışmada kullanılan Teorem 2, epi-yakınsaklığın optimal değerleri ve çözümleri nasıl bulduğunu gösterir. Bunların yanında epi-yakınsaklığın çeşitli problemlerin çözümlerinde sağladığı kolaylıkları gösteren çalışmalar Beer ve Lucchetti (1991), Jeyalakshmi (2012), Kall (1986) ve Zervos (1999) tarafından yapılmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık, pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu üzerinden tanımlanan ve yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi ile ortaya çıkan bir yakınsaklık çeşididir. Bu kavram ilk olarak Zygmund (1935) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra 1949'da düzenlenen bir konferansta Steinhaus tarafından bahsedilmiştir. Bu alandaki ilk makaleler Steinhaus (1951), Fast (1951) ve Schoenberg (1959) tarafından birbirinden bağımsız olarak yazılmıştır. Bu çalışmalardan sonra istatistiksel yakınsaklık kavramı daha detaylı incelenmiştir. Fridy (1993) istatistiksel limit noktaları, Fridy ve Orhan (1997) istatistiksel alt ve üst limitler üzerinde çalışarak katkı sağlamışlardır. Fonksiyon dizilerinde istatistiksel noktasal yakınsaklık Gökhan ve Güngör (2002) tarafından, fonksiyon dizilerinde istatistiksel düzgün yakınsaklık ise Güngör ve Gökhan (2005) tarafından çalışılmıştır. Nuray ve Rhoades (2012) küme dizilerinde istatistiksel yakınsaklığı tanımlamışlardır. Talo vd. (2016) ise küme dizilerindeki istatistiksel yakınsaklık kavramını metrik uzaylarda detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

Bu çalışma, istatistiksel yakınsaklık yardımıyla epi-yakınsaklık kavramına yeni bir boyut kazandırarak optimizasyon problemlerinin çözümlerinde kolaylık sağlanması amacıyla yapılmıştır. Bu alternatif yöntemle fonksiyon dizisindeki yoğunluğu sıfır olan fonksiyonların elenmesi sağlanarak minimizasyon işlemlerinin verimliliği artırılır.

Tezin ikinci bölümünde epi-yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık kavramlarının tarihsel gelişiminde elde edilen ve tezde kullanılan çeşitli tanımlar, teoremler ve önermeler yer almaktadır.

Üçüncü bölümde temel kavramlar kısmında verilen küme dizilerinde istatistiksel Kuratowski yakınsaklık kavramı yardımıyla istatistiksel epi-yakınsaklık tanımlanmıştır. Bu tanım kullanılarak epi-yakınsak olmadığı halde istatistiksel epi-yakınsak olan fonksiyon dizisi örneği verilmiştir. İstatistiksel noktasal yakınsaklık ile istatistiksel epi-yakınsaklık arasındaki farklar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Altıncı bölümde dizisel karakterizasyonlarda kullanılmak üzere, istatistiksel alt ve üst epi-limitin topolojik tanımları yapılmıştır. Bu tanımlar sayesinde istatistiksel epi-limitin minimizasyon problemlerinde kullanılabilirliği artırılmıştır. Bunun yanında seviye kümeleri üzerinden istatistiksel epi-yakınsaklık için bir karakterizasyon verilmiştir. Fonksiyon dizilerinin monotonluk durumlarında istatistiksel epi-yakınsağın hesaplanması üzerinde durulmuştur. Bu bölümün son kısmında istatistiksel noktasal yakınsaklık ile istatistiksel epi-yakınsaklığın örtüşmesi için gereken şartlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde istatistiksel epi-yakınsaklık ile ilgili temel özelliklere yer verilmiştir. Bu bölümde istatistiksel düzgün yakınsaklık ile istatistiksel epi-yakınsaklık arasındaki ilişki, bileşke fonksiyonların istatistiksel epi-limitleri, iki fonksiyon dizisinin toplamının istatistiksel alt ve üst epi-limitleri ve konveks fonksiyon dizilerinin istatistiksel üst epi-limiti incelenerek örneklerle anlatılmıştır.

Beşinci bölümde kapalı kümeler üzerinden küme dizilerinde istatistiksel yakınsaklık ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Küme dizilerinden elde edilen teoremler alttan yarı sürekli fonksiyonların epigraflarına aktarılmıştır. Epigraflardan elde edilen sonuçlar ise istatistiksel alt ve üst epi-limitlerin infimum değerler üzerinden farklı tanımlarının verilmesine olanak sağlamıştır.

Altıncı bölümde istatistiksel alt ve üst epi-yakınsaklık diziler üzerinden tanımlanmıştır. İstatistiksel üst epi-limitin çift gerektirmeli, istatistiksel alt epi-limitin ise çift gerektirmeli olmadığı gösterilmiştir. Bu limitler yardımıyla tanımlanan istatistiksel epi-yakınsaklığın olağan epi-yakınsaklığın aksine çift gerektirmeli olmadığı gösterilmiştir. Bunun ispatında istatistiksel yığılma ve limit noktalarına odaklanılmıştır. Ayrıca $x \in X$ noktasının istatistiksel yığılma noktası olarak belirlendiği teoremlerde x noktasının istatistiksel limit noktası olarak kullanılamayacağı örnekler üzerinden gösterilmiştir.

Yedinci bölümde istatistiksel epi-yakınsaklığın optimizasyon problemlerinin çözümlerinde sağladığı kolaylık anlatılmıştır. Özellikle bir önceki bölümde elde edilen dizisel karakterizasyonlar yardımıyla oluşturulan ve minimizasyon işlemlerinde kolaylık sağlayan bir teorem verilmiştir. Bu teoremin şartlarını sağlayan ve sağlamayan iki örnek verilerek teoremin optimizasyon problemlerine olan katkısı ortaya konulmuştur.

Son olarak, tez için temel kaynak olarak kullanılan kitap ve makaleler, kaynaklar kısmında verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan tanım, teorem, lemma ve önermeler yer almaktadır.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir (Balcı 2010).

Tanım 2.2 X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

(i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$,

(ii) Her $x, y \in X$ için $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$,

(iii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomlarını sağlıyorsa $d(x, y)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise metrik uzay denir (Şuhubi 2001).

Tanım 2.3 (X, d) metrik uzayında x merkezli ve ε yarıçaplı açık ve kapalı yuvarlar

$$B(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\},$$
$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

ile gösterilir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.4 (X, d) metrik uzayında bir x noktasının ε komşuluğu

$$B(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$$

eşitliği ile tanımlanır. x noktasının tüm komşuluklarının kümesi $\mathcal{N}(x)$ ile gösterilir (Rockafellar ve Wets 2009).

Tanım 2.5 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, her sonsuz dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa X e kompakt denir (Şuhubi 2001).

Tanım 2.6 N bir lineer uzay olmak üzere $x, y \in N$ ve a skaleri için

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(iii) $\|ax\| = |a|\|x\|$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

aksiyomları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N, \|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.7 L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olmak üzere, keyfi seçilen $x, y \in A$ için

$$K = \{z \in L : z = (1 - \lambda)x + \lambda y,\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq A$$

gerçekleniyor ise A kümesine konveks küme denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.8 A bir konveks küme olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in A$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonuna A üzerinde konveks fonksiyon denir (Rockafellar ve Wets 2009).

Tanım 2.9 Bir $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $x \in X$ noktasında

$$f(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in V} f(y)$$

eşitliğini sağlıyor ise bu fonksiyona alttan yarı sürekli fonksiyon denir (Rockafellar ve Wets 2009).

Tanım 2.10 (a_n) bir reel sayı dizisi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\mid a_n - L \mid < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (a_n) dizisi L ye yakınsaktır denir (Balcı 2010).

Tanım 2.11 Bir K kümesi $K \subseteq \mathbb{N}$ olacak şekilde seçilsin. Eğer

$$\delta(K) = \lim_k \frac{1}{k} |\{n \leq k : n \in K\}|$$

limiti mevcut ise, $\delta(K)$ sayısına K kümesinin asimtotik yoğunluğu denir. Burada verilen $|\{n \leq k : n \in K\}|$ ifadesi K kümesinin k yı geçmeyen eleman sayısını belirtir (Niven ve Zuckerman 1980).

$K_1, K_2 \subset \mathbb{N}$ olmak üzere asimptotik yoğunluk ile ilgili aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

(i) $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 1$ ise $\delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1 \cup K_2) = 1$,

(ii) $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$ ise $\delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1 \cup K_2) = 0$.

Tanım 2.12 (x_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_k \frac{1}{k} |\{n \leq k : |x_n - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_n) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama

$$st\text{-}\lim_n x_n = L$$

ile gösterilir (Steinhaus 1951, Fast 1951, Šalát 1980, Fridy 1985).

Tanım 2.13 (x_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere $B_{(x_n)}$ ve $A_{(x_n)}$ kümeleri

$$B_{(x_n)} = \{b \in \mathbb{R} : \delta(\{n : x_n > b\}) \neq 0\},$$

$$A_{(x_n)} = \{a \in \mathbb{R} : \delta(\{n : x_n < a\}) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, (x_n) dizisi için istatistiksel üst ve alt limitler

$$\text{st-}\limsup_n x_n = \begin{cases} \sup B_{(x_n)}, & B_{(x_n)} \neq \emptyset \text{ ise} \\ -\infty, & B_{(x_n)} = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

$$\text{st-}\liminf_n x_n = \begin{cases} \inf A_{(x_n)}, & A_{(x_n)} \neq \emptyset \text{ ise} \\ +\infty, & A_{(x_n)} = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır (Fridy ve Orhan 1997).

Lemma 2.14 Eğer $\beta = \text{st-}\limsup_n x_n$ sonlu ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta - \varepsilon\}) \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\}) = 0 \tag{2.2}$$

sağlanır. Tersine olarak, eğer (2.1) ve (2.2) ifadeleri sağlanırsa bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\beta = \text{st-}\limsup_n x_n$ olur (Fridy ve Orhan 1997).

Benzer şekilde, $\text{st-}\liminf_n x_n$ için de aşağıdaki lemma geçerlidir.

Lemma 2.15 Eğer $\mu = \text{st-}\liminf_n x_n$ sonlu ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n < \mu + \varepsilon\}) \neq 0, \tag{2.3}$$

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n < \mu - \varepsilon\}) = 0 \tag{2.4}$$

sağlanır. Tersine olarak, eğer (2.3) ve (2.4) ifadeleri sağlanırsa bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\mu = \text{st-}\liminf_n x_n$ olur (Fridy ve Orhan 1997).

Tanım 2.16 (X, d) metrik uzay olmak üzere, $k \to \infty$ için $x_{n_k} \to \lambda$ olacak şekilde $\delta(K) \neq 0$ özelliğinde bir $K = \{n_1 < n_2 < n_3 < ...\}$ kümesi varsa, $\lambda \in X$ noktası (x_n) dizisinin istatistiksel limit noktası olarak adlandırılır. Ayrıca, (x_n) dizisinin tüm istatistiksel limitlerinin oluşturduğu küme $\Lambda_{(x_n)}$ ile gösterilir (Fridy 1993).

Tanım 2.17 (X, d) metrik uzay olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, \gamma) < \varepsilon\}) \neq 0$$

oluyorsa $\gamma \in X$ noktasına (x_n) dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir. Ayrıca, (x_n) dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının oluşturduğu küme $\Gamma_{(x_n)}$ ile gösterilir (Fridy 1993).

Bir (x_n) dizisinin istatistiksel limit noktaları kümesi ile istatistiksel yığılma noktaları kümesi için $\Lambda_{(x_n)} \subseteq \Gamma_{(x_n)}$ bağıntısı geçerlidir.

Tanım 2.18 (X, d) metrik uzayı ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. $A \subseteq X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_k \frac{1}{k} |\{n \leq k : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her bir } x \in A \text{ için}\}| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{st} f$ ile gösterilir (Gökhan ve Güngör 2002).

Tanım 2.19 (X, d) metrik uzayı ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dizisi verilsin. Her bir $x \in X$ ve x noktasına yakınsayan her bir $(x_n) \in X$ dizisi için

$$f_n(x_n) \xrightarrow{st} f(x)$$

oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna istatistiksel sürekli yakınsaktır denir (Koćinac ve Caserta 2012).

Tanım 2.20 (X, d) metrik uzayı ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. $A \subseteq X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_k \frac{1}{k} |\{n \leq k : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için}\}| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{st\text{-}u} f$ ile gösterilir (Güngör ve Gökhan 2005).

Teorem 2.21 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X üzerinde tanımlı reel değerli (f_n) dizisi ve f fonksiyonu için verilen

(i) f_n dizisi f ye istatistiksel sürekli yakınsak,

(ii) f sürekli ve $f_n \xrightarrow{st\text{-}u} f$

ifadeleri birbirine denktir (Koćinac ve Caserta 2012).

$\mathbb{N}$ kümesinin alt kümeleri olan koleksiyonlar

$$\mathcal{N} = \{N \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus N \text{ sonlu}\},$$
$$\mathcal{N}^{\#} = \{N \subset \mathbb{N} : N \text{ sonsuz}\}$$

eşitlikleri ile verilir ve küme dizilerinde alt ve üst limitlerin karakterizasyonunda kullanılır.

Tanım 2.22 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X in kapalı alt kümelerinden oluşan (A_n) küme dizisinin alt ve üst limitleri

$$\liminf_n A_n = \{x \mid \forall V \in \mathcal{N}(x),\ \exists N \in \mathcal{N},\ \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset\},$$
$$\liminf_n A_n = \{x \mid \exists N \in \mathcal{N},\ \forall n \in N,\ \exists x_n \in A_n : \lim_{n \in N} x_n = x\},$$
$$\limsup_n A_n = \{x \mid \forall V \in \mathcal{N}(x),\ \exists N \in \mathcal{N}^{\#},\ \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset\},$$
$$\limsup_n A_n = \{x \mid \exists N \in \mathcal{N}^{\#},\ \forall n \in N,\ \exists x_n \in A_n : \lim_{n \in N} x_n = x\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu limitler birbirine eşit olduğunda (A_n) küme dizisinin limiti mevcuttur (Rockafellar ve Wets 2009).

$$\lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n.$$

$\mathbb{N}$ kümesinin alt kümeleri olan koleksiyonlar

$$\mathcal{S} = \{N \subset \mathbb{N} : \delta(N) = 1\},$$
$$\mathcal{S}^{\#} = \{N \subset \mathbb{N} : \delta(N) \neq 0\}$$

eşitlikleri ile verilir. Bu koleksiyonlar, küme dizilerinde istatistiksel alt ve üst limitlerin karakterizasyonunda kullanılır. İstatistiksel alt ve üst limitler, bu tezde çalışılan istatistiksel epi-limitleri oluşturmak için önemlidir. Bu çalışmada küme dizilerinde kullanılan yakınsaklık çeşidi, istatistiksel Painlev*é*-Kuratowski (Kuratowski 1958) yakınsaklığıdır.

Tanım 2.23 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X in kapalı alt kümelerinden oluşan (A_n) küme dizisinin istatistiksel alt ve üst limitleri

$$\text{st-}\liminf_n A_n = \{x \mid \forall V \in \mathcal{N}(x), \exists N \in \mathcal{S}, \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset\}, \tag{2.5}$$

$$\text{st-}\liminf_n A_n = \{x \mid \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{S}, \forall n \in N : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}, \tag{2.6}$$

$$\text{st-}\limsup_n A_n = \{x \mid \forall V \in \mathcal{N}(x), \exists N \in \mathcal{S}^{\#}, \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset\}, \tag{2.7}$$

$$\text{st-}\limsup_n A_n = \{x \mid \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{S}^{\#}, \forall n \in N : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Bu limitler birbirine eşit olduğunda (A_n) küme dizisinin istatistiksel limiti mevcuttur (Talo vd. 2016).

$$\text{st-}\lim_n A_n = \text{st-}\liminf_n A_n = \text{st-}\limsup_n A_n.$$

Önerme 2.24 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X in kapalı alt kümelerinden oluşan (A_n) küme dizisinin istatistiksel alt ve üst limitleri metrik uzaklık üzerinden

$$\text{st-}\limsup_n A_n = \left\{x \mid \text{st-}\liminf_n d(x, A_n) = 0\right\}, \tag{2.9}$$

$$\text{st-}\liminf_n A_n = \left\{x \mid \text{st-}\lim_n d(x, A_n) = 0\right\} \tag{2.10}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Talo vd. 2016).

Önerme 2.25 (X,d) bir metrik uzay ve (A_n), X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere, (A_n) dizisinin istatistiksel alt limiti

$$\text{st-}\liminf_n A_n = \{x \mid \exists N \in \mathcal{S}, \forall n \in N, \exists y_n \in A_n : \lim_n y_n = x\} \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir (Talo vd. 2016).

Önerme 2.26 (X,d) bir metrik uzay ve (A_n), X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere, (A_n) dizisinin istatistiksel üst limiti

$$\text{st-}\limsup_n A_n = \{x \mid \exists N \in \mathcal{S}^{\#}, \forall n \in N, \exists y_n \in A_n : x \in \Gamma_{(y_n)}\} \tag{2.12}$$

şeklinde ifade edilir (Talo vd. 2016).

Tanım 2.27 X üzerinde bir f fonksiyonunun epigrafı

$$epif = \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq f(x)\}$$

kümesi ile tanımlanır. Ayrıca X üzerindeki f ve g fonksiyonları için

$$epif \subseteq epig \;\Leftrightarrow\; g \leq f \tag{2.13}$$

önermesi geçerlidir (Rockafellar ve Wets 2009).

Tanım 2.28 X üzerinde bir f fonksiyonunun seviye kümesi

$$lev_{\leq\alpha}f = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır (Rockafellar ve Wets 2009).

Tanım 2.29 X üzerinde herhangi bir (f_n) fonksiyon dizisi için alt epi-limit fonksiyonu olan $e\text{-}\liminf_n f_n$

$$epi(e\text{-}\liminf_n f_n) = \limsup_n (epif_n)$$

eşitliği ile, bu fonksiyon dizisinin üst epi-limit fonksiyonu $e\text{-}\limsup_n f_n$ ise

$$epi(e\text{-}\limsup_n f_n) = \liminf_n (epif_n)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu fonksiyonlar birbirine eşit olduğunda (f_n) dizisinin epi-limiti mevcuttur.

$$e\text{-}\lim_n f_n = e\text{-}\liminf_n f_n = e\text{-}\limsup_n f_n.$$

Böylece (f_n) dizisi f fonksiyonuna epi-yakınsaktır. Bu yakınsaklık $f_n \xrightarrow{e} f$ sembolü ile gösterilir (Rockafellar ve Wets 2009).

Ayrıca bu yakınsama mevcut olduğunda, (f_n) dizisinin epigrafı ile f fonksiyonunun epigrafı arasında da Kuratowski yakınsaklık bağıntısı kurulmuş olur.

$$e\text{-}\lim_n f_n = f \;\;\Leftrightarrow\;\; \lim_n epi f_n = epi f.$$

Sıradaki tanım epi-yakınsaklık için bir dizisel karakterizasyondur.

Tanım 2.30 (X, d) bir metrik uzay olsun. Her bir $x \in X$ için (f_n) dizisinin f fonksiyonuna epi-yakınsak olması için gerek ve yeter şart

(i) $\forall\ x_n \longrightarrow x$ dizisi için, $f(x) \leq \liminf_n f_n(x_n)$,

(ii) $\exists\ x_n \longrightarrow x$ dizisi için, $f(x) = \lim_n f_n(x_n)$

koşullarının sağlanmasıdır (Rockafellar ve Wets 2009).

Tanım 2.31 Herhangi bir $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun alttan yarı sürekli zarfı olan $sc^- f$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$(sc^- f)(x) = \sup_{g \in \mathcal{G}(f)} g(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{G}(f)$ kümesi, her $y \in X$ için $g(y) \leq f(y)$ eşitsizliğini sağlayan X üzerindeki alttan yarı sürekli g fonksiyonlarının kümesidir (Dal Maso 1993).

Önerme 2.32 Herhangi bir $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verildiğinde, her $x \in X$ için

$$(sc^- f)(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in V} f(y)$$

eşitliği sağlanır (Dal Maso 1993).

3. İSTATİSTİKSEL EPİ-YAKINSAKLIK

Bu bölümde, küme dizilerinde istatistiksel Kuratowski yakınsaklık üzerinden istatistiksel epi-yakınsaklık tanımlanmıştır. Detaylı örneklerle epi-yakınsak olmayıp, istatistiksel epi-yakınsak olan fonksiyonlar incelenmiştir. Ayrıca epi-yakınsaklık tanımı, bir $x \in X$ noktasının metrik uzaydaki komşulukları üzerinden verilmiştir.

Tanım 3.1 (X, d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon dizisi olmak üzere, istatistiksel alt epi-limit $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n$

$$epi(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n) = st\text{-}\limsup_n (epi f_n) \tag{3.1}$$

eşitliği ile, istatistiksel üst epi-limit $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n$ ise

$$epi(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n) = st\text{-}\liminf_n (epi f_n) \tag{3.2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu iki limit birbirine eşit olduğunda istatistiksel epi-limit elde edilir ve $f_n \overset{e_{st}}{\to} f$ ile gösterilir.

$$f = e_{st}\text{-}\lim_n f_n = e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = e_{st}\text{-}\liminf_n f_n.$$

Alt epi-limit ve üst epi-limit arasında (3.1), (3.2) ve (2.13) kullanılarak

$$e_{st}\text{-}\liminf_n f_n \leq e_{st}\text{-}\limsup_n f_n$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada kullanılan yakınsaklık türü, küme dizilerinde kullanılan istatistiksel Painlevé-Kuratowski yakınsaklığıdır. (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak olduğunda aşağıdaki kapsama bağıntısı elde edilir.

$$st\text{-}\limsup_n (epi f_n) \subset epi f \subset st\text{-}\liminf_n (epi f_n).$$

Ayrıca (3.1), (3.2) ve Tanım 2.1 (Talo vd. 2016) kullanılarak (f_n) dizisi için

$$e\text{-}\liminf_n f_n \leq e_{st}\text{-}\liminf_n f_n,$$

$$e\text{-}\limsup_n f_n \geq e_{st}\text{-}\limsup_n f_n$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Epi-limitin mevcut olmadığı bir fonksiyon dizisinde istatistiksel epi-limit mevcut olabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilir.

Örnek 3.2 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} nxe^{nx}, & n \text{ tam kare ise} \\ nxe^{2nx}, & n \text{ tam kare değil ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon dizisinin alt epi-limit fonksiyonu

$$e\text{-}\liminf_n f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ise} \\ -\frac{1}{e}, & x = 0 \text{ ise} \\ \infty, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve üst epi-limit fonksiyonu

$$e\text{-}\limsup_n f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ise} \\ -\frac{1}{2e}, & x = 0 \text{ ise} \\ \infty, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Alt epi-limit ve üst epi-limit fonksiyonları birbirine eşit olmadığından fonksiyon dizisi epi-yakınsak değildir. Diğer yandan, verilen fonksiyon dizisinin istatistiksel epi-limiti mevcuttur ve

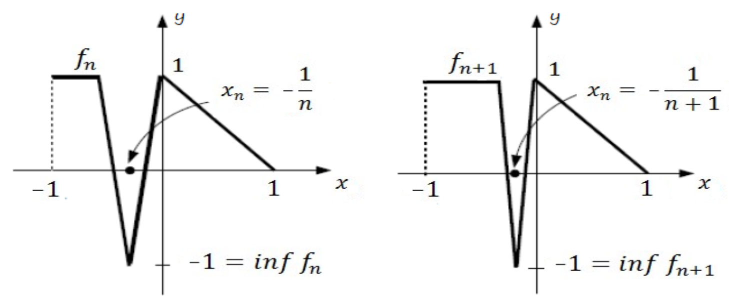
$$e_{st}\text{-}\lim_n f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ise} \\ -\frac{1}{2e}, & x = 0 \text{ ise} \\ \infty, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonuna eşittir.

Şimdi istatistiksel epi-yakınsaklık ile istatistiksel noktasal yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir. Genel olarak istatistiksel epi-yakınsaklık ile istatistiksel noktasal yakınsaklık arasında bir kapsama bağıntısı verilemez. Bu nedenle bu yakınsaklık çeşitleri birbirini gerektirmez. Aralarındaki temel fark; istatistiksel epi-yakınsaklıkta fonksiyon dizisinin yakınsadığı fonksiyondaki minimum noktalar bulunurken, istatistiksel noktasal yakınsaklıkta bu noktalar genellikle bulunamaz. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilir.

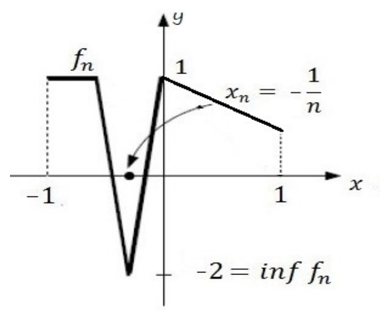
Örnek 3.3 $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f_n : [\text{-}1, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} \min\{1, 1\text{-}\frac{x}{2}, 3n|x + \frac{1}{n}|\text{-}2\}, & n = k^2 \ ise \\ \min\{1, 1\text{-}x, 2n|x + \frac{1}{n}|\text{-}1\}, & n \neq k^2 \ ise. \end{cases}$$



Şekil 1: $n \neq k^2$ iken (f_n) dizisi

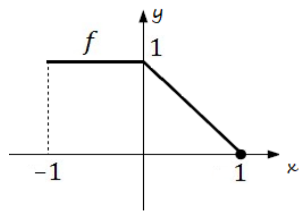
Şekil 1 de (f_n) dizisinin $n \neq k^2$ olması durumunda grafiği verilmiştir. Açık olarak, fonksiyon dizisi bu durumda infimum değeri olan -1 değerini $x_n = \text{-}\frac{1}{n}$ noktalarında alır.



Şekil 2: $n = k^2$ iken (f_n) dizisi

Şekil 2 de ise aynı fonksiyon dizisinin $n = k^2$ olması durumunda grafiği verilmiştir. Bu grafikte ise fonksiyon dizisi infimum değeri olan -2 değerini aynı şekilde $x_n = \text{-}\frac{1}{n}$ noktalarında alır.

Fonksiyon dizisinin tanımından ve grafikten de görüleceği üzere, bu dizi hiçbir f fonksiyonuna noktasal yakınsak değildir. Fakat bu dizinin istatistiksel noktasal limiti mevcuttur ve bu fonksiyon $x \in [\text{-}1, 1]$ için $f(x) = \min\{1, 1\text{-}x\}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon ise tüm değerlerini 0 sayısına eşit veya 0 sayısından büyük olacak şekilde almaktadır. 0 değerini aldığı nokta ise $x = 1$ noktasıdır ($f(1) = 0$). Dolayısıyla fonksiyon dizisinin infimum değeri ile f fonksiyonunun infimum değeri birbirine eşit değildir. Şekil 3 te $x \in [\text{-}1, 1]$ için fonksiyon dizisinin istatistiksel noktasal yakınsak olduğu fonksiyon verilmiştir.



Şekil 3: İstatistiksel noktasal limit fonksiyonu ($f_n \xrightarrow{st} f$)

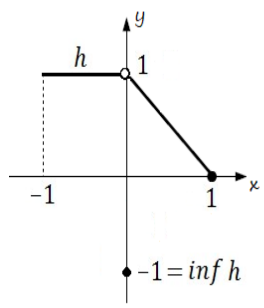
Şimdi bu dizinin epi-yakınsak olup olmadığını araştıralım. $x = 0$ noktası incelendiğinde

$$e\text{-}\liminf_n f_n(0) = \text{-}2 \neq e\text{-}\limsup_n f_n(0) = \text{-}1$$

olduğundan bu fonksiyon dizisi epi-yakınsak değildir. Diğer yandan bu dizinin istatistiksel epi-yakınsak olduğu görülür. Tanım 3.1 göz önüne alındığında bu dizi h fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsaktır.

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\text{-}1, 0) \text{ ise} \\ \text{-}1, & x = 0 \text{ ise} \\ 1\text{-}x, & x \in (0, 1] \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda bu yakınsama $f_n \xrightarrow{e_{st}} h$ şeklinde ifade edilir ve Şekil 4 te bu fonksiyon gösterilmiştir.



Şekil 4: İstatistiksel epi-limit fonksiyonu ($f_n \xrightarrow{e_{st}} h$)

Sonuç olarak $x = 0$ noktasında istatistiksel noktasal limit değeri ile istatistiksel epi-limit değeri birbirinden farklıdır. Bu iki yakınsaklık çeşidinde fonksiyon dizisinin aynı limit fonksiyonuna sahip olması için gereken şartlar bölümün sonunda verilecektir.

Lemma 3.4 ve Lemma 3.5 istatistiksel epi-yakınsaklığın komşuluklar üzerinden ifade edilmesini sağlar.

Lemma 3.4 (X, d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon dizisi olsun. Her $x \in X$ için bir $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$g(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \operatorname{st-}\liminf_{n} \inf_{y \in V} f_n(y)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\operatorname{st-}\limsup_{n} (epif_n) = epig$$

elde edilir.

İspat. $\operatorname{st-}\limsup_n (epif_n) \subset epig$ ve $epig \subset \operatorname{st-}\limsup_n (epif_n)$ kapsama bağıntılarının gösterilmesi gerekir. Keyfi bir $(x, \alpha) \in \operatorname{st-}\limsup_n (epif_n)$ seçilsin. Burada (2.7) kullanılırsa, keyfi bir $V_0 \in \mathcal{N}(x)$, $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için

$$\Big(V_0 \times (-\infty, \alpha + \varepsilon)\Big) \bigcap epif_n \neq \emptyset$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ vardır. Buradan

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \inf_{y \in V_0} f_n(y) < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir. Lemma 2.15 kullanılırsa,

$$\operatorname{st-}\liminf_{n} \inf_{y \in V_0} f_n(y) \leq \alpha + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. V_0 ve ε keyfi olduğundan, $g(x) \leq \alpha$ ve böylece $(x, \alpha) \in epig$ olur. Buradan

$$\operatorname{st-}\limsup_{n} (epif_n) \subset epig \tag{3.3}$$

elde edilir.

$epig \subset \text{st-}\limsup_n(epif_n)$ olduğunu göstermek için keyfi bir $V_0 \in \mathcal{N}(x)$ ve bir $\varepsilon > 0$ seçilir. $(x, \alpha) \in epig$ için

$$\alpha + \varepsilon > g(x) \geq \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in V_0} f_n(y)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 2.15 kullanılırsa

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \inf_{y \in V_0} f_n(y) < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0$$

sağlanır. Her $n \in N$ için

$$\Big(V_0 \times (-\infty, \alpha + \varepsilon)\Big) \bigcap epif_n \neq \emptyset$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ vardır. Buradan

$$\Big(V_0 \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\Big) \bigcap epif_n \neq \emptyset$$

elde edilir. Bu durumda $(x, \alpha) \in \text{st-}\limsup_n(epif_n)$ ve böylece

$$epig \subset \text{st-}\limsup_n(epif_n) \tag{3.4}$$

bağıntısı sağlanır. (3.3) ve (3.4) kullanılarak istenilen elde edilir. □

Lemma 3.5 (X, d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon dizisi olsun. Her $x \in X$ için bir $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$h(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

seklinde tanımlansın. Bu durumda

$$st\text{-}\liminf_n(epif_n) = epih$$

elde edilir.

İspat. $\text{st-}\liminf_n(epif_n) \subset epih$ ve $epih \subset \text{st-}\liminf_n(epif_n)$ kapsama bağıntılarının gösterilmesi gerekir. Keyfi bir $(x, \alpha) \in \text{st-}\liminf_n(epif_n)$ seçilsin. Burada (2.5) kullanılırsa, keyfi bir $V_0 \in \mathcal{N}(x)$, $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için

$$\Big(V_0 \times (-\infty, \alpha + \varepsilon)\Big) \bigcap epif_n \neq \emptyset$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Buradan

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \inf_{y \in V_0} f_n(y) > \alpha + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Lemma 2.14 kullanılırsa

$$\text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V_0} f_n(y) \leq \alpha + \varepsilon \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. V_0 ve ε keyfi olduğundan, $h(x) \leq \alpha$ ve $(x, \alpha) \in epih$ olur. Böylece

$$\text{st-}\liminf_n (epif_n) \subset epih \tag{3.6}$$

elde edilir.

$epih \subset \text{st-}\liminf_n (epif_n)$ olduğunu göstermek için keyfi bir $V_0 \in \mathcal{N}(x)$ ve bir $\varepsilon > 0$ seçilir. Her $(x, \alpha) \in epih$ için

$$\text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V_0} f_n(y) \leq h(x) < \alpha + \varepsilon \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer bir ifade ile

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \inf_{y \in V_0} f_n(y) < \alpha + \varepsilon\}) = 1$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : V_0 \times (-\infty, \alpha + \varepsilon) \bigcap epif_n \neq \emptyset\}) = 1$$

olur. Buradan ise

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : V_0 \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \bigcap epif_n \neq \emptyset\}) = 1$$

eşitliğinden $(x, \alpha) \in \text{st-}\liminf_n (epif_n)$ elde edilir. Böylece

$$epih \subset \text{st-}\liminf_n (epif_n) \tag{3.8}$$

bağıntısı sağlanır. (3.6) ve (3.8) kullanılarak istenilen elde edilir. $\square$

Lemma 3.4 ve Lemma 3.5 ten elde edilen sonuçlar, istatistiksel alt ve üst epi-limitlerin topolojik tanımlarının verilmesini sağlar. Tanım 3.6 ile bu limitlere yer verilecektir.

Tanım 3.6 (X,d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi olsun. Her $x \in X$ için, istatistiksel alt epi-limit

$$\left(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n\right)(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

ve istatistiksel üst epi-limit

$$\left(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n\right)(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

şeklinde tanımlanır. Bir $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n = e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = f$ eşitliğini sağlıyorsa $f = e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ olarak ifade edilir ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel epi-yakınsaktır denir ($f_n \overset{e_{st}}{\to} f$).

Lemma 3.7 (x_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere, istatistiksel alt limit

$$st\text{-}\liminf_n x_n = \inf_{N \in \mathcal{S}^{\#}} \sup_{n \in N} x_n = \sup_{N \in \mathcal{S}} \inf_{n \in N} x_n$$

ve istatistiksel üst limit

$$st\text{-}\limsup_n x_n = \sup_{N \in \mathcal{S}^{\#}} \inf_{n \in N} x_n = \inf_{N \in \mathcal{S}} \sup_{n \in N} x_n$$

olacak şekilde tanımlandığından istatistiksel alt epi-limit

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n)(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{N \in \mathcal{S}^{\#}} \sup_{n \in N} \inf_{y \in V} f_n(y) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \sup_{N \in \mathcal{S}} \inf_{n \in N} \inf_{y \in V} f_n(y)$$

ve istatistiksel üst epi-limit

$$(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n)(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \sup_{N \in \mathcal{S}^{\#}} \inf_{n \in N} \inf_{y \in V} f_n(y) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{N \in \mathcal{S}} \sup_{n \in N} \inf_{y \in V} f_n(y)$$

eşitlikleri ile ifade edilir.

Uyarı 3.8 (X,d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ alttan yarı sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n(x)$ fonksiyonları x ten bağımsız ise, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in X$ için $f_n(x) = a_n$ olacak şekilde bir $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ sabit dizisi vardır. Bu durumda istatistiksel alt epi-limit

$$e_{st}\text{-}\liminf_n f_n(x) = \text{st-}\liminf_n a_n$$

ve istatistiksel üst epi-limit

$$e_{st}\text{-}\limsup_n f_n(x) = \text{st-}\limsup_n a_n$$

eşitlikleri ile gösterilir.

Uyarı 3.9 (X, d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer $f_n(x)$ fonksiyonları n den bağımsız ise, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in X$ için $f_n(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$e_{st}\text{-}\liminf_n f_n = e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = sc^- f$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 3.10 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, her $x \in X$ için

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n)(x) \leq st\text{-}\liminf_n f_n(x),$$

$$(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n)(x) \leq st\text{-}\limsup_n f_n(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Her $x \in X$, her $V \in \mathcal{N}(x)$ ve her $n \in N$ için

$$\inf_{y \in V} f_n(y) \leq f_n(x)$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. İndeks kümesinin seçiminden dolayı

$$st\text{-}\liminf_n \inf_{y \in V} f_n(y) \leq st\text{-}\liminf_n f_n(x),$$

$$st\text{-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y) \leq st\text{-}\limsup_n f_n(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerde $V \in \mathcal{N}(x)$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup_{V \in \mathcal{N}(x)} st\text{-}\liminf_n \inf_{y \in V} f_n(y) \leq st\text{-}\liminf_n f_n(x),$$

$$\sup_{V \in \mathcal{N}(x)} st\text{-}\limsup_n inf_{y \in V} f_n(y) \leq st\text{-}\limsup_n f_n(x)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n)(x) \leq st\text{-}\liminf_n f_n(x),$$

$$(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n)(x) \leq st\text{-}\limsup_n f_n(x)$$

olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.11 (X,d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ alttan yarı sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Her bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $lev_{\leq\alpha} f = \text{st-}\lim_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$ eşitliğini sağlayacak şekilde α noktasına istatistiksel yakınsak reel değerli bir α_n dizisi varsa, $f = e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ elde edilir.

İspat. Teoremi ispatlamak için varsayılan $lev_{\leq\alpha} f = \text{st-}\lim_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$ eşitliği

$$\text{st-}\limsup_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n) \subset lev_{\leq\alpha} f \subset \text{st-}\liminf_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$$

bağıntıları üzerinden kullanılacaktır. $(x,\alpha) \in epi f$ seçilirse $x \in lev_{\leq\alpha} f$ elde edilir. α ya istatistiksel yakınsak bir α_n dizisi seçilsin ve $lev_{\leq\alpha} f \subset \text{st-}\liminf_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$ kapsama bağıntısının sağlandığı kabul edilsin. Böylece $x \in \text{st-}\liminf_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$ elde edilir. Önerme 2.25 kullanılırsa $x_n \in (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$ olacak şekilde x noktasına istatistiksel yakınsak bir x_n dizisi vardır. Bu ise $(x_n,\alpha_n) \in epi f_n$ olmasıdır. Bu durumda $(x_n,\alpha_n) \xrightarrow{st} (x,\alpha)$ ve $(x,\alpha) \in \text{st-}\liminf_n (epi f_n)$ sağlanır. Buradan ise

$$epi f \subset \text{st-}\liminf_n (epi f_n) \tag{3.9}$$

elde edilir.

$\text{st-}\limsup_n (epi f_n) \subset epi f$ kapsama bağıntısını göstermek için, aksi varsayılsın ve $(x,\beta) \in \text{st-}\limsup_n (epi f_n)$ fakat $(x,\beta) \notin epi f$ olsun. Bu durumda $\beta < f(x)$ olur. Aynı zamanda her $n \in N$ için $(x,\beta) \in \Gamma_{(x_n,\beta_n)}$ ve $(x_n,\beta_n) \in epi f_n$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ vardır. β ve $f(x)$ arasında bir α skaleri seçilsin ($\beta < \alpha < f(x)$) ve α_n dizisi $lev_{\leq\alpha} f \supset \text{st-}\limsup_n (lev_{\leq\alpha_n} f_n)$ kapsama bağıntısını sağlayan, α skalerine istatistiksel olarak yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda $\delta(\{n : \beta_n < \alpha_n\}) \neq 0$ ve $(x_n,\alpha_n) \in epi f_n$ elde edilir. Her $n \in N$ için, $x_n \in lev_{\leq\alpha_n} f_n$ ve buradan da $x \in \text{st-}\limsup_n (lev_{\alpha_n} f_n)$ olduğundan ve $\text{st-}\limsup_n lev_{\leq\alpha_n} f_n \subset lev_{\leq\alpha} f$ varsayımından $x \in lev_{\leq\alpha} f$ ve $f(x) \leq \alpha$ gelir ki bu bir çelişkidir. Böylece

$$\text{st-}\limsup_n (epi f_n) \subset epi f \tag{3.10}$$

olur. Sonuç olarak (3.9) ve (3.10) kapsama bağıntıları kullanılırsa $f = e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ sonucuna ulaşılır. □

Teorem 3.12 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ alttan yarı sürekli fonksiyon dizisi için $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n$ ve $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n$ limit fonksiyonları da alttan yarı süreklidir. İstatistiksel epi-limitin mevcut olduğu durumda $e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ limit fonksiyonu da alttan yarı sürekli olur.

İspat. X üzerindeki açık kümelerin ailesi U ve $\sigma : U \to \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyon olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sigma(U)$ şeklinde tanımlı olmak üzere, her $U \subseteq X$, her $y \in U$ ve her $U \in \mathcal{N}(y)$ için $f(y) \geq \sigma(U)$ olacağı açıktır. Bu eşitsizlik her $U \in \mathcal{N}(x)$ için sağlandığından

$$\inf_{y \in U} f(y) \geq \sigma(U)$$

olur. Bu eşitsizlikte $U \in \mathcal{N}(x)$ üzerinden supremum alınırsa, her $x \in X$ için

$$f(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sigma(U) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} f(y)$$

elde edilir. $\sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sigma(U) \geq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} f(y)$ bilindiğinden

$$\sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sigma(U) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} f(y)$$

eşitliği sağlanır. $\sigma(U) = \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in U} f_n(y)$ şeklinde tanımlanırsa istenilen elde edilir. Son adımda $\sigma(U) = \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in U} f_n(y)$ veya $\sigma(U) = \text{st-}\lim_n \inf_{y \in U} f_n(y)$ olarak tanımlandığında $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n$ ve $e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ fonksiyonlarının da alttan yarı sürekli olduğu sonucuna varılır. □

Teorem 3.13 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) (f_n) dizisi istatistiksel monoton azalan ise $e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ limiti mevcuttur ve bu limit $sc^-[\inf_n f_n]$ fonksiyonuna eşittir.

(ii) (f_n) dizisi istatistiksel monoton artan ise $e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ limiti mevcuttur ve bu limit $\sup_n[sc^- f_n]$ fonksiyonuna eşittir.

İspat. (i) (f_n) istatistiksel monoton azalan olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_{k_n} \geq f_{k_{n+1}}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olan bir $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Bu durumda fonksiyon dizisindeki fonksiyonların epigraflarından oluşan $(epif_n)$ küme dizisi de istatistiksel monoton artan olacaktır ($epif_{k_n} \subseteq epif_{k_{n+1}}$). Bu durumda

$$epi(sc^-[\inf_n f_n]) = cl \bigcup_{n\in\mathbb{N}} epif_{k_n} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. Aynı zamanda, istatistiksel artan küme dizileri için Teorem 2.13 (Talo vd. 2016) kullanılırsa

$$\text{st-}\lim_n(epif_n) = cl \bigcup_{n\in\mathbb{N}} epif_{k_n} \tag{3.12}$$

eşitliği sağlanır. (3.11), (3.12) ve Tanım 3.1 kullanılarak

$$\text{st-}\lim_n(epif_n) = epi(sc^-[\inf_n f_n]) = epi(e_{st}\text{-}\lim_n f_n)$$

elde edilir ve bu ise $sc^-[\inf_n f_n] = e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ eşitliğidir.

(ii) (f_n) istatistiksel monoton artan olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_{k_n} \leq f_{k_{n+1}}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olan bir $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Bu durumda fonksiyon dizisindeki fonksiyonların epigraflarından oluşan $(epif_n)$ küme dizisi de istatistiksel monoton azalan olacaktır ($epif_{k_n} \supseteq epif_{k_{n+1}}$). Bu durumda

$$epi(\sup_n[sc^- f_n]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} epif_{k_n} \tag{3.13}$$

eşitliği sağlanır. Aynı zamanda, istatistiksel azalan küme dizileri için Teorem 2.15 (Talo vd. 2016) kullanılırsa

$$\text{st-}\lim_n(epif_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} epif_{k_n} \tag{3.14}$$

olduğu görülür. (3.13), (3.14) ve Tanım 3.1 kullanılırsa

$$\text{st-}\lim_n(epif_n) = epi(\sup_n[sc^- f_n]) = epi(e_{st}\text{-}\lim_n f_n)$$

elde edilir ve bu ise $\sup_n[sc^- f_n] = e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ eşitliğidir. □

Uyarı 3.14 Teorem 3.13 deki fonksiyon dizilerinin alttan yarı sürekli olması durumunda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) (f_n) dizisi istatistiksel monoton azalan ise $e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ limiti mevcuttur ve bu limit $\inf_n f_n$ fonksiyonuna eşittir.

(ii) (f_n) dizisi istatistiksel monoton artan ise $e_{st}\text{-}\lim_n f_n$ limiti mevcuttur ve bu limit $\sup_n f_n$ fonksiyonuna eşittir.

Tanım 3.15 Her $\varepsilon > 0$, her $y \in B(x, \delta)$ ve her $n \in N$ için

$$f_n(x) - f_n(y) < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ ve en az bir $N \subset \mathcal{S}$ bulunabilmesi için gerek ve yeter şart (f_n) dizisinin $x \in X$ noktasında istatistiksel alttan eş yarı sürekli olmasıdır.

Sıradaki teorem, istatistiksel noktasal yakınsaklık ile istatistiksel epi-yakınsaklığın örtüşmesi için gereken en temel şartı ifade eder.

Teorem 3.16 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. (f_n) dizisi x noktasında istatistiksel alttan eş yarı sürekli olsun. Bu durumda (f_n) dizisinin x noktasında f fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak olması için gerek ve yeter şart (f_n) dizisinin x noktasında f fonksiyonuna istatistiksel noktasal yakınsak olmasıdır.

İspat. (f_n) dizisi x noktasında istatistiksel alttan eş yarı sürekli olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için

$$f_n(x) - \varepsilon < \inf_{y \in V} f_n(y) \tag{3.15}$$

olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{N}(x)$ ve en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Bu ifade seçilen indis kümesinden dolayı

$$\text{st-}\liminf_n f_n(x) - \varepsilon \leq \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 3.10 kullanılırsa

$$\text{st-}\liminf_n f_n(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

elde edilir. Buradan ise

$$\text{st-}\liminf_n f_n(x) = e_{st}\text{-}\liminf_n f_n(x)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde (3.15) eşitsizliği

$$\text{st-}\limsup_n f_n(x) - \varepsilon \leq \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

şeklinde yazılıp Önerme 3.10 kullanıldığında

$$\text{st-}\limsup_n f_n(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y) = e_{st}\text{-}\limsup_n f_n(x)$$

elde edilir. Böylece $\text{st-}\lim_n f_n(x) = e_{st}\text{-}\lim_n f_n(x)$ eşitliği sağlanır. □

4. TEMEL ÖZELLİKLER

Teorem 4.1 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak ise bu dizi $sc^- f$ fonksiyonuna istatistiksel epi yakınsaktır.

İspat. (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her bir $\varepsilon > 0$, her $n \in K$ ve her $y \in X$ icin $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $K \in \mathcal{S}$ indis kümesi vardır. Bu eşitsizlik

$$f(y) - \varepsilon < f_n(y) < f(y) + \varepsilon$$

şeklinde yazılır. Düzgün istatistiksel yakınsaklık y noktasından bağımsız olduğu için her $U \in X$ açık kümesi ve her $n \in K$ için

$$\inf_{y \in U} f(y) - \varepsilon < \inf_{y \in U} f_n(y) < \inf_{y \in U} f(y) + \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan

$$\text{st-}\lim_n \inf_{y \in U} f_n(y) = \inf_{y \in U} f(y)$$

elde edilir ve her bir $x \in X$ için

$$\sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\lim_n \inf_{y \in U} f_n(y) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} f(y)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik (f_n) dizisinin $sc^- f$ fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak olduğunu gösterir. □

İstatistiksel noktasal yakınsaklıkta ε değerinin her bir $x \in X$ noktasına göre değişebilmesi, istatistiksel noktasal yakınsaklık ile istatistiksel epi-yakınsaklığın genel olarak neden örtüşmediği hakkında bir fikir verir. Bunun yanında düzgün istatistiksel yakınsaklıkta ε değeri $x \in X$ noktalarından bağımsız olduğu için aşağıdaki uyarıyı vermek gerekmektedir.

Uyarı 4.2 (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak ve her bir f_n fonksiyonu alttan yarı sürekli ise, f fonksiyonu da alttan yarı sürekli ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak olur.

Teorem 4.3 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve $h : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ artan sürekli fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$e_{st}\text{-}\liminf_n (h \ o \ f_n) = h \ o \ (e_{st}\text{-}\liminf_n f_n), \tag{4.1}$$

$$e_{st}\text{-}\limsup_n (h \ o \ f_n) = h \ o \ (e_{st}\text{-}\limsup_n f_n). \tag{4.2}$$

İspat. h fonksiyonu artan ve sürekli olduğu için

$$h(\inf A) = \inf h(A) \quad \text{ve} \quad h(\sup A) = \sup h(A)$$

eşitliği her bir $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ kümesi için geçerlidir. Alt istatistiksel epi-limit tanımı, Lemma 3.7 gereği

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n)(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sup_{N \in \mathcal{S}} \inf_{n \in N} \inf_{y \in U} f_n(y)$$

şeklinde yazılabileceğinden, h fonksiyonu ile bileşke işlemi

$$\sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sup_{N \in \mathcal{S}} \inf_{n \in N} \inf_{y \in U} h\left(f_n(y)\right) = h\Big(\sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \sup_{N \in \mathcal{S}} \inf_{n \in N} \inf_{y \in U} f_n(y)\Big)$$

eşitliği ile ifade edilerek (4.1) sağlanır. Benzer şekilde üst istatistiksel epi-limit tanımı, Lemma 3.7 gereği

$$(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n)(x) = \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{N \in \mathcal{S}} \sup_{n \in N} \inf_{y \in V} f_n(y)$$

şeklinde yazılabileceğinden, h fonksiyonu ile bileşke işlemi

$$\sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{N \in \mathcal{S}} \sup_{n \in N} \inf_{y \in V} h\left(f_n(y)\right) = h\Big(\sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \inf_{N \in \mathcal{S}} \sup_{n \in N} \inf_{y \in V} f_n(y)\Big)$$

eşitliği ile ifade edilerek (4.2) sağlanır. □

Teorem 4.4 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f_n,\ g_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ toplamları iyi tanımlı fonksiyon dizileri verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$e_{st}\text{-}\liminf_n (f_n + g_n) \geq e_{st}\text{-}\liminf_n f_n + e_{st}\text{-}\liminf_n g_n, \tag{4.3}$$

$$e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) \geq e_{st}\text{-}\limsup_n f_n + e_{st}\text{-}\liminf_n g_n. \tag{4.4}$$

İspat. (4.4) eşitsizliğini göstermek için (f_n) ve (g_n) dizileri için bazı kısıtlamalar getirilsin. X üzerinde, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \leq a$ ve $g_n \leq a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sabiti alınırsa toplamlar iyi tanımlı olur. Her bir $U \in X$ açık kümesi için

$$\inf_{y \in U} (f_n + g_n)(y) \geq \inf_{y \in U} f_n(y) + \inf_{y \in U} g_n(y)$$

eşitsizliği geçerlidir. İstatistiksel alt ve üst limitlerden faydalanarak

$$\text{st-}\limsup_n \inf_{y \in U} (f_n + g_n)(y) \geq \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in U} f_n(y) + \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in U} g_n(y) \tag{4.5}$$

elde edilir. Şimdi $x \in X$ noktası sabitlensin. Eğer

$$e_{st}\text{-}\limsup_n f_n(x) + e_{st}\text{-}\liminf_n g_n(x) = -\infty$$

ise (4.4) eşitsizliği sağlanır. Diğer durumlarda, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$(e_{st}\text{-}\limsup_n f_n)(x) - \varepsilon < \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y), \tag{4.6}$$

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n g_n)(x) - \varepsilon < \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in W} g_n(y) \tag{4.7}$$

olacak şekilde $V, W \in \mathcal{N}(x)$ kümeleri vardır. $U = V \cap W$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{N}(x)$ olur ve

$$\inf_{y \in V} f_n(y) \leq \inf_{y \in U} f_n(y) \ , \ \inf_{y \in W} g_n(y) \leq \inf_{y \in U} g_n(y)$$

eşitsizlikleri yazılır. Tanım 3.6 ile (4.5), (4.6) ve (4.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n)(x) &\geq \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in U} (f_n + g_n)(y) \qquad (4.8) \\ &\geq e_{st}\text{-}\limsup_n f_n(x) + e_{st}\text{-}\liminf_n g_n(x) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve ε keyfi olduğundan $f_n \leq a$ ve $g_n \leq a$ için (4.4) eşitsizliği sağlanır. Şimdi de genel durumu inceleyelim. (f_n) ve (g_n) dizileri üstten sınırlı olmasın. Her bir $a \in \mathbb{R}$ için $h_a : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ artan sürekli fonksiyonu $h_a(t) = \min\{t, a\}$ şeklinde tanımlansın. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için, X üzerinde $h_a \circ f_n \leq a$ ve $h_a \circ g_n \leq a$ olduğu bilindiğinden, ispatın (4.8) adımından devam edilirse

$$e_{st}\text{-}\limsup_n \Big((h_a \circ f_n) + (h_a \circ g_n) \Big) \geq e_{st}\text{-}\limsup_n (h_a \circ f_n) + e_{st}\text{-}\liminf_n (h_a \circ g_n)$$

elde edilir. Teorem 4.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) &\geq e_{st}\text{-}\limsup_n \left((h_a \circ f_n) + (h_a \circ g_n)\right) \\ &\geq h_a \circ (e_{st}\text{-}\limsup_n f_n) + h_a \circ (e_{st}\text{-}\limsup_n g_n) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır ve $a \to \infty$ alınırsa sınırsızlık durumunda da (4.4) eşitsizliği sağlanmış olur.

(4.3) eşitsizliğini göstermek için X üzerinde, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \leq a$ ve $g_n \leq a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sabiti seçilir. Her bir $U \in X$ açık kümesi için

$$\inf_{y \in U} (f_n + g_n)(y) \geq \inf_{y \in U} f_n(y) + \inf_{y \in U} g_n(y)$$

eşitsizliği geçerlidir. İstatistiksel alt limitler kullanılarak

$$\text{st-}\liminf_n \inf_{y \in U} (f_n + g_n)(y) \geq \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in U} f_n(y) + \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in U} g_n(y) \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir. $x \in X$ noktası sabitlenirse her bir $\varepsilon > 0$ için

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n f_n)(x) - \varepsilon < \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in V} f_n(y), \tag{4.10}$$

$$(e_{st}\text{-}\liminf_n g_n)(x) - \varepsilon < \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in W} g_n(y) \tag{4.11}$$

olacak şekilde en az birer $V, W \in \mathcal{N}(x)$ vardır. $U = V \cap W$ olsun. Bu durumda $U \in \mathcal{N}(x)$ olur ve

$$\inf_{y \in V} f_n(y) \leq \inf_{y \in U} f_n(y), \ \inf_{y \in W} g_n(y) \leq \inf_{y \in U} g_n(y)$$

eşitsizlikleri oluşturulur. Tanım 3.6 ile (4.9), (4.10) ve (4.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} e_{st}\text{-}\liminf_n (f_n + g_n)(x) &\geq \text{st-}\liminf_n \inf_{y \in U} (f_n + g_n)(y) \\ &\geq e_{st}\text{-}\liminf_n f_n(x) + e_{st}\text{-}\liminf_n g_n(x) - 2\varepsilon \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir ve ε keyfi olduğundan (4.3) gösterilmiş olur. Benzer şekilde (4.4) eşitsizliğinin gösterilmesinde olduğu gibi sınırsızlık durumunda da eşitsizlik sağlanır. $\square$

(f_n) ve (g_n) fonksiyonlarının istatistiksel epi-yakınsak olmaları durumunda bile (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerindeki eşitlik durumu kalkabilir. Aşağıdaki örnekte bu durum verilmiştir.

Örnek 4.5 $f_n,\ g_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} \text{-2}, & n \text{ çift tam kare ise} \\ sin(nx), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \text{-2}, & n \text{ tek tam kare ise} \\ \text{-}sin(nx), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu durumda (f_n) ve (g_n) dizilerinin her biri $h(x) = \text{-}1$ fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak olmasına rağmen $(f_n + g_n)$ dizisi $h(x) = 0$ fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak olur.

Sonuç 4.6 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $f_n,\ g_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizileri verilsin. (g_n) dizisi ile g fonksiyonu sonlu ve (g_n) dizisi g fonksiyonuna istatistiksel sürekli yakınsak ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$e_{st}\text{-}\liminf_n (f_n + g_n) = e_{st}\text{-}\liminf_n f_n + g, \tag{4.13}$$

$$e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) = e_{st}\text{-}\limsup_n f_n + g. \tag{4.14}$$

İspat. (4.14) eşitliğini gösterelim. Öncelikle Teorem 2.21 gereği, (g_n) dizisinin g fonksiyonuna istatistiksel sürekli yakınsak olması, g fonksiyonunun sürekli olmasını ve $g_n \overset{st\text{-}u}{\to} g$ yakınsaklığını gerektirir. Böylece Teorem 4.1 kullanılarak

$$g_n \overset{e_{st}}{\to} g$$

elde edilir. Buradan ise Teorem 4.4 kullanılarak

$$e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) \geq e_{st}\text{-}\limsup_n f_n + g \tag{4.15}$$

sağlandığı görülür. Diğer yandan, $(-g_n)$ dizisi de $-g$ fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel epi-yakınsaktır. Burada da Teorem 4.4 kullanılırsa

$$e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n - g_n) \geq e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) - g$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda

$$e_{st}\text{-}\limsup_n f_n + g \geq e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) \tag{4.16}$$

olur ve (4.15) ile (4.16) kullanılarak (4.14) eşitliği sağlanmış olur.

Şimdi de (4.13) eşitliğini gösterelim. Benzer şekilde $g_n \overset{st\text{-u}}{\to} g$ yakınsaklığı $g_n \overset{e_{st}}{\to} g$ şeklinde kullanılacaktır. Burada Teorem 4.4 kullanılarak

$$e_{st}\text{- }\liminf_n (f_n + g_n) \geq e_{st}\text{- }\liminf_n f_n + g \tag{4.17}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Diğer yandan, $(-g_n)$ dizisi de $-g$ fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel epi-yakınsaktır. Teorem 4.4 kullanılırsa

$$e_{st}\text{- }\liminf_n f_n = e_{st}\text{- }\liminf_n (f_n + g_n - g_n) \geq e_{st}\text{- }\liminf_n (f_n + g_n) - g$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$e_{st}\text{- }\liminf_n f_n + g \geq e_{st}\text{- }\liminf_n (f_n + g_n) \tag{4.18}$$

sağlanır ve (4.17) ile (4.18) kullanılarak (4.13) eşitliğine ulaşılır. □

Sonuç 4.7 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$e_{st}\text{- }\liminf_n (f_n + g) = e_{st}\text{- }\liminf_n f_n + g, \tag{4.19}$$

$$e_{st}\text{- }\limsup_n (f_n + g) = e_{st}\text{- }\limsup_n f_n + g. \tag{4.20}$$

İspat. g fonksiyonu sürekli olduğundan $g = (g_n)$ sabit fonksiyon dizisi g fonksiyonuna istatistiksel sürekli yakınsaktır. Böylece Sonuç (4.6) ispatı tamamlar. □

Sonuç 4.7 deki g fonksiyonunun süreklilik şartı kaldırılamaz. Aşağıdaki örnek bu durumu gösteren niteliktedir.

Örnek 4.8 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nxe^{-2n^2x^2}, & n \text{ tam kare ise} \\ nxe^{-2n^2x^2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ise} \\ 1, & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Açıkça görüldüğü üzere (f_n) dizisindeki her bir fonksiyon sürekli ve g fonksiyonu da alttan yarı süreklidir. (f_n) dizisi $x = 0$ noktasında $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ noktasına istatistiksel epi-yakınsak iken $(f_n + g)$ ise aynı noktada $1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ noktasına istatistiksel epi-yakınsaktır. Başka bir ifade ile, Sonuç 4.7'de elde edilen eşitlik sağlanmamaktadır. Bunun sebebi $x = 0$ noktasında g fonksiyonunun sürekli olmamasıdır.

Sonuç 4.9 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $f_n,\ g_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizileri verilsin. (f_n) dizisi f fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak ve istatistiksel noktasal yakınsak, (g_n) dizisi de g fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak ve istatistiksel noktasal yakınsak olsun. Bu durumda, iyi tanımlı $(f_n + g_n)$ dizisi ve $f + g$ fonksiyonu için $(f_n + g_n)$ dizisi de $f + g$ fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak ve istatistiksel noktasal yakınsak olur.

İspat. Teorem 4.4 gereği

$$\begin{aligned} f + g &= e_{st}\text{-}\liminf_n f_n + e_{st}\text{-}\liminf_n g_n \\ &\leq e_{st}\text{-}\liminf_n (f_n + g_n) \\ &\leq e_{st}\text{-}\limsup_n (f_n + g_n) \\ &\leq \text{st-}\limsup_n (f_n + g_n) = f + g \end{aligned}$$

ifadeleri sağlanır ve istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.10 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, konveks fonksiyonlardan oluşan $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dizisi verilsin. Bu durumda $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n$ fonksiyonu da konvekstir.

İspat. Her bir f_n fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan, her bir $epi f_n$ kümesi de konveks kümedir. $x, y \in st\text{-}\liminf_n(epi f_n)$ noktaları seçilsin. Bu durumda, her $n \in N$ için $x_n \xrightarrow{st} x$ olacak şekilde en az bir $x_n \in epi f_n$ dizisi ve bir $N \in \mathcal{S}$ indis kümesi vardır. Benzer şekilde her $n \in K$ için $y_n \xrightarrow{st} y$ olacak şekilde en az bir $y_n \in epi f_n$ dizisi ve bir $K \in \mathcal{S}$ indis kümesi vardır. $W = N \cap K$ kümesi alınırsa, W kümesinin yoğunluğunun 1 olduğu açıktır. Keyfi bir $\lambda \in [0, 1]$ için

$$z_n^\lambda := (1 - \lambda)x_n + \lambda y_n \quad \text{ve} \quad z^\lambda := (1 - \lambda)x + \lambda y$$

tanımlanırsa her $n \in W$ için $z_n^\lambda \in epif_n$ ve $z_n \overset{st}{\rightarrow} z$ elde edilir. Bu durumda $z^\lambda \in$ st- $\liminf_n (epif_n)$ sağlanır ve bu da kümenin konveksliğini gösterir. (3.2) gereği, e_{st}- $\limsup_n f_n$ fonksiyonu da konveks olur. $\square$

Aşağıdaki örnek, (f_n) dizisinin X üzerinde konveks fonksiyonlardan oluşması durumunda, e_{st}- $\liminf_n f_n$ fonksiyonunun konveks olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.11 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi $f_n(x) = \Big(x + (\text{-}1)^n\Big)^2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f = e_{st}$- $\liminf_n f_n$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir ve konveks değildir.

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \text{ ise} \\ (x-1)^2, & x > 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Uyarı 4.12 İstatistiksel epi-limitin mevcut olduğu durumlarda, $f = e_{st}$- $\lim_n f_n$ fonksiyonu da konveks fonksiyon olur.

5. KAPALI KÜMELER VE EPİGRAFLAR

Teorem 5.1 (A_n) bir küme dizisi ve A kapalı bir küme olsun. $A \subset st\text{-}\liminf_n A_n$ olması için gerek ve yeter şart $A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ özelliğindeki her $\mathcal{O}$ açık kümesi ve her $n \in N$ için $A_n \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik, Tanım 2.23 deki (2.5) den doğrudan elde edilir. Yeterlilik için, $x \in A$ fakat $x \notin st\text{-}\liminf_n A_n$ olsun. Bu durumda (2.5) gereği $V \cap A \neq \emptyset$ özelliğindeki bir $V \in \mathcal{N}(x)$ açık kümesi ve her $N \in \mathcal{S}$ için $V \cap A_n = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $n \in N$ vardır. Bu ise, yeterlilik kısmının karşıt tersine denk gelir ve istenilen elde edilir. □

Teorem 5.2 (A_n) bir küme dizisi ve A kapalı bir küme olsun. $A \supset st\text{-}\limsup_n A_n$ olması için gerek ve yeter şart $A \cap C = \emptyset$ özelliğindeki her C kompakt kümesi ve her $n \in N$ için $A_n \cap C = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik için, $A \supset st\text{-}\limsup_n A_n$ olduğu kabul edilsin ve $A \cap C = \emptyset$ olan bir kompakt C kümesi seçilsin. Her $N \in \mathcal{S}$ ve bu N lerden alınan bazı n ler için $A_n \cap C \neq \emptyset$ olsun. Fakat bu durumda, $n \in N$ alındığında istatistiksel limiti A kümesinde olmayacak şekilde bir $x_n \in A_n$ dizisi en az bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ için mevcuttur. Bu ise bir çelişkidir.
Yeterlilik için, $x \in st\text{-}\limsup_n A_n$ fakat $x \notin A$ olacak şekilde bir x noktası seçilsin. Bu durumda (2.8) gereği, yeterince küçük bir ε için A ile kesişmeyen $B(x, \varepsilon)$ yuvarı sonsuz sayıda n için A_n ile kesişir. Bu ise $A_n \cap C = \emptyset$ ile çelişir. □

Teorem 5.3 X sonlu boyutlu lineer normlu uzay olsun. $A \subset \text{st-}\liminf_n A_n$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $\text{st-}\limsup_n d(x, A_n) \leq d(x, A)$ olmasıdır.

İspat. Yeterlilik, $x \in A$ alınarak (2.10) dan elde edilir. Gerekliliği göstermek için $x \in X$ ve $y \in A$ seçilsin. İstatistiksel alt limit tanımından, her $n \in N$ için $\lim_n y_n = y$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ ve $y_n \in A_n$ olduğu bilinir. Bu (y_n) dizisi için $d(x, A_n) \leq \|y_n - x\|$ eşitsizliği $n \in N$ olduğunda sağlanır. Burada $n \to \infty$ üzerinden limit alındığında istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 5.4 X sonlu boyutlu lineer normlu uzay olsun. $A \supset \text{st-}\limsup_n A_n$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $d(x, A) \leq \text{st-}\liminf_n d(x, A_n)$ olmasıdır.

İspat. Yeterlilik, $x \in \text{st-}\limsup_n A_n$ alındığında (2.9) dan elde edilir. Gerekliliği göstermek için $x \in X$ seçilsin. Eğer $x \in A$ ise ispat tamamdır. Diğer durumlarda negatif olmayan herhangi bir a için $d(x, A) > a$ şartı $A \cap B(x, a) = \emptyset$ eşitliğine denktir. Buradan Teorem 5.2 kullanılırsa her $n \in N$ için $A_n \cap B(x, a) = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Bu ise her $n \in N$ için $d(x, A_n) > a$ olması demektir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 5.5 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve alttan yarı sürekli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $epif \subset st\text{-}\liminf_n epif_n$ olması için gerek ve yeter şart $epif \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ özelliğindeki her $\mathcal{O}$ açık kümesi ve her $n \in N$ için $epif_n \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olmasıdır.

İspat. f fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması $epif$ kümesininin kapalı olması anlamına gelir. Bu durumda Teorem 5.1 kullanılarak (f_n) dizisi ve f fonksiyonunun epigrafları için istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 5.6 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve alttan yarı sürekli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $epif \supset st\text{-}\limsup_n epif_n$ olması için gerek ve yeter şart $epif \cap C = \emptyset$ özelliğindeki her C kompakt kümesi ve her $n \in N$ için $epif_n \cap C = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olmasıdır.

İspat. f fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması $epif$ kümesininin kapalı olması anlamına gelir. Bu durumda Teorem 5.2 kullanılarak, (f_n) dizisi ve f fonksiyonunun epigrafları için istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 5.7 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve alttan yarı sürekli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $epif \subset st\text{-}\liminf_n epif_n$ olması için gerek ve yeter şart $epif \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ özelliğindeki her $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı ve her $n \in N$ için $epif_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olmasıdır.

İspat. Sonuç 5.5 kullanılarak ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.8 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve alttan yarı sürekli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu veriliyor. $epif \supset st\text{-}\limsup_n epif_n$ olması için gerek ve yeter şart $epif \cap \overline{B}(x, \varepsilon) = \emptyset$ özelliğindeki her $\overline{B}(x, \varepsilon)$ kapalı yuvarı ve her $n \in N$ için $epif_n \cap \overline{B}(x, \varepsilon) = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olmasıdır.

İspat. Sonuç 5.6 kullanılarak ispat tamamlanır. □

Teorem 5.9 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve alttan yarı sürekli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n \geq f$ olması için gerek ve yeter şart her kompakt $C \subset X$ kümesi için $\text{st-}\liminf_n(\inf_C f_n) \geq \inf_C f$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik kısmını göstermek için $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n \geq f$ olduğu kabul edilsin. Bu eşitsizlik $\text{st-}\limsup_n(epif_n) \subset epif$ kapsama bağıntısınına denktir. Bir $C \subset X$ kompakt kümesi ve $\inf_C f > a$ olacak şekilde bir $a \in \overline{\mathbb{R}}$ seçilsin. Bu durumda $epif$ kümesi ile (C, a) kompakt kümesi kesişmez. Böylece Sonuç 5.6 gereği, her $n \in N$ için $(C, a) \bigcap epif_n = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Bu ise $\inf_C f_n \geq a$ eşitsizliğini verir ve indeks kümesinin seçiminden dolayı

$$\text{st-}\liminf_n(\inf_C f_n) \geq \inf_C f$$

eşitsizliği elde edilir.

İspatın yeterlilik kısmını göstermek için $epif$ ile kesişmeyen bir $B^+((x, a), \varepsilon)$ silindiri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$B^+((x, a), \varepsilon) = \overline{B}(x, \varepsilon) \times [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

f fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan $epif$ kümesi kapalı olur ve böylece $\inf_{\overline{B}(x,\varepsilon)} f > a+\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. $\overline{B}(x, \varepsilon)$ yuvarı X uzayında kompakt olduğundan varsayım gereği $\text{st-}\liminf_n(\inf_{\overline{B}(x,\varepsilon)} f_n) > a+\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Böylece her $n \in N$ için $\inf_{\overline{B}(x,\varepsilon)} f_n > a + \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Bu durumda herhangi bir $n \in N$ için $B^+((x, a), \varepsilon)$ silindiri $epif_n$ küme dizisi ile kesişmez. Sonuç 5.8 gereği $\text{st-}\limsup_n(epif_n) \subset epif$ elde edilir ve bu ise

$$e_{st}\text{-}\liminf_n f_n \geq f$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. □

Teorem 5.10 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi ve alttan yarı sürekli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n \leq f$ olması için gerek ve yeter şart her açık $\mathcal{O} \subset X$ kümesi için $\text{st-}\limsup_n(\inf_{\mathcal{O}} f_n) \leq \inf_{\mathcal{O}} f$ olmasıdır.

İspat. Gereklilik kısmını göstermek için $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n \leq f$ olduğu kabul edilsin. Bu eşitsizlik $\text{st-}\liminf_n(epi f_n) \supset epi f$ kapsama bağıntısına denktir. Bir $\mathcal{O} \subset X$ açık kümesi ve $\inf_{\mathcal{O}} f < a$ olacak şekilde bir $a \in \overline{\mathbb{R}}$ seçilsin. Bu durumda $\mathcal{O} \times (-\infty, a)$ kümesi açıktır ve $epi f$ kümesi ile kesişir. Böylece Sonuç 5.5 gereği, her $n \in N$ için $\mathcal{O} \times (-\infty, a) \bigcap epi f_n \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Bu ise $\inf_{\mathcal{O}} f_n < a$ eşitsizliğini verir ve böylece

$$\text{st-}\limsup_n(\inf_{\mathcal{O}} f_n) \leq \inf_{\mathcal{O}} f$$

eşitsizliği elde edilir.

İspatın yeterlilik kısmını göstermek için, $epi f$ kümesi ile kesişen ve Teorem 5.9 da tanımlanan $\text{int}B^+((x, a), \varepsilon)$ silindiri seçilirse $\inf_{\text{int}B(x,\varepsilon)} f < a + \varepsilon$ olduğu görülür. Hipotezden dolayı her $n \in N$ için $\inf_{\text{int}B(x,\varepsilon)} f < a+\varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N \in S$ indeks kümesinin olacağı açıktır. Böylece her $n \in N$ için $B^+((x, a), \varepsilon) \bigcap epi f_n \neq \emptyset$ olur. Bu durumda Sonuç 5.7 gereğince $\text{st-}\liminf_n(epi f_n) \supset epi f$ elde edilir ki bu ise $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n \leq f$ eşitsizliğini verir. □

6. DİZİSEL KARAKTERİZASYONLAR

Bu bölümde, istatistiksel epi-yakınsaklığın dizisel karakterizasyonları verilecektir. Bilindiği üzere epi-yakınsaklık, fonksiyon dizileri için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 6.1 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. $f_n \xrightarrow{e} f$ olması için gerek ve yeter şart, her bir $x \in X$ noktası için

(i) $\forall\ x_n \to x$ dizisi için, $\liminf_n f_n(x_n) \geq f(x)$,

(ii) $\exists\ x_n \to x$ dizisi için, $\limsup_n f_n(x_n) \leq f(x)$

ifadelerinin sağlanmasıdır (Rockafellar ve Wets 2009).

Buradan açıkça anlaşılmaktadır ki, gerektirme çift yönlüdür. Bu durumun aksine, istatistiksel epi-yakınsaklığın dizisel karakterizasyonunda gerektirme tek yönlüdür. Bunun sebebi, x noktasının (x_n) dizisinin istatistiksel limit noktası ya da istatistiksel yığılma noktası olması ile ilgilidir. Teorem 6.2 de istatistiksel üst epi-limit, Teorem 6.3 ve Teorem 6.5 de ise istatistiksel alt epi-limit verilmiştir. Bu teoremler yardımıyla istatistiksel epi-limit tanımlanmıştır. Ayrıca, x noktasının istatistiksel yığılma noktası olarak kullanıldığı teoremlerde bu şartın x noktasının istatistiksel limit noktası olarak değiştirelemeyeceği örneklerle gösterilmiştir.

Teorem 6.2 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = f$ olması için gerek ve yeter şart, her bir $x \in X$ noktası için

(i) $\forall\ x_n \xrightarrow{st} x$ dizisi için, $f(x) \leq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$,

(ii) $\exists\ x_n \xrightarrow{st} x$ dizisi için, $f(x) \geq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

İspat. Gereklilik kısmından başlayarak (i) yi gösterelim. $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = f$ eşitliği kabul edilsin. Keyfi bir $x_n \xrightarrow{st} x$ dizisi ve keyfi bir $V \in \mathcal{N}(x)$ alındığında her

$n \in N$ için $x_n \in V$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ indis kümesi vardır. Böylece $\inf_{y \in V} f_n(y) \leq f_n(x_n)$ elde edilir. Bu durumda

$$\text{st-}\limsup_n f_n(x_n) \geq \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y)$$

eşitsizliği sağlanır. V kümesi, x noktasının keyfi bir komşuluğu olduğu için

$$\text{st-}\limsup_n f_n(x_n) \geq \sup_{V \in \mathcal{N}(x)} \text{st-}\limsup_n \inf_{y \in V} f_n(y) = e_{st}\text{-}\limsup_n f_n(x) = f(x)$$

elde edilir.

Şimdi (ii) yi gösterelim. $(x, f(x)) \in epif$ olduğundan ve $epif = \text{st-}\liminf_n (epif_n)$ varsayımından $(x, f(x)) \in \text{st-}\liminf_n (epif_n)$ elde edilir. Burada (2.11) kullanılırsa, $(x_n, \beta_n) \xrightarrow{st} (x, f(x))$ olacak şekilde en az bir $(x_n, \beta_n) \in epif_n$ dizisi mevcuttur. Bu durumda $\beta_n \geq f_n(x_n)$ ve $\text{st-}\lim_n \beta_n = f(x) \geq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$ elde edilir.

Yeterlilik tarafını ispatlamak için, (i) ve (ii) nin birlikte sağlandığını varsayılsın. $(x, \beta) \in \text{st-}\liminf_n (epif_n)$ alınırsa, (2.11) gereği $(x_n, \beta_n) \xrightarrow{st} (x, \beta)$ olacak şekilde en az bir $(x_n, \beta_n) \in epif_n$ dizisi mevcuttur. Bu ise, her bir $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ ve $|\beta_n - \beta| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ olduğunu gösterir. $(x_n, \beta_n) \in epif_n$ olduğundan her $n \in N$ için $\beta_n \geq f_n(x_n)$ elde edilir. Bu durumda $\beta + \varepsilon > f_n(x_n)$ ve bunun sonucunda da $\text{st-}\limsup_n f_n(x_n) \leq \beta$ sağlanır. (i) den dolayı $f(x) \leq \beta$ ve $(x, \beta) \in epif$ olur. Buradan ise

$$\text{st-}\liminf_n (epif_n) \subseteq epif \tag{6.1}$$

kapsama bağıntısı ortaya çıkar. (ii) gereği, $x_n \xrightarrow{st} x$ ve $f(x) \geq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi bulunabilir. $(x, \beta) \in epif$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $\beta \geq f(x)$ ve buradan ise $\beta \geq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$ elde edilir. Böylece her $n \in N$ için $f_n(x_n) \leq \beta$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ indis kümesi vardır. Bu ise $(x_n, \beta) \in epif_n$ olması demektir. $x_n \xrightarrow{st} x$ olduğundan (2.11) kullanılarak $(x, \beta) \in \text{st-}\liminf_n (epif_n)$ elde edilir ve

$$epif \subseteq \text{st-}\liminf_n (epif_n). \tag{6.2}$$

bağıntısı sağlanır. (6.1) ve (6.2) kullanılarak $\text{st-}\liminf_n (epif_n) = epif$ eşitliğine ulaşılır. Bu ise $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n = f$ eşitliğine denktir. $\square$

Teorem 6.3 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her bir $x \in X$ noktası için $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n = f$ ise

(i) $\forall\, x_n \xrightarrow{st} x$ dizisi için, $f(x) \leq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$,

(ii) $\exists\, x \in \Gamma_{(x_n)}$ dizisi için, $f(x) \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$

ifadeleri sağlanır.

İspat. $x_n \xrightarrow{st} x$ herhangi bir dizi olmak üzere keyfi bir $V \in \mathcal{N}(x)$ komşuluğu seçilsin. Her $n \in N$ için $x_n \in V$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ vardır. Böylece $\inf_{y\in V} f_n(y) \leq f_n(x_n)$ olur ve $\text{st-}\liminf_n f_n(x_n) \geq \text{st-}\liminf_n \inf_{y\in V} f_n(y)$ eşitsizliği sağlanır. V kümesi x in keyfi bir komşuluğu olduğundan

$$\text{st-}\liminf_n f_n(x_n) \geq \sup_{V\in\mathcal{N}(x)} \text{st-}\liminf_n \inf_{y\in V} f_n(y) = e_{st}\text{-}\liminf_n f_n(x) = f(x)$$

elde edilir.

Şimdi (ii)'yi gösterelim. $\beta \geq f(x)$ olacak şekilde bir β değeri alınırsa, $(x,\beta) \in epif$ olduğu görülür. $epif = \text{st-}\limsup_n(epif_n)$ bilindiğinden $(x,\beta) \in \text{st-}\limsup_n(epif_n)$ olduğu açıktır. (2.12) gereği, $(x,\beta) \in \Gamma_{(x_n,\beta_n)}$ olacak şekilde bir $(x_n,\beta_n) \in epif_n$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ ve $|\beta_n - \beta| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ mevcuttur. Ayrıca $(x_n,\beta_n) \in epif_n$ olduğu için bu ifade $\beta_n \geq f_n(x_n)$ eşitsizliğine denktir. Böylece her $n \in N$ için $\beta + \varepsilon > f_n(x_n)$ elde edilir. Her iki tarafın istatistiksel limit infimumu alınırsa $\beta + \varepsilon \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$ eşitsizliği gelir. ε keyfi olduğundan $\beta \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$ ve sonuç olarak $x \in \Gamma_{(x_n)}$ için

$$f(x) \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$$

elde edilir. □

Sıradaki örnek, Teorem 6.3 içindeki (ii) kısmında $x \in \Gamma_{(x_n)}$ ifadesinin $x_n \xrightarrow{st} x$ ile değiştirilemeyeceğini göstermektedir.

Örnek 6.4 $\mathbb{N}$ kümesi sayılabilir ayrık kümelere

$$N_p = \{2^{p\text{-}1}(2q\text{-}1) : q \in \mathbb{N}\}, \quad (p = 1, 2, 3, ...)$$

şeklinde parçalansın. Açıkça $\mathbb{N} = \bigcup_{p=1}^{\infty} N_p$ ve $i \neq j$ ise $N_i \cap N_j = \emptyset$ olduğu görülür. Aynı zamanda $\delta(N_p) = \frac{1}{2^p}$'dir. $n \in N_p$ $(p = 1, 2, ...)$ olacak şekilde $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} \text{-1}, & x = \frac{1}{p} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $f = e_{st}\text{-}\liminf_n f_n$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \text{-1}, & x \in \{0\} \cup \left\{\frac{1}{p} : p = 1, 2, 3, ...\right\} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Böylece Teorem 6.3'de yer alan (i) ve (ii) koşulları sağlanır. $x \in \Gamma_{(x_n)}$ yerine $x_n \xrightarrow{st} x$ kullanıldığı varsayılsın. Bu durumda

$$f(0) \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$$

eşitsizliğini sağlayan $x_n \xrightarrow{st} 0$ şeklinde bir dizi bulunamaz. Bunun daha iyi anlaşılabilmesi için $x_n \xrightarrow{st} 0$ olacak şekilde bir (x_n) dizisinin olduğu ve

$$f(0) = \text{-1} \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$$

eşitliğini sağladığı kabul edilsin. Böylece $\text{st-}\liminf_n f_n(x_n) = \text{-1}$ olur. Buradan

$$\delta\big(\{n \in \mathbb{N} : f_n(x_n) = \text{-1}\}\big) \neq 0$$

elde edilir. Böylece p değerleri için

$$\delta\left(\left\{n \in \mathbb{N} : x_n = \frac{1}{p}\right\}\right) \neq 0$$

geçerlidir. Bu ise $x_n \xrightarrow{st} 0$ olması ile çelişir. Böylece Teorem 6.3 te $x \in \Gamma_{(x_n)}$ ifadesi $x_n \xrightarrow{st} x$ ile değiştirilemez.

Teorem 6.5 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her bir $x \in X$ noktası için

(i) $\forall\, x \in \Gamma_{(x_n)}$ dizisi için, $f(x) \leq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$,

(ii) $\exists\, x_n \xrightarrow{st} x$ dizisi için, $f(x) \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$

ifadeleri sağlanırsa $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n = f$ olur.

İspat. (i) ve (ii) nin birlikte sağlandığı varsayılsın ve $(x,\beta) \in st\text{-}\limsup_n(epif_n)$ seçilsin. (2.12) gereği $(x,\beta) \in \Gamma_{(x_n,\beta_n)}$ olacak şekilde bir $(x_n,\beta_n) \in epif_n$ dizisi vardır. Böylece her bir $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ ve $|\beta_n - \beta| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ indis kümesi vardır. Ayrıca $(x_n,\beta_n) \in epif_n$ olduğundan $\beta_n \geq f_n(x_n)$ ve buradan da $\beta + \varepsilon > f_n(x_n)$ elde edilir. Her iki tarafın istatistiksel limit infimumu alınırsa $\beta+\varepsilon > \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$ eşitsizliği sağlanır. $x \in \Gamma_{(x_n)}$ olduğundan (i) gereği $\text{st-}\liminf_n f_n(x_n) \geq f(x)$ elde edilir. Buradan da $\beta + \varepsilon > f(x)$ ve böylece $\beta \geq f(x)$ olur ki bu ise $(x,\beta) \in epif$ olmasına denktir. Sonuç olarak

$$\text{st-}\limsup_n (epif_n) \subseteq epif \tag{6.3}$$

bağıntısı sağlanır.

Teoremin (ii) şartı kullanılırsa $f(x) \geq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$ olacak şekilde en az bir tane $x_n \xrightarrow{st} x$ dizisinin olduğu görülür. $\beta > f(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir $\beta \in \mathbb{R}$ seçilsin. Bu durumda $\beta > \text{st-}\liminf_n f_n(x_n)$ olur. Diğer bir ifade ile her $n \in N$ için $\beta \geq f_n(x_n)$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}^{\#}$ mevcuttur. Bu ise, her $n \in N$ için $(x_n,\beta) \in epif_n$ olmasına denktir. Ayrıca, $x_n \xrightarrow{st} x$ olduğundan $(x,\beta) \in \Gamma_{(x_n,\beta)}$ olur. (2.12) gereği $(x,\beta) \in \text{st-}\limsup_n(epif_n)$ elde edilir. $\text{st-}\limsup_n(epif_n)$ kümesi kapalı olduğundan

$$epif \subseteq \text{st-}\limsup_n (epif_n) \tag{6.4}$$

bağıntısı geçerlidir. (6.3) ve (6.4) kullanılarak $\text{st-}\limsup_n(epif_n) = epif$ eşitliği sağlanır. Bu ise $e_{st}\text{-}\liminf_n f_n = f$ eşitliğine denktir. □

Sıradaki örnek, Teorem 6.5 içindeki (i) kısmında $x \in \Gamma_{(x_n)}$ ifadesinin $x_n \xrightarrow{st} x$ ile değiştirilemeyeceğini göstermektedir.

Örnek 6.6 Örnek 6.4 teki (f_n) dizisi kullanılsın ve $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \text{-1}, & x \in \left\{\frac{1}{p} : p = 1, 2, 3, ...\right\} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 6.5 teki $x \in \Gamma_{(x_n)}$ koşulunun $x_n \xrightarrow{st} x$ ile değiştirildiği varsayıldığı taktirde bu teoremdeki (i) ve (ii) şartlarının ikisi de f fonksiyonu için sağlanır. Diğer yandan $f \neq e_{st}\text{-}\liminf_n f_n$ olur. Böylece Teorem 6.5 içindeki (i) kısmında $x \in \Gamma_{(x_n)}$ ifadesi $x_n \xrightarrow{st} x$ ile değiştirilemez.

Teorem 6.2 ve Teorem 6.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.7 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer (f_n) dizisi f fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsak ise her bir $x \in X$ noktası için

(i) $x_n \xrightarrow{st} x$ olacak şekilde her (x_n) dizisi için

$$f(x) \leq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n),$$

(ii) $x_n \xrightarrow{st} x$ olacak şekilde en az bir (x_n) dizisi için

$$f(x) \geq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$$

ifadeleri sağlanır.

Teorem 6.2 ve Teorem 6.5 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.8 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her bir $x \in X$ noktası için

(i) $x \in \Gamma_{(x_n)}$ olacak şekilde her (x_n) dizisi için

$$f(x) \leq \text{st-}\liminf_n f_n(x_n),$$

(ii) $x_n \xrightarrow{st} x$ olacak şekilde en az bir (x_n) dizisi için

$$f(x) \geq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n)$$

ifadeleri sağlanırsa $e_{st}\text{-}\lim_n f_n = f$ olur.

7. SONUÇ VE UYGULAMALAR

Analizde kullanılan birçok yakınsaklık çeşidi arasında epi-yakınsaklık önemli bir yere sahiptir. Bu yakınsaklık, matematiksel optimizasyon alanındaki minimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılır. Fakat bazı durumlarda fonksiyon dizisindeki fonksiyonların bir kısmı genel düzene aykırı hareket ederek epi-limit fonksiyonunun bulunmasını imkansız hale getirir ve böylece optimizasyon işleminin verimini azaltır. Tezde çalışılan istatistiksel epi-yakınsaklık ve bu yakınsaklığın dizisel karakterizasyonları ile genel düzene aykırı hareket eden fonksiyonların elenmesi amaçlanmıştır. Bu yöntem, epi-limitin hesaplanamadığı durumlarda istatistiksel epi-limitin hesaplanabilmesini sağlar.

Bu bölümde üzerinde durulan asıl konu, (f_n) dizisinin infimum değerlerinin dizinin istatistiksel epi-limiti olan f fonksiyonunun infimum değerine istatistiksel yakınsaklığıdır. Fonksiyon dizisinin istatistiksel epi-limiti olması halinde bile infimum değerlerin istatistiksel yakınsaklığı için bazı şartlar gerekir. Bu şartlar Teorem 7.2 de verilmiştir. Teoremin ardından verilen örneklerde istatistiksel epi-yakınsak olan iki fonksiyon dizisi ele alınmıştır. İlk örnekte verilen fonksiyon dizisi, Teorem 7.2 de verilen şartları sağladığı için $\inf f_n \xrightarrow{st} \inf f$ yakınsaklığını da sağlar. Diğer yandan ikinci örnekte verilen fonksiyon dizisi, Teorem 7.2 de verilen şartları sağlamadığı için bu dizide infimum değerlerin yakınsaklığı gerçekleşmez.

Teorem 7.2 den önce Lemma 7.1 verilecektir. Teorem 7.2 nin ispatında bu lemmadan ve Sonuç 6.7 den yararlanılmıştır.

Lemma 7.1 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n \leq f$ eşitsizliği sağlanırsa, her açık $\mathcal{O} \subset X$ kümesi için

$$\text{st-}\limsup_n (\inf_{\mathcal{O}} f_n) \leq \inf_{\mathcal{O}} f$$

elde edilir.

İspat. $e_{st}\text{-}\limsup_n f_n \leq f$ olduğu kabul edilsin. Bu eşitsizlik, Tanım 3.1 gereği $\text{st-}\liminf_n (epi f_n) \supset epi f$ bağıntısına karşılık gelir. Bir $\mathcal{O} \subset X$ açık kümesi ve bir

$\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ değeri için $\inf_{\mathcal{O}} f < \beta$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $\mathcal{O} \times (-\infty, \beta)$ açık olur ve $epif$ kümesi ile kesişir. Böylece her $n \in N$ için $\mathcal{O} \times (-\infty, \beta)$ kümesi ile $epif_n$ kümeleri kesişecek şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ indeks kümesi mevcuttur. Buradan $\inf_{\mathcal{O}} f_n < \beta$ eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak st- $\limsup_n(\inf_{\mathcal{O}} f_n)$ değeri $\inf_{\mathcal{O}} f$ değerinden büyük olamaz. □

Teorem 7.2 (X, d) bir metrik uzay ve $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi olsun. $f_n \xrightarrow{e_{st}} f$ yakınsaklığını sağlayan ve $-\infty < \inf f < \infty$ olan $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\inf f_n \xrightarrow{st} \inf f$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için

$$\inf_B f_n \leq \inf f_n + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $B \subset X$ kompakt kümesi ve $N \in \mathcal{S}$ indeks kümesinin olmasıdır.

İspat. Gerekliliği göstermek için $f(x) \leq \inf f + \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in X$ seçilsin. $f_n \xrightarrow{e_{st}} f$ olduğu için Sonuç 6.7 kullanılırsa, st- $\limsup_n f_n(x_n) \leq f(x)$ olacak şekilde en az bir $x_n \xrightarrow{st} x$ dizisi vardır. $n \in N$ için (x_n) dizisinin tüm noktalarını içerecek şekilde yeterince büyük bir B kompakt kümesi alınırsa

$$\inf_B f_n \leq f_n(x_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\text{st-}\limsup_n(\inf_B f_n) \leq \text{st-}\limsup_n f_n(x_n) \leq f(x) \leq \inf f + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir ve her $n \in N$ için

$$\inf_B f_n \leq \inf f + \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Diğer yandan $\inf f_n \xrightarrow{st} \inf f$ olduğundan, aynı $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ve her $n \in K$ için

$$\inf f - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf f_n \leq \inf f + \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde en az bir $K \in \mathcal{S}$ kümesi mevcuttur. Buradan $W = N \cap K$ olacak şekilde bir küme oluşturulduğunda her $n \in W$ için

$$\inf_B f_n \leq \inf f_n + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \inf f_n + \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır.

Yeterlilik kısmını göstermek için kompakt bir B kümesi ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ seçilsin. Her $n \in N$ için

$$\inf f_n + \varepsilon \geq \inf_B f_n$$

olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{S}$ mevcuttur. Böylece Teorem 5.9 kullanılarak

$$st\text{-}\liminf_n (\inf f_n) + \varepsilon \geq st\text{-}\liminf_n (\inf_B f_n) \geq \inf_B f \geq \inf f$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi ve $f_n \overset{e_{st}}{\to} f$ olduğundan Lemma 7.1 kullanılarak $\mathcal{O}$ yerine X kümesi alındığında

$$st\text{-}\liminf_n (\inf f_n) \geq \inf f \geq st\text{-}\limsup_n (\inf f_n)$$

eşitsizliği sağlanır ve

$$\inf f_n \overset{st}{\to} \inf f$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Örnek 7.3 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} nxe^{nx}, & n \text{ tam kare ise} \\ nxe^{2nx}, & n \text{ tam kare değil ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada (f_n) dizisi Teorem 7.2 de verilen şartları sağlar. Bu dizinin istatistiksel epi-limit fonksiyonu olan $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ise} \\ -\frac{1}{2e}, & x = 0 \text{ ise} \\ \infty, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. (f_n) dizisinde, her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in N$ için

$$\inf_B f_n \leq \inf f_n + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $B \subset \mathbb{R}$ kompakt kümesi ve $N \in \mathcal{S}$ indeks kümesi bulunabildiği için $\inf f_n \overset{st}{\to} \inf f$ elde edilir.

Sıradaki örnekte (f_n) dizisi, istatistiksel epi-limite sahip olmasına rağmen Teorem 7.2 de verilen şartları sağlamaz. Böylece $\inf f_n \overset{st}{\nrightarrow} \inf f$ elde edilir.

Örnek 7.4 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$f_n(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{c} 1 \end{array}\right\}, & n \text{ tam kare ise} \\ \\ \left.\begin{array}{ll} -1+\frac{1}{n}, & x=n \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\}, & n \text{ tam kare değil ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça görüldüğü üzere (f_n) dizisi $f(x) = 2$ fonksiyonuna istatistiksel epi-yakınsaktır. Aynı zamanda $N \in \mathcal{S}$ kümesinden alınan her $n \in N$ için

$$\inf_B f_n \leq \inf f_n + \varepsilon$$

olacak şekilde $\mathbb{R}$ nin alt kümesi olan kompakt bir B kümesi bulunamaz. Bu nedenle $\inf f_n \xrightarrow{st}$ -1 ve $\inf f = 2$ olduğundan $\inf f_n \overset{st}{\nrightarrow} \inf f$ elde edilir.

8. KAYNAKLAR

Artstein Z, Wets R J B, 1988, Approximating the integral of multifunction, Journal of Multivariate Analysis, 24, 285–308.

Attouch H, 1977, Convergence de fonctions convexes, de sous-diff'erentiels et semi-groupes, Comptes Rendus de l'Acad'emie des Sciences de Paris, 284, 539–542.

Attouch H, Wets R J B, 1981, Approximation and convergence in nonlinear optimization, in Nonlinear Programming 4, Academic Press, New York.

Attouch H, Wets R J B, 1983, A convergence theory for saddle functions, Transactions of the American Mathematical Society, 280, 1–41.

Attouch H, Wets R J B, 1983, Convergence des points min/sup et de points fixes, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 296, 657–660.

Balcı M, 2010, Analiz I, Balcı Yayınları, Ankara.

Bayraktar M, 2010, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Beer G, Luccetti R, 1991, Convex optimization and the epidistance topology, Transactions of the American Mathematical Society, 327, 795–813.

Buttazzo G, 1977, Su una definizione generale dei Γ-limiti. Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, 14-B, 722–744.

Dal Maso G, 1993, An Introduction to Γ-Convergence, Birkhäuser, Basel.

De Giorgi E, Dal Maso G, 1981, Γ-Convergence and Calculus of Variations, in Mathematical Theories of Optimization, Springer, Berlin.

De Giorgi E, Franzoni T, 1975, Su un tipo di convergenza variazionale, Atti Accademia Nazionale de Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fiziche, Matematiche e Naturali, 58, 842–850.

De Giorgi E, Franzoni T, 1979, Su un tipo di convergenza variazionale, Rendiconti del Seminario di Brescia, 3, 63–101.

Dolecki S, Salinetti G, Wets R J B, 1983, Convergence of functions: Equisemi-continuity, Transactions of the American Mathematical Society, 276, 409–429.

Dupacova J, Wets R J B, 1988, Asymptotic behavior of statistical estimators and of optimal solutions of stochastic optimization problems, The Annals of Statistics, 16, 1517–1549.

Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241–244.

Fridy J A, 1985, On statistical convergence, Analysis, vol.5, 301–313.

Fridy J A, 1993, Statistical limit points, Proceedings of the American Mathematical Society, 118, 1187–1192.

Fridy J A, Orhan C, 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 3625–3631.

Gökhan A, Güngör M, 2002, On pointwise statistical convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 33(9), 1379–1384.

Güngör M, Gökhan A, 2005, On uniform statistical convergence, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 19(1), 17–24.

Hess C, 1996, Epi-convergence of sequences of normal integrands and strong consistency of the maximum likelihood estimator, The Annals of Statistics, 24(3), 1298–1315.

Jeyalakshmi K, 2012, Convergence of optimization problems, Bonfring International Journal of Data Mining, 2(1), 13–16.

Joly J L, 1973, Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarit'e est bicontinue, Journal de Math'ematiques Pures et Appliqu'ees, 52, 421–441.

Kall P, 1986, Approximation to optimization problems: An elementary review, Mathematics of Operations Research, 11(1), 9–18.

King A J, Wets R J B, 1991, Epi-consistency of convex stochastic programs, Stochastics Stochastics Reports, 34, 83–92.

Kočinac Lj D R, Caserta A, 2012, On statistical exhaustiveness, Applied Mathematics Letters, 25, 1447–1451.

Kuratowski C, 1958, Topologie. vol.I, PWN, Warszawa.

McLinden L, Bergstrom R, 1981, Preservation of convergence of sets and functions in finite dimensions, Transactions of the American Mathematical Society, 268, 127–142.

Mosco U, 1969, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances in Mathematics, 3, 510–585.

Niven I, Zuckerman H S, 1980, An Introduction to the Theory of Numbers, New York.

Nuray F, Rhoades B E, 2012, Statistical convergence of sequences of sets, Fasciculi Mathematici, 49, 87–99.

Pennanen T, 2005, Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs, Mathematics of Operations Research, 30(1), 245–256.

Rockafellar R T, Wets R J B, 2009, Variational Analysis, Springer, Heidelberg.

Šalát T, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139–150.

Salinetti G, Wets R J B, 1977, On the relation between two types of convergence for convex functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60, 211–226.

Schoenberg I J, 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, American Mathematical Monthly, 66, 361–375.

Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.

Şuhubi E, 2001, Fonksiyonel Analiz, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı, İstanbul.

Talo Ö, Sever Y, Başar F, 2016, On statistically convergent sequences of closed sets, Filomat, 30(6), 1497–1509.

Wets R J B, 1980, Convergence of Convex Functions, Variational Inequalities and Convex Optimization Problems, New York.

Wijsman R A, 1964, Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, American Mathematical Society, 70, 186–188.

Wijsman R A, 1966, Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, Transactions of the American Mathematical Society, 123, 32–45.

Zervos M, 1999, On the epi convergence of stochastic optimization problems, Mathematics of Operations Research, 24(2), 495–508.

Zygmund A, 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Şükrü TORTOP
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 01.01.1987
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 05057741384 / stortop@aku.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Anadolu Öğretmen Lisesi, 2005
Lisans	: Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2011
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2014

Çalıştığı Kurum(lar)

: Tarabya İstek Koleji, 2011 - 2012

: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2013 - ...

Yayınları (SCI ve Diğer)

Sever Y, Talo Ö, Tortop Ş, 2018, Statistical epi-convergence in sequences of functions, Journal of Mathematical Analysis, 9, 65–76.

Tortop Ş, 2018, Statistical hypo-convergence in sequences of functions, Journal of Applied Mathematics and Computation, 2(11), 504–512.

Tortop Ş, Dündar E, 2018, Wijsman I_2-invariant convergence of double sequences of sets, Journal of Inequalities and Special Functions, 9(4), 90–100.

Tortop Ş, Sever Y, Talo Ö, 2019, On statistically convergent sequences of closed sets and epigraphs, Journal of Inequalities and Special Functions, 10(2), 10–20.