BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba ÇINAR

Danışman
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

İkinci Danışman

Arş. Grv. Dr. Tuğba Yalçın UZUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2020

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Tuğba ÇINAR

Danışman

Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

İkinci Danışman

Arş. Grv. Dr. Tuğba YALÇIN UZUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2020

TEZ ONAY SAYFASI

Tuğba ÇINAR tarafından hazırlanan "Bazı Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Eşitsizlikleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 03/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

İkinci Danışman : Arş. Grv. Dr. Tuğba YALÇIN UZUN

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi
Fen Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...... /...... /......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03 / 07 / 2020

Tuğba ÇINAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Tuğba ÇINAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK
İkinci Danışman: Arş. Grv. Dr. Tuğba YALÇIN UZUN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Riemann-Liouville kesirli integralini genelleyen kesirli integrasyon üzerine yeni yaklaşımlar verilmiştir. Dördüncü bölümde Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integralleri için verilen genelleştirilmiş integral kullanılarak bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir

2020, iv+ 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonu, Riemann-Liouville kesirli integral, Senkron fonksiyon, Monoton fonksiyon, Konveks fonksiyon, Hölder eşitsizliği, Cheybshev eşitsizliği.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME GENERALIZED FRACTIONAL
INTEGRAL INEQUALITIES

Tuğba ÇINAR

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Sermin ÖZTÜRK

Co-Supervisor: Res. Asst. Dr. Tuğba YALÇIN UZUN

This thesis study consists of five chapters. The first chapter is divided into the introduction and a general literature information is given. In the second chapter, necessary basic definitions and concepts are given. In the third chapter, new approaches on fractional integration that generalize the Riemann-Liouville fractional integral are given. In the fourth chapter, some new inequalities are obtained by using the generalized integral given for Riemann-Liouville and Hadamard fractional integrals. In the fifth and last section, discussion and conclusion are included.

2020, iv+ 58 pages

Keywords: Beta function, Gamma Function, Riemann-Liouville fractional integrals, Synchrounous functions, Monotonic functions, Convex function, Hölder inequality, Cheybshev inequality.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Arş. Grv. Dr. Tuğba YALÇIN UZUN'a her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Tuğba ÇINAR

Afyonkarahisar 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$J_a^a f(x)$	Riemann-Liouvile Kesirli integrali
${}_k^s J_a^a f(x)$	(k,s) Riemann Liouville Kesirli İntegrali
$\beta_k(x,y)$	Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu
$\Gamma_k(x)$	Gama Fonksiyonu
$(J_{a^+}^a f)(x)$	Riemann Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegrali
$(J_{b^-}^a f)(x)$	Riemann Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegrali
$(J_{a^+h}^a f)(x)$	f fonksiyonun $[\alpha; \beta]$üzerindeki bir başka η fonksiyonuna göre sol taraf kesirli integralleri
$(J_{b^-h}^a f)(x)$	f fonksiyonun $[\alpha; \beta]$üzerindeki bir başka η fonksiyonuna göre sağ taraf kesirli integralleri
${}^\rho I_{a^+\rho}^a f(b^\rho)$	ϕ fonksiyonun $[a^\rho, b^\rho]$üzerindeki bir başka η fonksiyonuna göre sol taraf kesirli integrali
${}^\rho I_{b^-\rho}^a f(a^\rho)$	ϕ fonksiyonun $[a^\rho, b^\rho]$üzerindeki bir başka η fonksiyonuna göre sağ taraf kesirli integrali
$L[a,b]$	$[a,b]$ aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\beta(x,y)$	Beta Fonksiyonu

1 GİRİŞ

Eşitsizlik, iki değerin büyüklük veya küçüklük bakımından karşılaştırılmasıdır. Matematiksel eşitsizliklerin amacı; değeri tam olarak bilinmeyen bazı matematiksel ifadeleri ya da fonksiyonları, daha iyi bildiğimiz ifadeler veya fonksiyonlarla alttan ve üstten sınırlamak ya da fonksiyonlara doğrudan sayısal sınırlar belirlemektir.

Eşitsizlikler, matematiğin neredeyse tüm alanlarında önemli bir yere sahiptir. Günümüze kadar eşitsizliklerle ilgili birçok değişik çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların ilki Hardy, Littlewood ve Polya'nın 1952 yılında yazdığı "Inequalities" adlı kitaptır. Bu kitapta, birçok yeni eşitsizlik ve uygulama yer almaktadır. Bu alanda yazılan ikinci kitap ise 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yazılan ve adı yine "Inequalities" olan kitaptır. Bu çalışma; 1934-1960 yılları arasında elde edilen eşitsizliklerin değişik sonuçlarını içermektedir. Eşitsizlik alanında matematik literatürüne üçüncü temel çalışma olarak, Mitrinovic'in 1970 yılında "Analytic Inequalities" adında yayımladığı kitap girmiştir. Bu kitapta ise, ilk iki kitapta yazılmayan, eşitsizlikle ilgili yeni bilgiler ve konular yer almaktadır. Eşitsizlikle ilgili bu üç temel kaynağın dışında Mitrinovic ve arkadaşları tarafından yazılan "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" ve "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte tarafından yazılan "Mathematical Inequalities", Niculescu ve Persons tarafından yazılan "Convex Functions and Their Applications" kaynakları sıralanabilir. Bu kaynaklara ek olarak, S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, R. P. Agarval gibi araştırmacıların birçok kitap, makale ve monografisi eşitsizlik alanında yapılan çalışmalar arasında gösterilebilir. S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kaynakta toplanmıştır. Matematikteki eşitsizlikler genel anlamda, öz fonksiyon eşitsizlikleri, Sobolev ve spektral eşitsizlikler, konveksite eşitsizlikleri, yeniden düzenleme eşitsizlikleri, saçılma eşitsizlikleri, korelasyon eşitsizlikleri ve majorizasyon eşitsizlikleri şeklinde sınıflandırılabilir.

Eşitsizlikler ile iç içe olan diğer kavram ise konvekslik kavramıdır. Konvekslik kavramının geçmişi, Archimedes'in M.Ö. 250 yılında π sabit değerini hesaplamasına kadar dayanmaktadır. Geçmişi çok eskiye dayanmasına rağmen, konvekslik ve konveks fonksiyonlar teorisi matematik literatürüne 19. yüzyılın sonlarına doğru girmiştir. Konvekslik; literatürde, Hermit'in 1881'de elde ettiği bir sonucun, Mathesis adlı bir dergide 1883 yılında yayımlanmasıyla ilk olarak yerini almıştır. Bu tarihten sonra konvekslik Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında yer alsa da konveks fonksiyonların sistemli olarak çalışılması J. L. W. V. Jensen'in 1905-1906 yılları arasında yaptığı çalışma ile başlamaktadır. Jensen'in yaptığı bu çalışmadan sonra konveks fonksiyonlar teorisiyle ilgili yapılan çalışmalar hız kazanmıştır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusuna, Beckenbach ve Bellman ve Mitrinovic kitaplarında yer vermişlerdir. Ayrıca Roberts ve Varberg , Pecaric ve ark, Niculescu ve Persson gibi bir çok matematikçi konveks fonksiyonlar üzerine eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1992 yılında Pecaric tarafından yayımlanan "Convex Functions: Inequalities" adlı kaynaktır. Konvekslik konusu günlük hayatımızda birçok alanda yer almaktadır. Bu alanlar, mühendislik, ekonomi, endüstri, fizik, veri analizi, bankacılık, tıp, sanat, iş alanları şeklinde sıralanabilir. Konveks fonksiyonların birçok uygulaması, uygulamalı matematik, matematiksel analiz, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak yer almaktadır. Günümüzde kullandığımız birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucudur. Bu temel eşitsizlikler arasında, Hermite'in 1881'de ifade ettiği ve bugün Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik, bunun yanında Jensen eşitsizliğinin bir sonucu olan Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri öne çıkar.

Ayrıca Fejer tarafından tanıtılan, Hermit'in sonuçlarını genelleyerek 1906 yılında yeni bir integral eşitsizliği elde etmiştir. Fejer'in bu çalışmasından yararlanılarak birçok yeni çalışma matematik literatürüne kazandırılmıştır.

Konveks fonksiyonlar üzerine yapılan birçok yeni çalışma eşitsizlik teorisinin gelişmesine katkı sağlamıştır. Bu teoriye katkı sağlayan kavramlardan diğer ikisi de kesirli türev ve kesirli integral kavramlarıdır. Bu iki kavram, "Türev ve integraller yalnızca tam sayılar için mi vardır?" sorusundan ortaya çıkmıştır. Bu soruyu 1695 yılında Marquis'de L'Hospital bir mektup aracılığıyla $\frac{d^n y}{d^x n}$ notasyonu $n = \frac{1}{2}$için anlamlı mıdır? şeklinde Gattfried Wilhem Leibnitz'e sormuştur. Leibnitz ise bu soruyu "Bu bir paradoksa yol açar, lakin bir gün kesin yararlı sonuçlara ulaşacağım"şeklinde cevaplamıştır. Dolayısla L'Hospital'in bu sorusuyla kesirli türev ve kesirli integral matematikte yerine almaya başlamıştır. 17. yüzyıldan itibaren Leibnitz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçi bu alanda oldukça önemli çalışmalar yapmışlardır. Özellikle, Liouville bu alanın duyurulması ve tanıtılmasında öncü rol oynamıştır. Devam eden süreç içerisinde Laplace ve Fourier'in çalışmalarının da ardından, Abel 1823 yılında kesirli hesaplamaları ilk olarak Tautochrone probleminin

$$k = \int_0^x (x-t)^{\frac{-1}{2}} f(t)dt$$

şeklindeki integral denkleminin çözümünde kullanmıştır. Abel'in bu çalışmalarından sonra kesirli analiz üzerine yoğunlaşan Liouville, 1832-1837 yılları arasında yayımlamış olduğu makalelerdeki kesirli türev ve integral tanımları, o dönem matematikçileri tarafından büyük ilgi ve destek görmüştür. Riemann ise 1847 yılında yazmış olduğu ancak vefatından on yıl sonra 1876 yılında yayımlanan makalesinde kesirli integral tanımı vermiştir. Daha sonra ise Riemann tarafından verilen bu tanım, Liouville'nin tanımıyla birleştirilerek yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. 1967-1968 yılları arasında Grünwald ve Letnikov kesirli mertebeden hesaplama için sonlu fark yaklaşımını kullanarak kesirli türev ve integralin yaklaşık hesaplamaları için yeni bir bakış açısı geliştirmiştir. 1967 yılında da İtalyan matematikçi Caputo, Riemann-Liouville tanımına benzeyen ve fiziksel uygulamalarda daha çok tercih edilen bir kesirli türev tanımı yapmıştır. Gelişimi günümüzde de halen devam eden ve daha birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı kesirli analiz kavramının değişik uygulama alanları vardır. Bunlardan başlıcalar; ısı transferi, viskoelastik, polimer fizik, sinyal işleme, elektromanyetik, elektrokimya, akustik şeklinde sıralanabilir. Bu türev ve integraller, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro analitik kimya, nesnelerin değişik özelliklerinin matematiksel olarak modellenmesi gibi birçok değişik alanda kullanılma imkanı bulmaktadır.

Bu çalışmaların ardından H. H. Hardy, S. Samko, H. Weyl, M. Riezs, J. Spanier, K. B. Oldham, B. Ross, K. Nishimoto, A. Kilbas, R. L. Bagley, K. S. Miller, M. Caputo, U. N. Katugampola gibi birçok matematikçi bu alanda önemli çalışmalar yapmıştır.

Yukarıda yapılan çalışmaların ışığı altında hazırlanan bu yüksek lisans tezi, beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümü olup, literatürde bulunan çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, konunun temelini oluşturan bazı tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı, eşitsizliklere uygulanması ve Hermite Hadamard tipli eşitsizliklerin genelleştirilen kesirli integralleri incelendi. Dördüncü bölümde, Rieman-Liouville ve Hadamard kesirli integralleri için verilen genelliştirilmiş integral kullanılarak bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Beşinci ve son bölüm ise sonuç ve tartışmalar kısmına ayrılmıştır.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak olan bazı tanım, teorem ve bazı iyi bilinen eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu) $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du$$

ile tanımlanan fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özellikleri

$i.$ $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n!$

$ii.$ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$iii.$ $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx \Gamma(p)\Gamma(1-p) \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0 < p < 1$

$iv.$ $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

şeklinde verilebilir.

Tanım 2.2 (Beta Fonksiyonu) $\mathrm{Re}(z) > 0$ ve $\mathrm{Re}(w) > 0$ olmak üzere,

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta Fonksiyonu denir. Beta fonksiyonun tanımından yola çıkarak

$$\beta(z+1, w+1) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w} dt$$

eşitsizliği elde edilir.

Özel bir fonksiyon olan Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonun aralarındaki bağlantı

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

şeklinde verilebilir. Bu eşitlik Beta fonksiyonunun Laplace dönüşümünden elde edilir ve Beta fonksiyonunun simetri özelliğini sağladığını gösterir. Yani;

$$\beta(z, w) = \beta(w, z)$$

özelliği sağlandığından Beta fonksiyonu simetrik bir fonksiyondur.

Beta fonksiyonunun diğer bazı özellikleri

i.

$$\beta(z,w)=\beta(z+1,w)+\beta(z,w+1)$$

ii.

$$\beta(z,w+1)=\frac{w}{z}\beta(z+1,w)=\frac{w}{w+z}\beta(z,w)$$

şeklindedir.

Tanım 2.3 (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri) $f\epsilon L[a,b]$ olsun. Bu durumda sırasıyla $\alpha>0$ olmak üzere α. mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann Liouville kesirli integralleri,

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \quad x>a$$

$$J_{b^-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt \quad x<b$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(t)$ gama fonksiyonudur ve $\alpha=1$ seçilirse Riemann Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Ayrıca $\alpha=0$ için $J_{a^+}^{\alpha}f(x)=J_{b^-}^{\alpha}f(x)=f(x)$ dir.

Tanım 2.4 (Fubini Teoremi) $f(x,y)\epsilon L(I), I=I_1\times I_2$ olsun. Bu durumda

(i) Hemen hemen her $x\epsilon I$ için $f(x,y)$, I_2 de y 'nin bir fonksiyonu olarak ölçülebilir ve integrallenebilirdir;

(ii) $\int_{I_2}f(x,y)dy$, x in bir fonksiyonu olarak I_1 aşağıda verildiği şekilde

$$\iint\limits_I f(x,y)dxdy=\int_{I_1}\left[\int_{I_2}f(x,y)dy\right]dx$$

ölçülebilir ve integrallenebilirdir.

Fubini teoreminden çok katlı integralin sonluluğu buna karşılık gelen tekrarlı integrallerin de sonluluğu çıkar. Bunun karşıtı doğru değildir, hatta tüm tekrarlı integraller birbirine eşit olsa bile f negatif olmayan fonksiyon ise aşağıdaki temel sonuca ulaşılır.

Tanım 2.5 (Tonelli Teoremi) $f(x,y)$ negatif olmayan fonksiyon ve $I=I_1\times I_2$ aralığında ölçülebilir olsun. Bu durumda hemen hemen her $x\epsilon I_1$ aralığında $f(x,y)$, I_2 integralin aralığında y 'nin bir fonksiyonu olarak ölçülebilirdir. Dahası

$\int_{I_2} f(x,y)dy$, x 'in bir fonksiyonu olarak I_1 integralin aralığında ölçülebilir olduğundan

$$\iint\limits_I f(x,y)dxdy = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x,y)dy \right] dx$$

şeklindedir. Burada x ve y nin rolleri değişebileceğinden f negatif olmayan ve ölçülebilir ise bu durumda

$$\iint\limits_I f(x,y)dxdy = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x,y)dy \right] dx = \int_{I_2} \left[\int_{I_1} f(x,y)dx \right] dy$$

olur.

Özel olarak söylemek gerekirse; $f \geqslant 0$ olduğunda şu önemli gerçeği elde ederiz: Fubininin herhangi üç integralinin birinin sonluluğundan öteki ikisinin sonluluğu çıkarılır. Buradan, ölçülebilir herhangi bir f için, $|f|$ fonksiyonu bu integrallerden birinde sonlu ise f fonksiyonu integrallenebilirdir ve f fonksiyonunun tüm üç integralleri eşittir.

Tanım 2.6 (Senkron Fonksiyon) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer, $t, s \epsilon [a,b]$ için,

$$((f(t) - f(s))((g(t) - g(s))) \geqslant 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f, g fonksiyonlarına $[a,b]$ üzerinde senkron fonksiyondur denir.

Tanım 2.7 (Monoton Fonksiyon) f, g ve h fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanan üç monoton fonksiyon olsun. Tüm $x, y \in [a,b]$ için,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))(h(x) - h(y)) \geqslant 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f, g ve h fonksiyonlarına $[a,b]$ üzerinde monoton fonksiyondur denir.

Tanım 2.8 (Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}$ de bir aralık $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. O halde $x, y \epsilon I$ ve $t \epsilon [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eğer $t \epsilon (0,1)$ alınırsa

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur. Bu durumda, bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir.

Eğer eşitsizlikte "$\leqslant$ " yerine " $\geqslant$ " alınırsa fonksiyon konkav fonksiyona, " $<$ " yerine " $>$ " alınırsa fonksiyon kesin konkav fonksiyona dönüşür. Tanımın geometrik yorumuna gelince, fonksiyonun konveks olduğu $[x, y]$ aralığında seçilen $ty + (1 - t)x$ noktasındaki değeri, uç noktalarının koordinatları $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ olan kirişin temsil ettiği fonksiyonda aldığı değerden daima küçüktür. Diğer bir ifadeyle kiriş, eğrinin üstünde ya da eğri kirişin altında kalır denir.

Önerme 2.1 Konveks fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. Herhangi iki konveks fonksiyonun toplamı konvekstir. Eğer fonksiyonlardan biri kesin konveks ise toplam fonksiyonu da kesin konvekstir.

ii. Herhangi bir konveks fonksiyonun skaler bir sayıyla çarpımı yine konvekstir.

iii. Bir fonksiyon bir aralıkta konveks ise bu aralığın bir alt aralığında da konvekstir.

Tanım 2.9 (Artan-Azalan Fonksiyon) $I \subset R$ ve f fonksiyonu I aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ için

$$(x - y)(f(x) - f(y)) > 0$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığında artan fonksiyon denir. Aradaki işaret "$\geq$" olursa f fonksiyonuna azalmayan fonksiyon denir. Eğer

$$(x - y)(f(x) - f(y) < 0$$

ise f fonksiyonuna I aralığında azalan fonksiyondur denir. Aradaki işaret "$\leq$" olursa f fonksiyonu artmayan fonksiyon olarak adlandırılır.

Sonuç 2.9.1 f ve g fonksiyonları konveks ve aynı zamanda g fonksiyonu artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir.

Tanım 2.10 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) I, R'de bir aralık, $f : I \to R$ konveks bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat f fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bu eşitsizlikte her iki taraf $[a, b]$ aralığı üzerinde x değişkenine göre integre edilirse,

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(a)dx + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqslant \int_a^b (x-a)dx$$

elde edilir.

Ayrıca, sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla $x = \frac{a+b-t(b-a)}{2}$ ve $x = \frac{a+b+t(b-a)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) &= \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right] dt \\ &\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.11 (Cauchy-Schwarz-Bunkovsky Eşitsizliği) $f, g : [a, b] \to R$ integrallenebilen iki fonksiyon ve $\lambda \in R$ olsun. Her $t \in [a, b]$ için

$$\int_a^t f(x)dx = \lambda \int_a^t f(x)dx$$

eşitliği mevcut ise,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği denir.

Aslında, Cauchy 1821 yılında "Course d'Analyse Algebrique" isimli eserinde bu eşitsizliğin toplam versiyonunu vermiştir. Paris'te Cauchy ile çalışma fırsatını bulan ve Cauchy'nin çalışmalarına aşina olan Bunyakovsky 1859 yılında "M´emoire" isimli dergide bu eşitsizliğin yukarıda gösterilen integral formunu vermiştir. Minimal yüzeyler üzerine çalışmalar yapan Bunyakovsky'nin eseri fransızca basıldığı için çoğu Avrupa ülkesinde bilinmemesi ve Hardy ile Littlewood'un 1920 yılına ait bir çalışmasında bu eserin cebirsel versiyonu için Cauchy-Schwarz eşitsizliği tabirini kullanması eşitsizliğin ismi konusunda bir karmaşaya yol açmıştır. 1889 yılında Alman matematikçi Otto Hölder kendi adı ile anılan aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin genel bir hali olan bu eşitsizliğinin integral versiyonu şu şekildedir:

Tanım 2.12 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan ve daha iyi sonuçlar elde etmek için kullanılan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilebilir.

Sonuç 2.12.1 (Power Mean Eşitsizliği) f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $q \geqslant 1, |f|$ ve $|g|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

3 (k,s) RİEMANN LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ

Kesirli analiz son zamanlarda bir çok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Kesirli integrallerin iki uygulamasının yaygın olarak kullanıldığı bir kaç şekli vardır. Bunlardan ilki, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonu, için $\alpha \geqslant 0$ 'ın Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0, a < x \leqslant b$$

şeklinde tanımlıdır. İkincisi tanımı ise,

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \alpha, x > 0$$

şeklinde tanımlanan Hadamard kesirli integralidir. Hadamard integrali için,

$$\int_a^x \frac{dt_1}{t_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} .... \int_a^{t_{n-1}} \frac{f(t_n)}{t_n} dt_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} f(t)\frac{dt}{t}$$

integralinin genelleştirilmesine dayanır.

Katugampola (2011)'deki çalışmasında; hem Riemann-Liouville hem de Hadamard kesirli integrallerini tek bir formda genelleştiren yeni bir kesirli integrali vermiştir. Bu genelleme $n \in \mathbb{N}^*$ için, α ve $s \neq 1$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$\int_a^x t_1^s dt_1 \int_a^{t_2} t_2^s dt_2 .... \int_a^{t_{n-1}} t_n^s f(t_n) dt_n = \frac{(s+1)^{1-n}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(x^{s+1} - t^{s+1}\right)^{n-1} t^s f(t)dt$$

aşağıdaki kesirli ifadesini

$${}^sJ_a^\alpha f(x) = \frac{(s+1)^{1-n}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(x^{s+1} - t^{s+1}\right)^{\alpha-1} t^s f(t)dt$$

incelemeyi temel alınmaktadır.

Son zamanlarda, Diaz ve Pariguan (2007) 'deki çalışmalarında, k-gama ve k-beta fonksiyonları adı verilen yeni fonksiyonları; klasik gama ve beta fonksiyonlarının genelleştirilmesi olan Pochmammer k sembolünü ve klasik Pochammer sembolünü

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n!k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)n,k}, k > 0$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada, $(x)_{n,k}$ faktöriyel fonksiyon için Pochhammer k-sembolüdür. Bu eşitlik, $e^{-\frac{t^k}{k}}$ üstel fonksiyonların Mellin dönüşümü ile

$$\Gamma_k(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt \qquad , x > 0$$

şeklinde gösterilebilir. Bu eşitlik k-gama fonksiyonudur. Açıkça,

$$\Gamma(x) = \lim_{k \longrightarrow 1} \Gamma_k(x)\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

ve

$$\Gamma_k(x+k) = x\Gamma(x+k) = x\Gamma_k(x)$$

yazılabilir. Diğer yandan k-beta fonksiyonu ise

$$\beta_k(x,y) = \frac{1}{k}\int_0^\infty t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1} dt$$

şeklinde tanımlanabilir öyle ki;

$$\beta_k(x,y) = \frac{1}{k}\beta\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$$

$$\beta_k(x,y) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}$$

eşitlikleri sağlanır. Daha sonra, yukarıdaki tanımların ışığı altında Mubeen ve Habibullah (2012)'de, Mubenn ve Habibullah, Riemann Liouville tipinin k-kesirli integralini

$${}_kJ^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_k(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt, \alpha > 0, x > 0$$

şeklinde tanımlamışlardır. $k \longrightarrow 1$ için bu eşitlik klasik Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenmektedir.

Yukarıdaki Riemann-Liouville kesirli integrallerinin tamamını genelleyen (k,s) kesirli integralini aşağıdaki şekilde verilebilir:

Tanım 3.1 f, $[a,b]$ sonlu reel aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeden (k,s)-Riemann Liouville kesirli integrali; $k > 0$ ve $s \in \mathbb{R}\diagdown\{-1\}$ olmak üzere,

$${}^s_kJ^\alpha_a f(x) := \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s f(t)dt, x \in [a,b] \tag{3.1}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem ile, (k,s) kesirli integralinin iyi tanımlı olduğu ispatlanacaktır.

Teorem 3.1 $f \in L_1[a,b]$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ve $k > 0$ olsun. Bu durumda, $\alpha > 0$ ve herhangi bir $x \in [a,b]$ için ${}_k^sJ_a^\alpha f(x)$ mevcuttur.

İspat $\Delta := [a,b] \times [a,b]$ ve $P : \Delta \to \mathbb{R}$ için P fonksiyonu $P(x,t) = \left[(x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s\right]$ şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$P_+(x,t) := \begin{Bmatrix} (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s, & a \leqslant t \leqslant x \leqslant b \\ 0, & a \leqslant x \leqslant t \leqslant b \end{Bmatrix}$$

ve

$$P_-(x,t) := \begin{Bmatrix} (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s, & a \leqslant t \leqslant x \leqslant b \\ 0, & a \leqslant x \leqslant t \leqslant b \end{Bmatrix}$$

olmak üzere $P = P_+ + P_-$ olduğu açıkça görülebilir. P, Δ üzerinde ölçülebilir olduğundan,

$$\int_a^b P(x,t)dt = \int_a^x P(x,t)dt = \int_a^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s dt$$

integralinde,

$$x^{s+1} - t^{s+1} = u$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$-(s+1)t^s dt = du$$

$$t^s dt = -\frac{du}{s+1}$$

olacağından verilen integral,

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x,t)dt &= \int_a^x P(x,t)dt = \int_a^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s dt \\ &= -\frac{1}{s+1}\int_a^x (u)^{\frac{\alpha}{k}-1}du \\ &= \frac{k}{\alpha}(x^{s+1} - a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}}\frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \int_b^a \left(\int_b^a P(x,t)\,|f(x)|\,dt\right)dx &= \int_b^a |f(x)| \left(\int_b^a P(x,t)dt\right)dx \\ &= \frac{k}{\alpha}\int_a^b (x^{s+1} - a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}}\,|f(x)|\,dx \\ &\leqslant \frac{k}{\alpha}(b^{s+1} - a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}}\int_a^b |f(x)|\,dx \end{aligned}$$

olur. Yani;

$$\begin{aligned}\int_b^a \left(\int_b^a P(x,t)\,|f(x)|\,dt\right)dx &= \int_b^a |f(x)| \left(\int_b^a P(x,t)dt\right)dx \\ &\leqslant \frac{k}{\alpha}(b^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}} \int_a^b \|f(x)\|_{L_1[a,b]} < \infty\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Dolayısıyla; $Q : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ için $Q(x,t) := P(x,t)f(x)$ şeklinde tanımlı Q fonksiyonu, Tonelli teoreminden Δ üzerinde integrallenebilir. Bu nedenle Fubini'nin teoreminden, bir $\int_b^a P(x,t)f(x)dx$ integrali $t \in [a,b]$ nin bir fonksiyonu olarak $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir. Yani, ${}^s_kJ^\alpha_a f(x)$ integrali mevcuttur.

Şimdi; (k,s) Riemann-Liouville kesirli integrallerinin yer değiştirebilirlik ve semi grup özelliklerinin olduğunu gösterelim:

Teorem 3.2 f, $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon, $k>0$ ve $s \in \mathbb{R}\diagdown\{-1\}$ olsun. Bu durumda, tüm $\alpha, \beta > 0$ ve $x \in [a,b]$ için

$${}^s_kJ^\alpha_a\left[{}^s_kJ^\beta_a f(x)\right] = {}^s_k J^{\alpha+\beta}_a f(x) = {}^s_k J^\beta_a \left[{}^s_kJ^\alpha_a f(x)\right]$$

dir.

İspat Dirichlet formülü ve Tanım 3.1 'den,

$$\begin{aligned}{}^s_kJ^\alpha_a\left[{}^s_kJ^\beta_a f(x)\right] &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^{s\,s}_{k} J^\beta_a f(t)dt \\ &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s \left[\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)} \int_a^x (t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}\tau^s f(\tau)d\tau\right]dt\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani,

$${}^s_kJ^\alpha_a\left[{}^s_kJ^\beta_a f(x)\right] = \frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha+\beta}{k}}}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)} \int_a^x \tau^s f(\tau)\left[\int_\tau^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s\left((t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}dt\right)\right]d\tau \tag{3.2}$$

dir. Burada; $y = \frac{(t^{s+1}-\tau^{s+1})}{(x^{s+1}-\tau^{s+1})}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$dy = \frac{(s+1)t^s}{x^{s+1}-\tau^{s+1}}dt \Longrightarrow t^s dt = \frac{1}{s+1}\left(x^{s+1}-\tau^{s+1}\right)$$

olacağından bu ifadeler integralde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}&\int_\tau^x \left(\frac{x^{s+1}-t^{s+1}-\tau^{s+1}+\tau^{s+1}}{x^{s+1}-\tau^{s+1}}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(x^{s+1}-\tau^{s+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s \left(\frac{t^{s+1}-\tau^{s+1}}{x^{s+1}-\tau^{s+1}}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\left(x^{s+1}-\tau^{s+1}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}dt \\ &= \frac{1}{s+1}\left(x^{s+1}-\tau^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\ &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha+\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\int_a^x \left(x^{s+1}-\tau^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\tau^s f(\tau)d\tau\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{x}(x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^{s}(t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}t^{s}dt \\
&= \frac{(x^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{s+1}\int_{0}^{1}(1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \qquad (3.3)\\
&= \frac{(x^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{s+1}\int_{0}^{1}(1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\
&= \frac{(x^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{s+1}k.\beta_k(\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

dır. k-beta fonksiyonun tanımı, (3.2) ve (3.3) 'den;

$$
\begin{aligned}
{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}\left[{}^{s}_{k}J^{\beta}_{a}f(x)\right] &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha+\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\int_{a}^{x}\left(x^{s+1}-\tau^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\tau^{s}f(\tau)d\tau \\
&= {}^{s}_{k}J^{\alpha+\beta}_{a}f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3 $\alpha, \beta, k > 0$ ve $s \in \mathbb{R}\diagdown\{-1\}$ olsun. Bu durumda; Γ_k, k-gama fonksiyonu olmak üzere,

$$
{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}\left[\left(x^{s+1}-a^{s+1}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\right] = \frac{\Gamma_k}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+\beta)}\left(x^{s+1}-a^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1} \qquad (3.4)
$$

dir.

İspat Tanım 3.1 ve

$$
y = \frac{(t^{s+1}-a^{s+1})}{(x^{s+1}-a^{s+1})}; \qquad x \in [a,b]
$$

değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$
dy = \frac{(s+1)t^{s}}{(x^{s+1}-a^{s+1})}dt
$$

olacağından,

$$
\begin{aligned}
{}_k^sJ_a^\alpha\left[\left(x^{s+1}-a^{s+1}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\right] &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s(t^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}dt \\
&= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\left[\int_a^x (\frac{x^{s+1}-t^{s+1}-a^{s+1}+a^{s+1}}{(x^{s+1}-a^{s+1})})^{\frac{\alpha}{k}-1}(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}\right. \\
&\quad \left. t^s\left(\frac{(t^{s+1}-a^{s+1})}{(x^{s+1}-a^{s+1})}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}dt\right] \\
&= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\frac{1}{s+1}\left(x^{s+1}-a^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\int_0^1(1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\
&= \frac{(s+1)^{-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\left(x^{s+1}-a^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\beta_k(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\left(x^{s+1}-a^{s+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+\beta)}\beta_k(\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $a=x$ durumu aşikar olarak sağlanır. Böylece; teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.1

i. (3.4) eşitliğinde $s=0$ ve $k>0$ alındığında

$$
{}_kJ_a^\alpha\left[(x-a)^{\frac{\beta}{k}-1}\right] = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1} \tag{3.5}
$$

elde edilir.

ii. $s=0$ ve $k=1$ için (3.4) ifadesi,

$$
J_a^\alpha\left[(x-a)^{\beta-1}\right] = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}
$$

şeklini alır.

Sonuç 3.1 $k>0$ ve $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ olsun. Bu durumda,

$$
{}_k^sJ_a^\alpha(1) = \frac{(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-2}}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+k)} \tag{3.6}
$$

ifadesi herhangi bir $\alpha>0$ için sağlanır.

Uyarı 3.2

i. (3.6) ifadesinde, $s=0$, $k>0$ alındığında,

$$
{}_kJ_a^\alpha(1) = \frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \tag{3.7}
$$

eşitliği sağlanır.

ii. (3.6) ifadesinde, $s = 0$, $k = 1$ alındığında,

$$J_a^\alpha(1) = \frac{(x-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

elde edilir.

3.1 Bazı Yeni (k,s) Riemann-Liouville Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Chebyshev eşitsizlikleri, (k,s) kesirli integral şeklinde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

Teorem 3.1.1 f ve g, $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, her $\alpha,\beta>0$, $t>a\geqslant 0$ ve (k,s)-kesirli integralleri için,

$$ {}^s_kJ^\alpha_a fg(t) \geqslant \frac{1}{{}^s J^\alpha_a(1)_k}\, {}^s_kJ^\alpha_a f(t)\, {}^s_kJ^\alpha_a g(t) \tag{3.8}$$

$$ {}^s_kJ^\alpha_a fg(t)\, {}^s_kJ^\beta_a(1) + {}^s_kJ^\beta_a fg(t)\, {}^s_kJ^\alpha_a(1) \geqslant {}^s_kJ^\alpha_a f(t)\, {}^s_kJ^\beta_a g(t) + {}^s_kJ^\alpha_a g(t)\, {}^s_kJ^\beta_a f(t) \tag{3.9}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde senkronize fonksiyonlar olduğundan, her $x,y\geqslant 0$ için

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geqslant 0$$

dir. Dolayısıyla,

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x) \tag{3.10}$$

yazılabilir. (3.10) 'un her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s$ ile çarpılıp, x 'e göre (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
&\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)g(x)dx \\
&+f(y)g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s dx \\
\geqslant\;& g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)dx \\
&+f(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s g(x)dx
\end{aligned}$$

$$ {}^s_kJ^\alpha_a fg(t) + f(y)g(y)\, {}^s_kJ^\alpha_a(1) \geqslant g(y)\, {}^s_kJ^\alpha_a f(t) + f(y)\, {}^s_kJ^\alpha_a g(t) \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) 'in her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s$ ile çarpılıp, y 'e göre (a,t)

aralığında integre edilirse,

$$
\begin{aligned}
&{}_k^sJ_a^{\alpha}fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s dy \\
&+\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s f(y)g(y)dy{}_k^sJ_a^{\alpha}(1) \\
\geqslant\ &\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s g(y)dy{}_k^sJ_a^{\alpha}f(t) \\
&+\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s f(y)dy{}_k^sJ_a^{\alpha}g(t)
\end{aligned}
$$

$$
{}_k^sJ_a^{\alpha}fg(t)\geqslant\frac{1}{{}^s_kJ_a^{\alpha}(1)}{}^sJ_a^{\alpha}f(t){}_k^sJ_a^{\alpha}g(t)
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda ilk eşitsizilik ispatlanmış olur.

Şimdi ise, (3.11)'in her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s$ ile çarpılıp y 'ye göre (a,t) arasında integrallenirse,

$$
\begin{aligned}
&{}_k^sJ_a^{\alpha}fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s dy \\
&+\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)g(y)dy{}_k^sJ_a^{\alpha}(1) \\
\geqslant\ &\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g(y)dy{}_k^sJ_a^{\alpha}f(t) \\
&+\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)dy
\end{aligned}
$$

$$
{}_k^sJ_a^{\alpha}fg(t){}_k^sJ_a^{\beta}(1)+{}_k^sJ_a^{\beta}fg(t){}_k^sJ_a^{\alpha}(1)\geqslant{}_k^sJ_a^{\alpha}f(t){}_k^sJ_a^{\beta}g(t)+{}_k^sJ_a^{\alpha}g(t){}_k^sJ_a^{\beta}f(t)
$$

elde edilir ki bu durumda ikinci eşitsizlik de ispatlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2 f ve g; $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, her $\alpha,\beta>0$ ve $t>a\geqslant 0$ için,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(s+1)^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+\alpha)}(t^{s+1}-a^{s+1})_k^{\frac{\beta}{k}-2s}J_a^{\alpha}fgh(t) \\
&+\frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(k+\alpha)}(t^{s+1}-a^{s+1})_k^{\frac{\alpha}{k}-2s}J_a^{\beta}fgh(t) \\
\geqslant\ &{}_k^sJ_a^{\alpha}fh(t){}_k^sJ_a^{\beta}g(t)+{}_k^sJ_a^{\alpha}gh(t){}_k^sJ_a^{\beta}f(t)-{}_k^sJ_a^{\alpha}h(t){}_k^sJ_a^{\beta}fg(t)-{}_k^sJ_a^{\alpha}fg(t){}_k^sJ_a^{\beta}h(t) \\
&+{}_k^sJ_a^{\alpha}f(t){}_k^sJ_a^{\beta}gh(t)+{}_k^sJ_a^{\alpha}g(t){}_k^sJ_a^{\beta}fh(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon ve $h \geqslant 0$ olduğundan, her $x, y \geqslant 0$ için,

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))(h(x)+h(y)) \geqslant 0$$

dir. Bundan dolayı;

$$\begin{aligned} f(x)g(x)h(x)+f(y)g(y)h(y) &\geqslant f(x)g(y)h(x)+f(y)g(x)h(x) \\ &\quad -f(y)g(y)h(x)-f(x)g(x)h(y) \qquad (3.12) \\ &\quad +f(x)g_k^s J_a^\alpha g(t)(y)h(y)+f(y)g(x)h(y) \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.12) 'nin her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s$ ile çarpılıp, (a,t) aralığında x 'e göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} &\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)g(x)h(x)dx \\ &+f(y)g(y)h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s dx \\ \geqslant\ & g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)h(x)dx \\ &+f(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s g(x)h(x)dx \\ &-f(y)g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s h(x)dx \\ &-h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)g(x)dx \\ &+g(y)h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)dx \\ &+f(y)h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s g(x)dx \end{aligned}$$

olur. Yani;

$$\begin{aligned} {}_k^sJ_a^\alpha fg(t)+f(y)g(y)h(y){}_k^sJ_a^\alpha(1) &\geqslant g(y){}_k^sJ_a^\alpha fh(t)+f(y){}_k^sJ_a^\alpha gh(t) \\ &\quad -f(y)g(y){}_k^sJ_a^\alpha h(t)-h(y){}_k^sJ_a^\alpha fg(t) \\ &\quad +g(y)h(y){}_k^sJ_a^\alpha f(t)+h(y)f(y){}_k^sJ_a^\alpha g(t) \ (3.13) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.13)'ün her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s$ ile çarpılıp y 'ye göre

(a,t) üzerinde integrallenirse,

$$\begin{aligned}
&\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s dy {}_k^sJ_a^\alpha fg(t)\\
&+{}_k^sJ_a^\alpha(1)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)g(y)h(y)dy\\
\geqslant\ & {}_k^sJ_a^\alpha fh(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g(y)dy\\
&+{}_k^sJ_a^\alpha gh(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)dy\\
&-{}_k^sJ_a^\alpha h(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)g(y)dy\\
&-{}_k^sJ_a^\alpha fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s h(y)dy\\
&+{}_k^sJ_a^\alpha f(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g(y)h(y)dy\\
&+{}_k^sJ_a^\alpha g(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s h(y)f(y)dy
\end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned}
&{}_k^sJ_a^\beta(1){}_k^sJ_a^\alpha fgh(t)+{}_k^s J_a^\alpha(1){}_k^sJ_a^\beta fgh(t)\\
\geqslant\ & {}_k^sJ_a^\alpha fh(t){}_k^sJ_a^\beta g(t)+{}_k^s J_a^\alpha gh(t){}_k^sJ_a^\beta f(t)-{}_k^s J_a^\alpha h(t){}_k^sJ_a^\beta fg(t)\\
&-{}_k^sJ_a^\alpha fg(t){}_k^sJ_a^\beta h(t)+{}_k^s J_a^\alpha f(t){}_k^sJ_a^\beta g(t)+{}_k^s J_a^\alpha g(t){}_k^sJ_a^\beta f(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.1 f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon ve $h \geqslant 0$ olsun. Bu durumda, her $\alpha > 0$ ve $t > a \geqslant 0$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(k+\alpha)}(t^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-2s}_k J_a^\alpha fgh(t)\\
\geqslant^s_k\ & J_a^\alpha fh(t){}_k^sJ_a^\alpha g(t)+{}_k^s J_a^\alpha gh(t){}_k^sJ_a^\alpha f(t)-{}_k^s J_a^\alpha h(t){}_k^sJ_a^\alpha fg(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat İlk olarak, (3.13) 'ün her iki tarafı$\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s$ ile çarpılıp y 'ye göre (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& {}_k^sJ_a^{\alpha} fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s dy \\
& +{}_k^sJ_a^{\alpha}(1)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s f(y)g(y)h(y) dy \\
\geqslant\ & {}_k^sJ_a^{\alpha} fh(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s g(y) dy \\
& +{}_k^sJ_a^{\alpha} gh(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s f(y) dy \\
& -{}_k^sJ_a^{\alpha} h(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s f(y)g(y) dy \\
& -{}_k^sJ_a^{\alpha} fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s h(y) dy \\
& +{}_k^sJ_a^{\alpha} f(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s g(y)h(y) dy \\
& +{}_k^sJ_a^{\alpha} g(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}y^s h(y)f(y) dy
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned}
& {}_k^sJ_a^{\alpha} fgh(t){}_k^sJ_a^{\alpha}(1) +{}_k^s J_a^{\alpha} fgh(t){}_k^sJ_a^{\alpha}(1) \\
\geqslant\ & {}_k^sJ_a^{\alpha} fh(t){}_k^sJ_a^{\alpha} g(t) +{}_k^s J_a^{\alpha} gh(t){}_k^sJ_a^{\alpha} f(t) \\
& -{}_k^sJ_a^{\alpha} h(t){}_k^sJ_a^{\alpha} fgh(t) -{}_k^s J_a^{\alpha} fg(t){}_k^sJ_a^{\alpha} h(t) \\
& +{}_k^sJ_a^{\alpha} f(t){}_k^sJ_a^{\alpha} gh(t) +{}_k^s J_a^{\alpha} fh(t){}_k^sJ_a^{\alpha} g(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.3 f, g ve h fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı üç monoton fonksiyon olduğundan, her $x, y \in [a,b]$ için,

$$(f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y))\,(h(x)-h(y)) \geqslant 0$$

dir. Bu durumda, her $\alpha, \beta > 0$ ve $t > a \geqslant 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(s+1)^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}(t^{s+1}-a^{s+1})_k^{\frac{\beta}{k}-2s} J_a^{\alpha} fgh(t) \\
& +\frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(k+\alpha)}(t^{s+1}-a^{s+1})_k^{\frac{\alpha}{k}-2s} J_a^{\beta} fgh(t) \\
\geqslant\ & {}_k^sJ_a^{\alpha} fh(t){}_k^sJ_a^{\beta} g(t) +{}_k^s J_a^{\alpha} gh(t){}_k^sJ_a^{\beta} f(t) -{}_k^s J_a^{\alpha} h(t){}_k^sJ_a^{\beta} fg(t) +{}_k^s J_a^{\alpha} fg(t){}_k^sJ_a^{\beta} h(t) \\
& -{}_k^sJ_a^{\alpha} f(t){}_k^sJ_a^{\beta} gh(t) +{}_k^s J_a^{\alpha} g(t){}_k^sJ_a^{\beta} fh(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Verilen eşitsizlik

$$\begin{aligned} f(x)g(x)h(x) - f(y)g(y)h(y) &\geqslant f(x)g(y)h(x) + f(y)g(x)h(x) \\ &\quad -f(y)g(y)h(x) + f(x)g(x)h(y) \\ &\quad -f(x)g(y)h(y) - f(y)g(x)h(y) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s$ ile çarpılıp, x 'e göre (a,t) üzerinde integrallenirse,

$$\begin{aligned} &\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)g(x)h(x)dx \\ &-f(y)g(y)h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s dx \\ \geqslant\ & g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)h(x)dx \\ &+f(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s g(x)h(x)dx \\ &-f(y)g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s h(x)dx \\ &+h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)g(x)dx \\ &-g(y)h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)dx \\ &-f(y)h(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s g(x)dx \end{aligned}$$

şeklindedir. Yani,

$$\begin{aligned} {}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} fg(t) - f(y)g(y)h(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}(1) &\geqslant g(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} fh(t) + f(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} gh(t) \\ &\quad -f(y)g(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} h(t) + h(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} fg(t) \\ &\quad -g(y)h(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} f(t) - h(y)f(y){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a} g(t) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1} - y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s$ ile çarpılıp, y 'ye göre (a,t)

aralığında integre edilirse,

$$
\begin{aligned}
& {}_k^s J_a^\alpha fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s dy \\
& -\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s dy f(y)g(y)h(y){}_k^s J_a^\alpha(1) \\
\geqslant\; & \frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g(y)dy{}_k^s J_a^\alpha fh(t) \\
& +\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)dy{}_k^s J_a^\alpha gh(t) \\
& -\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f(y)g(y)dy{}_k^s J_a^\alpha h(t) \\
& +\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s h(y)dy{}_k^s J_a^\alpha fg(t) \\
& -\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g(y)h(y)dy{}_k^s J_a^\alpha f(t) \\
& -\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s h(y)f(y)dy{}_k^s J_a^\alpha g(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. Yani,

$$
\begin{aligned}
& {}_k^s J_a^\alpha fgh(t){}_k^s J_a^\beta(1) -{}_k^s J_a^\beta fgh(t){}_k^s J_a^\alpha(1) \\
\geqslant\; & {}_k^s J_a^\alpha fh(t){}_k^s J_a^\beta g(t) +{}_k^s J_a^\alpha gh(t){}_k^s J_a^\beta f(t) -{}_k^s J_a^\alpha h(t){}_k^s J_a^\beta fg(t) \\
& +{}_k^s J_a^\alpha fg(t){}_k^s J_a^\beta h(t) -{}_k^s J_a^\alpha f(t){}_k^s J_a^\beta gh(t) -{}_k^s J_a^\alpha g(t){}_k^s J_a^\beta fh(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.4 f ve g; $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, her $\alpha,\beta>0$, $t>a\geqslant 0$ ve (k,s)-kesirli integralleri için,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(s+1)^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}(t^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-2s}_k J_a^\alpha f^2(t) \\
& +\frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(k+\alpha)}(t^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-2s}_k J_a^\beta g^2(t) \\
\geqslant\; & 2{}_k^s J_a^\alpha f(t){}_k^s J_a^\beta g(t) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

$$
{}_k^s J_a^\alpha f^2(t){}_k^s J_a^\beta g^2(t) +{}_k^s J_a^\alpha g^2(t){}_k^s J_a^\beta f^2(t) \geqslant 2{}_k^s J_a^\alpha fg(t){}_k^s J_a^\beta fg(t) \qquad (3.15)
$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat $(f(x)-g(y))^2 \geqslant 0$ olduğundan,

$$f^2(x)+g^2(y) \geqslant 2f(x)g(y) \tag{3.16}$$

yazılabilir. (3.16)'nın her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s$ ile çarpılıp x 'e göre (a,t) aralığında integrallenirse,

$$\begin{aligned}
&\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f^2(x)dx \\
&+g^2(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s dx \\
\geqslant\ & 2g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$${}_k^sJ_a^\alpha f^2(t)+g^2(y){}_k^sJ_a^\alpha f(1) \geqslant 2g(y){}_k^sJ_a^\alpha f(t)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2 &\geqslant 0 \\
f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x) &\geqslant 2f(x).f(y).g(x)g(y)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Verilen eşitsizliğin iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}(t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s$ ile çarpılarak, x 'e göre (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
&g^2(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f^2(x)dx \\
&+f^2(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s g^2(x)dx \\
\geqslant\ & 2f(y).g(y)\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-x^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}x^s f(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$${}_k^sJ_a^\alpha f^2(t)g^2(y)+{}_k^s J_a^\alpha g^2(t).f^2(y) \geqslant 2g(y)f(y){}_k^sJ_a^\alpha fg(t)$$

elde edilir. Eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}(t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s$ ile çarpılıp y 'ye göre (a,t) üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned}
&{}_k^sJ_a^\alpha f^2(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g^2(y)dy \\
&+{}_k^sJ_a^\alpha g^2(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s f^2(y)dy \\
\geqslant\ & 2{}_k^sJ_a^\alpha fg(t)\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t^{s+1}-y^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}y^s g(y)f(y)dy
\end{aligned}$$

yani,

$$ {}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}f^{2}(t){}^{s}_{k}J^{\beta}_{a}g^{2}(t)+{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}g^{2}(t){}^{s}_{k}J^{\beta}_{a}f^{2}(t)\geqslant 2{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}fg(t){}^{s}_{k}J^{\beta}_{a}fg(t) $$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.2 f ve g; $[0,\infty)$ üzerinde iki fonksiyon olsun. Bu durumda, her $\alpha,\beta>0$, $t>a\geqslant 0$ için

$$ \frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_{k}(k+\alpha)}(t^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-2}\left[{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}f^{2}(t){}^{s}_{k}J^{\beta}_{a}g^{2}(t)\right]\geqslant 2{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}f(t){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}g(t) $$

$$ {}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}f^{2}(t){}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}g^{2}(t)\geqslant\left[{}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}fg(t)\right]^{2} $$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.1.5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $\overline{f}:=\int_{a}^{x}t^{s}f(t)dt, x>a\geqslant 0, s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha\leqslant k<0$ için

$$ {}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}f(x)=\frac{1}{k}\,{}^{s}_{k}J^{\alpha-k}_{a}\overline{f}(x) $$

dir.

İspat (k,s)-kesirli integral tanımı ve Dirichlet'in formülünden,

$$ \begin{aligned} {}^{s}_{k}J^{\alpha}_{a}\overline{f}(x) &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_{k}(\alpha)}\int_{a}^{x}(x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^{s}\int_{a}^{t}u^{s}f(u)dudt \\ &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_{k}(\alpha)}\int_{a}^{x}u^{s}f(u)\int_{u}^{x}(x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^{s}dtdu \\ &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_{k}(\alpha)}\int_{a}^{x}(x^{s+1}-u^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}}u^{s}f(u)du \\ &= k\,{}^{s}_{k}J^{\alpha+k}_{a}f(x) \end{aligned} $$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Genelleştirilmiş Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilebilir.

Lemma 3.1.1 $0\leqslant a<b$ olmak üzere $f,g,h:[a,b]\to(0,\infty)$ üç fonksiyon olsun. Bu durumda, m, n, x, y keyfi reel sayıları için

$$ \left(\int_{a}^{b}g^{m}(t)h^{x}(t)f(t)dt\right)\left(\int_{a}^{b}g^{n}(t)h^{y}(t)f(t)dt\right)\geqslant\left(\int_{a}^{b}g^{\frac{m+n}{2}}(t)h^{\frac{x+y}{2}}(t)f(t)dt\right)^{2} \tag{3.17} $$

dir.

İspat

$$\int_a^b \left[\sqrt{g^m(t)h^x(t)f(t)}\sqrt{\int_a^b g^n(t)h^y(t)f(t)dt}-\sqrt{g^n(t)h^y(t)f(t)}\sqrt{\int_a^b g^m(t)h^x(t)f(t)dt}\right]^2 dt \geqslant 0$$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Bigg[g^m(t)h^x(t)f(t)dt\int_a^b g^n(t)h^y(t)f(t)dt + g^n(t)h^y(t)f(t)dt\int_a^b g^m(t)h^x(t)f(t)dt \\
&\quad -2g^{\frac{m+n}{2}}(t)h^{\frac{x+y}{2}}(t)f(t)\sqrt{g^m(t)h^x(t)f(t)}\sqrt{\int_a^b g^n(t)h^y(t)f(t)dt}\Bigg]dt \\
\geqslant\ & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\left(\int_a^b g^m(t)h^x(t)f(t)dt\right)\left(\int_a^b g^n(t)h^y(t)f(t)dt\right) \\
\geqslant\ & 2\left(\int_a^b g^{\frac{m+n}{2}}(t)h^{\frac{x+y}{2}}(t)f(t)dt\right)\sqrt{\int_a^b g^m(t)h^x(t)f(t)}\sqrt{\int_a^b g^n(t)h^y(t)f(t)dt}
\end{aligned}$$

olur ki, bu da istenen eşitsizliği verir.

Teorem 3.1.6 $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda, $k,m,n,r,p>0$ ve $\alpha>1$ için,

$$\left({}^s_kJ_a^{m(\frac{\alpha}{k}-1)+1}f^r(x)\right)\left({}^s_kJ_a^{n(\frac{\alpha}{k}-1)+1}f^p(x)\right) \geqslant \left({}^s_kJ_a^{\frac{m+2}{n}(\frac{\alpha}{k}-1)+1}f^{\frac{r+p}{2}}(x)\right)^2 \tag{3.18}$$

dir.

İspat (3.17) 'de $g(t)=(x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}$, $f(t)=\frac{t^s(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ve $h(t)=f(t)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{m(\frac{\alpha}{k}-1)}t^s f^r(t)dt\right)\left(\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{n(\frac{\alpha}{k}-1)}t^s f^p(t)dt\right) \\
\geqslant\ & \left(\frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{m+n}{2}(\frac{\alpha}{k}-1)}t^s f^{\frac{r+p}{2}}(t)dt\right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Açıklama 3.1.1 (3.18) ifadesinde $k=1$ alınırsa,

$$\left(J_a^{m(\alpha-1)+1}f^r(x)\right)\left(J_a^{n(\alpha-1)+1}f^p(x)\right) \geqslant \left({}_kJ_a^{\frac{m+2}{n}(\alpha-1)+1}f^{\frac{r+p}{2}}(x)\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2 (k,H) Riemann-Liouville Kesirli İntegral İçin Bazı İntegral Eşitsizlikleri

İlk olarak, kesirli integraller için temel tanımları ve gösterimleri verelim.

Tanım 3.2.1 (a,b),$\mathbb{R}$ 'nin sonlu bir aralığı ve $R(\alpha) > 0$ olsun. Aynı zamanda, $h(x)$, $(a,b]$ üzerinde artan ve pozitif monoton fonksiyon ve (a,b) üzerinde $h^{'}(x)$ türevi sürekli olsun. f fonksiyonun, $[a,b]$ üzerindeki bir başka h fonksiyonuna göre sol ve sağ taraflı kesirli integralleri,

$$\left(J_{a^{+}h}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(h(x)-h(t))^{\alpha-1}h'(t)f(t)dt, x \geqslant a, R(\alpha) > 0 \tag{3.19}$$

$$\left(J_{b^{-}h}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(h(t)-h(x))^{\alpha-1}h'(t)f(t)dt, x \leqslant b, R(\alpha) > 0 \tag{3.20}$$

şeklindedir. (3.19)ve (3.20) için,

$$\left(J_{a^{+}h}^{\alpha}f\right)(a) = \left(J_{b^{-}h}^{\alpha}f\right)(a) = 0$$

olur. Eğer (3.19) ve (3.20) integral formüllerinde $h(x) = x$ alınırsa;

$$J_{a^{+}h}^{\alpha} = J_{a^{+}}^{\alpha} \; ve J_{b^{-}h}^{\alpha} = J_{b^{-}}^{\alpha}$$

elde edilir.

Ayrıca, $\rho > 0$ için $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ seçilirse, bu durumda, (3.19) ve (3.20) eşitlikleri sırasıyla;

$$\left(J_{a^{+}\rho}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^{\alpha-1}t^{\rho}f(t)dt, x > a \tag{3.21}$$

$$\left(J_{b^{-}\rho}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(t^{\rho+1}-x^{\rho+1})^{\alpha-1}t^{\rho}f(t)dt, x < b \tag{3.22}$$

şeklini alacaktır. Bu tür genelleştirilmiş kesirli integraller, Samko ve Kilbas tarafından (1993) 'de, Akkurt ve Kaçar tarafından (2015) 'de, Butzer, Kilbas ve Trujillo tarafından (2002) 'de, Mubeen ve Habibullah tarafından (2012) 'de çalışılmıştır.

(3.19) 'da $a = 0$ için,

$$\left(J_{0^{+}h}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(h(x)-h(t))^{\alpha-1}h'(t)f(t)dt, x > 0 \tag{3.23}$$

$$\left(J_{0^{+}h}^{\alpha}f\right)(x) = f(x)$$

yazılabilir. Semi grup ve (3.23) integral operatörünün değişme özellikleri,

$$J^{\alpha}_{a^+,h} J^{\beta}_{a^+,h} f(x) = J^{\alpha+\beta}_{a^+,h} f(x) \quad \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$$

ve

$$J^{\alpha}_{a^+,h} J^{\beta}_{a^+,h} f(x) = J^{\beta}_{a^+,h} J^{\alpha}_{a^+,h} f(x)$$

şeklindedir. (3.23) integral operatörünün birim operatör özelliğini göstermek için, $f(x) = h(x)$ olacak şekilde özel bir h fonksiyonu seçilirse, (3.23) eşitliği

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (h(x) - h(t))^{\alpha-1} h'(t) h(t) dt$$

şeklini alır. Burada, $h(x) - h(t) = u$ olarak alınırsa, $h'(t)dt = -du$ olacağından $h(x) - u = h(t)$ yazılabilir. Dolayısıyla; bu ifadeler (3.23) 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (u)^{\alpha-1}(h(x) - u) du &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (u^{\alpha-1}h(x) - u^{\alpha}) du \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[h(x).\frac{u^{\alpha}}{\alpha} - \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} |_0^x \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Paydalar eşitlenip, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \left(J^{\alpha}_{0^+h} h\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+1)(\alpha)} \left[h(x). \left[h(x) - h(0)\right]^{\alpha} (\alpha+1) - \alpha(h(x) - h(0))^{\alpha+1} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \left[h(x) - h(0)\right]^{\alpha} \left[h(x)(\alpha+1) - \alpha(h(x) - h(0)\right] \\ &= \frac{(h(x) - h(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} (h(x) + \alpha h(0)) \qquad (3.24) \end{aligned}$$

olur. (3.24) ifadesinde $\alpha = 0$ alınırsa,

$$\left(J^{\alpha}_{0^+h} h\right)(x) = h(x)$$

elde edilir. (3.23) ifadesinde, $\alpha > 0$; $\rho \geqslant 0$, $\mu > -1$, $t > 0$ için $f(x) = x^{\mu}$ ve $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \left(J^{\alpha}_{0^+h} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (h(x) - h(t))^{\alpha-1} h'(t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{x^{\rho+1} - t^{\rho+1}}{\rho+1}\right)^{\alpha-1} t^{\mu} t^{\rho} dt \\ &= \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha-1} t^{\mu+\rho} dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $t = x.u^{\frac{1}{\rho+1}}$ değişken değiştirmesi ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(J_{0^+h}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^{\rho+1}-x^{\rho+1}.u)^{\alpha-1}(x.u^{\frac{1}{\rho+1}})^{\mu+\rho}.\frac{1}{\rho+1}x.u^{\frac{-\rho}{\rho+1}}dt \\
&= \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(x^{\rho+1})^{\alpha-1}x^{\rho+\mu}x\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\frac{\mu}{\rho+1}}du \\
&= \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\rho\alpha-\rho+\alpha-1+\rho+\mu+1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{\rho+\mu+1}{\rho+1})}{\Gamma(\alpha+\frac{\rho+\mu+1}{\rho+1})}
\end{aligned}$$

olacağından,

$$J_{0^+,h}^{\alpha}(x^{\mu}) = \frac{(\rho+1)\Gamma(\frac{\rho+\mu+1}{\rho+1})}{\Gamma(\alpha+\frac{\rho+\mu+1}{\rho+1})}x^{\alpha(p+1)+\mu}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.23) için $f(x) = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left(J_{0^+h}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (h(x)-h(t))^{\alpha-1}h'(t)f(t)dt \\
&= \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^{\alpha-1}t^{\rho}dt
\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte, $x^{\rho+1} - t^{\rho+1} = u$ alınırsa $-(\rho+1)t^{\rho}dt = du$ olacağından,

$$\begin{aligned}
\left(J_{0^+h}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (u)^{\alpha-1}\frac{du}{-(\rho+1)} \\
&= \frac{-(p+1)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(\frac{u^{\alpha}}{\alpha}\Big|_0^x\right) \\
&= \frac{(\rho+1)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha(p+1)} \\
&= J_{0^+,h}^{\alpha}(1)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Tanım 3.2.2 (a,b), $\mathbb{R}$ 'de sonlu bir aralık ve $R(\alpha) > 0$ olsun. Ayrıca, $h(x)$, $(a,b]$ üzerinde bir artan, pozitif monoton fonksiyon ve (a,b) üzerinde $h'(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonun $[a,b]$ üzerinde bir h fonksiyonuna göre sol ve sağ taraflı kesirli integralleri

$$\left({}_kJ_{a^+h}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)f(t)dt, k>0, R(\alpha)>0 \tag{3.25}$$

$$\left({}_kJ_{b^-h}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b (h(t)-h(x))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)f(t)dt, k>0, R(\alpha)>0 \tag{3.26}$$

şeklindedir. Eğer (3.25) ve (3.26) integral formüllerinde $h(x) = x$ alınırsa;

$$\left({}_kJ_{a^+h}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt, x>a$$

ve

$$\left({}_kJ^{\alpha}_{b^-h}f\right)(x) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt, b > x$$

elde edilir. Bu ifadeler, $k \to 1$ alındığında, klasik Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir.

Ayrıca, $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ için $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ seçilirse, (3.25) ve (3.26) ifadeleri sırasıyla;

$$\left({}^{\rho}_{k}J^{\alpha}_{a^+\rho}f\right)(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^{\rho}f(t)dt, \qquad x > a \tag{3.27}$$

$$\left({}^{\rho}_{k}J^{\alpha}_{b^-\rho}f\right)(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t^{\rho+1}-x^{\rho+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^{\rho}f(t)dt, \qquad x < b \tag{3.28}$$

şeklinde olur.

(3.25) 'de $a = 0$ için;

$$\left({}_kJ^{\alpha}_{a^+h}f\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)f(t)dt, \qquad x > 0 \tag{3.29}$$

$$\left({}_kJ^{0}_{0^+,h}f\right)(x) = f(x)$$

yazılabilir. (3.29) integral operatörünün semi grup ve değişme özelliği;

$$\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h})({}_kJ^{\beta}_{a^+,h})\right]f(x) = J^{\alpha+\beta}_{a^+,h}f(x) \ \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$$

$$\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h})({}_kJ^{\beta}_{a^+,h})\right]f(x) = ({}_kJ^{\beta}_{a^+,h})({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h})f(x)$$

şeklindedir. (3.29) integral operatörünün birim operatör özelliğini göstermek için özellikle $f(x) = h(x)$ olacak şekilde bir h fonksiyonu seçilirse,

$$\left({}_kJ^{\alpha}_{0^+h}h\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)h(t)dt$$

yazılabilir. Burada, $h(x) - h(t) = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa $h'(t)dt = -du$

olacağından,

$$
\begin{aligned}
\left({}_kJ^{\alpha}_{0^+,h}h\right)(x) &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)h(t)dt \\
&= -\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^x (u)^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(x)-u)du \\
&= -\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^x h(x)(u)^{\frac{\alpha}{k}-1}-u^{\frac{\alpha}{k}})du \\
&= -\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left(h(x)\frac{u^{\frac{\alpha}{k}}}{\frac{\alpha}{k}}-\frac{u^{\frac{\alpha}{k}+1}}{\frac{\alpha}{k}+1}\right)|_0^x \\
&= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{k}{\alpha}\frac{k}{\alpha+k}\left[h(x)\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)+[h(x)-h(0)]^{\frac{\alpha}{k}+1}\frac{\alpha}{k}\right] \\
&= \frac{k}{\Gamma(\alpha+1+k)}\left[(h(x)-h)(0))^{\frac{\alpha}{k}}h(x)\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)+(h(x)-h(0))\frac{\alpha}{k}\right] \\
&= \frac{(h(x)-h(0))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma(\alpha+k+1)}[h(x)+\alpha h(0)] \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. (3.30) da $\alpha = 0$ ve $k = 1$ alınırsa;

$$
\left(J^{\alpha}_{0^+,h}h\right)(x) = h(x)
$$

olur.

Teorem 3.2.1 f ve g; $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, $t > 0$, $\alpha > 0$ için,

$$
{}_kJ^{\alpha}_{a^+,\rho}h(fg)(t) \geqslant \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}\left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h}\right)f(t)\left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h}\right)g(t) \qquad (3.31)
$$

dir.

İspat f ve g senkronize fonksiyonları için;

$$
(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)) \geqslant 0 \qquad (3.32)
$$

yazılabilir. (3.32) 'den,

$$
f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho) \geqslant f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau) \qquad (3.33)
$$

olur. Eğer (3.33) 'ün her iki tarafı $\tau \in (a,t)$ için $\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)$ ile çarpılırsa;

$$
\begin{aligned}
&\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau) \\
\geqslant\ & g(\rho)\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)+f(\rho)\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)g(\tau) \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.34) eşitsizliği (a,t) üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)g(\tau)d\tau \\ & +\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\rho)g(p)d\tau \\ \geqslant & \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)g(\rho)d\tau \\ & +\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\rho)g(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.35}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & {}_kJ^{\alpha}_{a^+,\rho}h(fg)(t)+f(\rho)g(\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau \\ \geqslant & g(\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)d\tau \\ & +f(\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)g(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.36}$$

ve

$$({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)+f(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)\geqslant g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)+f(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t) \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.37) 'nin her iki tarafı $\rho\in(a,t)$ için $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1) \\ \geqslant & \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t) \\ & +\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t) \end{aligned} \tag{3.38}$$

olur. (3.38) ifadesi (a,t) üzerinde integre edilirse;

$$\begin{aligned} & ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)d\rho \\ & +\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1) \\ \geqslant & \int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)g(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t) \\ & +\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t) \end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik aynı zamanda,

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a^+,\rho}h(fg)(t) \geqslant \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}} \left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h}\right) f(t) \left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h}\right) g(t) \tag{3.40} $$

şeklinde de yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 f ve g; $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $k>0$ için,

$$ \begin{aligned} & \frac{(h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\Gamma_k(\alpha+k)} \left[\left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,\rho}h(fg)(t)\right) + \left({}_kJ^{\beta}_{a^+,\rho}h(fg)(t)\right)\right] \\ \geqslant\ & \left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h}\right) f(t) \left({}_kJ^{\beta}_{a^+,h}\right) g(t) + \left({}_kJ^{\alpha}_{a^+,h}\right) f(t) \left({}_kJ^{\beta}_{a^+,h}\right) g(t) \end{aligned} $$

dir.

İspat f ve g; $[a,b]$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, her $\alpha>0, \rho>0$ için, (3.37) 'nin her iki tarafı $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)$ ile çarpılırsa;

$$ \begin{aligned} & ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho) + \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1) \\ \geqslant\ & \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t) \\ & + \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t) \end{aligned} \tag{3.41} $$

elde edilir. (3.41) ifadesi (a,t) üzerinde integre edilirse;

$$ \begin{aligned} & \int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)dt \\ & + \int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)dt \\ \geqslant\ & \int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)dt \\ & + \int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)dt \end{aligned} \tag{3.42} $$

elde edilir. Buradan,

$$ \begin{aligned} & ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(1) + ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fg)(t) \\ \geqslant\ & ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(g)(t) + ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(f)(t) \end{aligned} \tag{3.43} $$

olacağından ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2.1 Bu teoremde $\alpha = \beta$ alınırsa Teorem 3.2.1 'i elde edeceğimiz açıktır.

İspat (3.37) ifadesinin her iki tarafı $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\rho)$ ile çarpılırsa,

$$
\begin{aligned}
&({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)\\
\geqslant\;&\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)
\end{aligned}
$$

olur. Elde edilen eşitsizlik (a,t) üzerinde integre edilirse;

$$
\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)\\
&+\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)\\
\geqslant\;&\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)g(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)\\
&+\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan;

$$({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)+({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t)$$

$$\geqslant ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)+({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3. f, g ve h; $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı üç monoton fonksiyon olsun ve $\rho, \tau \in [a,t]$ için

$$(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho))(h(\tau)+h(\rho)) \geqslant 0$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, her $\alpha, \beta > 0$ ve $t > a \geqslant 0$ için,

$$
\begin{aligned}
&[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fgh)(t)]\,({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(1)-({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fgh)(t)\right]\\
\geqslant\;&[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fh)(t)]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(g)(t)\right]+[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(gh)(t)]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(f)(t)\right]\\
&-[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(h)(t)]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fg)(t)\right]-[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(h)(t)]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fg)(t)\right]\\
&+[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)]\,({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(gh)(t)-({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fh)(t)\right] \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri, $(k;H)$-kesirli integralleri için sağlanır.

İspat f, g ve h fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı üç monoton fonksiyon olsun. Bu durumda her $\rho, \tau \geqslant 0$ için;

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))(h(\tau) + h(\rho) \geqslant 0 \tag{3.45}$$

dir. (3.45) 'den,

$$\begin{aligned}
& f(\tau)g(\tau)h(\tau) - f(\rho)g(\rho)h(\rho) - f(\tau)g(\rho)h(\tau) - f(\rho)g(\tau)h(\tau) \\
& + f(\rho)g(\rho)h(\tau) - f(\tau)g(\tau)h(\rho) - f(\tau)g(\rho)h(\rho) + f(\rho)g(\tau)h(\rho) \\
\geqslant\ & 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

yazılabilir. (3.46) 'nın her iki tarafı $\tau \in (a,t)$ için $\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)g(\tau)h(\tau) - f(\rho)g(\rho)h(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau) \\
\geqslant\ & f(\tau)g(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)h(\tau) + f(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)g(\tau)h(\tau) \\
& -f(\rho)g(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)h(\tau) + h(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)g(\tau) \\
& +g(\rho)h(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau) - f(\rho)h(\rho)\frac{(h(t) - h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)g(\tau)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}
& ({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fgh)(t) + f(\rho)g(\rho)h(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1) \\
\geqslant\ & g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fh)(t) + f(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(gh)(t) \\
& -f(\rho)g(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(h)(t) + h(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t) \\
& +g(\rho)h(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t) + f(\rho)h(\rho)({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

olur. (3.48) 'in her iki tarafı $\rho \in (a,t)$ olmak üzere $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)$ ifadesi ile çarpılırsa.

$$\begin{aligned}
&({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fgh)(t)\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)d\rho \\
&-\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)h(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1) \\
\geqslant\; &\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)g(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fh)(t) \\
&+\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(gh)(t) \\
&-\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(h)(t) \\
&+\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)h(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t) \\
&+\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)g(\rho)h(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t) \\
&-\int_a^t \frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)h(\rho)d\rho({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fgh)(t)\right]({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(1)-({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(1)\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fgh)(t)\right] \\
\geqslant\; &\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(fh)(t)\right]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(g)(t)\right]+\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(gh)(t)\right]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(f)(t)\right] \\
&-\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(h)(t)\right]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fg)(t)\right]+\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(h)(t)\right]\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fg)(t)\right] \\
&+\left[({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t)\right]({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(gh)(t)-({}_kJ^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t)\left[({}_kJ^{\beta}_{a^+}h)(fh)(t)\right]
\end{aligned}$$

olacağından ispat tamamlanmış olur.

3.3 Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler İçin Genelleştirilmiş (k,h)-Kesirli İntegralleri

Tanım 3.3.1 $h : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ artan, pozitif monoton fonksiyonu, (a^ρ, b^ρ) üzerinde bir $h^{'}(x)$ sürekli türevine sahip olsun. f fonksiyonun $[a^\rho, b^\rho]$ üzerinde, h fonksiyonuna göre α. mertebeden sol ve sağ taraflı kesirli integralleri sırasıyla,

$$^{\rho}J^{\alpha}_{a+h}f(b^\rho) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b \frac{h'(t^\rho)f(t^\rho)t^{\rho-1}}{[h(b^\rho) - h(t^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}-1}} dt \tag{3.50}$$

$$^{\rho}J^{\alpha}_{b-h}f(a^\rho) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b \frac{h'(t^\rho)f(t^\rho)t^{\rho-1}}{[h(t^\rho) - h(b^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}-1}} dt \tag{3.51}$$

şeklindedir. Burada sırasıyla, $s^\rho = \frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}$ ve $s^\rho = \frac{t^\rho - b^\rho}{a^\rho - b^\rho}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$I^{\alpha}_{a^+}f(b^\rho) = \frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)f((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)}{[h(b^\rho) - h((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}-1}} s^{\rho-1} ds \tag{3.52}$$

ve

$$I^{\alpha}_{b^-}f(a^\rho) = \frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 \frac{h'(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)f(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)}{[h(b^\rho) - h(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}-1}} s^{\rho-1} ds \tag{3.53}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1 $h : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ artan ve pozitif monoton fonksiyonu, (a^ρ, b^ρ) üzerinde bir $h^{'}(x)$ sürekli türevine sahip olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ de bir konveks fonksiyon ise, bu durumda

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{4\,[h(b^\rho) - h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I^{\alpha}_{a^+}F(b^\rho) + I^{\alpha}_{b^-}F(a^\rho)\right] \leqslant \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat $f : [a^\rho, b^\rho]$ üzerinde $t = \frac{1}{2}$için, bir kesin dış bükey (konveks) fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{x^\rho + y^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{f(x^\rho) + f(y^\rho)}{2} \tag{3.54}$$

yazılabilir. $s^\rho \in [0,1]$ için, $x^\rho = s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho$ ve $y^\rho = (1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho$ dir. Bu durumda, f konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{f(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho) + f((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)}{2} \tag{3.55}$$

eşitsizliği sağlanır. $F(x^\rho) = f(x^\rho) + f(a^\rho + b^\rho - x^\rho)$ ifadesi

$$F((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho) = f((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho) + f(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{F((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)}{2} \tag{3.56}$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$F(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho) = f(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho) + f((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)$$

dir. Buradan,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{F(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)}{2} \tag{3.57}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.56) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho) - h((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}$ ile çarpılıp, 0 'dan 1 'e s 'ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho) - h((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho]^{1-\frac{\alpha}{k}}} ds \\ \leqslant \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2k\Gamma_k(\alpha)} \left[\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)F((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)}{[h(b^\rho) - h((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}} s^{\rho-1} ds \right] \end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir.

(3.58) 'in sol tarafında $u = h(b^\rho) - h((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho)$ değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$\begin{aligned} du &= -h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho).(-\rho.s^{\rho-1}.a^\rho + \rho.s^{\rho-1}b^\rho)ds \\ du &= -h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho).\rho s^{\rho-1}\left(b^\rho - a^\rho\right) ds \\ -\frac{du}{\rho\left(b^\rho - a^\rho\right)} &= -h'((1-s^\rho)a^\rho + b^\rho s^\rho).s^{\rho-1} ds \end{aligned}$$

olur. Bu ifade yerine yazılıp, integral alındığında,

$$\begin{aligned} & -f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \frac{du}{\rho\left(b^\rho - a^\rho\right)} \int_a^b \frac{du}{[u]^{1-\frac{\alpha}{k}}} \\ = \; & -f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \frac{du}{\rho\left(b^\rho - a^\rho\right) k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b u^{\frac{\alpha}{k}-1} du \\ = \; & f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \frac{[h(b^\rho) - h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\
= & f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak;

$$
f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \leqslant \frac{1}{2}I_{a+}^{\alpha}F(b^\rho) \tag{3.59}
$$

eşitsizlik sağlanır. (3.57) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{h'(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{[h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)-h(a^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}$ ile çarpılıp 0 ile 1 arasında s 'ye göre integrallendiğinde,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{[h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)-h(a^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\
\leqslant & \frac{b^\rho-a^\rho}{2k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1\left[\frac{h'(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}F(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)}{[h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)-h(a^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds\right]
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

elde edilir. (3.60) 'ın sol tarafında $u=h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)-h(a^\rho)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
du &= h'(b^\rho s^\rho+(1-s^\rho)b^\rho-h(a^\rho).(\rho.s^{\rho-1}.a^\rho+\rho.s^{\rho-1}b^\rho)ds \\
du &= h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho).\rho s^{\rho-1}\,(a^\rho-b^\rho)\,ds \\
&\Longrightarrow \frac{du}{\rho\,(b^\rho-a^\rho)} = -h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho).s^{\rho-1}ds
\end{aligned}
$$

olacağından,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{du}{\rho\,(a^\rho-b^\rho)}\int_a^b\frac{du}{[u]^{1-\frac{\alpha}{k}}} \\
= & f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{du}{\rho\,(a^\rho-b^\rho)\,k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^b u^{\frac{\alpha}{k}-1}du \\
= & f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(a^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\
= & f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} &\leqslant \frac{1}{2}I^{\alpha}_{a^+}F(b^\rho) \\ f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} &\leqslant \frac{1}{2}I^{\alpha}_{b^-}F(a^\rho) \end{aligned} \tag{3.61}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. (3.59) ve (3.61) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$2f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right)\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \leqslant \frac{1}{2}\left[I^{\alpha}_{a^+}F(b^\rho)+I^{\alpha}_{b^-}F(a^\rho)\right] \tag{3.62}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (3.62) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{2[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}$ ile çarpılırsa,

$$f\left(\frac{a^\rho+b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{4\left[h(b^\rho)-h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^{\alpha}_{a^+}F(b^\rho)+I^{\alpha}_{b^-}F(a^\rho)\right] \tag{3.63}$$

şeklinde birinci eşitsizlik elde edilmiş olur.

(3.54) 'deki ikinci eşitsizliğin ispatı için, ilk olarak; eğer f, $[a^\rho, b^\rho]$ üzerinde bir dış bükey fonksiyon ise,

$$f(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho) \leqslant s^\rho f(a^\rho)+(1-s^\rho)f(b^\rho)$$

ve

$$f((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho) \leqslant (1-s^\rho)f(a^\rho)+s^\rho f(b^\rho)$$

eşitsizlikleri elde edilir ki; bu eşitsizlikler toplanırsa,

$$f(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)+f((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho) \leqslant f(a^\rho)+f(b^\rho)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada,

$$F(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)=f(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)+f((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)$$

olduğundan,

$$F(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho) \leqslant f(a^\rho)+f(b^\rho) \tag{3.64}$$

elde edilir ve

$$F((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)=f((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)+f(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)$$

olduğundan,

$$F((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho) \leqslant f(a^\rho)+f(b^\rho) \tag{3.65}$$

yazılabilir.

(3.65) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}$ ile çarpılıp 0 ile 1 arasında s 'ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} &\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)F((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\ \leqslant\ &[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \end{aligned} \tag{3.66}$$

elde edilir. (3.66) 'ün sağ tarafında $u=h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} &[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\ =\ &[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} &\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)F((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h((1-s^\rho)a^\rho+b^\rho s^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\ \leqslant\ &[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Sonuç olarak;

$$I^\alpha_{a^+}F(b^\rho)\leqslant[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\frac{[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \tag{3.67}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.64) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{h'(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}$ ile çarpılıp 0 ile 1 arasında s' ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned} &\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)F(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \\ \leqslant\ &[f(a^\rho)+f(b^\rho)]\frac{b^\rho-a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 \frac{h'(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{[h(b^\rho)-h(s^\rho a^\rho+(1-s^\rho)b^\rho)]^{1-\frac{\alpha}{k}}}ds \end{aligned}$$

elde edilir. $u = \left[h(b^\rho) - h(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)\right]^{1-\frac{\alpha}{k}}$ değişken değiştirmesi eşitsizliğin sağ tarafına uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&[f(a^\rho) + f(b^\rho)] \frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 \frac{h'(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{\left[h(b^\rho) - h(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)\right]^{1-\frac{\alpha}{k}}} ds \\
&= f(a^\rho) + f(b^\rho) \frac{\left[h(b^\rho) - h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\frac{b^\rho - a^\rho}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 \frac{h'(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)F(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)s^{\rho-1}}{\left[h(b^\rho) - h(s^\rho a^\rho + (1-s^\rho)b^\rho)\right]^{1-\frac{\alpha}{k}}} ds \\
&\leqslant [f(a^\rho) + f(b^\rho)] \frac{\left[h(b^\rho) - h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir ve bu durumda sonuç olarak;

$$I_{b^-}^{\alpha} F(a^\rho) \leqslant [f(a^\rho) + f(b^\rho)] \frac{\left[h(b^\rho) - h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \tag{3.68}$$

elde edilir. (3.67) ve (3.68) toplandığında,

$$\left[I_{a^+}^{\alpha} F(b^\rho) + I_{b^-}^{\alpha} F(a^\rho)\right] \leqslant 2\left[f(a^\rho) + f(b^\rho)\right] \frac{\left[h(b^\rho) - h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}}{\rho\Gamma_k(\alpha+1)} \tag{3.69}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Şimdi, (3.69) 'nın her iki tarafı $\frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{4[h(b^\rho)-h(a^\rho)]^{\frac{\alpha}{k}}}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{4\left[h(b^\rho) - h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{a^+}^{\alpha} F(b^\rho) + I_{b^-}^{\alpha} F(a^\rho)\right] \leqslant \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} \tag{3.70}$$

bulunur. Böylece ikinci eşitsizliğin ispatı tamamlanır. (3.63) ve (3.70) eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{4\left[h(b^\rho) - h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{a^+}^{\alpha} F(b^\rho) + I_{b^-}^{\alpha} F(a^\rho)\right] \leqslant \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2}$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.1 Eğer Teorem 3.3.1 de $\rho \to 1$ alınırsa,

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \frac{\Gamma_k(\alpha+1)}{4\left[h(b) - h(a)\right]^{\frac{\alpha}{k}}} \left[I_{a^+}^{\alpha} F(b) + I_{b^-}^{\alpha} F(a)\right] \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2 Eğer Teorem 3.3.1 de $h(x) = x$ alınırsa;

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leqslant \frac{\rho\Gamma_k(\alpha+1)}{4\left[b^\rho - a^\rho\right]^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^\alpha_{a^+}F(b^\rho) + I^\alpha_{b^-}F(a^\rho)\right] \leqslant \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.3 Eğer Teorem 3.3.1 de $\rho \to 1$ ve $h(x) = x$ alınırsa;

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \frac{\Gamma_k(\alpha+1)}{4\left[b - a\right]^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^\alpha_{a^+}F(b) + I^\alpha_{b^-}F(a)\right] \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.4 Eğer Teorem 3.3.1 de $\alpha = \rho = k = 1$ ve $h(x) = x$ alınırsa bu durumda. klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği,

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

şeklinde olur.

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, (3.50) ve (3.51) ile tanımlı integraller kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 4.1 f ve g; $[0,\infty)$ aralığı üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda $t>0$, $\alpha>0$ için

$$^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+},\rho}h(fg)(t^{\rho}) \geqslant \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(h(b^{\rho})-h(a^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}}}\left(^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+},h}\right)f(t^{\rho})\left(^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+},h}\right)g(t^{\rho}) \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat f ve g senkronize fonksiyon olduğundan,

$$(f(\tau^{\rho})-f(\xi^{\rho}))(g(\tau^{\rho})-g(\xi^{\rho})) \geqslant 0 \tag{4.2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buna göre (4.2) ifadesi,

$$f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho})+f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho}) \geqslant f(\tau^{\rho})g(\xi^{\rho})+f(\xi^{\rho})g(\tau^{\rho}) \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer, (4.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\rho}\in(a,t)$ için $\frac{(h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{(h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau^{\rho})f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} \\
& +f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})\frac{(h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} \\
\geqslant\ & g(\xi^{\rho})\frac{(h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau^{\rho})f(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} \\
& +f(\xi^{\rho})\frac{(h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}g(\tau^{\rho})
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Bu durumda, (4.4) eşitsizliği (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)\tau^{\rho-1}f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho})d\tau \\
& +f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)\tau^{\rho-1}d\tau \\
\geqslant\ & g(\xi^{\rho})\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}d\tau \\
& +f(\xi^{\rho})\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)g(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}d\tau
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olur. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
& {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+\rho}h(fg)(t^{\rho}) + f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}d\tau \\
\geqslant\; & g(\xi^{\rho})\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}f(\tau^{\rho})h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}d\tau \\
& +f(\xi^{\rho})\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}g(\tau^{\rho})d\tau \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

şeklinde yazıldığında,

$$({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t^{\rho}) + f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(1) \geqslant g(\xi^{\rho})({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t^{\rho}) + f(\xi^{\rho})({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t^{\rho}) \qquad (4.7)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $\xi^{\rho} \in (a,t)$ için $\frac{(h(t^{\rho})-h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}$ çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t^{\rho}) \\
& +({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(1)\frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho}) \\
\geqslant\; & ({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t^{\rho})\frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}g(\xi^{\rho}) \\
& +({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t^{\rho})\frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}f(\xi^{\rho}) \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra, (4.8) eşitsizliği (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& ({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(fg)(t^{\rho})\int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}d\xi \\
& +({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(1)\int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})d\xi \\
\geqslant\; & ({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(f)(t^{\rho})\int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}g(\xi^{\rho})d\xi \\
& +({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}h)(g)(t^{\rho})\frac{(h(t^{\rho}) - h(\xi^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^{\rho})\xi^{\rho-1}f(\xi^{\rho})d\xi \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik aynı zamanda,

$${}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+\rho}h(fg)(t^{\rho}) \geqslant \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(h(b^{\rho}) - h(a^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}}}\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+,h}\right)f(t^{\rho})\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+,h}\right)g(t^{\rho})$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2 f ve g; $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $k>0$ için,

$$\frac{(h(b^\rho)-h(a^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\left[\left({}^\rho I^\alpha_{a^+,\rho}h(fg)(t^\rho)\right)+\left({}^\rho I^\beta_{a^+,\rho}h(fg)(t^\rho)\right)\right]$$
$$\geqslant \left({}^\rho I^\alpha_{a^+,h}\right)f(t^\rho)\left({}^\rho I^\beta_{a^+,h}\right)g(t^\rho)+\left({}^\rho I^\alpha_{a^+,h}\right)f(t^\rho)\left({}^\rho I^\beta_{a^+,h}\right)g(t^\rho)$$

dir.

İspat f ve g; $[a,b]$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda, her $\alpha>0,\rho>0$ için, (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)g(\xi^\rho)\\
\geqslant\ &({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}g(\xi^\rho)\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho) \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (4.10) 'da verilen eşitsizlik (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
&({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\int_a^t\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}d\xi\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\int_a^t\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)g(\xi^\rho)d\xi\\
\geqslant\ &({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)\int_a^t\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}g(\xi^\rho)d\xi\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)\int_a^t\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\xi^{\rho-1})\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)d\xi \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(1)+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fg)(t^\rho) \qquad (4.12)$$

$$\geqslant ({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(g)(t^\rho)+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(f)(t^\rho)$$

olacağından ispat tamamlanır.

İspat (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)f(\xi^\rho)g(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}\\
\geqslant\ &({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)g(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)f(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen ifade (a,t) aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned}
&({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\int_a^t\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}d\xi\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\int_a^t\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)f(\xi^\rho)g(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}d\xi\\
\geqslant\ &({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)\int_a^t\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)g(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}d\xi\\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)\int_a^t\frac{(h(t)-h(\xi^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\xi^\rho)f(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}d\xi
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)({}_kJ^\alpha_{a^+}h)(1)+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\\
\geqslant\ &({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3 f,g ve x; $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı üç monoton fonksiyon olsun. Her $\xi,\tau\in[a,t]$ için;

$$(f(\tau^\rho)-f(\xi^\rho))(g(\tau^\rho)-g(\xi^\rho))(x(\tau^\rho)+x(\xi^\rho)\geqslant 0$$

eşitsizliği sağlanır. Her $t>a\geqslant 0,\alpha,\beta>0$ için,

$$\begin{aligned}
&[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fgx)(t^\rho)]\,({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(1)-({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fgh)(t^\rho)\right]\\
\geqslant\ &[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fx)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(g)(t^\rho)\right]+[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(gx)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(f)(t^\rho)\right]\\
&-[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(x)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\right]+[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(x)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\right]\\
&+[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)]\,({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(gh)(t^\rho)-({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fh)(t^\rho)\right] \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

$(k; H)$-kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat f, g ve x ;[0,∞) üzerinde tanımlı üç monoton fonksiyon olduğundan her $\xi^{\rho}, \tau^{\rho} \geqslant 0$ için,

$$(f(\tau^{\rho}) - f(\xi^{\rho}))(g(\tau^{\rho}) - g(\xi^{\rho}))(x(\tau^{\rho}) + x(\xi^{\rho}) \geqslant 0 \tag{4.14}$$

yazılabilir. (4.14) 'den,

$$\begin{aligned} & f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho})x(\tau^{\rho}) - f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho}) - f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})x(\tau^{\rho}) - f(\xi^{\rho})g(\tau^{\rho})x(\tau^{\rho}) \\ & + f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})x(\tau^{\rho}) - f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho})x(\xi^{\rho}) - f(\tau^{\rho})g(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho}) + f(\xi^{\rho})g(\tau^{\rho})x(\xi^{\rho}) \\ \geqslant\ & 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılabilir. (4.15) eşitsizliğinin her iki tarafı $\tau^{\rho} \in (a, t)$ için $\frac{(h(t^{\rho})-h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho})x(\tau^{\rho})d\tau \\ & - f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} \\ \geqslant\ & f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})x(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} \\ & + f(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} g(\tau^{\rho})x(\tau^{\rho}) \\ & f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} x(\tau^{\rho}) \\ & + x(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} f(\tau^{\rho})g(\tau^{\rho}) \\ & + g(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} f(\tau^{\rho}) \\ & - f(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho}) \int_a^t \frac{(h(t^{\rho}) - h(\tau^{\rho}))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)} h'(\tau^{\rho})\tau^{\rho-1} g(\tau^{\rho}) \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} & ({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(fgx)(t^{\rho}) + f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(1) \\ \geqslant\ & g(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(fx)(t^{\rho}) + f(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(gx)(t^{\rho}) \\ & - f(\xi^{\rho})g(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(x)(t^{\rho}) + h(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(fg)(t^{\rho}) \\ & + g(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(f)(t^{\rho}) + f(\xi^{\rho})x(\xi^{\rho})({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}h)(g)(t^{\rho}) \end{aligned} \tag{4.17}$$

olur.

(4.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $\xi^\rho \in (a,t)$ için $\frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fgx)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}d\xi \\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)g(\xi^\rho)x(\xi^\rho)d\xi \\
\geqslant\ & ({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fx)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)g(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}d\xi \\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(gx)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)d\xi \\
&-({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(x)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)g(\xi^\rho)d\xi \\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}x(\xi^\rho)d\xi \\
&+({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(f)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}g(\xi^\rho)x(\xi^\rho)d\xi \\
&-({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(g)(t^\rho)\int_a^t \frac{(h(t^\rho)-h(\xi^\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)} h'(\xi^\rho)\xi^{\rho-1}f(\xi^\rho)x(\xi^\rho)d\xi
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
&[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fgx)(t^\rho)]\,({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(1) - ({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(1)\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fgx)(t^\rho)\right] \\
\geqslant\ & [({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(fx)(t^\rho)]\left[{}^\rho I^\beta_{a^+}h)(g)(t^\rho)\right] + [({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(gx)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(f)(t^\rho)\right] \\
&-[({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(x)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\right] + [({}^\rho I^\alpha_{a^+}h)(x)(t^\rho)]\left[({}^\rho I^\beta_{a^+}h)(fg)(t^\rho)\right] \\
&+[({}_kJ^\alpha_{a^+}h)(f)(t)]\,({}_kJ^\beta_{a^+}h)(gh)(t) - ({}_kJ^\alpha_{a^+}h)(g)(t)\left[({}_kJ^\beta_{a^+}h)(fh)(t)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4 f ve g; $[0,\infty)$ da iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda her $\alpha,\beta>0$ ve $t>a\geqslant 0$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma_k(\beta+k)}\left[h(t^\rho)-h(a^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-2}\ {}^\rho I^\alpha_a f^2(t^\rho) \\
&+\frac{1}{\Gamma_k(k+\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}^\rho J^\beta_a g^2(t^\rho) \\
\geqslant\ & 2\,{}^\rho I^\alpha_a f(t^\rho)\,{}^\rho I^\beta_a g(t^\rho)
\end{aligned}\tag{4.19}$$

$${}^\rho I^\alpha_a f^2(t^\rho)\,{}^\rho I^\beta_a g^2(t^\rho) + {}^\rho I^\alpha_a g^2(t^\rho)\,{}^\rho I^\beta_a f^2(t^\rho) \geqslant 2\,{}^\rho I^\alpha_a fg(t^\rho)\,{}^\rho I^\beta_a fg(t^\rho) \tag{4.20}$$

dir.

İspat $(f(x^\rho)-g(y^\rho))^2 \geqslant 0$ olduğundan,

$$f^2(x^\rho)+g^2(y^\rho) \geqslant 2f(x^\rho)g(y^\rho) \tag{4.21}$$

yazılabilir. (4.21) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}h'(x^\rho)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}f^2(x^\rho)h'(x^\rho)dx \\
&+g^2(y^\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t \left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}h'(x^\rho)dx \\
\geqslant\ & 2g(y^\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t \left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}f(x^\rho)h'(x^\rho)dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$${}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho)+g^2(y^\rho)\,{}^\rho I_a^\alpha f(1) \geqslant 2g(y^\rho)\,{}^\rho I_a^\alpha f(t^\rho)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}h'(y^\rho)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&{}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho)\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}h'(y^\rho)dy \\
&+{}^p I_a^\alpha f(1)\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}g^2(y^\rho)h'(y^\rho)dy \\
\geqslant\ & 2\,{}^\rho I_a^\alpha f(t^\rho)\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}g(y^\rho)h'(y^\rho)dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma_k(\beta+k)}\left[h(t^\rho)-h(a^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-2}\ {}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho) \\
&+\frac{1}{\Gamma_k(k+\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-2}\ {}^\rho J_a^\beta g^2(t^\rho) \\
\geqslant\ & 2\,{}^\rho I_a^\alpha f(t^\rho)\,{}^\rho I_a^\beta g(t^\rho)
\end{aligned}$$

olur. $(f(x^\rho)g(y^\rho)-f(y^\rho)g(x^\rho))^2 \geqslant 0$ olduğundan,

$$f^2(x^\rho)g^2(y^\rho)+f^2(y^\rho)g^2(x^\rho) \geqslant 2f(x^\rho)f(y^\rho)g(x^\rho)g(y^\rho)$$

eşitsizliği yazılabilir. Verilen eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}h'(x^\rho)$ ile çarpılıp, (a,t) aralığında x 'e göre integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& g^2(y^\rho)\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}f^2(x^\rho)h'(x^\rho)dx \\
& +f^2(y^\rho)\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}g^2(x^\rho)h'(x^\rho)dx \\
\geqslant\ & 2g(y^\rho)f(y^\rho)\int_a^t \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\left[h(t^\rho)-h(x^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-1}x^{\rho-1}f(x^\rho)g(x^\rho)h'(x^\rho)dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$${}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho)g^2(y^\rho)+{}^\rho I_a^\alpha g^2(t^\rho).f^2(y^\rho)\geqslant 2g(y^\rho)f(y^\rho){}^\rho I_a^\alpha fg(t^\rho)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}h'(y^\rho)$ ile çarpılıp (a,t) aralığında y 'e göre integre edilirse,

$$\begin{aligned}
& {}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t \left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}g^2(y^\rho)h'(y^\rho)dy^\rho \\
& +{}^\rho I_a^\alpha g^2(t^\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t \left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}f^2(y^\rho)h'(y^\rho)dy^\rho \\
\geqslant\ & 2{}^\rho I_a^\alpha fg(t^\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t \left[h(t^\rho)-h(y^\rho)\right]^{\frac{\beta}{k}-1}y^{\rho-1}g(y^\rho)f(y^\rho)h'(y^\rho)dy^\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$${}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho){}^\rho I_a^\beta g^2(t^\rho)+{}^\rho I_a^\alpha g^2(t^\rho){}^\rho I_a^\beta f^2(t^\rho)\geqslant 2{}^\rho I_a^\alpha fg(t^\rho){}^\rho I_a^\beta fg(t^\rho)$$

olur ki, böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1 f ve g; $[0,\infty)$ da iki fonksiyon olsun. Bu durumda her $\alpha,\beta>0$ ve $t>a\geqslant 0$ için

$$\frac{1}{\Gamma_k(k+\alpha)}\left[(h(t^\rho)-h(a^\rho)\right]^{\frac{\alpha}{k}-2}\left[{}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho){}^\rho I_a^\beta g^2(t^\rho)\right]\geqslant 2{}^\rho I_a^\alpha f(t^\rho){}^\rho I_a^\alpha g(t^\rho)$$

$${}^\rho I_a^\alpha f^2(t^\rho){}^\rho I_a^\alpha g^2(t^\rho)\geqslant\left[{}^\rho I_a^\alpha fg(t^\rho)\right]^2$$

dir.

Teorem 4.5 $f\in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda, $k,m,n,r,p>0$ ve $\alpha>1$ için

$$\left({}^\rho I_a^{m\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)+1}f^r(x^\rho)\right)\left({}^\rho I_a^{n\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)+1}f^p(x^\rho)\right)\geqslant\left({}^\rho I_a^{\frac{m+2}{n}\left(\frac{\alpha}{k}-1\right)+1}f^{\frac{r+p}{2}}(x^\rho)\right)^2 \qquad (4.22)$$

dir.

İspat (4.22) eşitsizliğinde $g(t^\rho) = (h(x^\rho) - h(t^\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}, f(t^\rho) = \frac{t^{\rho-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ve $h(t^\rho) = f(t^\rho)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x [h(x^\rho) - h(t^\rho)]^{m(\frac{\alpha}{k}-1)}\, t^{\rho-1} f^r(t^\rho)dt^\rho\right) \\
&\left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x [h(x^\rho) - h(t^\rho)]^{n(\frac{\alpha}{k}-1)}\, t^{\rho-1} f^p(t^\rho)dt^\rho\right) \\
\geqslant\ &\left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x [h(x^\rho) - h(t^\rho)]^{\frac{m+n}{2}(\frac{\alpha}{k}-1)}\, t^{\rho-1} f^{\frac{r+p}{2}}(t^\rho)dt^\rho\right)^2
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Hatırlatma 4.1 (4.22) 'de $k = 1$ alınırsa

$$\left({}^\rho I_a^{m(\alpha-1)+1} f^r(x^\rho)\right)\left({}^\rho I_a^{n(\alpha-1)+1} f^p(x^\rho)\right) \geqslant \left({}^\rho I_a^{\frac{m+2}{n}(\alpha-1)+1} f^{\frac{r+p}{2}}(x^\rho)\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

5 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada kesirli integral tanımının, özellikleri ve bunların bazı özel eşitsizliklere uygulanması incelendi.

Çalışmanın ana bölümünü oluşturan dördüncü bölümde Rieman-Liouville ve Hadamard kesirli integralleri için verilen genelleştirilmiş integral kullanılarak bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulunan sonuçların bazı özel halleri literatürde mevcut önceki çalışmalarda verilen sonuçları kapsamaktadır. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlarda kullanılan genelleştirilmiş kesirli integral operatörü yardımıyla Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integralleri için literatürde var olan Hermite-Hadamard eşitsizliğini içeren sonuçların yeni genelleştirmeleri elde edilebilir.

6 KAYNAKLAR

Akkurt A, Kaçar Z, Yıldırım H, 2015, Generalized Fractional İntegrals Inequalities for Continuos Random Variables, Journal of Probability Statictis, Article ID 958980, 7p.

Akkurt A, Yıldırım M E, and Yıldırım H, 2016, On some Integral Inequalities for (k,h)-Riemann-Liouville fractional integral, New Trends in Mathematical Sciences (NTMSCI), 4, 138-146.

Beckenbach E F, Bellman R, 1961, Inequalities Springer-Verlag, 142p, Berlin.

Belarbi S, Dahmani Z, 2009, On some new fractional integral inequalities, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 10, 1-12.

Chen H, Katugampola U N, 2017, Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard Fejer type inequalities for generalized fractional integrals. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 446, 1274-1291.

Dahmani Z, Tabharit, and Taf S, 2010, Some fractional integral inequalities, Nonlinear Science Letters, 1, 155-160.

Dahmani Z, 2010, New inequalities in fractional integrals, International Journal of Nonlinear Sciences, 9, 493-497.

Dahmani Z, 2010, On Minkowski and Hermite-Hadamad integral inequalities via fractional integration, Annals of Functional Analysis, 1, 51-58.

Diaz R, and Pariguan E, 2007, On hypergeometric functions and Pochhammer k symbol, Divulga Mathematics, 15, 179-192.

Dragomir S S, Pearce C E M, 2002, Selected topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications, Melbourne and Adelaide, Victoria University, 355p, Australia.

Gidergelmez H F, Akkurt A, Yıldırım H, 2019, Hermite-Hadamard type inequalities for Generalized Fractional Integrals via Strongly Convex Functions, 7, 268 - 273

Gidergelmez H F, Akkurt A, Yıldırım H, Kılınç S, 2019, Hermite-Hadamard type inequalities for Generalized (k,h) Fractional Integrals, Journal of Universal

Mathematics, 2, 51-59.

Gözpınar A, 2018, Konveks Fonksiyon Sınıfları için Kesirli İntegral İçeren Eşitsizlikler, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 121s, Ordu.

Hardy G H, Littlewood J E, Polya G, 1952, Inequalities, Cambridge University Press, 310p, United Kingdom.

Hermite C, 1883, Sur deux limites d'une integrale definie, Mathesis, 3, 82.

Katugampola U N, 2011, New Approach to a Generalized Fractional İntegral, Applied Mathematics and Computation, 218, 860-865.

Kilbas A A, Srivastava H M, and Trujillo J J, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier Sci. B V, 499p, Amsterdam.

Miller S, and Ross B, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, 392p, USA.

Mitrinovic D S, 1970, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 416p, New York.

Mubeen S, and Habibullah G M, 2012, k-fractional integrals and application, International Journal of Contemporary.Mathematical Sciences, 7, 89-94.

Pearce C E M , Pecaric J E and Simic V, 1998, Stolarsky Means and Hadamard's Inequality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 220, 99-109.

Pecaric J E, Proschan F and Tong Y L, 1992, Convex functions. Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc., 469p, Boston.

Polyak B T, 1966, Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Sov. Math. Dokl., 7, 72,75.

P L Butzer, Kilbas A A, Srivastava H M, and Trujillo, 2002, Fractional Calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 269, 1-27.

Robert E B, Sandifer C E, 2009, Cauchy's Cours d'analyse and annotated translation, Springer Dordrecht Heidelberg, 416p, New York-London.

Roberts A W, Varberg D E, 1973, Convex functions, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 57, New York-London.

Samko S G, Kilbas A A and Marichev O I, 1993, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 973p, Linghorne.

Sarıkaya M Z, and Öğünmez H, 2012, On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 428983.

Sarıkaya M Z, Set E, Yaldız H, Başak N, 2013, Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Computer Modelling, 57, 2403,2407.

Sarıkaya M Z, and Karaca, A, 2014, On the k-Riemann-Liouville fractional integral and applications, International Journal of Statistics and Mathematics, 1, 22-32.

Sarıkaya M Z, Dahmani Z, Kiriş M E F, Ahmad, 2016, (k,s)-Riemann-Liouville fractional integral and applications, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 45, 77-89.

Steele J M, 2004, The Cauchy-Schwarz master class, Cambridge University Press, 318 p, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Tuğba Çınar
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Eskişehir/17.07.1996
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	0 553 044 69 66/cinar_tugbaa@icloud.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Tayfur Bayar Anadolu Lisesi, 2010-2014
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014-2018.
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik ABD., 2018-2020