İKİLİ HALKALAR VE
POLİNOM HALKALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve KARAÇULHA

Danışman
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİLİ HALKALAR VE POLİNOM HALKALARI

Merve KARAÇULHA

Danışman
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Merve KARAÇULHA tarafından hazırlanan "İkili Halkalar ve Polinom Halkaları" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Başkan : Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniv. Fen Fak.

Üye : Prof. Dr. Muhittin BAŞER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/01/2021

Merve KARAÇULHA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİLİ HALKALAR VE POLİNOM HALKALARI

Merve KARAÇULHA

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları verilmiştir. Üçüncü bölümde, ikili halkalar ve özellikleri verilmiştir. Son bölümde ise ikili halkaların polinom halkaları irdelenmiştir.

2021, v + 32 sayfa

Anahtar Kelimeler: İkili Halkalar, Ore Genişlemesi, Skew Polinom Halkası.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

DUO RINGS AND POLYNOMIAL RINGS

Merve KARAÇULHA
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Muhittin BAŞER

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, some ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, duo rings and their basic properties, are given. In the last chapter the polynomial rings over duo rings are examined.

2021, v + 32 pages

Keywords: Duo Rings, Ore Extension, Skew polynomial Rings.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici olan değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Muhittin BAŞER' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam boyunca samimi desteklerini esirgemeyen Dr. Ögr. Üyesi Fatma KAYNARCA'ya, Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL'e ve her konuda öneri ve eleştirileriyle birlikte yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Çalışmam boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de teşekkür ederim.

Merve KARAÇULHA

Afyonkarahisar,2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
σ	R halkasının bir endomorfizması
R^{op}	$(R,+,\cdot)$ halkasının karşı (opposite) halkası
$f(R)$	R halkasının bir homomorfik görüntüsü
I_R	R halkasının birim endomorfizması
$M(R)$	R halkasının merkezi
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
$\mathrm{ann}_l^R(a)$	R halkasının bir a elemanının sol sıfırlayanı
$\mathrm{ann}_r^R(a)$	R halkasının bir a elemanının sağ sıfırlayanı
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x;\sigma]$	R nin bir skew polinom halkası
$R[x;\sigma,\delta]$	R halkasının bir Ore genişlemesi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali

1. GİRİŞ

R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S alt kümesi R deki ikili işlemlere göre bir halka oluyorsa, bu durumda S ye R nin bir alt halkası denir. I; R halkasının bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $ra \in I$ (veya $ar \in I$) oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir sol (veya sağ) ideali denir. Eğer I alt halkası R halkasının hem sol ve hem de sağ ideali oluyorsa, bu durumda I ya R nin iki-yanlı yada sadece ideali denir. Açık olarak; eğer R bir değişmeli halka ise, bu durumda R halkasının her sol ideali aynı zamanda bir sağ ideali ve R halkasının her sağ ideali aynı zamanda R nin bir sol ideali olur. Değişmeli olmayan halkalarda sağ ideal olupta sol ideal olmayan veya tersine sol ideal olupta sağ ideal olmayan bir çok örnek bulmak mümkündür. Bu tür örnekleri özellikle matris halkalarında sıkça karşılaşmaktayız. Diğer taraftan, yapılan çalışmalarda değişmeli olmayan bazı halkaların, her sol idealinin halkanın aynı zamanda sağ ideali veya halkanın her sağ idealinin aynı zamanda sol ideali olduğu görülmüştür. Bu sebeple; yeni bir halka sınıfı tanımlama zorunluluğu ortaya çıkmıştır. Bu halkalar sağ ikili (duo) ve sol ikili (duo) halkalar olarak adlandırılmıştır. Daha açık olarak; R bir halka olmak üzere; eğer R halkasınınher sol ideali R nin iki-yanlı ideali oluyorsa bu durumda R ye bir sol ikili halka (left duo rings) denir. Benzer olarak R halkasının her sağ ideali R nin iki-yanlı ideali oluyorsa bu durumda R ye bir sağ ikili halka (right duo rings) denir. Eğer bir R halkası hem sol ikili hem de sağ ikili halka ise, bu durumda R ye bir ikili halka (duo rings) denir. Açık olarak her değişmeli halka bir ikili halkadır. Fakat ikili halka olup, değişmeli olmayan halkaların var olduğu kaynaklar kısmında verdiğimiz bazı çalışmalarda gösterilmiştir. Dahası bu çalışmalarda sağ ikili halka olup, sol ikili halka olmayan veya sol ikili halka olup sağ ikili halka olmayan halka örneklerine rastlamak mümkündür. Yukarıda bahsettiğimiz özelliğe sahip halkalar halka teorisinde pek fazla öneme sahiptir. Bu nedenle birçok matematikçi bu halka sınıflarını çalışarak teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce ikili halkalarla ilgili bugüne kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgiler verelim. R bir halka olmak üzere R halkasının Ore genişlemesi $R[x;\sigma,\delta]$ ile gösterilir. Burada $\sigma : R \to R$ bir halka homomorfizması iken, $\delta : R \to R$ dönüşümü de bir σ-türevdir. $R[x;\sigma,\delta]$ halkasındaki toplama polinomları halkasındaki toplama ile aynı fakat iki polinomun çarpımı şu şekilde tanımlanmaktadır. Polinomların çarpımında, her $r \in R$ için $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$ yazılır. Böylece $x^2r = x(xr) = x\big(\sigma(r)x + \delta(r)\big) = x\sigma(r)x + x\delta(r) = (\sigma^2(r)x^2 + \delta\big(\sigma(r)\big)x + \sigma\big(\delta(r)\big)x + \delta^2(r) = \sigma^2(r)x^2 + \big[\delta\big(\sigma(r)\big) + \sigma\big(\delta(r)\big)\big]x + \delta^2(r)$ yazılır. Bu şekilde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte R den katsayılı polinomların kümesi bir halka olur. Bu halkaya R halkasının bir Ore genişlemesi denir ve $R[x;\sigma,\delta]$ ile gösterilir. Eğer δ yerine sıfır dönüşümü alınırsa $R[x;\sigma,0] = R[x;\sigma]$ olur ki buna R nin bir skew polinom halkası denir. Eğer σ yerine birim dönüşüm alınırsa $R[x;I_R,\delta] = R[x;\delta]$ olur ki bu halkaya R nin bir diferensiyel operatör halkası denir. Son olarak $\sigma = I_R$ ve $\delta = 0$ alınırsa da $R[x;I_R,0] = R[x]$ polinom halkası olur. Ore polinom halkaları, kuantum mekaniğinin matematiksel alt yapısındaki diferansiyel operatörlerin halkalarının araştırmalarının başlamasıyla son yüz yılda oldukça fazla çalışılmaktadır. Ore genişlemeler ve bunların idealleri üzerindeki modern araştırmaların zenginliği araştırmacıları quantum grupları, enveloping cebirleri, lıkalizasyon teorisi ve boyut teorisi hakkındaki sorulara motive etmiştir. Bir Ore genişlemesinin sol ideallerinin iki-yanlı ideal olmasını belirleme problemi bölüm cebiri teorisinde bir klasik uygulamaya sahiptir. Son yıllarda halka teorisi ile ilgilenen araştırmacılar tarafından oldukça fazla çalışılan ikili halka sınıfları günümüzün popüler konularından birisi haline gelmiştir.

Şu ana kadar verilen bilgilerin ışığı altında, bu çalışmada Marks(2004) tarafından yapılan çalışma referans alınarak Ore polinom halkalarının bir sıra durumu dışında inceleyeceğiz. Bu durum; Ore polinom halkasının her sol (sağ) idealinin iki yanlı ideal olması durumudur. Bu durum $R[x]$ polinom halkası için; R nin değişmeli olmaması durumunda asla söz konusu olamaz.

Çalışmamız boyunca R birimli bir halka ve aksi söylenmedikçe σ; R nin sıfırdan farklı bir endomorfizması ve δ da R nin bir σ-türevi olacaktır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve sonuçlarla birlikte bazı halka sınıflarını hatırlatacağız.

Üçüncü bölümde, kaynaklarda belirtilen çalışmalardan derleyerek elde ettiğimiz ikili halkaların bazı temel özelliklerini ve karakterizasyonlarını sunacağız.

Son bölümde ise, tamamıyla Marks (2004) tarafından yapılan çalışmadan yararlanarak; bir R halkasının bir $R[x;\sigma]$ skew polinom halkasının ve bir $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesinin ikili halka olup olmama durumları araştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve sonuçları ve teoride kullanacağımız bazı halka sınıflarını hatırlatacağız.

2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Tanım 2.1.1 $\emptyset \neq R$ bir küme olmak üzere R de tanımlı iki ikili işlem $" + "$ toplama ve $". "$ olsun. Eğer;

(i) $(R, +)$ bir değişmeli grup,

(ii) Her $x, y, z \in R$ için $(xy)z = x(yz)$,

(iii) Her $x, y, z \in R$ için $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$

oluyorsa, bu durumda R kümesine yukarıda verilen ikili işlemlerle birlikte bir *halka* denir ve $(R, +,\cdot)$ ile gösterilir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmeli halka* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* ve 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına *halkanın sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 $(R, +,\cdot)$ bir halka olmak üzere R üzerindeki çarpma işlemi $a, b \in R$ için $a \circ b = ba$ şeklinde tanımlarsak, bu durumda $(R, +,\circ)$ da bir halka olur. Bu halkaya $(R, +,\cdot)$ halkasının *karşı (opposite) halkası* denir ve R^{op} şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3 R birimli bir halka olmak üzere eğer R nin sıfırdan farklı her elemanının çarpımsal tersi mevcut ise, bu durumda R halkasına *bölme (division) halkası* denir.

Önerme 2.1.4 R bir halka olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $x \in R$ için $0x = x0 = 0$ dır.

(ii) Her $x, y \in R$ için $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ dir.

(iii) Her $x, y \in R$ için $(-x)(-y) = xy$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $x, y \in R$ için $(nx)y = x(ny) = n(xy)$ dir.

(v) Her $x_i, y_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{j=1}^{m} y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j$ dir.

Tanım 2.1.5 R bir halka ve a da R nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Eğer $xy = 0$ $(yx = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq y \in R$ varsa, bu durumda x e bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana R halkasının bir *sıfır bölen elemanı* denir

Tanım 2.1.6 Sıfırdan farklı birim elemanına sahip bir değişmeli halkanın hiçbir sıfır böleni yoksa bu halkaya bir *tamlık bölgesi* denir. Sıfırdan farklı birim elemanına sahip değişmeli bir halkada sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi varsa, bu halkaya bir *cisim* denir.

Tanım 2.1.7 R ve S iki halka olmak üzere $h: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x, y \in R$ için

$h(x + y) = h(x) + h(y)$ ve $h(xy) = h(x)h(y)$

oluyorsa, bu durumda h ye bir *halka homomorfizması* denir. $h: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, h birebir ise, bu durumda h ye bir *monomorfizma*, örten ise, bu durumda h ye bir *epimorfizma* denir. Eğer bir $h: R \to S$ halka homomorfizması hem birebir hem de örten ise, bu durumda h ye bir izomorfizma ve R ile S halkalarına da *izomorf* halkalar denir. Bu durum $R \cong S$ ile gösterilir. Bir $h: R \to R$ homomorfizmasına R halkasının bir *endomorfizması* denir. Bir $h: R \to R$ izomorfizmayada R halkasının bir *otomorfizması* denir.

Tanım 2.1.8 $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $f(R)$ halkasına R halkasının bir *homomorfik görüntüsü* adı verilir.

Örnek 2.1.9 R bir halka olmak üzere

$0: R \to R, 0(a) = 0_R$ ve $I_R: R \to R, I_R(a) = a$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar açık olarak R halkasının endomorfizmalarıdır. Bu endomorfizmalara sırasıyla R halkasının *sıfır endomorfizması* ve *birim endomorfizması* adı verilir.

Uyarı 2.1.10 $h : R \to S$ bir halka homomorfizması ise, bu durumda $h(0_R) = 0_S$ olur. Diğer taraftan R ile S birimli halkalar ise $h(1_R) = 1_S$ olmayabilir. Örneğin $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $h(a) = (a, 0)$ şeklinde tanımlanan homomorfizma için $h(1) = (1,0) \neq (1,1)$ dir. Bununla beraber eğer $h: R \to S$ epimorfizma ise, bu durumda $h(1_R) = 1_S$ olur.

Önerme 2.1.11 R, S, T üç halka olmak üzere, $\gamma : R \to S$, $\beta: S \to T$ halka homomorfizmaları olup $\beta \circ \gamma: R \to T$ bileşke fonksiyonu da bir halka homomorfizmasıdır. Eğer $\gamma : R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda $\gamma \circ \gamma = \gamma^2$ olup böylece daha genel olarak $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, $\gamma^n = \underbrace{\gamma \circ \gamma \circ \ldots \circ \gamma}_{n\ tane}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.12 R bir halka $a \in R$ olsun. Eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya bir *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

Tanım 2.1.13 R bir halka ve R nin $a^2 = a$ özelliğini sağlayan bir a elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R elemanları eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.14 R bir halka olmak üzere

$$M(R) = \{m \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } mr = rm\}$$

kümesi R halkasının *merkezi* olarak adlandırılır..

Tanım 2.1.15 Eğer bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezi ise, bu durumda bu halkaya *Abelian halka* denir.

2.2 Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1 R bir halka olmak üzere $\emptyset \neq S \subset R$ olup S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer S, R deki işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa, bu durumda S , R nin bir *alt halkası* olarak adlandırılır. $I; R$ nin bir alt halkası olsun. Eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyor ise, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, aynı zamanda $xr \in I$ oluyor ise, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal oluyor ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Örnek 2.2.2 R bir halka olsun Böylece $\{0\}$ ve R, R nin birer idealleridir.

R bir halka ve $A_1, A_2, \dots, A_n$, R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n |\ a_i \in A_i, \qquad i = 1,2, \dots, n\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve B, R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n |\ a_i \in A, b_i \in B, \qquad n \in \mathbb{N}^*\}$$

olarak gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalıysa, bu durumda $aB = \{ab |\ b \in B\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.3 R bir halka olmak üzere R halkasının tüm ideallerinin ailesi kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. R nin sıfırdan farklı bir ideali, bu ailenin bir minimal elemanı ise, bu durumda bu ideale R nin bir *minimal ideali* denir. Benzer şekilde . R nin kendisinden farklı bir ideali, bu ailenin bir maksimal elemanı ise, bu durumda bu ideale R nin bir *maksimal ideali* denir

Tanım 2.2.4 R bir halka ve $R \neq P$ de R nin bir ideali olsun. Eğer R nin I, J idealleri için $IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ oluyorsa bu durumda, P ye R nin bir *asal (prime) ideali* denir.

Önerme 2.2.5 R nin bir P ideali için aşağıdakiler denktir.

(i) P asal idealdir.

(ii) $a, b \in R$ için $RaR \cdot RbR \subseteq P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) R nin I, J sol idealleri için $IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

(iv$'$) R nin I, J sağ idealleri için $IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

Tanım 2.2.6 Bir R halkasının tek-yanlı (veya iki-yanlı) bir ideali I olsun. Eğer I nın her elemanı üstel sıfır (nilpotent) ise, bu durumda I ya R nin bir *nil ideali* denir.

Tanım 2.2.7 Bir R halkasının tek-yanlı (veya iki-yanlı) bir ideali I olsun. Eğer bir n doğal sayısı için $I^n = 0$ oluyor ise. bu durumda I ya R nin bir *üstel sıfır (nilpotent) ideali* denir. Açık olarak

$$I^n = 0 \Leftrightarrow Her \; \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq I \text{ için } a_1 a_2 \dots a_n = 0$$

olmasıdır. Diğer taraftan bir halkanın her I üstel sıfır ideali bir nil idealidir.

Tanım 2.2.8 R bir halka ve P de R nin bir ideali olmak üzere eğer $R/_P$ bölüm halkası bir bölge ise, bu durumda P ye R nin bir *tamamen asal (completely prime) ideali* denir. Buna denk olarak $a, b \in R$ için,

$$ab \in P \Longrightarrow a \in P \text{ veya } b \in P$$

oluyor ise, bu durumda P ideali *completely prime ideal* olur.

Tanım 2.2.9 Eğer bir birimli ve değişmeli halka bir tek maksimal ideale sahip ise, bu durumda bu halkaya *yerel (local) halka* denir.

Tanım 2.2.10 Bir R halkasının tüm asal ideallerinin arakesitine R halkasının *asal radikali* denir ve rad R ile gösterilir.

Örnek 2.2.11 R bir halka olsun Bu durumda a da R de bir merkezil eşkare eleman oluyorsa, bu durumda $1_R - a$ elemanıda bir merkezil eşkaredir. Ayrıca aR ve $(1_R - a)R$ kümeleri R nin idealleridir.

R bir halka ve I da R nin bir ideali olmak üzere $R/_I = \{a + I | \; a \in R\}$ kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/_I$ değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

ikili işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin I ya göre *bölüm halkası* denir. R değişmeli ise, bu durumda $R/_I$ nında değişmeli ve R birimli ise, bu durumda $R/_I$ da birimlidir.

2.3 Polinom Halkaları ve Ore Genişlemeleri

Bir R halkasından farklı yeni halkalar elde etmek mümkündür. Bu bölümdeki çalışmalarımız boyunca kullanacağımız bu yeni halkaları hatırlatacağız.

Tanım 2.3.1 R birimli bir halka olsun. x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki formal toplamaya R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm bu polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | \, n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_i \in R\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \,, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \; \in R[x]$$

olmak üzere, bu polinomların toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır. n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek;

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i)x^i$$

şeklinde tanımlanır.

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_jb_{l-j}$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_lx^l$$

şeklindedir. c_l katsayıları daha açık bir ifadeyle;

$$c_l = a_0b_l + a_1b_{l-1} + a_2b_{l-2} + \cdots + a_{l-2}b_2 + a_{l-1}b_1 + a_lb_0$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanımlanan ikili işlemler ile birlikte $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2 R bir halka olsun. α da R nin bir endomorfizması olsun. $(R[x], +)$ değişmeli grubunu göz önüne aldığımızda, $R[x]$ de yeni çarpma işlemini şöyle tanımlayalım. İki polinom çarpılırken $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ olarak yazılır. Böylece bu çarpma işlemi ile birlikte $R[x]$ bir halka olur. Bu halka endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* olarak adlandırılır. Bu halka $R[x; \alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3 R bir halka olsun. $(M, +)$ bir değişmeli grup olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $R \times M \to M$, $(r, m) \longmapsto rm$ fonksiyonu var ise, bu durumda M ye bir *sol* R *−modül* denir. Her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için;

(i) $r(x + y) = rx + ry$

(ii) $(r + s)x = rx + sx$

(iii) $r(sx) = (rs)x$

ve R, 1_R birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, buna ek olarak her $x \in M$ için $1_R x = x$ koşulu sağlanıyorsa, M bir *birimsel sol* R *−modül* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.4 R ile S iki halka olsun Aynı zamanda $(M, +)$ değişmeli grubu bir sol R −modül ve bir sağ S −modül olsun. Eğer her $r \in R$, her $x \in M$ ve her $s \in S$ için $(rx)s = r(xs)$ oluyorsa, bu durumda M bir sol R, sağ S *−bimodül* olarak adlandırılır.

2.4 Bazı Halka Sınıfları

Şimdi, daha önceden çalışılan bazı halka sınıflarını hatırlatalım.

Tanım 2.4.1 R bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$ sağlanıyorsa, bu durumda R halkası *terslenebilir* (*reversible*) olarak adlandırılır.

R bir halka olsun. Bu durumda $a \in R$ için $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ oluyorsa, bu durumda R ye bir *inmiş halka* denir.

Lemma 2.4.2 R bir inmiş halka olsun. Bu durumda R terslenebilirdir.

İspat. R bir inmiş halka olup $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ olup R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Buda bize R halkasının terslenebilir olduğunu kanıtlar. □

Tanım 2.4.3 R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $\{r \in R: ra = 0\}$ kümesine a nın R halkası içindeki *sol sıfırlayanı* denir ve $\mathrm{ann}_l^R(a)$ ile gösterilir. Benzer olarak $\mathrm{ann}_r^R(a) = \{r \in R: ar = 0\}$ şeklinde tanımlanır ve a nın R içindeki *sağ sıfırlayanı* olarak adlandırılır. Eğer R bir değişmeli halka olursa, bu durumda a nın R içindeki sağ ve sol sıfırlayan kümeleri eşit olacağı açıktır. Bu küme $\mathrm{ann}^R(a)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.4 R bir halka olsun.Eğer $a, b \in R$ için, $ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkasına *yarı değişmeli* (*semicommitative*) denir. Bir R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in R$ için $\mathrm{ann}_r^R(a)(\mathrm{ann}_l^R(a))$ kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı değişmeli halkadır. Gerçekten, R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. R terslenebilir bir halka olduğundan $ba = 0$ olup böylece her $r \in R$ için $bar = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ olur yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.5 R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir,

(i) Her bir sağ R −modül M için $Ma = 0$ dır.

(ii) a; R nin her maksimal sağ idealine aittir.

(iii) Her $y \in R$ için $1 - ay$ sağ tersinirdir.

(iv) Her $x, y \in R$ için $1 - xay$ tersinirdir.

Tanım 2.4.6 R bir halka olmak üzere R nin yukarıdaki teoremin denk koşullarından birini sağlayan tüm elemanlarının kümesine R nin *Jacobson radikali* denir ve $\mathrm{J}(R)$ ile gösterilir. $\mathrm{J}(R)$ kümesi R nin bir idealidir. Diğer taraftan $\mathrm{J}(R)$; R nin tüm maksimal sağ idealinin arakesitidir.

Tanım 2.4.7 R bir halka olmak üzere, eğer her bir $r \in R$ için $rsr = r$ olacak şekilde bir $s \in R$ varsa, bu durumda R halkasına *Regular halka* veya *von Neumann Regular halka* denir.

Tanım 2.4.8 R bir halka olmak üzere, eğer R halkası sol (sağ) idealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlıyor ise, bu durumda R ye *sol (sağ) Artinian* denir. Eğer R halkası hem sağ hemde sol Artinian ise, bu durumda *Artinian* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.9 R bir halka ve I; R nin bir ideali olmak üzere $a^2 \equiv a(mod\, I)$ koşulunu sağlayan R nin bir a elemanına *eşkare* $mod\, I$ denir.

Tanım 2.4.10 R bir halka olmak üzere eğer eşkare $mod\, J(R)$ ler yükseltilebilir ve $R/_{J(R)}$ halkası semisimple ise, bu durumda R halkasına $semiperfect\ halka$ denir.

Tanım 2.4.11 R bir halka ve R nin ideallerinin bir ailesi $\{A_i | i \in I\}$ olsun Eğer

$\varphi : R \to R \qquad \prod_{i\in I} R/_{A_i}$

kanonik homomorfizması bire-bir ise, bu durumda R ye $\{R/_{A_i} | i \in I\}$ nin bir *subdirect çarpımı* denir.

Tanım 2.4.12 R bir halka olmak üzere $a \in R$ için, $aRa = 0 \implies a = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.13 R bir halka ve

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere, $p(x)q(x) = 0 \implies a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$ ise, bu durumda R halkasına *Armendariz* denir. Her inmiş halka aynı zamanda bir Armendariz halkadır.

3. İKİLİ HALKALAR

Bu bölümde Abelian halkaların bir genelleştirilmesi olan ikili halkaları çalışacağız. Hatırlanacağı üzere, her idempotenti merkezi olan halkaya bir Abelian halka denir. Yani R bir halka olmak üzere eğer $e^2 = e \in R$ iken $e \in M(R)$ oluyorsa, bu durumda R halkası Abelian halka olarak adlandırılır. Bu kısımda her ikili halkanın bir Abelian halka olduğunu göstereceğiz ve ikili halkaların bir takım karakterizasyonunu vererek bu halka sınıflarının temel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölüm için temel referanslarımız Feller (1958), Thierrin (1959), ve Habeb (1990) olacaktır. Bu bölümdeki tüm sonuçlar yukarıda adı geçen çalışmalardan derlenmiştir.

İkili halkaların tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.1 R bir halka olmak üzere; eğer R nin her sol ideali R nin iki-yanlı ideali oluyorsa, bu durumda R ye *sol ikili halka (left duo ring)* denir. Sağ ikili halka tanımı da benzer olarak yapılır. Eğer bir R halkası hem sol ikili hem de sağ ikili halka ise bu durumda R ye *ikili halka (duo ring)* denir.

Her değişmeli halkanın ikili halka olduğu açıktır.

Lemma 3.2 R bir ikili halka olsun. $a, b, c \in R$ için $abc = bx = yb$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır.

İspat R bir ikili halka ve $a, b, c \in R$ kabul edelim. Bu durumda bR ; R nin bir sağ idealidir. Fakat R bir ikili halka olduğundan bR ; aynı zamanda R nin bir sol idealidir. O halde $bc \in bR$ ve $a \in R$ için $abc \in bR$ olur. Böylece $abc = bx$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Benzer düşünceyle Rb ; R nin bir sol ideali olup, R bir ikili halka olduğundan Rb ; R nin aynı zamanda bir sağ idealidir. Böylece $ab \in Rb$ ve $c \in R$ için $abc \in Rb$ olup, buradan $abc = yb$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır.

Lemma 3.3 R bir ikili halka ve $e^2 = e \in R$ ise, bu durumda $e \in M(R)$ dir.

İspat R bir ikili halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $re = er$ olduğunu gösterelim. Bunun için $r \in R$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. Lemma 3.2 den $ree = ex$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Aynı şekilde $eer = ye$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. $ree = ex$ eşitliğini soldan e ile çarparak ve e nin bir idempotent olduğunuda kullanarak $ere = ex$ elde ederiz. Aynı düşünceyle $eer = ye$ eşitliğini sağdan e ile çarparak $ere = ye$ elde ederiz. böylece $ere = ex = ye$ bulunur. Sonuç olarak $re = ex = ye = er$ elde ederiz.

Lemma 3.3 bize her ikili halkanın bir Abelian halka olduğunu gösterir.

Önerme 3.4 R bir ikili halka ve M ; R nin üstel sıfır olmayan bir minimal ideali ise, bu durumda M bir division halkadır.

İspat R bir ikili halka ve M ; R nin üstel sıfır olmayan bir minimal ideali olsun. R bir ikili halka olduğundan M ; R nin bir minimal sağ idealidir. Böylece $M = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Lemma 3.3 gereğince $e \in M(R)$ dir. $e = ee \in eR = M$, olup $e; M$ halkasının birim elemanıdır. Gerçekten; her $er \in M$ için $eer = er$ ve $ere = eer = er$ dir. Şimdi $0 \neq m \in M$ olsun. Bu durumda $mM \neq 0$ olur. Eğer $mM = 0$ olsaydı bu durumda $M^2 = 0$ olurdu ki, bu da M nin üstel sıfırdan farklı olmasıyla çelişirdi. Diğer taraftan mM bir sağ ideal olup, M bir minimal sağ ideal olduğundan $mM = M$ elde edilir. $e \in M = mM$ olduğundan $e = mm'$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. Bu da bize M nin bir division halka olduğunu gösterir.

Lemma 3.5 R bir ikili halka olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $aR = Ra$ dır.

İspat R bir ikili halka ve $a \in R$ olsun. Şimdi $x \in aR$ olsun. Bu durumda $x = ar$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Böylece $x \in 1_R ar$ yazabiliriz. Lemma 3.2 den $x \in 1_R ar = r'a$ olacak şekilde $r' \in R$ vardır. Böylece $x = r'a \in Ra$ olur ki bu da bize $aR \subset Ra$ olduğunu gösterir. Şimdi $y \in Ra$ olsun. Bu durumda $y = sa$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. $y \in sa1_R$ yazılabilir ve Lemma 3.2 den $y = as'$ olacak şekilde bir $s' \in R$ vardır. Yani $y \in aR$ olur ki, bu da bize $aR \subset Ra$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $aR = Ra$ elde edilir.

Önerme 3.6 Her ikili halka yarı değişmelidir.

İspat R bir ikili halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $r \in R$ için $rb \in Rb$ olup Lemma 3.5 ten $rb \in Rb = bR$ olur. Yani $rb = bs$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. Bu eşitliği soldan a ile çarparsak $arb = abs = 0s = 0$ olur ki buradan $aRb = 0$ elde ederiz. Bu da bize R nin yarı-değişmeli halka olduğunu gösterir.

Önerme 3.7 Her yarı değişmeli halka Abeliandır.

İspat R bir yarı değişmeli halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$ olup, R yarı değişmeli olduğundan $eR(1-e) = 0$ ve $(1-e)Re = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ ve $(1-e)re = 0$ dir. Buradan $er = ere$ ve $re = ere$ olup $er = re$ olduğunu elde ederiz. Bu da bize R halkasının Abelian olduğunu gösterir.

Aşağıda vereceğimiz iki Lemma Armendariz bir halkanın Abelian olduğunu olduğunu ispatlamada oldukça kullanışlı olacaktır.

Lemma 3.8 R bir Armendariz halka olmak üzere her $a, b \in R$ için $b\mathrm{ann}_r^R(a) \cap a\mathrm{ann}_r^R(b) = 0$ dır.

İspat R bir Armendariz halka ve $a, b \in R$ olsun. Kabul edelim ki $b\mathrm{ann}_r^R(a) \cap a\mathrm{ann}_r^R(b) \neq 0$ olsun. Bu durumda $0 \neq c \in b\mathrm{ann}_r^R(a) \cap a\mathrm{ann}_r^R(b)$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. Böylece $c \in b\mathrm{ann}_r^R(a)$ve $c \in a\mathrm{ann}_r^R(b)$ dir. O halde $0 \neq c = bt = as$ olacak şekilde $t \in b\mathrm{ann}_r^R(a)$ ve $s \in a\mathrm{ann}_r^R(b)$ vardır. Böylece $as - bt = at = bs = 0$ dır. Şimdi $f(x) = a - bx$ $g(x) = t + sx \in R[x]$ polinomlarını göz önüne alalım. $f(x)g(x) = at + (as - bt)x - bsx^2 = 0$ elde ederiz. Fakat $as \neq 0$ olduğundan, bu R halkasının Armendariz olması ile çelişir ki sonuç olarak bu kabulümüz yanlış olup $b\mathrm{ann}_r^R(a) \cap a\mathrm{ann}_r^R(b) = 0$ dır.

Lemma 3.9 R bir Armendariz halka ve $e^2 = e$, $f^2 = f \in R$ olsun. Eğer $fe = 0$ ise, bu durumda $ef = 0$ dır.

İspat R bir Armendariz halka ve $e^2 = e$, $f^2 = f \in R$ ve $fe = 0$ olsun. Önce $\mathrm{ann}_r^R(1-f) = fR$ olduğunu gösterelim. $u \in r(1-f)$ ise, bu durumda $(1-f)u = 0$ olup, buradan $u \in fu \in fR$ olur ki, bu da bize $r(1-f) \subset fR$ olduğunu gösterir.

Şimdi $v \in fR$ olsun. Bu durumda $v = fr$ olacaş şekilde $r \in R$ vardır. $(1-f)v = (1-f)fr = fr - f^2r = fr - fr = 0$ olur. Yani $v \in r(1-f)$ olur ki, bu da bize $fR \subset r_R(1-f)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\text{ann}_r^R(1-f) = fR$ olur. Diğer taraftanda $\text{ann}_r^R(e) = (1-e)R$ olduğu kolayca gösterilebilir. Lemma 3.8 de $a = 1-f$ ve $b = e$ alınırsa $0 = b\text{ann}_r^R(a) \cap a\text{ann}_r^R(b) = efR \cap (1-f)(1-e)R$ olur. $ef = ef1 \in efR$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(1-f)(1-e)(-f) &= (1-f)(-f+ef)\\ &= -f + ef + f^2 - fef\\ &= ef\end{aligned}$$

Olduğundan $ef \in (1-f)(1-e)R$ olur. Böylece $ef \in efR \cap (1-f)(1-e)R = 0$ olup $ef = 0$ elde edilir.

Önerme 3.10 Her Armendariz halka Abeliandır.

İspat R bir Armendariz halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $f = e + er(1-e) \in R$ de bir idempotent elemandır. Ayrıca $(1-e)f = (1-e)[e + er(1-e)] = e + er(1-e) - e - er(1-e) = 0$ olup, Lemma3.9 dan $0 = f(1-e) = [e + er(1-e)](1-e) = e(1-e) + er(1-e)(1-e) = er(1-e) = er - ere$ olup $ere = er$ elde edilir. Diğer taraftan $f' = (1-e) + (1-e)re$ de yine bir idempotent olup $ef' = 0$ olur. Tekrar Lemma 3.9 dan $0 = f'e = [(1-e) + (1-e)re]e = (1-e)re = re - ere$ den $ere = re$ olur.Sonuç olarak $er = re$ olduğundan R halkası Abeliandır.

Lemma 3.11 Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) R yarı-değişmeli bir halkadır.

(ii) Her bir $a \in R$ için $\text{ann}_l^R(a)$ (denk olarak $\text{ann}_r^R(a)$) iki yanlı idealdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) : Kabul edelim ki R bir yarı-değişmeli halka olsun. $\text{ann}_l^R(a)$ nın bir sol ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi $\text{ann}_l^R(a)$ nın bir sağ ideal olduğunu gösterelim. Bunun için $r \in R$ ve $s \in \text{ann}_l^R(a)$ olsun. Bu durumda $sa = 0$ dır. R yarı-değişmeli olduğundan $sRa = 0$ olur. Böylece $sra = 0$ olup $sr \in \text{ann}_l^R(a)$ elde edilir. Bu da $\text{ann}_l^R(a)$ nın bir sağ ideal olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\text{ann}_r^R(a)$ nın bir sol ideal olduğu gösterilebilir.

(ii) ⇒ (i) : Her bir $a \in R$ için $\mathrm{ann}_l^R(a)$ iki yanlı ideal olsun. kabul edelim ki $b, c \in R$ için $bc = 0$ olsun. Böylece $b \in \mathrm{ann}_l^R(c)$ dir. $\mathrm{ann}_l^R(c)$ bir sağ ideal olduğundan her $r \in R$ için $br \in \mathrm{ann}_l^R(c)$ olup, buradan $brc = 0$ yani $bRc = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı-değişmeli olduğunu gösterir.

Lemma 3.12 R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $e \in M(R)$ dir.

(ii) $Re = eR$ dir.

(iii) $\mathrm{ann}_l^R(e) = \mathrm{ann}_r^R(e)$ dir.

İspat (i) ⇒ (ii) : $e \in M(R)$ olsun. $x \in Re$ ise, bu durumda $x = ae$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. $e \in M(R)$ olduğundan $x = ea \in eR$ olup, $Re \subset eR$ elde edilir. $eR \subset Re$ olduğu da kolayca görülür.

(ii) ⇒ (i) : $Re = eR$ olsun. $r \in R$ için $re \in Re = eR$ olup $re \in eR$ dir. Böylece $re = ea$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. Bu eşitliği soldan e ile çarparsak $ere = ea = re$ olur. Diğer taraftan $er \in eR = Re$ olup $er = be$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Buradan $ere = be = er$ olur. Sonuç olarak $ere = er = re$ olup $e \in M(R)$ elde edilir.

(i) ⇒ (iii) : $e \in M(R)$ olsun. $u \in \mathrm{ann}_l^R(e)$ ise $ue = 0$ ve $e \in M(R)$ olduğundan $eu = 0$ yani $u \in \mathrm{ann}_r^R(e)$ olur. Böylece $\mathrm{ann}_l^R(e) \subset \mathrm{ann}_r^R(e)$ olur. Diğer kapsamada benzer şekilde gösterilebilir.

(iii) ⇒ (i) : Kabul edelim ki $\mathrm{ann}_l^R(e) = \mathrm{ann}_r^R(e)$ olsun. $e^2 = e$ olduğundan $\mathrm{aan}_l^R(e) = R(1-e)$ ve $\mathrm{ann}_r^R(e) = (1-e)R$ dir. Kabulden $R(1-e) = (1-e)R$ olur. $1-e$ de bir idempotent olduğundan (ii) ⇒ (i) yi kullanarak $1-e \in M(R)$ olduğunu görürüz. Yani her $r \in R$ için $(1-e)r = r(1-e)$ olup, buradan $er = re$ yani $e \in M(R)$ elde ederiz.

Teorem 3.13 R bir ikili halka olmak üzere eğer R sıfırdan farklı üstel sıfır eleman içermiyor ve alt-direkt indirgenmez ise, bu durumda bir division halkadır.

İspat R alt-direkt indirgenmez bir halka olduğundan bir M minimal ideal içerir. Bu M ideali üstel sıfır değildir. Bu yüzden Önerme 3.4 den dolayı M bir division halka ve $M = eR$ olacak şekilde bir merkezi eşkare e elemanı vardır. $T = \{ex - x | x \in R\}$ kümesi R nin bir idealidir. Gerçekten; $u, v \in T$ olsun. Bu durumda $u = ex - x$ ve

$v = ey - y$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Böylece $u - v = (ex - x) - (ey - y) = e(x - y) - (x - y) \in T$ dir. $u \in T$ ve $r \in R$ için $ur = (ex - x)r = e(xr) - xr \in T$ ve $ru = r(ex - x) = rex - rx = e(rx) - (rx) \in T$ olur. Eğer $y \in M \cap T$ ise, bu durumda $y \in M$ ve $y \in T$ olup $y \in M \in= eR$ olduğundan $y = es$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. $y \in T$ olduğundan $y = et - t$ olacak şekilde $t \in R$ vardır. Böylece $y = es = et - t$ olup $ey = es = y = et - et = 0$ olur. O halde $y = 0$ olup $M \cap T = 0$ elde edilir. M minimal ideal olduğundan $T = 0$ elde edilir. Sonuç olarak her $x \in R$ için $ex - x = 0$ yani $ex = x$ elde edilir. Her $x \in R$ için $x = ex \in eR = M$ olduğundan $x \in M$ olur. Sonuç olarak $M = R$ elde edilir.

Önerme 3.14 R bir ikili halka olmak üzere, R nin her asal ideali tamamen asal idealdir.

İspat R bir ikili halka ve P ; R nin bir asal ideali olsun. $x, y \in R$ için $xy \in P$ olsun. $I = \{a \in R | xa \in P\}$ kümesini göz önüne alalım. I ; R nin bir sağ idealidir. Gerçekten ; $a, b \in I$ için $xa, xb \in P$ olup $x(a - b) = xa - xb \in P$ olur. Böylece $a - b \in I$ elde edilir. Şimdi $a \in I$ ve $r \in R$ olsun. $a \in I$ olduğundan $xa \in P$ dir. Böylece $xar = xar \in P$ elde edilir ki, bu da bize I nın R nin bir sağ ideali olduğunu gösterir. R bir ikili halka olduğundan I aynı zamanda R nin bir sol ideali olur. $xy \in P$ olduğundan $y \in I$ dır. I sol ideal olduğundan $Ry \subseteq I$ dır. O halde $xRy \subset P$ olur. R asal ideal olduğundan $x \in P$ veya $y \in P$ elde ederiz ki, bu da bize P nin tamamen asal bir ideal olduğunu gösterir.

Teorem 3.15 Bir ikili halkanın üstel sıfır elemanlarının kümesi N bir idealdir. N aynı zamanda R nin tamamen asal ideallerinin arakesitine eşittir.

İspat P_i ler R nin tamamen asal idealleri olmak üzere $I = \cap P_i$ olsun. $a \in N$ olsun. Bu durumda $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Açık olarak $a^n \in P_i$ olur. Bu yüzden $a \in P_i$ ve böylece $N \subseteq I$ elde edilir. Önerme 3.4 den dolayı I ; R nin asal ideallerinin arakesitidir. Sonuç olarak $N = I$ elde edilir.

Aşağıdaki sonucu verebilmemiz için bir ikili halkanın herhangi bir homomorfik görüntüsünün de bir ikili halka olduğunu görmemiz gerekir. Şimdi bunu görelim. R bir ikili halka olmak üzere $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $f(R)$ nin yani R nin homomorfik görüntüsünün de bir ikili halka olduğunu ispat edelim. Bunun için, ilk olarak I; $f(R)$ nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda $f^{-1}(I)$; R nin bir sağ ideali ve R bir ikili halka olduğundan $f^{-1}(I)$; R nin bir sol idealidir. Böylece $f: R \to f(R)$ örten olduğundan $I = f(f^{-1}(I))$ olup, bu da $f(R)$ nin bir sol idealidir. Aynı şekilde $f(R)$ nin her sol idealinin bir sağ idealinin olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $f(R)$ bir ikili halka olur.

Sonuç 3.16 Her inmiş ikili halka sıfır bölensiz ikili halkaların bir alt direkt toplamıdır.

4. İKİLİ HALKALARIN POLİNOM HALKALARI

Ore polinom halkaları, kuantum mekaniğinin matematiksel alt yapısındaki diferensiyel operatör halkalarının araştırılmalarının başlamasıyla, son yüzyılda oldukça fazla önem kazanmaktadır. Ore genişlemeler ve bunların idealleri üzerindeki modern araştırmaların zenginliği araştırmacıları kuantum grupları, enveloping cebirleri, lokalizasyon teorisi ve boyut teorisi hakkındaki sorulara motive etmiştir. Bir Ore genişlemesinin sol ideallerinin iki-yanlı ideali olmasını belirleme problemi bölüm cebiri teorisinde bir klasik uygulamaya sahiptir.

Bu bölümde Ore polinom halkaları için farklı bir durumu inceleyeceğiz. Daha açık olarak Ore polinom halkalarının her sol (yada sağ) idealini iki yanlı ideal olması durumunu inceleyeceğiz. Sıradan polinom halkaları için bu durum halka değişmeli olmadığı sürece gerçekleşmez. Bu bölümde daha genel durumları elde edeceğiz. Burada vereceğimiz tüm sonuçlar Marks (2004) çalışmasından alınmıştır.

Bu bölümde göz önüne alacağımız tüm halkalar aksi belirtilmedikçe birimli halkalar olacaktır. R bir halka, $\sigma : R \to R$ bir halka homomorfizması yani R nin bir endomorfizması ve $\delta : R \to R$ bir σ-türev olsun. Yani ; her $a, b \in R$ için $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ ve $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ olsun.

Örnek 4.1 R bir halka olmak üzere $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in R\right\}$ halkasını göz önüne alalım. $\sigma : S \to S$, $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon açık olarak S nin bir endomorfizmasıdır. Diğer taraftan $\delta : S \to S$, $\delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan bağıntıda bir σ $-$türevdir. Gerçekten ; her $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S$ için

$$\delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \delta\left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)$$ dir.

Diğer taraftan;

$$\delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \delta\left(\begin{pmatrix} ac & bd+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & ad+bc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\delta\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & bc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ad+bc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan S bir σ −türevdir.

R bir halka olmak üzere R den katsayılı iki polinomun toplamı bilinen polinom toplamı ve iki polinomun çarpımını her $a \in R$ için $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ kuralı yardımıyla tanımlanırsa, bu durumda bu yeni tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte R den katsayılı polinomların kümesi bir halka olmaktadır. Bu halkaya R halkasının bir *Ore genişlemesi* denir ve $R[x;\sigma,\delta]$ ile gösterilir.

Örnek 4.2 R bir halka $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x \in R[x;\sigma,\delta]$ için;

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x) \\
&= a_0b_0 + a_0b_1x + a_1xb_0 + a_1xb_1x + a_2x^2b_0 + a_2x^2b_1x \\
&= a_0b_0 + a_0b_1x + a_1[\sigma(b_0)x + \delta(b_0)] + a_1[\sigma(b_1)x + \delta(b_1)]x^2 \\
&\qquad + a_2x[\sigma(b_0)x + \delta(b_0)] + a_2x[\sigma(b_1)x + \delta(b_1)]x \\
&= a_0b_0 + a_0b_1x + a_1\sigma(b_0)x + a_1\delta(b_0) + a_1\sigma(b_1)x + a_1\delta(b_1)x^2 \\
&\qquad + a_2x\sigma(b_0)x + a_2x\delta(b_0) + a_2x\sigma(b_1)x^2 + a_2x\delta(b_1)x \\
&= a_0b_0 + a_0b_1x + a_1\sigma(b_0)x + a_1\delta(b_0) + a_1\sigma(b_1)x + a_1\delta(b_1)x^2 \\
&\qquad + a_2[\sigma^2(b_0)x + \delta\sigma(b_1)]x^2 + a_2[\sigma\delta(b_1)x + \delta^2(b_1)]x \\
&= a_0b_0 + a_0b_1x + a_1\sigma(b_0)x + a_1\delta(b_0) + a_1\sigma(b_1)x^3 + a_1\delta(b_1)x^2 \\
&\qquad + a_2\sigma^2(b_0)x^2 + a_2\delta\sigma(b_0)x + a_2\sigma\delta(b_0)x + a_2\delta^2(b_0) \\
&\qquad + a_2\sigma^2(b_1)x^3 + a_2\sigma\delta(b_1)x^2 + a_2\delta\sigma(b_1)x^2 + a_2\delta^2(b_1)x \\
&= [a_0b_0 + a_1\sigma(b_0) + a_2\delta^2(b_0)] \\
&\qquad + [a_0b_1 + a_1\sigma(b_0) + a_2\delta\sigma(b_0) + a_2\sigma\delta(b_0) + a_2\delta^2(b_1)]x \\
&\qquad + [a_1\delta(b_1) + a_2\sigma^2(b_0) + a_2\sigma\delta(b_1) + a_2\delta\sigma(b_1)]x^2 \\
&\qquad + [a_1\sigma(b_1) + a_2\sigma^2(b_1)]x^3 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Eğer $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesinde $\delta=0$ dönüşümü ise bu durumda $R[x;\sigma,0]=R[x;\sigma]$ halkasına skew polinom halkası den Eğer $\sigma=I_R$ özdeşlik endomorfizması ise bu durumda $R[x;I_R,\delta]=R[x;\delta]$ diferensiyel operatör halkası elde edilir. Son olarak $\sigma=I_R$ özdeşlik endomorfizması ve $\delta=0$ dönüşümü alınırsa $R[x;I_R,0]=R[x]$ polinom halkası elde edilir.

$I; R$ halkasının bir ideali olmak üzere eğer $\sigma(I)\subseteq I$ oluyorsa, bu durumda I idealine R nin bir $\sigma-$ideali denir. Eğer $\delta(I)\subseteq I$ oluyorsa I ya R nin bir $\delta-$ideali denir. Eğer $I; R$ nin hem bir $\sigma-$ideali ve hem de bir $\delta-ideali$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir $(\sigma,\delta)-ideali$ denir. R halkasının Jacobson radikalini $radR$ ve R deki tersinir elemanların çarpımsal grubunu $U(R)$ ile göstereceği R bir halka olmak üzere $a,b\in R$ için eğer $ab=1$ olması $ba=1$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R halkası *Dedekind-sonlu* olarak adlandırılır. R bir halka ve $a\in R$ olmak üzere, eğer a sol-tersinir ve sağ sıfır bölen eleman değilse, bu durumda $a\in U(R)$ dir. Gerçekten $ba=1$ olacak şekilde bir $b\in R$ var olsun. Bu durumda $(ab-1)a=aba-a=a1-a=a-a=0$ ve a sağ sıfır bölen olmadığından $ab-1=0$ olmalıdır. Böylece $ab=1$ olup $a\in U(R)$ elde edilir. R sıfır halkadan farklı bir halka olmak üzere, eğer $a,b\in R$ için $ab=0$ olması $a=0$ veya $b=0$ olmasını gerektirmiyor ise, bu durumda R halkasına bir *bölge (domain)* denir. Diğer taraftan her bölge, Dedekind sonludur. Gerçekten; R bir bölge ve $a,b\in R$ için $ab=1$ olsun. bu durumda $(ba-1)b=bab-b=b1-b=b-b=0$ olup $b\neq 0$ ve R bir bölge olduğundan $ba-1=0$ olmalıdır. Böylece $ba=1$ elde edilir ki buda bize R nin bir Dedekind-sonlu halka olduğunu gösterir.

Şimdi R bir sol ikili halka olsun. Bu durumda R nin bir Dedekind-sonlu halka olduğunu gösterelim. Bunun için önce $a\in R$ için $aR\subset Ra$ olduğunu gösterelim. $x\in aR$ ise $x=ar=1ar$ olarak şekilde $r\in R$ vardır. Lemma 3.2 den $x=1ar=sa$ olacak şekilde $s\in R$ vardır. Bu da bize $aR\subset Ra$ olduğunu gösterir. Şimdi $ab=1$ olsun. Bu durumda $1=ab\in aR\subset Ra$ olup $1\in Ra$ dır. Yani $1=ca$ olacak şekilde $c\in R$ vardır. Böylece $b=1b=cab=c1=c$ olup $1=ca=ba$ elde edilir ki bu da bize R halkasının Dedekind-sonlu olduğunu gösterir.

Bu bölüme, değişmeli olmayan bir skew polinom halkasının asla tek yönlü bir ikili halka olmayacağını göstererek başlayacağız.

Teorem 4.3 R bir halka ve σ; R nin bir endomorfizması olsun. Eğer $R[x;\sigma]$ skew polinom halkası sağ veya sol ikili halka ise, bu durumda $R[x;\sigma]$ değişmelidir. Yani R değişmeli ve $\sigma = I_R$ dir.

İspat $R[x;\sigma]$ skew polinom halkası tek yanlı bir ikili halka olsun. Bu durumda $R[x;\sigma]$ halkası Dedekind-sonludur. Kabul edelim ki $\sigma \neq I_R$ olsun. Bu durumda $\sigma(a) \neq a$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır. $1 + ax + x^2 \in R[x;\sigma]$ için $R[x;\sigma](1 + ax + x^2)$; $R[x;\sigma]$nın bir sol idealidir. Diğer taraftan $1 + ax + a^2 \in R[x;\sigma](1 + ax + x^2)$ ve $x \in R[x;\sigma]$ için $(1 + ax + x^2)x = x + \ ax^2 + x^3 \notin R[x;\sigma](1 + ax + x^2)$ olduğundan $R[x;\sigma](1 + ax + x^2)$; $R[x;\sigma]$ nın bir sağ ideali değildir. Böylece $R[x;\sigma]$ sol ikili halka olamaz. Böylece kabulden $R[x;\sigma]$ sağ ikili halka olmalıdır. Eğer σ bire-bir olsaydı bu durumda $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m + x^n \in R[x;\sigma]\backslash\{0\}$ için $f(x)g(x) = a_0b_0 + [a_0b_1 + a_1\sigma(b_1)]x + \cdots + \sigma^n(b_m)x^{m+n}$ olacağından $\mathrm{der}(fg) = \mathrm{der}f + \mathrm{der}g$ olacaktır. $(1 + ax + x^2)R[x;\sigma]$ nın $R[x;\sigma]$ nın bir sağ ideali olduğunu biliyoruz. Fakat $x \in R[x;\sigma]$ ve $1 + ax + x^2 \in (1 + ax + x^2)R[x;\sigma]$ için $x(1 + ax + x^2) = x + \sigma(a)x^2 + x^3 \notin (1 + ax + x^2)R[x;\sigma]$ olur. Böylece $R[x;\sigma]$ sağ ikili halka olduğundan σ örten olmak zorundadır. Fakat bire-bir değildir. Şimdi, sadece R deki tersinir elemanların σ tarafından tersinir elemanlara dönüştürüldüğünü gösterelim. Kabul edelim ki $b \in R$ için σ(b) ∈ U(R) olsun. $bR[x;\sigma]; R[x;\sigma]$ nın bir sağ ideali ve $R[x;\sigma]$ sağ ikili halka olduğundan $bR[x;\sigma]$; $R[x;\sigma]$ nın aynı zamanda bir sol idealidir. Böylece $x \in R[x;\sigma]$ ve $b \in bR[x;\sigma]$ için $xb \in bR[x;\sigma]$ olup $\sigma(b)x \in bR[x;\sigma]$ olur. Buradan $\sigma b \in bR$ olur. O halde $\sigma(b) = bc$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. $\sigma(b) \in U(R)$ oldu. $bc[\sigma(b)]^{-1} = 1$ elde edilir. $R[x;\sigma]$ Dedekind-sonlu olduğundan $c[\sigma(b)]^{-1}b = 1$ olur. Yani $b \in U(R)$ elde edilir. Böylece $\sigma^{-1}\big(U(R)\big) = U(R)$ olur. Şimdi σ bire-bir olmadığından $\sigma(c_1) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq c_1 \in R$ vardır. Fakat σ örten olduğundan $\sigma(c_0) = c_1$ olacak şekilde $0 \neq c_0 \in R$ vardır. $R[x;\sigma]$ sağ ikili halka olduğundan $x \in R[x;\sigma]$ ve $c_0 + c_1x + x^2 \in (c_0 + c_1x + x^2)R[x;\sigma]$ için $x(c_0 + c_1x + x^2) = \sigma(c_0)x + \sigma(c_1)x^2 + x^3 = \ c_1x + x^3 \in (c_0 + c_1x + x^2)R[x;\sigma]$ olur. Böylece $c_1x + x^3 = (c_0 + c_1x + x^2)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n)$ olacak şekilde bir $d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots +$

$d_n x^n \in R[x;\sigma]$ vardır. Böylece $c_1 x + x^3 = c_0 d_0 + [c_0 d_1 + c_1 \sigma(d_0)]x + [c_0 d_2 + c_1 \sigma(d_1) + \sigma^2(d_0)]x^2 + [c_0 d_3 + c_1 \sigma(d_2) + \sigma^2(d_1)]x^3 + \cdots + \sigma^2(d_n)x^{n+2}$ eşitliğinden $c_0 d_0 = 0$, $c_0 d_1 + c_1 \sigma(d_0) = c_1$ ve $c_0 d_3 + c_1 \sigma(d_2) + \sigma^2(d_1) = 1$ denklemleri elde edilir. $c_0 d_0 = 0$ olup $\sigma(c_0 d_0) = \sigma(c_0)\sigma(d_0) = c_1 \sigma(d_0) = \sigma(0) = 0$ elde edilir. Böylece $c_0 d_1 = c_1$ elde edilir. $c_0 d_3 = c_1 \sigma(d_2) + \sigma^2(d_1) = 1$ den $\sigma^2[c_0 d_3 = c_1 \sigma(d_2) + \sigma^2(d_1)] = \sigma^2(1) = 1$ den $\sigma^2(c_0)\sigma^2(d_3) + \sigma^2(c_1)\sigma^3(d_2) + \sigma^4(d_1) = 1$ olur ki bu da $\sigma^4(d_1) = 1$ elde edilir. $\sigma^{-1}\big(U(R)\big) = U(R)$ olduğundan $\sigma(d_1) \in U(R)$ olur. $c_0 d_1 = c_1$ eşitliğine σ yı uygularsak $\sigma(c_0)\sigma d_1 = \sigma(c_1)$ olup $c_1 \sigma(d_1) = \ \sigma$ elde edilir. $\sigma(d_1) \in U(R)$ olduğundan bu $c_1 \neq 0$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\sigma = I_R$ elde ederiz. Böylece $R[x;\sigma] = R[x;I_R] = R[x]$ yazabiliriz ki bu kabulden tek yönlü ikili halkaydı. Şimdi $a, b \in R$ olsun. $R[x]$ sol ikili halka olduğundan $a + x \in R[x]$ ve $b \in R[x]$ için $(a + x)b \in R[x](a + x)$ olmalıdır. O halde $(a + x)b = c(a + x)$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Böylece $ab + bx = ca + cx$ eşitliğinden $c = b$ elde edilir. Yani $ab = ba$ elde edilir. Eğer $R[x;\sigma]$ sağ ikili halka ise, bu durumda tekrar $ba = ab$ elde edilir. Yani her iki durumda da R değişmeli olmak zorundadır.

Bir skew polinom halkası tek yönlü ikili ve değişmeli olmayan bir halka olmamasına rağmen kuvvet serisi halkası ikili halka olabilir. Örneğin ; eğer D bir division halka ve σ da D nin bir otomorfizması olmak üzere $D[[x;\sigma]]$ bir ikili halkadır.

Teorem 4.4 R bir halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ; R nin bir $\sigma -$ türevi olsun. Eğer $S = R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sol ikili halka ise, bu durumda S değişmelidir. (Yani R değişmeli, $\sigma = I_R$, $ve\ \delta = 0$ dir.)

İspat $S = R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sol ikili halka olsun. Kabul edelim ki $\delta \neq 0$ olsun. Bu durumda $\delta(r) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $r \in R$ vardır. Sx ; S halkasının bir sol idealidir. S bir ikili halka olduğundan Sx; S nin aynı zamanda bir sağ idealidir. $x \in Sx$ ve $r \in S$ için $xr = \sigma(r)x + \delta(r) \notin Sx$ olur. O halde $\delta = 0$ olmalıdır. Böylece $S = R[x;\sigma,\delta] = R[x;\sigma,0] = R[x;\sigma]$ olup, Teorem 4.3 uygulanırsa ispat tamamlanır. Diğer taraftan $R[x;\sigma,\delta]$ halkasının sağ ikili halka olması σ ve δ ya bazı kısıtlamalar getirir. Bunu aşağıda göreceğiz.

Lemma 4.5 R bir halka, $\sigma;$ R nin bir endomorfizması ve $\delta;$ R nin bir $\sigma-$ türevi olsun. Eğer $S=R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka ise, bu durumda herhangi bir $i\in N$ $\ker(\sigma^i)\subseteq \mathrm{rad}R$ dir.

İspat $S=R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka olsun. $r\in\ker(\sigma^i)$, $t\in R$ olmak üzere $(1-rt)S;$ S nin bir sağ idealidir. S sağ ikili halka olduğundan $(1-rt)S$ aynı zamanda S nin bir sol idealidir. Böylece $1-rt\in(1-rt)S$ ve $x^i\in S$ için $x^i(1-rt)\in(1-rt)S$ olacaktır. Böylece $x^i(1-rt)=\sigma^i(1-rt)x^i+\cdots+\delta^i(1-rt)\in(1-rt)S$ olduğundan $\sigma^i(1-rt)=(1-rt)a$ olacak şekilde $a\in R$ vardır. Diğer taraftan $r\in\ker(\sigma^i)$ olduğundan $\sigma^i(1-rt)=\sigma^i(1)-\sigma^i(r)\sigma^i(t)=1-0\sigma^i(t)=1$ olup $1=\sigma^i(1-rt)=(1-rt)a\in(1-rt)R$ buradan $r\in radR$ elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.6 R bir halka, $\sigma;$ R nin bir endomorfizması ve $\delta;$ R nin bir $\sigma-$ türevi olsun. Eğer $S=R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka fakat değişmeli değil ise, bu durumda $(0)\neq ker\sigma\subseteq \mathrm{rad}R$ dir.

İspat $S=R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka fakat değişmeli olmasın. Bu durumda σ bir otomorfizma olamaz. Aksi taktirde S^{op} halkasına Teorem 4.4 uygulanabilirdi. Bir $r\in R$ için S sağ ikili halka olduğundan $rx\in xS$ olur. Bu durumda $rx=xp(x)$ olacak şekilde $p(x)\in S$ vardır. $p(x)=r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots+r_kx^k$ olsun. Eğer σ bire-bir olsaydı bu durumda $k=0$ ve $r\in Im\sigma$ elde ederdik. O zaman σ bire-bir ve örten olurdu ki bu söz konusu değildir. Böylece $ker\sigma\neq(0)$ olur. Böylece ispat Lemma 4.5 in bir direkt sonucu olur.

Teorem 4.4 ve Teorem 4.6 ; değişmeli olmayan bir $R[x;\sigma,\delta]$ halkasının asla tek yönlü ikili halka olamayacağını vurgular.

Açık olarak ; bir sağ ikili halkanın bir alt halkası sağ ikili halka olmak zorunda değildir. Bununla beraber bazı durumlarda halkanın sağ ikili olma özelliği alt halkalarına taşınır. Eğer $R[x;\sigma,\delta]$ sağ ikili halka ise, bu durumda bu halkanın bir alt halkası olan R de sağ ikili halkadır. Eğer $R[[x;\sigma]]$ kuvvet serisi halkası sağ ikili halka ise, bu durumda R de sağ ikili halka olmak zorundadır.

Lemma 4.7 Eğer R bir sağ veya sol self-injective von Neuman regular halka ise, bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) R sağ ikili halkadır.

(ii) R sol ikili halkadır.

(iii) R[[x]] sağ ikili halkadır.

(iv) R[[x]] sol ikili halkadır.

İspat Bakınız. (Marks 2004, Proposition 5)

Lemma 4.8 R bir halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ ; R nin bir $\sigma -$ türevi olsun. Eğer $S = R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka ise, bu durumda, R nin her sağ ideali bir $(\sigma,\delta) -$ idealidir.

İspat $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka olsun. Bu durumda R de bir sağ ikili halkadır. Şimdi I , R nin sağ ideali olmak üzere $\sigma(I) \subset I$ ve $\delta(I) \subset I$ olduğunu gösterelim. $b \in \sigma(I)$ olsun. Bu durumda $b = \sigma(a)$ olacak şekilde $a \in I$ vardır. aS nın S halkasının bir sağ ideali olduğunu biliyoruz. S sağ ikili halka olduğundan aS aynı zamanda S nin bir sol idealidir. Böylece $a \in aS$ ve $x \in S$ için $xa \in aS$ olur. Buradan $\sigma(a)x + \delta(a) = xa = ap(x)$ olacak şekilde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in S$ vardır. O halde $\sigma(a) = aa_1 \in aR$ olur. I ; R nin bir sağ ideali olduğundan $a \in I$ ve $a_1 \in R$ için $\sigma(a) = aa_1 \in I$ olur. Bu da bize $\sigma(I) \subset I$ olduğunu yani I nın bir $\sigma -$ideal olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\delta(I) \subset I$ olduğunu yani I nın bir $\delta -$ ideal olduğuda gösterilebilir.

Önerme 4.9 R bir halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ ; R nin bir $\sigma -$ türevi olsun. Eğer $S = R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka ve $e^2 = e \in R$ ise , bu durumda $e \in M(R)$, $\delta(e) = 0$ ve $\sigma(e) = e$ dir.

İspat $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka olsun. Bu durumda R de bir sağ ikili halka olacağından Lemma 3.3 gereğince $e^2 = e \in R$ için $e \in M(R)$ dir. $e^2 = e \in R$ için $1 - e \in R$ elemanını göz önüne alalım. $(1-e)S$; S nin bir sağ ideali olup S sağ ikili halka olduğundan $(1-e)S$ aynı zamanda S nin bir sol idealidir. Böylece $1 - e \in (1-e)S$ ve $x \in S$ için $x(1-e) \in (1-e)S$ dir. Yani $\sigma(1-e)x + \delta(1-e) = (1-e)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$ olacak şekilde $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in S$ mevcuttur. Buradan $\delta(1-e) = (1-e)a_0 \in (1-e)R$ olur. Şimdi; $\delta(e) = -\delta(-e) = 0 -$

$\delta(-e) = -0 - \delta(-e) = -\delta(1) - \delta(-e) = -[\delta(1) + \delta(-e)] = -\delta(1-e) \in (1-e)R$ olur. eS ; S nin bir sağ ideali ve böylece hipotezden eS ; S nin bir sol idealidir. Böylece $e \in eS$ ve $x \in S$ için $xe \in eS$ olup yukarıdaki gibi $\delta(e) \in eR$ elde edilir. Sonuç olarak $\delta(e) \in (1-e)R$ olduğundan $\delta(e) = (1-e)a$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. $\delta(e) \in eR$ olduğundan $\delta(e) = eb$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Buradan, $\delta(e) = eb = (1-e)a$ olup bu eşitlik soldan e ile çarpılırsa $e\delta(e) = eb = e(1-e)a = 0$ olup buradan $\delta(e) = 0$ elde edilir. S bir ikili halka olduğundan $\sigma(1-e) \in (1-e)R$ olur. Böylece $\sigma(1-e) = \sigma(1) - \sigma(e) = 1 - \sigma(e) \in (1-e)R$ dir. Yani $1 - \sigma(e) = (1-e)r$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. O halde $e - e\sigma(e) = e(1-e)r = 0$ yani $e\sigma(e) = e$ olur. Diğer taraftan $\sigma(e) \in eR$ olduğundan $\sigma(e) = es$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. Soldan e ile çarparak $e = e\sigma(e) = eS = \sigma(e)$ olduğunu görürüz.

Sonuç 4.10 R bir semiperfect halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ; R nin bir $\sigma -$ türevi olsun. Eğer $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi bir sağ ikili halka ise , bu durumda R_i ler local halkalar olmak üzere $R[x;\sigma,\delta] \cong \prod_{i=1}^{n} R_i[x_i;\sigma_i,\delta_i]$ dir.

Teorem 4.11 R bir halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ; R nin bir $\sigma -$ türevi olsun. Bu durumda $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma_i)$; R nin bir idealidir. Eğer $S =$ Eğer $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi bir sağ ikili halka ise, bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) K ideali $radR$ tarafından içerilen bir (σ,δ)-idealidir ve S nin değişmeli olduğu aşikar durum dışında $K \neq (0)$ dır.

(ii) Herhangi bir $r \in R$ için $\{\sigma^n(r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri belli bir terimden sonra sabit olarak devam eder.

(iii) Herhangi bir $r \in R$ için $\{\sigma^n(\delta(r))\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri belli bir terimden sonra sıfır olarak devam eder.

(iv) $S/_{KS}$ bölüm halkası $(R/_K)[x]$ değişmeli polinom halkasına izomorftur.

İspat İlk olarak $\bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ nin R nin bir ideali olduğunu gösterelim. Her bir i için σ^i ler R nin birer endomorfizmaları olacağından $0 \in ker(\sigma^i)$ olup $0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ elde edilir. Böylece $\bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i) \neq \phi$ olur. Her bir i için $\ker(\sigma^i) \subset R$ olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i) \subset R$ olur. Şimdi $a, b \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ olsun. Bu durumda $a \in \ker(\sigma^j)$ ve

$b \in \ker(\sigma^k)$ olacak şekilde $k, j \in \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmaksızın $j \leq k$ kabul edebiliriz. $\sigma^k(a-b) = \sigma^k(a) - \sigma^k(b) = \sigma^{k-j}\left(\sigma^j(a)\right) - \sigma^k(b) = \sigma^{k-j}(0) - 0 = 0 - 0 = 0$ olduğundan $a - b \in \ker(\sigma^k)$ olup, böylece $a - b \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ elde edilir. Şimdi $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda $a \in \ker(\sigma^t)$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. $\sigma^t(ar) = \sigma^t(a)\sigma^t(r) = 0\sigma^t(r) = 0$ ve $\sigma^t(ra) = \sigma^t(r)\sigma^t(a) = \sigma^t(r)0 = 0$ olduğundan $ar, ra \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ olur. Sonuç olarak $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$; R nin bir idealidir. Eğer S değişmeli değil ise, bu durumda Teorem 4.6, Lemma 4.5 ve Lemma 4.8 den K nın rad$R$ tarafından içerilen sıfırdan farklı bir $(\sigma, \delta) -$ideal olduğunu söyleriz. Bu da (i) yi ispatlar. Bu yüzden $KS\,; S$ nin bir idealidir. $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$; R nin bir idealidir. $\sigma\,; R$ nin bir endomorfizması ve δ nın da R nin bir $\sigma -$türevi iken $\sigma'(r+k) = \sigma(r) + K$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu R/K nın bir endomorfizması ve $\delta'(r+k) = \delta(r) + K$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunda R/K nın $\sigma' -$türevi olduğunu göstermek kolaydır. Bunlar yardımıyla $\left(\sum_{i=0}^{m} r_i x^i + KS\right) \mapsto \sum_{i=0}^{m}(r_i + K)x^i$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun bir endomorfizma olduğunu göstererek $S/KS \cong (R/K)[x; \sigma', \delta']$ izomorfizmasını elde ederiz. Fakat S/KS sağ ikili halka ve σ' bire-bir olduğundan Teorem 4.6 dan σ' özdeşlik dönüşümü ve δ' de R/K da sıfır dönüşüm olacağından (ii) ve (iii) ispatlanır ve böylece R/K değişmeli olur ki bu da (iv) yi ispatlar.

Sonuç 4.12 R bir halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ; R nin bir $\sigma -$ türevi olsun. Eğer $R[x; \sigma, \delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka ise, bu durumda $r \in \text{rad}R \Leftrightarrow \sigma(r) \in U(R)$ dir.

İspat Teorem 4.11 (ii) den dolayı herhangi bir $r \in R$ için $\{\sigma(r), \sigma^2(r), \ldots, \sigma^k(r), \sigma^{k+1}(r) = a, \sigma^{k+2} = a, \sigma^{k+3} = a, \ldots\}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ ve bir $a \in R$ vardır. Böylece $\sigma^{k+1}(r - \sigma(r)) = \sigma^{k+1}(r) - \sigma^{k+2}(r) = a - a = 0$ olduğundan $r - \sigma(r) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i)$ olur. Diğer taraftan $\bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\sigma^i) \subseteq \text{rad}R$ olduğundan $r \in \text{rad}R \Leftrightarrow \sigma(r) \in \text{rad}R$ denkliği doğru olur. Eğer $\sigma(r) \in U(R)$ ise, bu durumda $R = \sigma(r)R \subseteq rR$ olması $r \in U(R)$ olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.13 R bir halka, σ; R nin bir endomorfizması ve δ; R nin bir $\sigma-$ türevi olsun. $R[x;\sigma,\delta]$ Ore genişlemesi sağ ikili halka olmak üzere $K=\bigcup_{i=1}^{\infty}\ker(\sigma_i)\subseteq R$ idealini göz önüne alalım. Uygun bir i için $r_i+K\in {}^{R}/_{K}$ bir sıfır bölen olmayacak şekilde $r_0,r_1,\dots,r_n\in R$ verilsin. Bu durumda $x\sum_{i=0}^{n}r_ix^i=\left(\sum_{i=0}^{n}r_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m}c_ix^i\right)$ ve her $i\neq 1$ için $c_i\in K$ ve $c_1-1\in K$ olacak şekilde $c_0,c_1,\dots,c_m\in R$ vardır.

İspat $x\sum_{i=0}^{n}r_ix^i=\left(\sum_{i=0}^{n}r_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m}c_ix^i\right)$ olacak şekilde $c_0,c_1,\dots,c_m\in R$ seçelim ve $i\neq 1$ için $d_i=c_i$ ve $d_1=c_1-1$ olarak tanımlayalım. Teorem 4.11. (iv) den ${}^{S}/_{KS}\cong\left({}^{R}/_{K}\right)[x]$ değişmeli polinom halkası içinde $\left(\sum_{i=0}^{n}[r_i+K]x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m}[d_i+K]x^i\right)=0$ olur. Hipotezden; $\left({}^{R}/_{K}\right)\cap \operatorname{aan}^{({}^{R}/_{K})[x]}\left(\sum_{i=0}^{n}[r_i+K]x^i\right)=0$ olur. Böylece $\operatorname{aan}^{({}^{R}/_{K})[x]}\left(\sum_{i=0}^{n}[r_i+K]x^i\right)=0$ olur ki, bu da her i için $d_i\in K$ olduğunu ispatlar.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.6, Önerme 4.9, Teorem 4.11 ve Sonuç 4.12 deki gereklilik koşullarının Ore genişlemesinin sağ ikili halka olmasını garanti etmediğini göstermektedir.

Örnek 4.14 T herhangi bir halka ve $M\neq 0$ herhangi bir $(T,T)-$bimodül olsun. $R=T\oplus M$ halkasındaki toplama bileşensel toplama ve çarpmada $(t_1,m_1)(t_2,m_2)=(t_1t_2,t_1m_2+m_1t_2)$ şeklinde tanımlansın. $\sigma:R\to R$, $\sigma\big((t,m)\big)=(t,0)$ ve $\delta:R\to R$, $\delta\big((t,m)\big)=(0,m)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonları göz önüne alalım. σ nın R nin bir endomorfizması olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi δ nın R nin bir $\sigma-$türev olduğunu görelim. Bunun için $(t_1,m_1),(t_2,m_2)\in R$ için $\delta\big((t_1,m_1)+(t_2,m_2)\big)=\delta\big((t_1+t_2,m_1+m_2)\big)=(0,m_1+m_2)=(0,m_1)+(0,m_2)=\delta\big((t_1+m_1)\big)+\delta\big((t_2+m_2)\big)$ olur. Diğer taraftan $\delta\big((t_1,m_1)+(t_2,m_2)\big)=\delta\big((t_1t_2,t_1m_2+m_1t_2)\big)=(0,t_1m_2+m_1t_2)$ ve $\sigma\big((t_1,m_1)\big)\delta\big((t_2,m_2)\big)+\delta\big((t_1,m_1)\big)(t_2,m_2)=(t_1,0)(0,m_2)+(0,m_1)(t_2,m_2)=(0,t_1m_2)+(0,m_1t_2)=(0,t_1m_2+m_1t_2)$ olduğundan δ ; R nin bir $\sigma-$türevidir. Ayrıca $\sigma^2\big((t,m)\big)=\sigma\big(\sigma(t,m)\big)=\sigma(m,0)=(m,0)=\sigma(m,t)$ her $i\geq 1$ için $\sigma^i=\sigma$ olup $\ker(\sigma)=\ker(\sigma^i)$ olacağından $\ker(\sigma)=\bigcup_{i=1}^{\infty}ker(\sigma^i)$ elde edilir. $\ker(\sigma)=\left\{(t,m)\in T\oplus M\middle|\sigma\big((t,m)\big)=(0,0)\right\}=\{(t,m)\in T\oplus M\}=\{(t,m)\in T\oplus M|t=0\}=0\oplus M$ olur. Sonuç olarak $\ker(\sigma)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\ker\left(\sigma^i\right)=0\oplus M\subseteq$

$\mathrm{rad}R$ elde edilir. $0 \neq m \in M$ olsun. Eğer $x\big((1,m)+(-1,m)x\big) = ((1,m) + (-1,m)x)\big(\sum_{i=0}^{\infty}(t_i,m_i)x^i\big)$ olacak şekilde $(t_i,m_i) \in R$ olsaydı , yukarıdaki polinomların eşitliğindeki sabit terimler eşit olacağından $(0,m) = (t_0, mt_0)$ eşitliği $m \neq 0$ olmasıyla çelişir. Yani $R[x;\sigma,\delta]$ bir sağ ikili halka değildir.

KAYNAKLAR

Cohn P M, 1977, Algebra, 2. Volume, John Wiley & Sons, 428p, London, Newyork.

Feller E H, 1958, Rroperties of Primary Noncommutative Rings, American Mathematical Society, 89, 79-91.

Goodearl K R, 1992, Prime İdeals in Skew Polynomial Rings and Quantized Weyl Algebras, Journal of Algebra, 150, 324–377.

Habeb J M, 1989, A Note On Zero Commutative and Duo Rings, Mathematical Journal of Okayama University, 32, 73-76.

Hirano Y , Hong C H, Kim J Y , Park J K, 1995, On strongly Bounded Rings and Duo Rings, Communications in Algebra, 23, 2199–2214.

Hungerford T W, 1982, Algebra, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Jacobson N, 1996, Finite-Dimensional Division Algebras Over Fields, Springer-Verlag, 278p, Berlin.

Lam T Y, Leroy A, 1988), Algebraic conjugacy classes and skew polynomial rings, in: Perspectives in Ring Theory (Antwerp, 1987), NATO Advenced Science Inst. Series C Mathematical and Physical Science, Kluwer, Dordrecht, 233, 153–203.

Lam T Y, Leroy A, 1988, Vandermonde and Wronskian matrices over division rings, Journal Algebra, 119, 308–336.

Lam T Y, 1991, A First Course in Noncommutative Rings, Graduate in Texts in Mathhematics, vol. 131, Springer-Verlag, New York.

Lam T Y, 1995, Exercises in Classical Ring Theory, Problem Books in Math., Springer-Verlag, New York.

Lam T Y, Leroy A, 2000, Principal one-sided ideals in Ore polynomial rings, Algebra and Its Applications (Athens, OH, 1999), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 259, 333–352.

Marks G, 2004, Duo Rings and Ore Extensions, Journual of Algebra, 280, 463–471.

Marks G, 2004, A Taxonomy of 2-Primal Rings, Journual of Algebra, 266, 494–520, 494–520.

Thierrin G, 1959, On Duo Rings, Canadian Mathematical Bulletin, 3, 167-172.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve KARAÇULHA

Doğum Yeri ve Tarihi : Manisa / 16.08.1996

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) : 0 553 220 44 39 / mervekaraculha96@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Manisa Ticaret Meslek Lisesi(2010-2014)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü (2014-2018)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen bilimleri Ens. Matematik ABD (2018-2021)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

: Şehit Murat Hasırcı Oğlu Ortaokulu (2019-2020)

:Yusuf Özer Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi (2020-2021)