2-NORMLU UZAYLARDA
BAZI YAKINSAKLIK TİPLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin TÜRKMEN

Danışman
Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TİPLERİ

Hüseyin TÜRKMEN

Danışman
Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Hüseyin TÜRKMEN tarafından hazırlanan "2-Normlu Uzaylarda Bazı Yakınsaklık Tipleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**' nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Uğur ULUSU

Başkan : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edeb. Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mesut BÜTÜN
Sivas Cumhuriyet Üniv., Eğitim Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./.......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

– Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

– Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

– Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,

– Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,

– Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,

– Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/12/2019

Hüseyin TÜRKMEN

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

2-NORMLU UZAYLARDA
BAZI YAKINSAKLIK TİPLERİ

Hüseyin TÜRKMEN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Uğur ULUSU

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada ele alınan konunun tarihi gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizi kavramları tanıtılarak bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizi kavramları tanıtılarak bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır. Beşinci bölümde, 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizi kavramları tanıtılarak bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2019, v + 32 sayfa

Anahtar Kelimeler : 2-normlu uzay, İstatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık, Cauchy dizi.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

SOME CONVERGENCE TYPES
ON 2-NORMED SPACES

Hüseyin TÜRKMEN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Uğur ULUSU

This thesis study consists of six chapters.

In the first chapter, the historical development of the subject discussed in the study is mentioned. In the second chapter, some basic notions necessary for a better understanding of the study are given. In the third chapter, statistical convergence and statistical Cauchy sequence notions in the 2-normed spaces are introduced and their specific properties and relationships between these notions are explained with examples and theorems. In the fourth chapter, $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy sequence notions in the 2-normed spaces are introduced and their specific properties and relationships between these notions are explained with examples and theorems. In the fifth chapter, $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy sequence notions in the 2-normed spaces are introduced and their specific properties and relationships between these notions are explained with examples and theorems.

In the sixth section which is the last chapter, the sources in the literature used during the study are listed.

2019, v + 32 pages

Keywords : 2-normed space, Statistical convergence, $\mathcal{I}$-convergence, $\mathcal{I}$-statistical convergence, Cauchy sequence.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın

Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya

teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Hüseyin TÜRKMEN
AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
(x_n)	Reel sayı dizisi
$\lim x_n$	x_n dizisinin limiti
$x_n \to L$	x_n dizisinin L ye yakınsaması
$\lvert A\rvert$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$h.h.n$	Hemem hemen her n
$st-\lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
$2^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ nin kuvvet kümesi
$\mathcal{I}$	İdeal
$\emptyset$	Boş küme
$\mathcal{I}-\lim x_n$	(x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limiti
$\mathcal{I}_f$	$\mathbb{N}$ nin sonlu altkümelerinden oluşan ideal
$\mathcal{I}_\delta$	$\mathbb{N}$ nin doğal yoğun. sıfır olan altküme. oluşan ideal
$\mathcal{I}-st-\lim x_k$	(x_k) dizisinin $\mathcal{I}$-istatistiksel limiti
$\lVert.\rVert$	Norm fonksiyonu
$(N,\lVert.\rVert)$	Normlu uzay
$\lVert.,.\rVert$	2-norm fonksiyonu
$(X,\lVert.,.\rVert)$	2-normlu uzay
$\lVert.\rVert_\infty$	2-norm fonksiyonu ve u bazı yardım. türetilen norm
$B_u(x,\varepsilon)$	$\lVert.\rVert_\infty$ normu yardım. tanım. x merkezli ε yarıçaplı yuvar
$st-\lim \lVert x_k,z\rVert$	$(N,\lVert,.,\rVert)$ 2-normlu uzay. (x_k) dizisi. istatistiksel limiti
$\overrightarrow{0}$	Sıfır vektörü
$diam(B)$	B yuvarının çapı
$\mathcal{I}-\lim \lVert x_n,z\rVert$	$(N,\lVert,.,\rVert)$ 2-normlu uzay. (x_n) dizisi. $\mathcal{I}$-limiti
$\mathcal{I}-st-\lim \lVert x_k,z\rVert$	$(N,\lVert,.,\rVert)$ 2-normlu uzay. (x_k) dizisi. $\mathcal{I}$-istatistik. limiti
$\delta_n(A)$	$\frac{\lvert A\rvert}{n}$
$\delta_{\mathcal{I}}(A)$	$\mathcal{I}-\lim \delta_n(A)$

1 GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonlar teorisi bilim dalının temel kavramlarından biridir. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$) nin altkümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise bu bilim dalındaki toplanabilme teorisinin önemli konularından biridir. Fast (1951) ve eş zamanlı olarak Steinhaus (1951)'un istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmalarından bu yana bu kavram üzerine çalışmalar başta Šalát (1980), Fridy (1985) ve Tripaty (1988) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar devam etmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin altkümelerinden oluşan bir ideal kavramına dayanan $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ise Kostyrko vd. (2000) tarafından tanıtılmıştır. Bu kavram üzerine de başta Kostyrko vd. (2005), Nabiev vd. (2007) ve Das ve Ghosal (2010) olmak üzere birçok araştırmacı günümüze kadar çalışmıştır.

Son zamanlarda Das vd. (2011), istatistiksel ve $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramlarının doğal kombinasyonu olan ve her iki kavramı daha da genelleştiren $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtarak, bu kavramın bazı özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Savaş ve Das (2011), herhangi bir reel normlu lineer uzayda $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır.

2-normlu uzay kavramı ilk olarak Gähler (1963) tarafından tanıtılmasının ardından bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. 2-normlu uzaylarda yakınsaklık üzerine yapılan ilk çalışmada Gunawan ve Mashadi (2001), 2-normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizi kavramlarını tanıtmışlardır. Daha sonra Gürdal ve Pehlivan (2009), 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizi kavramları üzerine çalışmışlardır. Benzer şekilde, 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizi kavramları ile $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizi kavramları da sırasıyla Şahiner vd. (2007) ve Yamancı ve Gürdal (2014) tarafından yapılan çalışmalarda verilmiştir. Ayrıca, Gürdal ve Pehlivan (2004) ve Gürdal ve Açık (2008) tarafından da 2-normlu uzaylarda benzer çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, dizi uzayları ve toplanabilme alanında önemli ve çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

İlerleyen bölümlerde, sırasıyla Gürdal ve Pehlivan (2009), Şahiner vd. (2007) ve Yamancı ve Gürdal (2014) tarafından yapılan çalışmalardaki temel tanım, örnek ve teoremler analiz edilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Bu kavramlar verilirken belirtilen referanslara ek olarak Kelley (1955), Kuratowski (1958) ve Maddox (1970) a ait eserler de genel anlamda kullanılmıştır.

Tanım 2.1 Tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Eğer dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ($\mathbb{R}$) ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani reel terimli dizi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyondur (Balcı 2012).

Genel terimi x_n olan dizi $(x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2 (x_n) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi L ye *yakınsaktır* denir ve $\lim x_n = L$ veya $x_n \to L$ biçiminde gösterilir (Balcı 2012).

Tanım 2.3 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizi* denir (Balcı 2012).

Tanım 2.4 $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \in K : k \leq n\}$ olsun. Bu durumda K kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big| \big\{ k \leq n : k \in K \big\} \Big|$$

biçiminde tanımlanır (Freedman and Sember 1981).

Burada $|K_n|$ ifadesi, K_n kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

Doğal yoğunluk kavramı ile ilgili birkaç özellik ve bazı örnekler aşağıdaki gibidir:

i. $K \subset \mathbb{N}$ sonlu ise, o zaman $\delta(K) = 0$ dır.

ii. $K = \mathbb{N}$ ise, o zaman $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ dir.

iii. $K = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ise, o zaman $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ dir.

iv. $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ise, o zaman $\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ dır.

v. $K_1 \subseteq K_2$ ise, o zaman $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ dir.

vi. $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1 - \delta(K)$ dır.

(x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün n ler için bir P özelliğini sağlıyorsa, "(x_n) dizisi hemen hemen her n için P özelliğini sağlıyor" denir ve bu durum $h.h.n$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.5 (x_k) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\big\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| = 0$$

ise, (x_k) dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

Sonlu elemanlı kümelerin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır, fakat istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olması gerekmez. Bu durum aşağıdaki örnekle açıklanabilir:

Genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1 \quad , & k = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan

$$(x_k) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$$

dizisi gözönüne alındığında; her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_\varepsilon|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\big\}\Big| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x_k = 0$ dır. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

Tanım 2.6 (x_k) bir reel terimli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\big\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\big\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu 0, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\Big(\big\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_N| > \varepsilon\big\}\Big) = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, (x_k) dizisine *istatistiksel Cauchy dizi* denir (Fridy 1985).

Tanım 2.7 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *ideal* olması için gerek ve yeter şart

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

ii. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$,

iii. Her $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ ya bir *gerçek ideal* denir. Ayrıca $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ idealine *uygun ideal* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal, (x_n) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa, (x_n) dizisi L ye *$\mathcal{I}$-yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - \lim x_n = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olarak alınırsa; I_f, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve bu durumda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile Tanım 2.2 deki yakınsaklık kavramı çakışır.

Eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ olarak alınırsa; I_δ, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve bu durumda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile Tanım 2.5 deki istatistiksel yakınsaklık kavramı çakışır.

Tanım 2.9 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (x_n) bir reel terimli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : |x_n - x_N| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine $\mathcal{I}$-*Cauchy dizi* denir (Nabiev *et al.* 2007).

Tanım 2.10 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal, (x_k) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \Big| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \Big| \geq \gamma \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa, (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}$-*istatistiksel yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - st - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir (Das *et al.* 2011).

Tanım 2.11 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (x_k) bir reel terimli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \Big| \left\{ k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon \right\} \Big| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_k) dizisine $\mathcal{I}$-*istatistiksel Cauchy dizi* denir (Das *et al.* 2011).

Tanım 2.12 L boş olmayan bir küme ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer her $x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

i. $x + y \in L$,

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$,

iii. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ var,

iv. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ var,

v. $x + y = y + x$,

vi. $\alpha x \in L$,

vii. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

viii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

ix. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

x. $1_F\, x = x$ (Burada 1_F, F cisminin birim elemanını göstermektedir)

şartları sağlanıyorsa L ye F üzerinde bir *lineer uzay (vektör uzayı)* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.13 L, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de L nin sonlu bir altkümesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = 0$$

olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa, S kümesine veya $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) *lineer bağımsızdır* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.14 L, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve B, L nin bir alt kümesi olsun. B lineer bağımsız ve B, L yi geriyorsa yani $< B >= L$ ise B ye (F üzerinde) L nin bir *bazı (tabanı)* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.15 N, bir lineer uzay olsun. Eğer

$$\|.\| : N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y \in N$ ve her α skaleri için

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir *norm* ve $(N, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.16 $(x_n), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $L \in N$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$\|x_n - L\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.17 $(x_k), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $L \in N$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, (x_k) dizisi x e *istatistiksel yakınsaktır* denir (Fridy 1985).

Tanım 2.18 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve $(x_n), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $L \in N$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|x_n - L\| \geq \varepsilon \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa, (x_n) dizisi x e $\mathcal{I}$*-yakınsaktır* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.19 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve $(x_k), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $L \in N$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \gamma \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa, (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}$*-istatistiksel yakınsaktır* denir (Das and Savaş 2011).

Tanım 2.20 $2 \leq d < \infty$ olmak üzere X, d boyutlu bir reel lineer uzay olsun. Eğer

$$\|.,.\| : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve her α skaleri için

i. $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x$ ve y lineer bağımlıdır,

ii. $\|x, y\| = \|y, x\|$,

iii. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$,

iv. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa, $\|.,.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir $2-$*norm* ve $(X, \|.,.\|)$ ikilisine de *2-normlu uzay* denir (Gunawan and Mashadi 2001).

Bu çalışma süresince, $2 \leq d < \infty$ olmak üzere, X in d boyutlu bir 2-normlu uzay olduğu kabul edilecektir.

2-normlu uzayın standart bir örneği $\theta = (0,0), x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\|x, y\| = \text{“köşeleri } \theta,\ x \text{ ve } y \text{ olan üçgensel bölgenin alanı”}$$

2-normu ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ dir (Gunawan and Mashadi 2001).

Herhangi bir $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x, y\| \geq 0 \quad \text{ve} \quad \|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca x, y ve z lineer bağımlı ise (örneğin $d = 2$ için), o zaman

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\| \quad \text{veya} \quad \|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

dir (Gunawan and Mashadi 2001).

$(X, \|.,.\|)$ 2-normlu bir uzay ve $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ kümesi de X için bir baz olsun. X üzerinde $\|.\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\left\{\|x, u_i\| : i = 1, 2, \ldots, d\right\}$$

biçiminde tanımlanır (Gunawan and Mashadi 2001).

2-norm fonksiyonu ve u bazı yardımıyla türetilen bu $\|.\|_\infty$ normu ile ilişkili olarak;

$$\|x - y\|_\infty = \max\left\{\|x - y, u_i\| : i = 1, 2, \ldots, d\right\}$$

olmak üzere x merkezli ε yarıçaplı $B_u(x, \varepsilon)$ (kapalı) yuvarları

$$B_u(x, \varepsilon) = \left\{y : \|x - y\|_\infty \leq \varepsilon\right\}$$

biçiminde tanımlanır (Gunawan and Mashadi 2001).

Tanım 2.21 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $L \in X$ olsun. Eğer her bir $z \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - L, z\| = 0$$

ise, (x_n) dizisi L ye *yakınsaktır* denir ve $\lim_{n \to \infty} x_n = L$ biçiminde gösterilir. (Gunawan and Mashadi 2001).

Tanım 2.22 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her bir $z \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, z\| = 0$$

ise, (x_n) dizisine *Cauchy dizi* denir (Raymond *et al.* 2001).

3 2-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Gürdal ve Pehlivan (2009) tarafından 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $L \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\right\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani

$$\delta\Big(\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\right\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\left\{k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\right\}\Big| = 0$$

ise, (x_k) dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir. Bu, aynı zamanda, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\|x_k - L, z\| < \varepsilon \quad (h.h.k)$$

olması demektir. Bu durumda

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

yazılır.

Sonuç 3.2 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında herhangi bir dizi ve L, X in herhangi bir elemanı olsun. Eğer $z = \overrightarrow{0}$ ise, her $\varepsilon > 0$ için $\|x_k - L, z\| = 0 \ngeq \varepsilon$ olacağından

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon, \forall z \in X\right\} = \emptyset$$

dir.

$(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki herhangi bir dizi yakınsak ise, aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Çünkü herhangi bir sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bu iddianın tersi genelde doğru değildir. Bu durum aşağıdaki örneklerle açıklanabilir:

Örnek 3.3 $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$\|x, y\| = |x_1.y_2 - x_2.y_1|$$

formülü ile verilen 2-norm ile donatılmış $X = \mathbb{R}^2$ uzayı gözönüne alınsın ve $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında (x_k) dizisi;

$$x_k = \begin{cases} (1, k) & , \quad k = n^2\,(n \in \mathbb{N}) \\ (1, \frac{k-1}{k}) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca, burada $L = (1, 1)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun. Eğer $z_1 = 0$ ise, o zaman her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$K = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olup, $\delta(K) = 0$ dır. Bu yüzden $z_1 \neq 0$ alınsın. Bu durumda da, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\left\{k \in \mathbb{N} : k \neq n^2,\, n \leq \frac{|z_1|}{\varepsilon}\right\}$$

kümesi sonludur ve böylece

$$\big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\} = \left\{k \in \mathbb{N} : k = n^2,\, n \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{|z_1|} + 1}\right\} \cup \{\text{sonlu küme}\}$$

dir. Bundan dolayı her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| = \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : k = n^2,\, n \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{|z_1|} + 1}\right\}\right| \cup \frac{1}{n}O(1)$$

yazılabilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\delta\Big(\big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big) = 0$$

dır, bu ise

$$st - \lim_{k \to \infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

olması demektir. Fakat bu (x_k) dizisi L ye yakınsak değildir.

Örnek 3.4 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında (x_k) dizisi;

$$x_k = \begin{cases} (0,k) & , \quad k = n^2 \, (n \in \mathbb{N}) \\ (0,0) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca, burada $L = (0,0)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{1, 4, 9, 16, ..., k^2, ...\right\}$$

dir. Bu kapsam ifadesine, sağdaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

dır, bu ise

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

olması demektir. Fakat bu (x_k) dizisi L ye yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yukarıdaki iki örnek bu durumu açıklar. İstatistiksel yakınsak bir dizinin limitinin tekliği aşağıdaki teoremle kanıtlanmıştır.

Teorem 3.5 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $L, L' \in X$ olsun. Eğer

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\| \quad \text{ve} \quad st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L', z\|$$

ise, o zaman $L = L'$ dür.

İspat: Kabul edilsin ki $st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$, $st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L', z\|$ ve $L \neq L'$ dür. O zaman $L - L' \neq \overrightarrow{0}$ dır ve böylece $L - L'$ ve z lineer bağımsız olacak şekilde bir $z \in X$ vardır ($d \geq 2$ olduğundan böyle bir z vardır). Bundan dolayı $\varepsilon > 0$ için

$$\|L - L', z\| = 2\varepsilon$$

yazılabilir.

O halde, üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= \|L - L', z\| \\ &= \|(L - x_k) + (x_k - L'), z\| \\ &\leq \|x_k - L, z\| + \|x_k - L', z\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L', z\| < \varepsilon\big\} \subseteq \big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}$$

dur. Kabul gereği, yukarıdaki kapsam ifadesinin sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan

$$\delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L', z\| < \varepsilon\big\}\big) = 0$$

dır, fakat bu ifade

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L', z\|$$

olması ile çelişir. Sonuç olarak, $L = L'$ dür.

Teorem 3.6 (x_k) ve (y_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında birer dizi olsun. Eğer (y_k), hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir dizi ise, o zaman (x_k) istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Kabul edilsin ki

$$\delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\big\}\big) = 0 \ \text{ ve } \ \lim_{k\to\infty} \|y_k, z\| = \|L, z\|$$

dir. O zaman her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\} \subseteq \big\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\} \cup \big\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\big\}$$

yazılabilir. Bundan dolayı her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\big) \leq \delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\big) + \delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\big\}\big) \tag{3.1}$$

dır.

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k, z\| = \|L, z\|$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\big\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}$$

kümesi sonlu sayıda eleman içerir. Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\big) = 0$$

dır. Burada, (3.1) eşitsizliği de gözönüne alındığında, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

dır, bu ise

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

olması demektir.

Teorem 3.7 (x_k) ve (y_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında birer dizi, $L, L' \in X$ ve $a \in \mathbb{R}\,(a \neq 0)$ olsun. Eğer

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\| \quad \text{ve} \quad st - \lim_{k\to\infty} \|y_k, z\| = \|L', z\|$$

ise, o zaman

(i) $st - \lim_{k\to\infty} \|x_k + y_k, z\| = \|L + L', z\|$ (sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için),

(ii) $st - \lim_{k\to\infty} \|a\, x_k, z\| = \|a\, L, z\|$ (sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için)

dir.

İspat: (i) Kabul edilsin ki $st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ ve $st - \lim_{k\to\infty} \|y_k, z\| = \|L', z\|$ dir. O zaman her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - L', z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere $\delta(K_1) = 0$ ve $\delta(K_2) = 0$ dır. Şimdi

$$K = K(\varepsilon) = \big\{k \in \mathbb{N} : \|x_k + y_k - (L + L'), z\| \geq \varepsilon\big\}$$

olsun. İspatı tamamlamak için $\delta(K) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için de $K \subset K_1 \cup K_2$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edilsin ki $k_0 \in K$ dır. O zaman

$$\|x_{k_0} + y_{k_0} - (L + L'), z\| \geq \varepsilon \tag{3.2}$$

dur. Eğer $k_0 \notin K_1 \cup K_2$ ise, o zaman $k_0 \notin K_1$ ve $k_0 \notin K_2$ dir ve böylece her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\|x_{k_0} - L, z\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \|y_{k_0} - L', z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olmalıdır. Buradan, üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$\|x_{k_0} + y_{k_0} - (L + L'), z\| \leq \|x_{k_0} - L, z\| + \|y_{k_0} - L', z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir ki bu durum (3.2) ile çelişir. O halde $k_0 \in K_1 \cup K_2$ olup, sonuç olarak $K \subset K_1 \cup K_2$ dir.

(ii) Kabul edilsin ki $st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ ve $a \in \mathbb{R}\,(a \neq 0)$ dir. O zaman, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\right) = 0$$

dır. Burada, 2-norm fonksiyonunun tanımından dolayı, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\begin{aligned}\big\{k \in \mathbb{N} : \|ax_k - aL, z\| \geq \varepsilon\big\} &= \big\{k \in \mathbb{N} : |a|\|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Kabul gereği, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\big\{k \in \mathbb{N} : \|ax_k - aL, z\| \geq \varepsilon\big\}\big) = 0$$

dır, bu ise

$$st - \lim_{k\to\infty} \|ax_k - aL, z\| = \|aL, z\|$$

olması demektir.

Tanım 3.8 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_N, z\| \geq \ \varepsilon\}\big) = 0,$$

yani

$$\|x_k - x_N, z\| < \varepsilon \quad (h.h.k)$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı varsa, (x_k) dizisine istatistiksel Cauchy dizi denir.

Teorem 3.9 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir istatistiksel Cauchy dizi olsun. O zaman, hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde $(X, \|.,.\|)$ da yakınsak bir (y_k) dizisi vardır.

İspat: Kabul edilsin ki (x_k), $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında bir istatistiksel Cauchy dizidir. İlk olarak, "$B_u^1 = B_u(x_{N_1}, 1)$ kapalı yuvarı hemen hemen her k için x_k ları içerecek şekilde" bir N_1 doğal sayısı seçilsin. Ardından yine benzer şekilde, "$B_u^2 = B_u(x_{N_2}, \frac{1}{2})$ kapalı yuvarı hemen hemen her k için x_k ları içerecek şekilde" bir N_2 doğal sayısı seçilsin. Burada aynı zamanda, $B_u^2 = B_u^1 \cap B_u^2$ nin de hemen hemen her k için x_k ları içerdiği görülür. Böylece, bu süreç devam ettirilerek

$$diam(B_u^m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

olacak şekilde içiçe kapalı yuvarların bir (B_u^m) dizisi elde edilir.

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} B_u^m = A$$

olsun. Hemen hemen her k için her bir B_u^m kapalı yuvarı x_k ları içerdiğinden, doğal sayıların kesin artan bir (T_m) dizisi seçilebilir, öyle ki $k > T_m$ için

$$\frac{1}{n}\big|\{k \leq n : x_k \notin B_u^m\}\big| < \frac{1}{m}$$

dir. Tüm $m \geq 1$ ler için

$$W_m = \{k \in \mathbb{N} : k > T_m,\, x_k \notin B_u^m\} \quad \text{ve} \quad W = \bigcap_{m=1}^{\infty} W_m$$

biçiminde ifade edilsin. Şimdi

$$y_k = \begin{cases} A & , \text{ eğer } k \in W \text{ ise} \\ x_k & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçimindeki (y_k) dizisi tanımlansın. Burada $\lim_{k\to\infty} y_k = A$ olduğu görülür. Aslında, her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ olacak şekilde bir m doğal sayısı seçilebilir. O zaman, her bir $k > T_m$ için ya $y_k = A$ ya da $y_k = x_k \in B_u^m$ dir ve bu yüzden her iki durumda da

$$\|y_k - A\|_\infty \leq diam(B_u^m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

dir.

$$\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_u^m\}$$

olduğundan

$$\frac{1}{n}\big|\{k \leq n : x_k \neq y_k\}\big| \leq \frac{1}{n}\big|\{k \leq n : x_k \notin B_u^m\}\big| < \frac{1}{m}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\delta\big(\{k \in \mathbb{N} : y_k \neq x_k\}\big) = 0$$

dır. Bu yüzden $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında hemen hemen her k için $x_k = y_k$ dır. $\{u_1, ..., u_n\}$, $(X, \|.\|_\infty)$ 2-normlu uzayı için bir baz olsun. Tüm $1 \leq i \leq d$ ler için

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - A\|_\infty = 0 \quad \text{ve} \quad \|y_k - A, u_i\| \leq \|y_k - A\|_\infty$$

olduğundan her bir $z \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - A, z\| = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.10 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. (x_k) nın istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart istatistiksel Cauchy dizi olmasıdır.

İspat: Kabul edilsin ki $st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ dir. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\|x_k - L, z\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (h.h.k)$$

dir. Burada $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\|x_N - L, z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçilirse, o zaman

$$\begin{aligned} \|x_k - x_N, z\| &\leq \|x_k - L, z\| + \|L - x_N, z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (h.h.k) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (x_k) istatistiksel Cauchy dizidir.

Tersine, (x_k) nın bir istatistiksel Cauchy dizi olduğu kabul edilsin. O halde Teorem 3.9 gözönüne alındığında, hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında yakınsak bir (y_k) dizisi vardır. Ayrıca, burada Teorem 3.6 da gözönüne alınırsa,

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

olduğu görülür.

Teorem 3.11 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer,

$$st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

ise, o zaman

$$\lim_{i\to\infty} \|x_{k_i}, z\| = \|L, z\|$$

olacak şekilde (x_k) nın bir (x_{k_i}) altdizisi vardır.

4 2-NORMLU UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Şahiner vd. (2007) tarafından 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ile ilgili yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.1 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $L \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa, (x_n) dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir. Bu durumda

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n - L, z\| = 0 \quad \text{veya} \quad \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

yazılır.

Şimdi bazı ideal örnekleri ve bunlarla alakalı olarak $\mathcal{I}$-yakınsaklık örnekleri verilecektir:

(i) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olarak alınırsa; $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve bu durumda $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık ile Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından verilen alışılmış yakınsaklık kavramları çakışır.

(ii) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ olarak alınırsa; $\mathcal{I}_\delta$, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve bu durumda $\mathcal{I}_\delta$-yakınsaklık ile Gürdal ve Pehlivan (2009) tarafından verilen istatistiksel yakınsaklık kavramları çakışır.

Örnek 4.2 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ alınsın ve $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında (x_n) dizisi;

$$x_n = \begin{cases} (0, n) & , \quad n = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \\ (0, 0) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca, burada $L = (0, 0)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\right\}$$

dır. Bu kapsam ifadesinde, sağdaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}\big) = 0,$$

yani

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\delta$$

dır, bu ise

$$\mathcal{I}_\delta - \lim_{n\to\infty} \|x_n - L, z\| = 0$$

olması demektir. Fakat bu (x_n) dizisi L ye alışılmış manada yakınsak değildir.

Teorem 4.3 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. (x_n) ve (y_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında birer dizi, $L, L' \in X$ ve $a \in \mathbb{R}\,(a \neq 0)$ olsun. Eğer

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\| \quad \text{ve} \quad \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|L', z\|$$

ise, o zaman

(i) $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n, z\| = \|L + L', z\|$,

(ii) $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|ax_n, z\| = \|aL, z\|$,

dir.

İspat: (i) Kabul edilsin ki $\mathcal{I} - \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$ ve $\mathcal{I} - \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|L', z\|$ dir. O zaman, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon) = \left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon) = \left\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L', z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ dır. Şimdi

$$K = K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|(x_n + y_n) - (L + L'), z\| \geq \varepsilon\}$$

olsun. Bu durumda $K \subset K_1 \cup K_2$ dir ki bu da $K \in \mathcal{I}$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edilsin ki $\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n,z\|=\|L,z\|$ ve $a\in\mathbb{R}\,(a\neq 0)$ dir. O zaman, her $\varepsilon>0$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in X$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-L,z\|\geq\frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\in\mathcal{I}$$

dır. Burada 2-norm fonksiyonunun tanımından dolayı, her $\varepsilon>0$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in X$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\|ax_n-aL,z\|\geq\ \varepsilon\right\}=\left\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-L,z\|\geq\frac{\varepsilon}{|a|}\right\}$$

eşitliği yazılabilir. Kabul gereği, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan, her $\varepsilon>0$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in X$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\|ax_n-aL,z\|\geq\ \varepsilon\right\}\in\mathcal{I}$$

dır, bu ise

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|ax_n,z\|=\|aL,z\|$$

olması demektir.

$u=\{u_1,u_2,\ldots,u_d\}$ kümesi $(X,\|.,.\|)$ 2-normlu bir uzayı için bir baz olmak üzere aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.4 $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_n)\in X$ dizisinin $L\in X$ noktasına $\mathcal{I}$-yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $i=1,\ldots,d$ için

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n-L,u_i\|=0$$

olmasıdır.

$\|.\|_\infty$, 2-norm fonksiyonu ve u bazı yardımıyla türetilen norm olmak üzere aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.5 $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_n)\in X$ dizisinin $L\in X$ noktasına $\mathcal{I}$-yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n-L\|_\infty=0$$

olmasıdır.

$B_u(L,\varepsilon)$, $\|.\|_\infty$ normu yardımıyla tanımlanan L merkezli ε yarıçaplı yuvar olmak üzere aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 4.6 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_n) \in X$ dizisinin $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_u(L,\varepsilon)\} \in \mathcal{I}$$

olmasıdır.

Tanım 4.7 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\big\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_N, z\| \geq \varepsilon\big\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine $\mathcal{I}$-Cauchy dizi denir.

Teorem 4.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. X de $\|.,.\|$ veya $\|.\|_\infty$ normlarından herhangi birine göre $\mathcal{I}$-Cauchy dizi olan (x_n) dizisi için aşağıdakiler denktir:

(i) (x_n), $(X, \|.,.\|)$ uzayında $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

(ii) (x_n), $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat: (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında herhengi bir dizi olsun. Lemma 4.5 göz önüne alındığında; (x_n) dizisinin 2-normdaki $\mathcal{I}$-yakınsaklığı, $\|.\|_\infty$ normundaki $\mathcal{I}$-yakınsaklığına denktir. Yani,

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n - L, z\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n - L\|_\infty = 0$$

dır. İspat için

"(x_n), 2-norma göre $\mathcal{I}$-Cauchy dizidir $\Leftrightarrow$ (x_n), $\|.\|_\infty$ normuna göre $\mathcal{I}$-Cauchy dizidir"

önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

5 2-NORMLU UZAYLARDA $\mathcal{I}$-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Yamancı ve Gürdal (2014) tarafından 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 5.1 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $L \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \Big| \big\{ k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon \big\} \Big| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

veya denk bir ifade ile

$$A_n(\varepsilon) = \big\{ k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon \big\} \ \text{ ve } \ \delta_n\big(A_n(\varepsilon)\big) = \frac{|A_n(\varepsilon)|}{n}$$

olmak üzere

$$\delta_{\mathcal{I}}\big(A_n(\varepsilon)\big) = \mathcal{I} - \lim \delta_n\big(A_n(\varepsilon)\big) = 0$$

ise, (x_k) dizisi L ye $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|x_k - L, z\| = 0 \ \text{ veya } \ \mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$$

yazılır.

Sonuç 5.2 (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında herhangi bir dizi ve L, X in herhangi bir elemanı olsun. Eğer $z = \overrightarrow{0}$ ise $\|x_k - L, z\| = 0 \ngeq \varepsilon$ olacağından

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \Big| \big\{ k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon \big\} \Big| \geq \gamma \right\} = \emptyset$$

dir.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olarak alınırsa; $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve bu durumda $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık kavramı ile 3. bölümde tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı çakışır.

Teorem 5.3 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $L, L' \in X$ olsun. Eğer

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|x_k, z\| = \|L, z\| \quad \text{ve} \quad \mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|x_k, z\| = \|L', z\|$$

ise, o zaman $L = L'$ dür.

İspat: Kabul edilsin ki $\mathcal{I}-st-\lim_{k\to\infty}\|x_k,z\|=\|L,z\|$, $\mathcal{I}-st-\lim_{k\to\infty}\|x_k,z\|=\|L',z\|$ ve $L\neq L'$ dür. O zaman $L-L'\neq\overrightarrow{0}$ dır ve böylece $L-L'$ ile z lineer bağımsız olacak şekilde bir $z\in X$ vardır ($d\geq 2$ olduğundan böyle bir z vardır). Bundan dolayı $\varepsilon>0,\gamma>0$ için

$$\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|L-L',z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|=2\gamma$$

yazılabilir. O halde, üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}2\gamma &= \frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|L-L',z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\ &= \frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|(L-x_k)+(x_k-L'),z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\ &\leq \frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|x_k-L',z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|+\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|x_k-L,z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|x_k-L',z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|<\gamma\right\}$$
$$\subseteq\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|x_k-L,z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|\geq\gamma\right\}$$

dır. Kabul gereği, yukarıdaki kapsam ifadesinin sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:\|x_k-L',z\|\geq\varepsilon\big\}\Big|<\gamma\right\}\in\mathcal{I}$$

dır, fakat bu ifade

$$\mathcal{I}-st-\lim_{k\to\infty}\|x_k,z\|=\|L',z\|$$

olması ile çelişir. Sonuç olarak, $L=L'$ dür.

Teorem 5.4 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal, (x_k) ve (y_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında birer dizi, $L, L' \in X$ ve $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ olsun. Eğer

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\| \quad \text{ve} \quad \mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|y_k, z\| = \|L', z\|$$

ise, o zaman

i) $\mathcal{I} - st - \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k + y_k, z\| = \|L + L', z\|$,

ii) $\mathcal{I} - st - \lim\limits_{k\to\infty} \|a\, x_k, z\| = \|a\, L, z\|$

dir.

İspat: (i) Kabul edilsin ki $\mathcal{I}{-}st{-}\lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ ve $\mathcal{I}{-}st{-}\lim_{k\to\infty} \|y_k, z\| = \|L', z\|$ dir. O zaman her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{\gamma}{2} \right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|y_k - L', z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{\gamma}{2} \right\}$$

olmak üzere $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ dır. Şimdi

$$K = K(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|(x_k + y_k) - (L + L'), z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \gamma \right\}$$

olsun. Bu durumda $K \subset K_1 \cup K_2$ dir, bu ise $K \in \mathcal{I}$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edilsin ki $\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k, z\| = \|L, z\|$ ve $a \in \mathbb{R}\,(a \neq 0)$ dir. O zaman, her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\big\}\Big| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

dır. Burada, 2-norm fonksiyonunun tanımından dolayı

$$\|ax_k - aL, z\| = |a|\|x_k - L, z\|$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|ax_k - aL, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \gamma \right\}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\big\}\Big| \geq \gamma \right\}$$

eşitliği yazılabilir. Kabul gereği, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|ax_k - aL, z\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

dır, bu ise

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|ax_k, z\| = \|aL, z\|$$

olması demektir.

$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ kümesi $(X, \|., .\|)$ 2-normlu bir uzayı için bir baz olmak üzere aşağıdaki lemmalar verilebilir:

Lemma 5.5 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_k) \in X$ dizisinin $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $i = 1, \ldots, d$ için

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|x_k - L, u_i\| = 0$$

olmasıdır.

İspat: Eğer her $i = 1, \ldots, d$ için $\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k - L, u_i\| = 0$ ise, o zaman $\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k - L, z\| = 0$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Kabul edilsin ki her $i = 1, \ldots, d$ için

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k \to \infty} \|x_k - L, u_i\| = 0$$

dır. Her $z \in X$ için $z = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_d u_d$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R})$ biçiminde yazılabileceğinden, üçgen eşitsizliği yardımıyla ve 2-norm fonksiyonunun tanımından, tüm $k \in \mathbb{N}$ ler için

$$\|x_k - L, z\| \leq |\alpha_1| \|x_k - L, u_1\| + |\alpha_2| \|x_k - L, u_2\| + \cdots + |\alpha_d| \|x_k - L, u_d\|$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\begin{aligned} &\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \gamma \right\} \\ &\qquad \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L, u_1\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha_1|} \right\} \right| \geq \gamma \right\} \\ &\qquad\qquad \cup \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L, u_2\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha_2|} \right\} \right| \geq \gamma \right\} \\ &\qquad\qquad \cup \cdots \cup \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L, u_d\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha_d|} \right\} \right| \geq \gamma \right\} \end{aligned}$$

dir. Kabul gereği, yukarıdaki kapsam ifadesinin sağ tarafındaki kümeler $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan, her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \gamma\right\} \in \mathcal{I}$$

dır, bu ise

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k - L, z\| = 0$$

olması demektir.

$\|.\|_\infty$, 2-norm fonksiyonu ve u bazı yardımıyla türetilen norm olmak üzere aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 5.6 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_k) \in X$ dizisinin $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k - L\|_\infty = 0$$

olmasıdır.

$B_u(L, \varepsilon)$, $\|.\|_\infty$ normu yardımıyla tanımlanan L merkezli ε yarıçaplı yuvar olmak üzere aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 5.7 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_k) \in X$ dizisinin $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$A_n(\varepsilon) = \big\{k \leq n : x_k \notin B_u(L, \varepsilon)\big\}$$

olmak üzere, $\delta_{\mathcal{I}}(A_n(\varepsilon)) = 0$ olmasıdır.

Tanım 5.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (x_k), $(X, \|., .\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - x_N, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \gamma\right\} \in \mathcal{I}$$

veya denk bir ifade ile

$$\delta_{\mathcal{I}}\Big(\big\{k \leq n : \|x_k - x_N, z\| \geq \varepsilon\big\}\Big) = 0,$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_k) dizisine $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizi denir.

Teorem 5.9 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında, herhangi bir $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizinin $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\|.\|_\infty$ normuna göre herhangi bir $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizinin $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat: (x_k), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında herhangi bir dizi olsun. (x_k) dizisinin 2-norma göre $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklığı, $\|.\|_\infty$ normuna göre $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklığına denktir. Yani

$$\mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k - L, z\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I} - st - \lim_{k\to\infty} \|x_k - L\|_\infty = 0$$

dır. İspat için

"(x_k), 2-norma göre $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizidir $\Leftrightarrow$ (x_k), $\|.\|_\infty$ normuna göre $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizidir"

önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

6 KAYNAKLAR

Balcı, M. (2016). Matematik Analiz-I. Palme Yayınevi, 1. Basım, Ankara.

Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz. Pegem Akademi Yayınevi, 1. Basım, Ankara.

Das, P. and Ghosal, S.Kr. (2010). Some further results on $\mathcal{I}$-Cauchy sequences and condition (AP). *Computers and Mathematics with Applications*, **59:** 2597–2600.

Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S.Kr. (2011). On generalizations of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters*, **24:** 1509–1514.

Gähler, S. (1963). 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur. *Mathematische Nachrichten*, **26:** 115–148.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On finite dimensional 2-normed spaces. *Soochow Journal of Mathematics*, **27:** 321–329.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2004). The statistical convergence in 2-Banach spaces. *Thai Journal of Mathematics*, **2:** 107–113.

Gürdal, M. and Açık, I. (2008). On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences in 2-normed spaces. *Mathematical Inequalities and Applications*, **11:** 349–354.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2009). Statistical convergence in 2-normed spaces. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **33:** 257–264.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5:** 301–313.

Freedman, A.R. and Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, **95:** 293–305.

Kelley, J.L. (1955). General Topology. Springer-Verlag, New York.

Kostyrko, P., Wilczyński, W. and Šalát, T. (2000). $\mathcal{I}$-convergence. *Real Analysis Exchange*, **26:** 669–685.

Kostyrko, P., Máčaj, M., Šalát, T. and Sleziak, M. (2005). $\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points. *Mathematica Slovaca*, **55:** 443–464.

Kuratowski, C. (1958). Topology-I. PWN, Warszawa.

Maddox, I.J. (1970). Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Nabiev, A., Pehlivan, S. and Gürdal, M. (2007). On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11:** 569–576.

Raymond, W., Freese, Y. and Cho, J. (2001) Geometry of linear 2-normed spaces. N.Y. Nova Science Publishers, Huntington.

Savaş, E. and Das, P. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Applied Mathematics Letters*, **24:** 826–830.

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinarie et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, **2:** 73–74.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30:** 139–150.

Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S. and Gunawan, H. (2007). Ideal convergence in 2-normed spaces. *Taiwanase Journal of Mathematics*, **11:** 1477–1484.

Tripathy, B.C. (1988). On statistical convergence. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, **47:** 299–303.

Yamancı, U. and Gürdal, M. (2014). $\mathcal{I}$-statistical convergence in 2-normed space. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **20:** 41–47.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Hüseyin TÜRKMEN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Afyonkarahisar, 05.01.1988
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	:	0 505 845 59 83 / huss1988@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Bozüyük Anadolu Öğretmen Lisesi, 2006
Lisans	:	Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Matematik Öğrtm., 2011

Çalıştığı Kurumlar

MEB, Afyonkarahisar, Şuhut Anadolu Lisesi, 2018 - ...