2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Sevim YEGÜL GÜZEY

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2020

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Sevim YEGÜL GÜZEY

Danışman

Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2020

TEZ ONAY SAYFASI

Sevim YEGÜL GÜZEY tarafından hazırlanan "2–Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel ve $\mathcal{I}-$Yakınsaklığı Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler Meslek Yüksekokulu

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nimet AKIN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../.......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25 / 12 / 2020

Sevim YEGÜL GÜZEY

ÖZET

Doktora Tezi

2–NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE $\mathcal{I}-$YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Sevim YEGÜL GÜZEY

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada ele alınan konunun tarihi gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için bazı temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılarak, bu kavramlar arasındaki ilişkileri veren teoremler ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için istatistiksel Cauchy dizi kavramı tanıtılmış ve istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişkileri içeren teoremler açıklanmıştır. Beşinci bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık kavramı tanıtılarak, bu kavramın özelliklerinin veren teoremler incelenmiştir. Altıncı bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi kavramı tanıtılarak bu kavramın özelliklerini veren teoremler bazı teoremler açıklanmıştır.

Yedinci bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2020, vi + 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: 2-normlu uzay, İstatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi, Çift fonksiyon dizisi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON STATISTICAL AND $\mathcal{I}-$CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES OF FUNCTIONS IN 2–NORMED SPACES

Sevim YEGÜL GÜZEY

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis study consists of seven chapters.

In the first chapter, the historical development of the subject discussed in the study is mentioned. In the second chapter, some basic notions necessary for a better understanding of the study are given. In the third chapter, introducing the concepts of pointwise and uniformly statistical convergence for double sequences of functions in 2-normed spaces, the theorems that give the relations between these concepts are proved. In the fourth chapter, statistical Cauchy sequence concept for double sequences of functions in 2-normed spaces is introduced and the theorems involving the relationships with statistical convergence are explained. In the fifth chapter, introducing the concept of $\mathcal{I}_2$-convergence for double sequences of functions in 2-normed spaces, the theorems that give the properties of this concept are examined. In the sixth chapter, introducing the concept of $\mathcal{I}_2$-Cauchy sequence for double sequences functions in 2-normed spaces, and some theorems that give the properties of this concept are explained.

In the seventh chapter, the sources in the literature used during the study are listed.

2020, vi + 64 pages

Keywords: 2-normed space, Statistical convergence, $\mathcal{I}$-convergence, $\mathcal{I}$-Cauchy sequence, Double sequences of functions.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'A teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme ve eşime teşekkür ederim.

Sevim YEGÜL GÜZEY
Afyonkarahisar 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET……………………………………………………………………………..i

ABSTRACT……………………………………………………………………..ii

TEŞEKKÜR……………………………………………………………………iii

İÇİNDEKİLER DİZİNİ………………………………………………………iv

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ…………………………………...….....vi

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 Temel Tanımlar.. 4

2.2 Çift Diziler 7

2.3 İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklık 9

2.4 2-Normlu Uzaylar.. 12

2.5 Fonsiyon dizilerinde Yakınsaklık Tipleri 16

3. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI.. 20

3.1 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin Noktasal ve Düzgün Yakınsaklığı 20

3.2 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı ve Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı 22

4. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN İSTATİSTİKSEL CAUCHY DİZİSİ 31

4.1 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizileri İçin İstatistiksel Cauchy Dizisi.... 31

5. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI.. 36

5.1 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin $\mathcal{I}_2$-Yakınsaklığı...................... 36

5.2 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin $\mathcal{I}_2^*$-Yakınsaklığı...................... 44

6. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN İDEAL CAUCHY DİZİSİ 48

6.1 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinde İdeal Yakınsaklığın Bazı Özellikleri 48

6.2 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizileri için I_2-Cauchy Dizisi 52
7. KAYNAKLAR 59
ÖZGEÇMİŞ 64

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel Öklid uzayı
c_0	Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
$\|.,.\|$	2-norm fonksiyonu
(X, d)	Metrik uzay
$diam(A)$	A kümesinin çapı
$\|K\|$	K kümesinin kardinalitesi
$d(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_n)	Reel sayı dizisi
$\lim x_n$	(x_n) dizisinin limiti
$x_n \to L$	(x_n) dizisinin L ye yakınsaması
$st - \lim x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{I}$	$\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
$\mathcal{I}_2$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
$\mathcal{I} - \lim x_n$	(x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limiti
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	$\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç
$\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}_2$ idealine karşılık gelen süzgeç
$F_{\mathcal{I}_2}$	$\mathcal{I}_2$-yakınsak olan çift dizilerin uzayı
$F_{\mathcal{I}_2}(b)$	$\mathcal{I}_2$-yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$F^0_{\mathcal{I}_2}(b)$	Sıfıra $\mathcal{I}_2$-yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$f_{mn} \to_{st} f$	Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin f ye istatistiksel yakınsaklığı
$f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2} f$	Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin f ye $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığı

Kısaltmalar

$h.h.n$	Hemem hemen her n

1. GİRİŞ

Matematikte dizilerin yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonlar teorisi bilim dalının temel kavramlarından biridir. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı bu bilim dalındaki toplanabilme teorisinin önemli konularından biridir. Birbirlerinden bağımsız olarak Fast (1951) ve Steinhaus' un (1951) istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmalarından bu yana bu kavram üzerine çalışmalar Šalát (1980), Fridy (1985), Tripaty (1998), Balcerzak (2007), Gökhan ve Güngör (2002) ve Sharma (2008) gibi birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar devam etmiştir. Bu kavram Mursaleen ve Edely (2003) tarafından çift dizilerde çalışıldı. Gökhan vd. (2007) çift fonksiyon dizilerinde noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizisini tanımladılar.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$) nin alt kümelerinden oluşan bir ideal kavramına dayanan $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ise Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmıştır. Bu kavram üzerine başta Kostyrko vd. (2005) ve Nabiev vd. (2007) olmak üzere birçok araştırmacı günümüze kadar çalışmalar yapmıştır.

Das vd. (2008) çift dizilerde $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık kavramalarını tanıtarak bu kavramlar arasındaki ilişkileri örnekler vererek incelemişlerdir. Bununla birlikte, $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisini tanıtarak $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ile arasındaki ilişkileri vermişlerdir. Ayrıca, $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi kavramını verip (AP2)-şartını kullanarak $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi ile arasındaki gerektirmeleri incelemişlerdir. Son zamanlarda Dündar ve Altay (2015) çift fonksiyon dizileri için noktasal $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık kavramlarını tanıtarak bu kavramlar arasındaki ilişkileri vermişlerdir. Yine Dündar ve Altay (2016) çift fonksiyon dizileri için düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve düzgün $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık kavramlarını tanımlamış ve bazı önemli özellikleri incelemişlerdir. Ayrıca, ideal yakınsaklık kavramı Dündar (2015), Dündar ve Altay (2011, 2012, 2014) ve Gezer ve Karakuş (2005) gibi birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar çalışılmıştır.

Matematik alanında önemli bir kavram olan 2-normlu uzay kavramı ilk olarak Gähler (1963, 1964) tarafından tanıtılmasının ardından bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. 2-normlu uzaylarda yakınsaklık üzerine yapılan ilk çalışmalarda Gunawan ve Mashadi (2001), 2-normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizi kavramlarını tanıtmışlardır. Daha sonra Gürdal ve Pehlivan (2009), 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizi kavramları üzerine çalışmışlardır.

2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizi kavramları ile $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizi kavramları da sırasıyla Şahiner vd. (2007) ve Yamancı ve Gürdal (2014) tarafından yapılan çalışmalarda verilmiştir. Ayrıca, Gürdal ve Pehlivan (2004) ve Gürdal ve Açık (2008) tarafından da 2-normlu uzaylarda benzer çalışmalar yapılmıştır. Sarabadan ve Talebi (2011) 2-normlu uzaylarda fonksiyon dizilerinde istatistiksel ve ideal yakınsaklık üzerine çalışmalar yapmışlardır. Yegül ve Dündar (2017) 2-normlu uzaylarda fonksiyon dizileri istatistiksel yalınsaklık kavramını incelemiştir. Ayrıca, 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık üzerine Arslan ve Dündar (2018), Dündar vd. (2020), Gürdal (2006), Mursaleen ve Alotaibi (2011) ve Savaş ve Gürdal (2016) gibi birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde, çalışmada ele alınan konunun tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için noktasal yakınsaklık, noktasal istatistiksel yakınsaklık, düzgün yakınsaklık ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılarak bu kavramların bazı özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri veren teoremler ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için istatistiksel Cauchy dizi kavramı tanıtılarak bazı özellikleri ve istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişkileri içeren teoremler açıklanmıştır.

Beşinci bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık kavramları tanıtılarak, bu kavramların özelliklerini ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri veren teoremler incelenmiştir.

Altıncı bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi ve $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi kavramları tanıtılarak bu kavramların özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri inceleyen bazı teoremler açıklanmıştır. Ayrıca, $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son bölüm olan yedinci bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay ve altuzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

Bu kısımda tez çalışmasında kullanılacak olan temel kavram ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1.1 X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için
(M1) $d(x, x) = 0$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
şartları sağlanırsa, d fonksiyonuna, X üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir. Burada
(M1) şartı yerine (M1)$'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
şartını alırsak d fonksiyonuna, *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisinede bir *metrik uzay* denir.

Lineer bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.2 X lineer bir uzay ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için
(N1) $\|x\| \geq 0$,
(N2) $\|\theta\| = 0$,
(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
şartları sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *yarı normlu uzay* denir. Burada (N2) şartı yerine
(N2)$'$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
şartı sağlanırsa, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *bir normlu uzay* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.3 (X, d) metrik uzayında; x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \text{ ve } \overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümelerine, sırasıylax_0 merkezli, r yarıçaplı *açık yuvar* ve *kapalı yuvar* denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.4 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Bu durumda, her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa, (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.5 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Bu durumda, $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir x vektörü varsa (yani, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa), bu durumda (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.6 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Bu durumda, $m, n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise (yani, verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa), bu durumda (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.7 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Bu durumda, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.8 X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in *açık alt kümesi* veya *A, X de açıktır* denir. X in B alt kümesinin X deki tümleyeni $B^t = X - B$, X de açıksa B ye *kapalı küme* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.9 (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın çapı d(A) ile gösterilir ve $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ olarak tanımlanır. $d(A)$ sonlu ise yani $d(A) < \infty$ ise A ya *sınırlı küme* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.10 (X, d_x), (Y, d_y) yarı metrik uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $d_x(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında *süreklidir* denir. X uzayının her noktasında sürekli olan fonksiyona X üzerinde *sürekli fonksiyon* adı verilir.

$f : X \to Y$ fonksiyonu için, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, x_0 \in X$ için $d_x(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde *düzgün süreklidir* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.11 (X, d_x), (Y, d_y) yarı metrik uzaylar arasındaki fonksiyonların bir ϕ ailesi,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall f \in \phi : d_x(x_0, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$$

şartını sağlıyor ise, $x_0 \in X$ noktasında *eş-süreklidir* denir (Boss 2000).

Tanım 2.1.12 Bir topolojik uzayın her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahip ise uzaya *kompakt uzay* denir.

Bir metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut ise bu metrik uzaya *dizisel kompakttır* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.13 Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary ve Nanda 1989).

Tanım 2.1.14 L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de L nin sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa S kümesine veya $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) *lineer bağımsızdır*, denir. Lineer bağımsız olmayan kümeye *lineer bağımlı küme* denir (Bayraktar 2006).

2.2. Çift Diziler

Şimdi, çift dizi uzayları ile çift dizilerdeki yakınsaklık kavramları hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1 X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere,

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X, \ (m,n) \to f(m,n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna *çift indisli dizi* denir. Bundan sonraki kısımlarda çift indisli dizi yerine kısaca çift dizi veya sadece dizi ifadesi kullanılacaktır. Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} & \dots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şekline bir tablo olarak düşünebiliriz. Ω ile kompleks veya reel tanımlı bütün çift dizilerin kümesini göstereceğiz. Buna göre;

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m,n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

olup, bu küme $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için, $x + y = (x_{mn} + y_{mn})$ ve $\alpha x = (\alpha x_{mn})$ işlemleri altında lineer uzaydır (Altay 2002).

Tanım 2.2.2 $x = (x_{mn})$ bir çift dizi olmak üzere, $\sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty$ oluyorsa, x dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin kümesi,

$$\mathcal{M}_u = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega \, : \, \|x\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup, bu uzay $\| \cdot \|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı teşkil eder (Altay 2002).

Tanım 2.2.3 $x = (x_{mn})$ bir çift dizi ve $l \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda, $|x_{mn} - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi, l sayısına *Pringsheim anlamında yakınsak* ve l değerine de x dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca P-yakınsak dizi diyeceğiz ve limitini de $P - \lim x_{mn} = l$ ile göstereceğiz (Altay 2002).

Tanım 2.2.4 Verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n, p, q > k_0$ olduğunda, $|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, $x = (x_{mn})$ kompleks terimli dizisine bir *P-Cauchy dizisi* denir (Altay 2002).

Tanım 2.2.5

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad (m, n) \longrightarrow f(m, n) = x_{mn}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad m \longrightarrow i(m) = i_m \ \text{ ve } \ j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longrightarrow j(n) = j_n$$

artan fonksiyonlar (diziler) olmak üzere,

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (m, n) \longrightarrow h(m, n) = (i_m, j_n)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad (m, n) \longrightarrow f \circ h(m, n) = x_{i_m j_n}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{mn}) dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta $(i_m j_n)$ dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{mn}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt diziyi, orjinal diziden satır ve sütunlar atmakla elde ediyoruz. $(x_{i_m j_n})$ alt dizisinin her teriminin (x_{mn}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır (Altay 2002).

Tanım 2.2.6 $m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa, (s_{mn}) dizisine *monoton artan*, $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa, (s_{mn}) dizisine *monoton azalandır* denir (Iyer 1985).

2.3. İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, ideal, ideal yakınsaklık ve ilgili tanımlar verilecektir.

Tanım 2.3.1 $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \in K : k \leq n\}$ olsun. Bu durumda K kümesinin *doğal yoğunluğu,*

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big| \{k \leq n : k \in K\} \Big|$$

biçiminde tanımlanır. Burada $|K_n|$ ifadesi, K_n kümesinin eleman sayısını göstermektedir (Niven vd 1991).

Tanım 2.3.2 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün n ler için bir P özelliğini sağlıyorsa, "(x_n) dizisi hemen hemen her n için P özelliğini sağlıyor" denir ve bu durum $h.h.\, n$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3.3 (x_n) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Big| \{n \leq k : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \Big| = 0$$

ise, (x_n) dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x_n = L$ biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

Sonlu elemanlı kümelerin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır, fakat istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olması gerekmez. Bu durum aşağıdaki örnekle açıklanabilir:

Genel terimi

$$x_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan $(x_n) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$ dizisi göz önüne alındığında, her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$d(K_\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \frac{|K_\varepsilon|}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Big| \{n \leq k : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} \Big| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sqrt{k} = 0$$

olduğundan $st - \lim x_n = 0$ dır. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

Tanım 2.3.4 X boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{I} \subset 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

ii) $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$

iii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlarsa, X üzerinde bir *idealdir* denir.

Eğer, $X \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ ya bir *gerçek (aşikar olmayan) ideal* adı verilir. X üzerinde $\mathcal{I}$ gerçek ideali, her bir $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ şartını sağlıyorsa, *bir uygun ideal* denir (Kostyrko 2000).

Tanım 2.3.5 $X \neq \emptyset$ olsun. $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ için $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlarsa, X üzerinde bir *süzgeçtir (filtre)* denir.

$\mathcal{I}$, X üzerinde bir gerçek ideal ise,

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : \exists A \in \mathcal{I}, M = X \backslash A\}$$

sınıfı X üzerinde bir süzgeç olup, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ süzgecine $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç denir (Kostyrko 2000).

Tanım 2.3.6 (X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. X uzayının bir $x = (x_n)$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

şartını sağlıyorsa, x dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I} - \lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$ biçiminde gösterilir. $\mathcal{I}$ uygun bir ideal ise adi yakınsaklık $\mathcal{I}$-yakınsaklığı gerektirir (Kostyrko 2000).

Tanım 2.3.7 (X, d) bir metrik uzay, (x_n), X uzayında bir dizi ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. Bir $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi için $\lim\limits_{k \to \infty} d(x_{m_k}, L) = 0$ sağlanıyorsa, (x_n) dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}^* - \lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko 2000).

Tanım 2.3.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi için, $A_n \triangle B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sonlu küme ve $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}$ şartlarını sağlayan sayılabilir $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi varsa, $\mathcal{I}$ ideali (AP) şartını sağlar denir (Kostyrko 2000).

Şimdi, çift dizilerde istatistiksel ve ideal yakınsaklık ile ilgili temel kavramlar ve tanımlar verilecektir. Burada, çift dizilerin ideal yakınsaklığı genel olarak metrik uzaylar üzerinde incelenecektir. Çift dizilerde çalışacağı için, $\mathbb{N}$ üzerindeki $\mathcal{I}$ ideali ile karıştırılmaması amacıyla $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerindeki bir ideal $\mathcal{I}_2$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.9 $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $(j,k) \in K$ da K_{mn} bir sayı öyle ki; $j \leq m$, $k \leq n$ için $K_{mn} = |\{(j,k) : j \leq m, k \leq n\}|$ dır. $|A|$, A daki eleman sayısını belirtsin. $\left\{\frac{K_{mn}}{mn}\right\}$ çift dizisi bir limite sahip ise K *çift yoğunluğuna sahiptir* denir ve

$$d_2(K) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{|K_{mn}|}{mn}.$$

biçiminde gösterilir (Mursaleen and Edely 2003).

Tanım 2.3.10 Reel sayıların bir $x = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$d_2\left(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

ise, $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir (Mursaleen and Edely 2003).

Tanım 2.3.11 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek $\mathcal{I}_2$ ideali, her bir $i, j \in \mathbb{N}$ için $\{i,j\} \in \mathcal{I}_2$ oluyorsa uygun ideal, $\{i\} \times \mathbb{N} \in \mathcal{I}_2$ ve $\mathbb{N} \times \{i\} \in \mathcal{I}_2$ oluyorsa *kuvvetli uygun ideal* denir. Bir kuvvetli uygun ideal uygun idealdir (Das vd. 2008).

Bu tez çalışmasında $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde kuvvetli uygun ideal olarak gözönüne alınacaktır.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde, $\mathcal{I}_2^0 = \{A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m(A) \in \mathbb{N})(i,j \geq m(A) \Rightarrow (i,j) \notin A)\}$ idealini alalım. $\mathcal{I}_2^0$ bir kuvvetli uygun idealdir. Bir $\mathcal{I}_2$ idealinin kuvvetli uygun ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}_2^0 \subset \mathcal{I}_2$ kapsamasının geçerli bulunmasıdır (Das vd. 2008).

Tanım 2.3.12 (X, d) bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$, X uzayında bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d(x_{mn}, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesi sağlanıyorsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2$-*yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ biçiminde gösterilir.

Eğer, $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathcal{I}_2^0$ alınırsa, açık olarak ideal yakınsaklık Pringsheim anlamında yakınsaklık ile, $\mathcal{I}_2^{d_2} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d_2(A) = 0\}$ olarak alınırsa, $\mathcal{I}_2^{d_2}$-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır (Das vd. 2008).

Tanım 2.3.13 (X, d) bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve $x = (x_{mn})$, X uzayında bir çift dizi olsun. Bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N}/M \in \mathcal{I}_2$) ve $(m, n) \in M$ için $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ oluyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ biçiminde gösterilir (Das vd. 2008).

Tanım 2.3.14 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}_2$ idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi için, $A_n \triangle B_n \in \mathcal{I}_2^0$ $(n \in \mathbb{N})$ (yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \triangle B_n$ kümesi, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır) ve $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}_2$ şartlarını sağlayan sayılabilir $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi varsa, $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) şartını sağlar denir (Das vd. 2008).

2.4. 2-Normlu Uzaylar

Tanım 2.4.1 X sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. X uzayında 2-*norm* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur :

N1) $\|x, y\| = 0$ ancak ve ancak x ve y lineer bağımlıdır

N2) $\|x, y\| = \|y, x\|$

N3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$

N4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

Bu durumda $(X, \|., .\|)$ ikilisine 2-*normlu uzay* denir (Gunawan ve Mashadi 2001).

2- normlu uzaya bir örnek olarak $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinin oluşturduğu 2- norm ile donatılmış $\|x, y\| = |x_1y_2 - x_2y_1|$; $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ formülü ile verilmiş olan $X = \mathbb{R}^2$ paralelkenarsal bölge alınabilir. Bu çalışma boyunca X, d boyutuna sahip $(2 \leq d < \infty)$ 2-normlu bir uzay olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.4.2 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir (x_n) dizisi her $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - L, z\| = 0$$

şartını sağlıyorsa (x_n) dizisi X de bir L noktasına *yakınsaktır* denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ biçiminde gösterilir (Gunawan ve Mashadi 2001).

Örnek 2.4.3 $x = (x_n) = (\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n}),\ L = (1, 0)$ and $z = (z_1, z_2)$ olsun. (x_n) dizisinin 2-normlu uzayda $L = (1, 0)$ a yakınsadığı açıktır.

Tanım 2.4.4 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için her $m, n \geq N$ ve her $z \in X$ olduğunda $\|x_m - x_n, z\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda (x_n) dizisine $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu uzayında bir *Cauchy dizisi* denir (Gunawan ve Mashadi 2001).

Tanım 2.4.5 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise $x = (x_n)$ dizisi L noktasına *istatistiksel yakınsaktır*, denir. Başka bir deyişle, sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \big| \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \big| = 0$$

ise, $x = (x_n)$ dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki L noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bunun anlamı her $z \in X$ için

$$\|x_n - L, z\| < \varepsilon,\ (h.h.\, n)$$

dir. Bu yakınsaklık,

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

biçiminde gösterilir (Gürdal ve Pehlivan 2009).

Tanım 2.4.6 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir $x = (x_n)$ dizisi alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için $d(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z)$ varsa, yani, sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| < \varepsilon, \quad (h.h.\, n)$$

ise, $x = (x_n)$ dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir *Cauchy dizisidir* denir (Gürdal ve Pehlivan 2009).

Tanım 2.4.7 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise $x = (x_n)$ dizisi $L \in X$ sayısına *$\mathcal{I}$-yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|(x_n) - L, z\| = 0$ biçiminde gösterilir (Gürdal ve Açık 2008).

Tanım 2.4.8 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer, her bir $z \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k}(x) - L, z\| = 0$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$, $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\}$ kümesi varsa, $x = (x_n)$ dizisi $L \in X$ sayısına *$\mathcal{I}^*$-yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} \|(x_n) - L, z\| = 0$ biçiminde gösterilir (Gürdal ve Açık 2008).

Şimdi 2-normlu uzaylarda çift diziler için yakınsaklık tipleri verilecektir.

Tanım 2.4.9 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Eğer $z \in X$ için $\lim_{m,n\to\infty} \|x_{mn} - L, z\| = 0$ oluyorsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ sayısına *yakınsaktır* denir (Sarabadan ve Talebi 2012).

Tanım 2.4.10 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her sıfırdan farklı $z \in X$ içn $\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|x_{mn} - L, z\| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Diğer bir değişle $x = (x_{mn})$ çift dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında L ye istatistiksel yakınsak ise, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \left|\{n : \|x_{mn} - L, z\| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

limiti mevcuttur. Bunu anlamı, her $z \in X$ için $\|x_{mn} - L, z\| < \varepsilon$, $(h.h.\,(m,n))$ olmasıdır. Bu durumda, $st - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_{mn}, z\| = \|L, z\|$ yazılır (Sarabadan ve Talebi 2011).

Tanım 2.4.11 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $d_2\big(\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|x_{mn} - x_{MN}, z\| \geq \varepsilon\}\big) = 0$ olacak şekilde $M = M(\varepsilon, z)$ ve $N = N(\varepsilon, z)$ sayıları varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi X de *istatistiksel Cauchy dizisidir* denir. Bunu anlamı her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $\|x_{mn} - x_{MN}, z\| < \varepsilon$, $(h.h.\,(m,n))$ olmasıdır (Sarabadan ve Talebi 2011).

Tanım 2.4.12 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|x_{mn} - L, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ise, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ sayısına *$\mathcal{I}_2$-yakınsaktır* denir. Bu durumda $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ yazılabilir (Sarabadan ve Talebi 2012).

Tanım 2.4.13 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Eğer sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ ve tüm $(m,n) \in M$ için $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_{mn} - L, z\| = 0$ olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ sayısına *$\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır* denir. Bu durumda $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ yazılabilir (Sarabadan ve Talebi 2012).

Tanım 2.4.14 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|x_{mn} - x_{st}, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon, x)$, $t = t(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ mevcut ise, $x = (x_{mn})$ çift dizisine *$\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi* denir (Dündar ve Sever 2015).

Tanım 2.4.15 $x = (x_{mn})$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in Y$ için $m, n, s, t > k_0$ olduğunda $\|x_{mn} - x_{st}(x), z\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi ve $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisine *$\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi* denir (Dündar ve Sever 2015).

2.5. Fonksiyon Dizilerinde Yakınsaklık Tipleri

Bu kısımda, X ve Y 2-normlu uzaylar, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi ve f, X den Y ye bir fonksiyon olarak alınacaktır.

Tanım 2.5.1 Her $x \in X$ için $f_n(x) \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow} f(x)$ ise, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f ye *yakınsaktır* denir. Bu yakınsaklık

$$(\forall z \in Y)(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\|f_n(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

formülü ile ifade edilebilir (Sarabadan ve Talebi 2011a).

Tanım 2.5.2 Eğer $\varepsilon > 0$, her $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big|\{n \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}\big| = 0$$

ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (noktasal) *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim_{n\to\infty} \|f_n(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ veya } f_n \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow}_{st} f$$

biçiminde gösterilir (Yegül ve Dündar 2017).

Tanım 2.5.3 Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d(\{n \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f_k(x), z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde $k = k(\varepsilon, z)$ sayısı varsa, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi *istatistiksel Cauchy dizisidir* denir (Yegül ve Dündar 2017).

Tanım 2.5.4 Eğer her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{n \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f ye *$\mathcal{I}$-yakınsaktır* (noktasal) denir ve

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x), z\|_Y = 0 \text{ veya } f_n \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow}_{\mathcal{I}} f$$

biçiminde gösterilir. Bu durum

$$(\forall z \in Y)(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathcal{I})(\forall n_0 \in \mathbb{N}\backslash M)(\forall x \in X)(\forall n \geq n_0)\|f_n(x) - f(x), z\| \leq \varepsilon$$

formülü ile ifade edilebilir (Arslan ve Dündar 2018).

Tanım 2.5.5 Eğer her bir $x \in X$ ve her bir sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$, $(\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I})$, $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\}$ kümesi varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f ye $\mathcal{I}^*$-*yakınsaktır* (noktasal) denir ve

$$\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} \|f_n(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ veya } f_n \xrightarrow{\|.,.\|_Y}_{\mathcal{I}^*} f$$

biçiminde gösterilir (Arslan ve Dündar 2018).

Şimdi reel sayılarda çift fonksiyon dizilerinin yakınsaklık tipleri verilecektir.

Tanım 2.5.6 $\{f_{mn}\}$, $S \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir çift fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x \in S$ ve her $\varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(x, \varepsilon)$ pozitif tam sayısı varsa, $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir ve

$$\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x) \text{ veya } f_{mn} \to f$$

biçiminde gösterilir (Gökhan vd. 2007).

Tanım 2.5.7 $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $S \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir çift fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda, tüm $x \in S$ noktaları için

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir pozitif $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif tam sayısı varsa, $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve

$$f_{mn} \rightrightarrows f$$

biçiminde gösterilir (Gökhan vd. 2007).

Tanım 2.5.8 $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $S\subset\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir çift fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve her (sabit) $x\in S$ için

$$\lim_{i,j\to\infty}\frac{1}{ij}\left|\{(m,n),\ m\leq i\ ve\ n\leq j:|f_{mn}(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi S üzerinde f fonksiyonuna *noktasal istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st-\lim_{m,n\to\infty}f_{mn}(x)=f(x)\ \text{ veya }\ f_{mn}\to_{st}f$$

biçiminde gösterilir (Gökhan vd. 2007).

Tanım 2.5.9 $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $S\subset\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir çift fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve tüm $x\in S$ için

$$\lim_{i,j\to\infty}\frac{1}{ij}\left|\{(m,n),\ m\leq i\ ve\ n\leq j:|f_{mn}(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi S üzerinde f fonksiyonuna *düzgün istatistiksel yakınsaktır* denir ve $f_{mn}\rightrightarrows_{st}f$ biçiminde gösterilir (Gökhan vd. 2007).

Tanım 2.5.10 $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $S\subset\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir çift fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve her (sabit) $x\in S$ için

$$\lim_{i,j\to\infty}\frac{1}{ij}\left|\{(m,n),\ m\leq i\ ve\ n\leq j:|f_{mn}(x)-f_{MN}(x)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde $N=N(\varepsilon)$ ve $M=M(\varepsilon)$ pozitif tamsayıları varsa, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir (Gökhan vd. 2007).

Tanım 2.5.11 $S\subset\mathbb{R}$ cümlesi üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisi, her $\varepsilon>0$ ve her bir $x\in S$ için

$$\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:|f_{mn}(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}_2$$

önermesini sağlıyorsa, S üzerinde f fonksiyonuna *noktasal $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır* denir. Bu,

$$(\forall x\in S)\ \ (\forall\varepsilon>0)\ \ (\exists H\in\mathcal{I}_2)\ \ (\forall(m,n)\notin H)\ \ |f_{mn}(x)-f(x)|<\varepsilon$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty}f_{mn}(x)=f(x)\ \text{ veya }\ f_{mn}\to_{\mathcal{I}_2}f$$

biçiminde gösterilir. Burada f fonksiyonuna, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin S üzerinde çift $\mathcal{I}_2$-limit (veya Pringsheim $\mathcal{I}_2$-limit) fonksiyonudur denir (Dündar 2010).

Tanım 2.5.12 $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi ve f, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{I}_2)$ ve her $x \in S$ için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} f_{mn}(x) = f(x)$$

oluyorsa, S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde f fonksiyonuna *noktasal $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır* denir ve

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn} = f \text{ veya } f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2^*} f$$

biçiminde gösterilir (Dündar 2010).

Tanım 2.5.13 $\{f_{mn}\}$, $S \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{st}(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ve $t = t(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi *noktasal $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir* denir (Dündar 2010).

Tanım 2.5.14 $\{f_{mn}\}$, $S \subset \mathbb{R}$ üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in S$ için $(m,n), (s,t) \in M$ ve $m, n, s, t > k_0$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x) - f_{st}(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi ve $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ varsa, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisine S üzerinde *noktasal $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisidir* denir (Dündar 2010).

Lemma 2.5.15 f ve f_{mn}, $m, n = 1, 2, ...$, $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. D üzerinde $f_{mn} \rightrightarrows f$ olması için gerek ve yeter şart $c_{mn} = \max_{x\in D} |f_{mn}(x) - f(x)|$ için $\lim_{m,n\to\infty} c_{mn} = 0$ olmasıdır.

Lemma 2.5.16 $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$,$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin sayılabilir koleksiyonu olarak alalım öyleki $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, $(AP2)$ şartını sağlayan $\mathcal{I}_2$ kuvvetli uygun idealin filtresi olduğunda her bir i için $\{P_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ dır. $P \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki; sonlu tüm i'ler için $P \setminus P_i$ ve $\{P_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ dir.

3. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, öncelikle 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için noktasal yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık kavramları tanımlanarak aralarındaki ilişkileri veren teoremler ispatlanacaktır. Daha sonra yine 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklık ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanarak, bu kavramların bazı özelliklerini ve aralarındaki ilişkiler veren teoremler ispatlanacaktır.

Tez çalışması boyunca $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal, $(X, \|.,.\|)$ ve $(Y, \|.,.\|)$ 2-normlu uzay, $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $\{g_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\{h_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ çift fonksiyon dizileri, f, g ve k, X den Y ye fonksiyonlar olarak alınacaktır.

3.1. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Yakınsaklığı ve Düzgün Yakınsaklığı

Tanım 3.1.1 Her bir $x \in X$ noktası ve her $\varepsilon > 0$ için eğer, tüm $m, n \geq k_0$ olduğunda her $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(x, \varepsilon)$ pozitif tam sayısı varsa, $\{f_{mn}\}$ dizisi f ye *noktasal yakınsaktır* denir. Bu yakınsama,

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow} f$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 3.1.2 Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $m, n \geq k_0$ olduğunda tüm $x \in X$ ve her $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye *düzgün yakınsaktır* denir. Bu yakınsama

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 3.1.3 D, X in kompakt bir alt kümesi ve f ile f_{mn}, $(m, n = 1, 2, ...)$, D üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda, D üzerinde

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f$$

olması için gerek ve yeter şart

$$c_{mn} = \max_{x \in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\|$$

olmak üzere

$$\lim_{m,n \to \infty} c_{mn} = 0$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki D üzerinde

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f$$

olsun. f ve f_{mn}, D üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan, her bir $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $(f_{mn}(x) - f(x))$, D üzerinde süreklidir. D üzerinde $f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif tam sayısı vardır öyle ki her $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ ve her $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. Böylece her $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ ve her $z \in Y$ için

$$c_{mn} = \max_{x \in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da

$$\lim_{m,n \to \infty} c_{mn} = 0$$

olmasını sağlar.

Şimdi tersine

$$\lim_{m,n \to \infty} c_{mn} = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her bir $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif tam sayısı vardır öyle ki her $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ ve her $z \in Y$ için

$$0 \leq c_{mn} = \max_{x \in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

sağlanır. Bu ise $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ ve her $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

olmasını sağlar. Böylece tüm $x \in D$ ve her $z \in Y$ için

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f$$

elde edilir.

3.2. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı ve Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1 Her $\varepsilon > 0$, her bir (sabit) $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{i,j \to \infty} \frac{1}{ij} \left| \{(m,n), m \leq i, n \leq j : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye *(noktasal) istatistiksel yakınsaktır* denir. Bunun anlamı her $\varepsilon > 0$, her bir (sabit) $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon, \ \textit{h.h.}\ (m,n)$$

olmasıdır. Bu yakınsaklık

$$st - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x) - z\| = \|f(x), z\| \ \text{ ya da } \ f_{mn} \xrightarrow{\|.,.\|_Y}_{st} f$$

biçiminde gösterilir.

Uyarı 3.2.2 Eğer $\{f_{mn}\}$ herhangi bir çift fonksiyon dizisi ve f, X den Y ye herhangi bir fonksiyon ise bu durumda, eğer $z = \overrightarrow{0}$ (0 vektör) ise

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| = 0 \ngeq \varepsilon$$

olduğundan,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon, \text{ her bir } x \in X \text{ ve her } z \in Y\} = \emptyset$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 Eğer her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } st - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

ise bu durumda,

$$\|f_{mn}(x), z\| = \|g_{mn}(x), z\|$$

(yani, $f = g$) elde edilir.

İspat: Kabul edelim ki $f \neq g$ olsun. Bu durumda, $f - g \neq \overrightarrow{0}$, böylece bir $z \in Y$ vardır öyle ki f, g ve z lineer bağımsızdır ($d \geq 2$ olduğundan böyle bir z vardır). Bu nedenle her bir $x \in X$, sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|f(x) - g(x), z\| = 2\varepsilon$$

olur. Şimdi her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned} 2\varepsilon = \|f(x) - g(x), z\| &= \|(f(x) - f_{mn}(x)) + (f_{mn}(x) - g(x)), z\| \\ &\leq \|f_{mn}(x) - g(x), z\| + \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned} &\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - g(x), z\| < \varepsilon\} \\ &\qquad \subseteq \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

kapsaması geçerlidir. Fakat her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2\left(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - g(x), z\| < \varepsilon\}\right) = 0$$

olup, $f_{mn} \xrightarrow{\|\cdot,\cdot\|_Y}_{st} g$ gerçeği ile çelişir. Dolayısıyla $f = g$ olmalıdır.

Teorem 3.2.4 Bir $\{g_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi yakınsak öyleki $f_{mn} = g_{mn}$ (h.h. (m,n)) eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda $\{f_{mn}\}$ istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Kabul edelim ki her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f_{mn}(x) \neq g_{mn}(x)\}) = 0 \text{ ve } \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}$$

$$\subseteq \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}$$

$$\cup\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f_{mn}(x) \neq g_{mn}(x)\}$$

olur. Bundan dolayı her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2(\{(m,n) : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\})$$

$$\leq d_2(\{(m,n) : \|g_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon)$$

$$+d_2(\{(m,n) : f_{mn}(x) \neq g_{mn}(x)\}) \tag{3.1}$$

elde edilir. Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olduğundan, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu sayıda tam sayı içerir ve böylece

$$d_2(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olur. (3.1) eşitsizliğini kullanarak, her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olur.

Teorem 3.2.5 Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

ise, bu durumda $\{f_{mn}\}$ dizisinin bir $\{f_{m_in_i}\}$ alt dizisi vardır öyleki

$$\lim_{i\to\infty} \|f_{m_in_i}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.2.4 ün bir sonucudur.

Teorem 3.2.6 $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } st - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

limitleri mevcut ise

(i) $st - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x) + g_{mn}(x), z\| = \|f(x) + g(x), z\|$ ve

(ii) $st - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|\alpha f_{mn}(x), z\| = \|\alpha f(x), z\|$ dir.

İspat: **(i)** Kabul edelim ki her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } st - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon, z) : \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon, z) : \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - g(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere, $d_2(K_1) = 0$ ve $d_2(K_2) = 0$ dir. Şimdi

$$K = K(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|(f_{mn}(x) + g_{mn}(x)) - (f(x) + g(x)), z\| \geq \varepsilon\}$$

alalım. $d_2(K) = 0$ olduğunu ispatlamak için $K \subset K_1 \cup K_2$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(m_0, n_0) \in K$ alalım. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|(f_{m_0n_0}(x) + g_{m_0n_0}(x)) - (f(x) + g(x)), z\| \geq \varepsilon \tag{3.2}$$

dir. Tersini kabul edelim, yani $(m_0, n_0) \notin K_1 \cup K_2$ olsun. Buradan $(m_0, n_0) \notin K_1$ ve $(m_0, n_0) \notin K_2$ dir. Eğer $(m_0, n_0) \notin K_1$, $(m_0, n_0) \notin K_2$ ise bu durumda, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{m_0n_0}(x) - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ ve \ \ \|g_{m_0n_0}(x) - g(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Böylece her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned}
\|(f_{m_0n_0}(x) + g_{m_0n_0}(x)) - (f(x) + g(x)), z\| & \\
&\leq \|f_{m_0n_0}(x) - f(x), z\| + \|g_{m_0n_0}(x) - g(x), z\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu (3.2) ile çelişir. Bundan dolayı $(m_0, n_0) \in K_1 \cup K_2$ ve böylece $K \subset K_1 \cup K_2$ olmalıdır.

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$ ve her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

alalım. Bu durumda,

$$d_2\left(\left\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right\}\right) = 0$$

elde edilir. Bu nedenle her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned}
\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|\alpha f_{mn}(x) - \alpha f(x), z\| \geq \varepsilon\} & \\
&= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |\alpha|\|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \\
&= \left\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının yoğunluğu 0 a eşit olup, böylece her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim_{m,n\to\infty} \|\alpha f_{mn}(x), z\| = \|\alpha f(x), z\|$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7 $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye noktasal istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her bir $x \in X$ (sabit) için bir $K_x = \{(m,n)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m,n = 1,2,...$ alt kümesi vardır öyleki $d_2(K_x) = 1$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki

$$st_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olsun. Her bir $x \in X$ (sabit), sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ ve $r = 1,2,...$ için

$$K_{r,x} = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x), z\| \geq \frac{1}{r}\right\}$$

ve

$$M_{r,x} = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x), z\| < \frac{1}{r}\right\}$$

kümelerini alalım. Bu durumda, her bir $x \in X$ (sabit) ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için $d_2(K_{r,x}) = 0$ ve

$$M_{1,x} \supset M_{2,x} \supset ... \supset M_{i,x} \supset M_{i+1,x} \supset ... \tag{3.3}$$

ve

$$d_2(M_{r,x}) = 1, \qquad r = 1,2,... \tag{3.4}$$

olur. Şimdi $(m,n) \in M_{r,x}$ için $\{f_{mn}\}$ nin f ye yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $\{f_{mn}\}$, f ye yakınsak olmasın. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki sonsuz çoklukta terim ve bazı $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > \frac{1}{r}$ $(r = 1,2,...)$ ve

$$M_{\varepsilon,x} = \{(m,n) : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon\}$$

alalım. Bu durumda, $d_2(M_{\varepsilon,x}) = 0$ ve (3.3) den

$$M_{r,x} \subset (M_{\varepsilon,x})$$

dır. Böylece $d_2(M_{r,x}) = 0$ olur ki bu (3.4) ile çelişmektedir. Buradan $\{f_{mn}\}$, f ye yakınsaktır.

Tersine kabul edelim ki, her bir (sabit) $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için $K_x = \{(m,n)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesi vardır öyle ki,

$$d_2(K_x) = 1 \text{ ve } \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

yani, her bir (sabit) $x \in X$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için $N = N(x,\varepsilon)$ vardır öyle ki $m, n \geq N$ iken

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

olur. Şimdi her bir (sabit) $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$K_{\varepsilon,x} = \{(m,n) : \|f_{mn}(x), z\| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(m_{N+1}, n_{N+1}), (m_{N+2}, n_{N+2}), ...\}$

alalım. Buradan her bir (sabit) $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2(K_{\varepsilon,x}) \leq 1 - 1 = 0$$

elde edilir ki böylece $\{f_{mn}\}$, f ye noktasal istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 3.2.8 Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$\lim\limits_{i,j\to\infty} \dfrac{1}{ij} |\{(m,n), m \leq i, n \leq j : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}| = 0,$ (tüm $x \in X$ için)

limiti mevcut ise, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye *düzgün istatistiksel yakınsaktır* denir. Yani, tüm $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon, \quad h.h. \ (m,n). \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu yakınsaklık

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows}_{st} f$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 3.2.9 D, X in kompakt bir alt kümesi ve f ve $\{f_{mn}\}$, $m,n = 1,2,...$ D üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. D üzerinde

$$f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows}_{st} f$$

olması için gerek ve yeter şart

$$c_{mn} = \max_{x\in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\|$$

olmak üzere

$$st_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|c_{mn}(x), z\| = 0$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\{f_{mn}\}$, D üzerinde f ye düzgün istatistiksel yakınsak olsun. f ve $\{f_{mn}\}$ D üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan, her bir $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $(f_{mn}(x) - f(x))$ de D üzerinde süreklidir. Kabulümüzden dolayı her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2(\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}) = 0, \text{ (her bir } x \in D \text{ için)}$$

elde edilir. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için açık olarak her bir $x \in D$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$c_{mn} = \max_{x\in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

ve böylece

$$st_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|c_{mn}(x), z\| = 0$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki

$$st_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|c_{mn}(x), z\| = 0$$

olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \max_{x\in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\right\}$$

kümesini alalım. Hipotezden $d_2(A(\varepsilon)) = 0$ elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\max_{x\in D} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon$$

olduğundan, her bir $x \in D$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \subset A(\varepsilon)$$

ve böylece

$$d_2(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Bu da teoremimizin ispatıdır.

Sonuç 3.2.10 Aşağıdaki gerektirmeler geçerlidir:

(i) $f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow}_{st} f$.

(ii) $f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\rightrightarrows}_{st} f \Rightarrow f_{mn} \overset{\|.,.\|_Y}{\longrightarrow}_{st} f$.

4. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN İSTATİSTİKSEL CAUCHY DİZİSİ

Bu bölümde, 2-normlu uzaylardaki çift fonksiyon dizileri için istatistisel Cauchy dizisi kavramının tanımı verilerek istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.1. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizileri İçin İstatistiksel Cauchy Dizisi

Tanım 4.1.1 Eğer her $\varepsilon > 0$, her bir (sabit) $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2\big(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{kt}(x), z\| \geq \varepsilon\}\big) = 0,$$

yani,

$$\|f_{nm}(x) - f_{kt}(x), z\| < \varepsilon, \ h.h. \ (m,n)$$

olacak şekilde $k = k(\varepsilon, z), \ t = t(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa bu durumda, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.1.2 $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $(X, \|.,.\|)$ sonlu boyutlu 2-normlu uzayında istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında yakınsak bir $\{g_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi vardır öyle ki h.h. (m,n) için $f_{mn} = g_{mn}$ dir.

İspat: İlk olarak $\{f_{mn}\}$ fonksiyon dizisi $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında istatistiksel Cauchy dizisi olsun. $k(1)$ ve $j(1)$ doğal sayılarını seçelim öyle ki her bir $x \in X$ ve h.h. (m,n) için $f_{mn}(x)$ i kapsayan

$$B_u^1 = B_u(f_{k(1)j(1)}(x), 1)$$

kapalı yuvarı vardır. Daha sonra $k(2)$ ve $j(2)$ doğal sayılarını seçelim öyle ki her bir $x \in X$ ve h.h. (m,n) için $f_{mn}(x)$ i kapsayan

$$B_2 = B_u\left(f_{k(2)j(2)}(x), \frac{1}{2}\right)$$

kapalı yuvarı vardır. Her bir $x \in X$ ve h.h. (m,n) için $B_u^2 = B_u^1 \cap B_2$, $f_{mn}(x)$ i kapsar. Böylece bu sürece devam ederek iç içe kapalı yuvarların bir $\{B_u^r\}_{r\geq 1}$ dizisi elde edilir ki $(B_u^r) \leq \frac{1}{2^r}$ dir. Buradan h, X den Y ye bir fonksiyon olmak üzere,

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} B_u^r = \{h(x)\}$$

elde edilir. Her bir $x \in X$ ve h.h. (m,n) için B_u^r, $f_{mn}(x)$ i kapsadığından, kesin artan doğal sayıların bir $\{S_r\}_{r\geq 1}$ dizisini seçebiliriz öyle ki her bir $x \in X$ için eğer $m,n > S_r$ ise

$$\frac{1}{mn}|\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : f_{mn}(x) \notin B_u^r\}| < \frac{1}{r}$$

dir. Her bir $x \in X$, tüm $r \geq 1$ ve $R = \bigcup_{r=1}^{\infty} R_r$ için

$$T_r = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : m,n > S_r,\ f_{mn}(x) \notin B_u^r\}$$

alalım. Şimdi her bir $x \in X$ için $\{g_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisini

$$g_{mn}(x) = \begin{cases} h(x) & , \quad (m,n) \in R\times R \text{ ise}, \\ f_{mn}(x) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = h(x)$$

dir. Gerçekten her bir $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için m doğal sayısı seçelim öyle ki $\varepsilon > \frac{1}{r} > 0$ olsun. Bu durumda, her bir $m,n > S_r$ ve her bir $x \in X$ için

$$g_{mn}(x) = h(x) \text{ ya da } g_{mn}(x) = f_{mn}(x) \in B_u^r$$

ve her bir durumda

$$\|g_{mn}(x) - h(x)\|_\infty \leq diam(B_u^r) \leq \frac{1}{2^{r-1}}$$

elde edilir. Her bir $x \in X$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : g_{mn}(x) \neq f_n(x)\} \subseteq \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : f_{mn}(x) \notin B_u^r\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{mn}|\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: g_{mn}(x)\neq f_{mn}(x)\}| \\ &\leq \frac{1}{mn}|\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: f_{mn}(x)\notin B_u^r\}| \\ &< \frac{1}{r}\end{aligned}$$

ve böylece

$$d_2(\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: g_{mn}(x)\neq f_{mn}(x)\})=0$$

eşitliği geçerlidir. Böylece h.h. (m,n) ve her bir $x\in X$ için $(X,\|.\|_\infty)$ uzayında

$$g_{mn}(x)=f_{mn}(x)$$

dir. Kabul edelim ki $\{u_1,...,u_d\}$, $(X,\|.,.\|)$ 2-normlu uzayının bir bazı olsun. Her bir $x\in X$ ve tüm $1\leq i\leq d$ için

$$\lim_{m,n\to\infty}\|g_{mn}(x)-h(x)\|_\infty=0 \;\text{ ve }\; \|g_{mn}(x)-h(x),u_i\|\leq\|g_{mn}(x)-h(x)\|_\infty$$

olduğundan, her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty}\|g_{mn}(x)-h(x),z\|_\infty=0$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3 $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in Y$ için

$$st-\lim_{m,n\to\infty}\|f_{mn}(x),z\|=\|f(x),z\|$$

olsun. Bu durumda, her ve $\varepsilon>0$, her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in Y$ için

$$\|f_{mn}(x)-f(x),z\|<\frac{\varepsilon}{2},\; h.h.\;(m,n)$$

elde edilir. $k=k(\varepsilon,z)$ ve $t=t(\varepsilon,z)$ seçilsin öyle ki her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in Y$ için

$$\|f_{kt}(x)-f(x),z\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\|f_{mn}(x) - f_{kt}(x), z\| &\leq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| + \|f(x) - f_{kt}(x), z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ h.h. \ (m, n)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

Şimdi kabul edelim ki $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Teorem 4.1.2 den X den Y ye yakınsak bir $\{g_{mn}\}$ dizisi vardır öyle ki h.h. (m, n) için $f_{mn} = g_{mn}$ dir. Theorem 3.2.4 den her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$st - \lim \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

elde ederiz.

Teorem 4.1.4 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi için şağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\{f_{mn}\}$, $f(x)$ e (noktasal) istatistiksel yakınsaktır.
(ii) $\{f_{mn}\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.
(iii) $\{f_{mn}\}$ nin bir $\{g_{mn}\}$ alt dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

dır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.2.7 and Teorem 4.1.3 un bir sonucudur.

Tanım 4.1.5 D, X in kompakt alt kümesi ve $\{f_{mn}\}$, D üzerinde bir çift fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$d_2(\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{kt}(x), z\| \geq \varepsilon\}) = 0, \ (\text{tüm } x \in X)$$

olacak şekilde $k = k(\varepsilon, z)$, $t = t(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisine *düzgün istatistiksel Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.1.6 D, X in kompakt alt kümesi ve $\{f_{mn}\}$, D de sınırlı çift fonksiyon dizisi olsun. $\{f_{mn}\}$ nin düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul D üzerinde düzgün istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.1.3 in ispatı ile benzerdir.

5. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığı ve $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklığı kavramları tanımlanarak, bu yeni kavramların özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

5.1. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin $\mathcal{I}_2$-Yakınsaklığı

Tanım 5.1.1 Her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye (noktasal anlamda) $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık

$$(\forall z \in Y)\ (\forall x \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists H \in \mathcal{I}_2)\ (\forall (m,n) \notin H)\ \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

ile formüle edilebilir ve

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \quad \text{veya} \quad f_{mn} \xrightarrow{\|\cdot,\cdot\|_Y}_{\mathcal{I}_2} f$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 5.1.2 Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olması

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

gerektirir.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olduğundan pozitif bir $k_0 = k_0(\varepsilon, x)$ sayısı vardır öyle ki her $m, n \geq k_0$ olduğunda

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için,

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, z) &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \\ &\subset ((\mathbb{N} \times \{1, 2, .., (k_0 - 1)\}) \cup (\{1, 2, .., (k_0 - 1)\} \times \mathbb{N})) \end{aligned}$$

kapsaması geçerlidir. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli uygun ideal olduğundan

$$((\mathbb{N} \times \{1, 2, .., (k_0 - 1)\}) \cup (\{1, 2, .., (k_0 - 1)\} \times \mathbb{N})) \in \mathcal{I}_2$$

olup, buradan $A(\varepsilon, z) \in \mathcal{I}_2$ ve sonuç olarak sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

elde edilir.

Teorem 5.1.3 Herhangi bir $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin eğer $\mathcal{I}_2$-limiti varsa bu limit tektir.

İspat: Kabul edelim ki bir $x_0 \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için $f(x_0) \neq g(x_0)$ olmak üzere

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x_0), z\| = \|f(x_0), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x_0), z\| = \|g(x_0), z\|$$

olsun. $f(x_0) \neq g(x_0)$ olduğundan, $f(x_0) \geq g(x_0)$ olarak alabiliriz. Şimdi $f(x_0)$ ve $g(x_0)$ noktalarının sırasıyla

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \text{ ve } (g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$$

komşulukları ayrık olacak şekilde $\varepsilon = \frac{f(x_0)-g(x_0)}{3}$ seçelim. $x_0 \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x_0), z\| = \|f(x_0), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x_0), z\| = \|g(x_0), z\|$$

olduğundan,

$$A(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x_0) - f(x_0), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$B(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x_0) - g(x_0), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. Bu ise $x_0 \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A^c(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x_0) - f(x_0), z\| < \varepsilon\}$$

ve

$$B^c(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x_0) - g(x_0), z\| < \varepsilon\}$$

kümelerinin $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgecine ait olmasını sağlar ve böylece $A^c(\varepsilon, z) \cap B^c(\varepsilon, z)$ kümesi boştan farklı olup $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ye aittir. $A^c(\varepsilon, z) \cap B^c(\varepsilon, z) \neq \emptyset$ olduğundan, $f(x_0)$ ve $g(x_0)$ noktalarının sırasıyla $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ ve $(g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$ komşuluklarının ayrık olduğu gerçeğine karşı bir çelişki elde edilir. Bundan dolayı $x_0 \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f(x_0), z\| = \|g(x_0), z\|$$

olduğu açıktır ve sonuç olarak $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f(x), z\| = \|g(x), z\|, \ (f = g)$$

elde edilir.

Teorem 5.1.4 Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|,$$

ise bu durumda

(i) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x) + g_{mn}(x), z\| = \|f(x) + g(x), z\|$,
(ii) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|cf_{mn}(x), z\| = \|cf(x), z\|$, $c \in \mathbb{R}$,
(iii) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x)\, g_{mn}(x), z\| = \|f(x)\, g(x), z\|$
eşitlikleri sağlanır.

İspat (i) $\varepsilon > 0$ verilsin. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

olduğundan,

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$B\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\|g_{mn}(x)-g(x),z\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\in\mathcal{I}_2$$

ve böylece ideal tanımından

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)\cup B\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)\in\mathcal{I}_2$$

elde edilir. Şimdi her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in Y$ için

$$C(\varepsilon,z)=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\|(f_{mn}(x)+g_{mn}(x))-(f(x)+g(x)),z\|\geq\varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. İspat için $C(\varepsilon,z)\subset A\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)\cup B\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(m,n)\in C(\varepsilon,z)$ alalım. Bu durumda her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in Y$

$$\varepsilon\leq\|(f_{mn}(x)+g_{mn}(x))-(f(x)+g(x)),z\|\leq\|f_{mn}(x)-f(x),z\|+\|g_{mn}(x)-g(x),z\|$$

elde edilir.

$$\{\|f_{mn}(x)-f(x),z\|,\|g_{mn}(x)-g(x),z\|\}$$

ikilisi (birlikte) kesinlikle $\dfrac{\varepsilon}{2}$ den daha küçük değildir ve böylece her bir $x\in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z\in Y$ için

$$\|f_{mn}(x)-f(x),z\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ ya da }\ \|g_{mn}(x)-g(x),z\|\geq\frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Bu da $(m,n)\in A\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)$ veya $(m,n)\in B\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)$ olduğunu gösterir ve böylece

$$(m,n)\in A\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)\cup B\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)$$

elde edilir. Buradan

$$C(\varepsilon,z)\subset A\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)\cup B\left(\frac{\varepsilon}{2},z\right)$$

kapsaması sağlanır ki böylece

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty}\|f_{mn}(x)+g_{mn}(x),z\|=\|f(x)+g(x),z\|$$

elde edilir.

(ii) $c \in \mathbb{R}$ alalım ve her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olsun. $c = 0$ ise ispat açıktır. Kabul edelim ki $c \neq 0$ olsun. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\} \in \mathcal{I}_2$$

ve tanımdan

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|cf_{mn}(x) - cf(x), z\| \geq \varepsilon\}$$
$$= \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}.$$

eşitliği geçerlidir. Buradan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı $\mathcal{I}_2$ ye aittir ve böylece her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|cf_{mn}(x), z\| = \|cf(x), z\|$$

elde edilir.

(iii) Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olduğundan $\varepsilon = 1 > 0$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq 1\} \in \mathcal{I}_2$$

ve buradan

$$A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < 1\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

dir. Ayıca, herhangi $(m,n) \in A$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x), z\| < 1 + \|f(x), z\|$$

eşitsizliği geçerlidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta > 0$ seçelim öyle ki her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$0 < 2\delta < \frac{\varepsilon}{\|f(x), z\| + \|g(x), z\| + 1}$$

olsun. Kabulümüzden her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$B = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \delta\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

ve

$$C = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - g(x), z\| < \delta\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olduğu açıktır. $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgeç olduğundan dolayı

$$A \cap B \cap C \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

dır. Böylece her bir $(m,n) \in A \cap B \cap C$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned}
&\|f_{mn}(x)\, g_{mn}(x) - f(x).g(x), z\| \\
&\qquad = \|f_{mn}(x)\, g_{mn}(x) - f_{mn}(x)\, g(x) + f_{mn}(x)\, g(x) - f(x)\, g(x), z\| \\
&\qquad \leq \|f_{mn}(x), z\|\|g_{mn}(x) - g(x), z\| + \|g(x), z\|\|f_{mn}(x) - f(x), z\| \\
&\qquad < (\|f(x), z\| + 1)\delta + (\|g(x), z\|)\delta \\
&\qquad = (\|f(x), z\| + \|g(x), z\| + 1)\delta \\
&\qquad < \varepsilon
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x)\, g_{mn}(x) - f(x)\, g(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

Teorem 5.1.5 Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için eğer

(i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \supseteq K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olmak üzere her $(m,n) \in K$ için $\{f_{mn}\} \leq \{g_{mn}\} \leq \{h_{mn}\}$ ve

(ii) $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|k(x), z\|$ ve $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|h_{mn}(x), z\| = \|k(x), z\|$ şartları sağlanıyorsa bu durumda,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|k(x), z\|$$

limiti mevcuttur.

İspat: $\varepsilon > 0$ alalım. (ii) koşulundan her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - k(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|h_{mn}(x) - k(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğu açıktır. Buradan her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$P = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - k(x), z\| < \varepsilon\}$$

ve

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|h_{mn}(x) - k(x), z\| < \varepsilon\}$$

kümeleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ye aittir. Şimdi her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$Q = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - k(x), z\| < \varepsilon\}$$

kümesini alalım. Bu durumda $P \cap R \cap K \subset Q$ olduğu açıktır. $P \cap R \cap K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve $P \cap R \cap K \subset Q$ olduğundan süzgeç tanımı gereği $Q \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve böylece her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - k(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|k(x), z\|$$

limiti mevcuttur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.6 Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

olsun. Bu durumda, $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olmak üzere her bir $(m,n) \in K$ için

(i) $f_{mn}(x) \geq 0$ ise $f(x) \geq 0$

ve

(ii) $f_{mn}(x) \leq g_{mn}(x)$ ise $f(x) \leq g(x)$

önermeleri geçerlidir.

İspat: (i) Kabul edelim ki $f(x) < 0$ olsun. Her bir $x \in X$ için $\varepsilon = -\dfrac{f(x)}{2}$ seçelim. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olduğunda,

$$M = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olacak şekilde M kümesi vardır. $M, K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olduğunda $M \cap K$ kümesi boş kümeden farklı olup $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ye aittir. Bu durumda,

$$\|f_{m_0n_0}(x) - f(x), z\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $(m_0, n_0) \in K$ noktası vardır. Her bir $x \in X$ için $f(x) < 0$ ve $\varepsilon = -\dfrac{f(x)}{2}$ olduğundan

$$f_{m_0n_0}(x) \leq 0$$

olur ki bu her $(m,n) \in K$ için $f_{mn}(x) > 0$ gerçeği ile çelişir. Dolayısıyla her bir $x \in X$ için $f(x) > 0$ olmalıdır.

(ii) Kabul edelim ki $f(x) > g(x)$ olsun. Her bir $x \in X$ için $f(x)$ ve $g(x)$ in sırasıyla

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \text{ ve } (g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$$

komşulukları ayrık olacak şekilde $\varepsilon = \dfrac{f(x) - g(x)}{3}$ seçelim. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

ve $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde süzgeç olduğundan, böylece

$$A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

ve

$$B = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|g_{mn}(x) - g(x), z\| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

elde edilir. Bu da süzgeç özelliğinden

$$\emptyset \neq A \cap B \cap K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olmasını sağlar. Bu durumda bir $(m_0, n_0) \in K$ noktası vardır öyle ki

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon \text{ ve } \|g_{mn}(x) - g(x), z\| < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır. Her bir $x \in X$ için $f(x) > g(x)$ ve $\varepsilon = \dfrac{f(x) - g(x)}{3}$ olduğundan

$$f_{m_0 n_0}(x) > g_{m_0 n_0}(x)$$

elde edilir. Bu ise her $(m, n) \in K$ için $f_{mn}(x) \leq g_{mn}(x)$ gerçeği ile çelişir. Buradan her bir $x \in X$ için

$$f(x) \leq g(x)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.2. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin $\mathcal{I}_2^*$-Yakınsaklığı

Tanım 5.2.1 Bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi vardır öyleki her bir $x \in X$, sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ ve tüm $(m, n) \in M$ için

$$\lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

limiti mevcut ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye (noktasal anlamda) $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ya da } f_{mn} \xrightarrow{\|.,.\|_Y}_{\mathcal{I}_2^*} f$$

ile gösterilir.

Teorem 5.2.2 Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olması

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olmasını sağlar.

İspat: Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olduğundan, bir $H \in \mathcal{I}_2$ kümesi vardır öyle ki $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|, \ (m,n) \in M$$

limiti mevcuttur. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için $m,n \geq k_0$ olduğunda,

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \varepsilon, \ (m,n) \in M$$

eşitliğini sağlayan bir $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece açık olarak her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, z) &= \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \\ &\subset H \cup [M \cap ((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\}))] \end{aligned}$$

kapsaması geçerlidir. $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal olduğundan

$$H \cup [M \cap ((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\}))] \in \mathcal{I}_2$$

ve böylece $A(\varepsilon, z) \in \mathcal{I}_2$ dır. Bu da,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

limitini sağlar. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.3 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uygun ideali $(AP2)$ şartını sağlasın. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olması

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olmasını sağlar.

İspat: $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uygun ideali $(AP2)$ şartını sağlasın. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğu açıktır. Şimdi her $k \geq 2$ için

$$A_1(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq 1\}$$

ve

$$A_k(\varepsilon, z) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{1}{k} \leq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \frac{1}{k-1}\right\}$$

kümelerini alalım. Buradan $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve her bir $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in \mathcal{I}_2$ dır. $(AP2)$ özelliğinden kümelerin bir $\{B_k\}_k \in \mathbb{N}$ dizisi vardır öyle ki $A_j \triangle B_j$ her bir $j \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır ve

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}_2$$

dir. Her bir $x \in X$, sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ ve $M = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| = \|f(x), z\|, \ (m,n) \in M$$

olduğunu ispatlamalıyız. $\delta > 0$ sayısı verilsin. $\dfrac{1}{k} < \delta$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \delta\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

elde edilir. $j = 1, 2, ..., k$ için $A_j \triangle B_j$ satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsandığından, bir n_0 vardır öyle ki

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \cap \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : m \geq n_0 \wedge n \geq n_0\}$$

$$= \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : m \geq m_0 \wedge n \geq n_0\}$$

eşitliği sağlanır. Eğer $m,n \geq n_0$ ve $(m,n) \notin B$ ise

$$(m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{k} B_j \text{ ve böylece } (m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

dır. Buradan her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \frac{1}{k} < \delta$$

elde edilir. Bu da $(m,n) \in M$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

limitinin mevcut olduğunu gösterir öyle ki her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

6. 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN İDEAL CAUCHY DİZİSİ

Bu çalışmada öncelikle 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığının bazı özellikleri verilecektir. Daha sonra 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}_2$-Cauchy ve $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizileri tanımlanarak, bu yeni kavramlar arasındaki ilişkiler ile ilgili bazı özellikler incelenecektir. Çalışmamız boyunca $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal, X ve Y 2-normlu uzaylar, $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $\{g_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\{h_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ çift fonksiyon dizileri, f, g ve k, X den Y ye fonksiyonlar olarak alınacaktır.

6.1. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinde İdeal Yakınsaklığın Bazı Özellikleri

Teorem 6.1.1 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ideali $(AP2)$ şartını sağlayan kuvvetli uygun ideal olsun. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için aşağıdaki eşitlikler denktir:

(i) $\mathcal{I}_2 - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$,

(ii) $f_{mn}(x) = g_{mn}(x) + h_{mn}(x)$ olacak şekilde

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

ve

$$\operatorname{supp} h_{mn}(x) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : h_{mn}(x) \neq 0\} \in \mathcal{I}_2$$

sağlanır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olsun. Bu durumda, Teorem 5.2.3 gereği $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi vardır öyle ki, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

dır.

Şimdi her $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve her $x \in X$ için

$$g_{mn}(x) = \begin{cases} f_{mn}(x), & (m,n) \in M, \\ f(x) \quad , & (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \end{cases} \tag{6.1}$$

ve

$$h_{mn}(x) = f_{mn}(x) - g_{mn}(x), \; (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \tag{6.2}$$

$\{g_{mn}\}$ ve $\{h_{mn}\}$ çift fonksiyon dizilerini tanımlayalım. Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için (6.1) eşitliğinden

$$\lim_{m,n \to \infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

ve bununla birlikte her $x \in X$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f_{mn}(x) \neq g_{mn}(x)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan (6.2) eşitliğinden

$$\operatorname{supp} h_{mn}(x) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h_{mn}(x) \neq 0\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğu açıktır. Yine her $x \in X$ için (6.2) eşitliğinden

$$f_{mn}(x) = g_{mn}(x) + h_{mn}(x)$$

elde edilir. Bu da istenendir.

(ii)⇒(i): Her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n \to \infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|, \; f_{mn}(x) = g_{mn}(x) + h_{mn}(x) \text{ ve} \tag{6.3}$$

$$\operatorname{supp} h_{mn}(x) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h_{mn}(x) \neq 0\} \in \mathcal{I}_2$$

şartlarını sağlayan $\{g_{mn}\}$ ve $\{h_{mn}\}$ iki fonksiyon dizileri olsun.

Şimdi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çarpımının bir M alt kümesi

$$M = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h_{mn}(x) = 0\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \operatorname{supp} h_{mn}(x) \tag{6.4}$$

olarak alınsın.

$$\operatorname{supp} h_{mn}(x) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h_{mn}(x) \neq 0\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan,(6.3) ve (6.4) eşitliklerinden $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve $(m,n) \in M$ için $f_{mn}(x) = g_{mn}(x)$ olup, $(m,n) \in M$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

bulunur ki bu ise $(m,n) \in M$ için

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

sonucunu verir. Teorem 5.2.2 gereğince her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

elde edilir. Bu da ispatımızı tamamlar.

Sonuç 6.1.2 $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ideali $(AP2)$ şartını sağlayan kuvvetli uygun ideal olsun.

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olması için gerek ve yeter şart her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$f_{mn}(x) = g_{mn}(x) + h_{mn}(x), \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve}$$

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|h_{mn}(x), z\| = 0$$

şartlarını sağlayan X den Y ye $\{g_{mn}\}$ ve $\{h_{mn}\}$ iki fonksiyon dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olsun ve $\{g_{mn}(x)\}$ dizisi (6.1) deki gibi tanımlansın. Ayrıca her bir $x \in X$ için

$$h_{mn}(x) = f_{mn}(x) - g_{mn}(x), \quad (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \tag{6.5}$$

dizisini alalım. Bu durumda

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

ve böylece $\mathcal{I}_2$ kuvvetli uygun ideal olduğundan her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

olduğu açıktır. Teorem 5.1.4 ve (6.5) eşitliği gereğince her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|h_{mn}(x), z\| = 0$$

elde edilir.

Şimdi de her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\| \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|h_{mn}(x), z\| = 0$$

olmak üzere

$$f_{mn}(x) = g_{mn}(x) + h_{mn}(x)$$

alalım. $\mathcal{I}_2$ kuvvetli uygun ideal olduğundan, her bir $x \in X$ ve her bir sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

ve Teorem 5.1.4 gereğince

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 6.1.3 Teorem 6.1.1 de eğer (ii) sağlanıyorsa $\mathcal{I}_2$ uygun idealinin $(AP2)$ şartını sağlamasına gerek yoktur. Her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|h_{mn}(x), z\| \geq \varepsilon\} \subset \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h_{mn}(x) \neq 0\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|h_{mn}(x), z\| = 0$$

olur. Böylece, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

elde edilir.

6.2. 2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizileri İçin $\mathcal{I}_2$-Cauchy Dizisi

Tanım 6.2.1 Her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için eğer

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon, x)$, $t = t(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ mevcut ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisine $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir, denir.

Teorem 6.2.2 2-normlu uzaylarda $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır ancak ve ancak $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir.

İspat: $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye $\mathcal{I}_2$-yakınsak olsun. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğu açıktır. Bu ise her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A^c\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olduğunu gösterir ve böylece $A^c\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right)$ boş değildir. Böylece

$$(k,l) \notin A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right) \text{ ve } \|f_{kl}(x) - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde k, l pozitif tam sayılarını seçebiliriz. Şimdi her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$B(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{kl}(x), z\| \geq \varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım öyle ki

$$B(\varepsilon, z) \subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}, z\right)$$

olduğunu gösterelim. $(m, n) \in B(\varepsilon, z)$ alalım. Buradan her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq \|f_{mn}(x) - f_{kl}(x), z\| &\leq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| + \|f_{kl}(x) - f(x), z\| \\ &< \|f_{mn}(x) - f(x), z\| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|f_{mn}(x) - f(x), z\|$$

olduğunu sağlar ki $(m, n) \in A(\frac{\varepsilon}{2}, z)$ dir. Dolayısıyla,

$$B(\varepsilon, z) \subset A(\frac{\varepsilon}{2}, z)$$

Kapsaması elde edilir. Böylece $\{f_{mn}\}$, $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir.

Tersine, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi her bir $x \in X$ için $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi olsun. $\{f_{mn}\}$ nin $\mathcal{I}_2$-yakınsak olduğu gösterilecektir. (ε_{pq}) dizisinin sıfıra yakınsayan sayıların kesin azalan bir dizisi olduğunu kabul edelim. $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi olduğundan, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon_{pq}, z) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{k_p l_q}(x), z\| \geq \varepsilon_{pq}\} \in \mathcal{I}_2, (p, q = 1, 2, ...),$$

olacak şekilde pozitif sayıların kesin artan (k_p) ve (l_q) dizileri mevcuttur. Bu da her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\emptyset \neq \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{k_p l_q}(x), z\| < \varepsilon_{pq}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2), (p, q = 1, 2, ...) \quad (6.6)$$

olduğunu gösterir. $p \neq q$ ve $s \neq t$ olacak şekilde p, q, s ve t pozitif tam sayılarını alalım. (6.6) gereği her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$C(\varepsilon_{pq}, z) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{k_p l_q}(x), z\| < \varepsilon_{pq}\}$$

ve

$$D(\varepsilon_{st}, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{k_s l_t}(x), z\| < \varepsilon_{st}\}$$

kümeleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgecine ait boştan farklı iki küme olur. $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir süzgeç olduğundan,

$$\emptyset \neq C(\varepsilon_{pq}, z) \cap D(\varepsilon_{st}, z) \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2).$$

olur. Böylece her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_p l_q}(x), z\| < \varepsilon_{pq} \text{ ve } \|f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_s l_t}(x), z\| < \varepsilon_{st}$$

eşitsizliklerini sağlayan $p \neq q$ ve $s \neq t$ olacak şekilde pozitif tam sayılarının (p,q) ve (s,t) çiftleri için $(m_{(p,q),(s,t)}, n_{(p,q),(s,t)}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çiftini seçelim. Bu durumda, $p,q,s,t \to \infty$ için (ε_{pq}) sıfıra yakınsayan sayıların kesin azalan bir dizisi olduğundan, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned} \|f_{k_p l_q}(x) - f_{k_s l_t}(x), z\| &\leq \|f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_p l_q}(x), z\| + \|f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_s l_t}(x), z\| \\ &\leq \varepsilon_{pq} + \varepsilon_{st} \to 0, \end{aligned}$$

önermesi sağlanır. Bu da $\{f_{k_p l_q}\}$ $(p,q = 1,2,...)$ çift fonksiyon dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir ve böylece bu Cauchy yakınsaklık kriterini sağlar. Böylece $\{f_{k_p l_q}\}$ dizisi bir f fonksiyonuna yakınsaktır. Yani, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{p,q \to \infty} \|f_{k_p l_q}, z\| = \|f(x), z\|$$

dir. Ayrıca $p,q \to \infty$ iken $\varepsilon_{pq} \to 0$ olup, böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon_{p_0 q_0} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|f_{k_p l_q} - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ (\ p > p_0 \text{ and } q > q_0). \tag{6.7}$$

eşitsizliklerini sağlayan p_0, q_0 pozitif tam sayılarını seçebiliriz. Şimdi her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \varepsilon\}$$

kümesini tanımlayarak

$$A(\varepsilon, z) \subset A(\varepsilon_{p_0 q_0}, z)$$

olduğunu gösterelim. $(m,n) \in A(\varepsilon,z)$ alalım. Bu durumda (6.7) eşitsizliğinin ikinci kısmını dikkate alarak, her bir $x \in X$ ve her bir sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| &\leq \|f_{mn}(x) - f_{k_{p_0}l_{q_0}}(x), z\| + \|f_{k_{p_0}l_{q_0}}(x) - f(x), z\| \\ &< \|f_{mn}(x) - f_{k_{p_0}l_{q_0}}(x), z\| + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|f_{mn}(x) - f_{k_{p_0}l_{q_0}}(x), z\|$$

eşitsizliğini sağlar ve böylece (6.7) eşitsizliğinin ilk kısmını dikkate alarak, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\varepsilon_{p_0q_0} < \|f_{mn}(x) - f_{k_{p_0}l_{q_0}}(x), z\|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$(m,n) \in A(\varepsilon_{p_0q_0}, z)$$

olup, buradan

$$A(\varepsilon, z) \subset A(\varepsilon_{p_0q_0}, z)$$

elde edilir. $A(\varepsilon_{p_0q_0}, z) \in \mathcal{I}_2$ olduğundan ve ideal özelliğinden $A(\varepsilon, z) \in \mathcal{I}_2$ olur ki bu da $\{f_{k_pl_q}\}$ çift fonksiyon dizisinin $\mathcal{I}_2$-yakınsak olduğu sonucunu verir.

Tanım 6.2.3 Eğer her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve her bir $z \in Y$ için $m,n,s,t > k_0$ olduğunda,

$$\|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| < \varepsilon, \; ((m,n),(s,t) \in M)$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi ve $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ varsa $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisine $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi denir ve

$$\lim_{m,n,s,t \to \infty} \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| = 0$$

gösterilir.

Teorem 6.2.4 $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi ise $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir.

İspat: 2-normlu uzaylarda $\{f_{mn}\}$ dizisini $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi olarak alalım. Bu durumda, tanımdan $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi ve her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $m, n, s, t > k_0$ olduğunda tüm $(m, n), (s, t) \in M$ ve her $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, z) &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| \geq \varepsilon\} \\ &\subset H \cup [M \cap ((\{1, 2, \cdots, (k_0 - 1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1, 2, \cdots, (k_0 - 1)\}))] \end{aligned}$$

kapsaması geçerlidir. $\mathcal{I}_2$ bir uygun ideal olduğundan

$$H \cup [M \cap ((\{1, 2, \cdots, (k_0 - 1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1, 2, \cdots, (k_0 - 1)\}))] \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. Böylece $A(\varepsilon, z) \in \mathcal{I}_2$ olup, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin bir $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi olduğunu sonucuna ulaşılır.

Teorem 6.2.5 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}_2^* - \lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| = 0$ ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir.

İspat: Kabulümüzden, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ $(H = \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ M \in \mathcal{I}_2)$ kümesi vardır öyle ki her bir $x \in X$ ve her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x) - f(x), z\| = 0$$

limiti vardır. Buradan, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $(m, n) \in M$ ve $m, n > k_0$ için

$$\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu anlaşılır. Her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$ ve her $z \in Y$ için $m, n, s, t \geq k_0$ olduğunda

$$\begin{aligned} \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| &\leq \|f_{mn}(x) - f(x), z\| + \|f_{st}(x) - f(x), z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{m,n,s,t\to\infty} \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| = 0$$

elde edilir. Bu da $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Buradan da Teorem 6.2.4 gereğince $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi olduğu anlaşılır.

Teorem 6.2.6 $\mathcal{I}_2$ ideali $(AP2)$ şartını saplayan bir uygun ideal olsun. Bu durumda, 2-normlu uzaylarda $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi için $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi ve $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi denktir (çakışır).

İspat: Teorem 6.2.4 gereğince $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi ise $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir. (Bu durumda $\mathcal{I}_2$ idealinin $(AP2)$ şartını sağlamasına gerek yoktur.) Şimdi, $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi olduğunda $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi olduğunu ispatlamamız yeterlidir. $\{f_{mn}\}$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için $s = s(\varepsilon, x), t = t(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$A(\varepsilon, z) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğu anlaşılır. $s = s(\frac{1}{i}),\ t = t(\frac{1}{i})$ olmak üzere

$$P_i = \left\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f_{s_i t_i}(x), z\| < \frac{1}{i}\right\},\ (i = 1, 2, ...),$$

kümesini alalım. Bu durumda,

$$P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2),\ (i = 1, 2, ...)$$

olduğu açıktır. $\mathcal{I}_2$ ideali $(AP2)$ şartını sağladığından Lemma 2.5.16 gereğince bir $P \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki tüm i ler için $P \in F(\mathcal{I}_2)$ ve $P \backslash P_i$ sınırlıdır. Şimdi her bir $x \in X$, $(m, n), (s, t) \in P$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n,s,t\to\infty} \|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| = 0$$

olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ alalım öyle ki $j > \frac{2}{\varepsilon}$ olsun. Eğer $(m, n), (s, t) \in P$ ise $P \backslash P_i$ sınırlı kümedir ve böylece bir $k = k(j)$ vardır öyle ki tüm $m, n, s, t > k$

için $(m,n),(s,t) \in P_j$ dır. Bu nedenle her bir $x \in X$, sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ ve tüm $m,n,s,t > k$ için

$$\|f_{mn}(x) - f_{s_j t_j}(x), z\| < \frac{1}{j} \text{ ve } \|f_{st}(x) - f_{s_j t_j}(x), z\| < \frac{1}{j}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dolayısıyla her bir $x \in X$, tüm $m,n,s,t > k(j)$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\begin{aligned}\|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| &\leq \|f_{mn}(x) - f_{s_j t_j}(x), z\| + \|f_{st}(x) - f_{s_j t_j}(x), z\| \\ &< \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} < \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $k = k(\varepsilon, x)$ vardır öyle ki $m,n,s,t > k$, $(m,n),(s,t) \in P \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in Y$ için

$$\|f_{mn}(x) - f_{st}(x), z\| < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisidir.

7. KAYNAKLAR

Altay B, 2002, Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 72s Malatya.

Arslan M, Dündar E, 2018, $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy Sequence of Functions in 2-Normed Spaces, Konuralp Journal of Mathematics, 6, 57–62.

Arslan M, Dündar E, 2018, On $\mathcal{I}$-convergence of Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 42, 491–502.

Balcerzak M, Dems K, Komisarski A , 2007, Statistical Convergence and Ideal Convergence for Sequences of Functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328, 715–729.

Bayraktar M, 2006, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

Boos J, 2000, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, Newyork.

Choudhary B, Nanda S, 1989, Functional Analysis with Applications, John wiley-Sons, New York.

Das P, Kostyrko P, Wilczyński W, Malik P, 2008, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergence of Double Sequences, Mathematica Slovaca, 58, 605–620.

Dündar E, 2010, Çift Dizilerin $\mathcal{I}$-yakınsaklığı Üzerine, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 69s, Malatya.

Dündar E, 2015, On Some Results of $\mathcal{I}_2$-convergence of Double Sequences of Functions, Mathematical Analysis Sciences and Applications E-notes, 3, 44–52.

Dündar E, Altay B, 2011, On Some Properties of $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of Double Sequences, General Mathematical Notes, 7, 1–12.

Dündar E, Altay B, 2012, Multipliers for Bounded $\mathcal{I}_2$-convergent of Double Sequences, Mathematical and Computer Modelling, 55, 1193–1198.

Dündar E, Altay B, 2014, $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of Double Sequences, Acta Mathematica Scientia, 34B, 343–353.

Dündar E, Altay B, 2015, $\mathcal{I}_2$-convergence of Double Sequences of Functions, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3, 111–121.

Dündar E, Altay B, 2016, $\mathcal{I}_2$-uniform Convergence of Double Sequences of Functions, Filomat, 30, 1273–1281.

Dündar E, Arslan M, Yegül S, 2020, On $\mathcal{I}$-uniform Convergence of Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 50, 1637-1646.

Dündar E, Sever Y, 2015, $\mathcal{I}_2$-Cauchy Double Sequences in 2-Normed Spaces, Global Journal of Mathematical Analysis, 3, 1–7.

Fast H, 1951, Sur La Convergence Statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241–244.

Fridy J A, 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301–313.

Gähler S, 1963, 2-Metrische Räume Und Ihre Topologische Struktur, Mathematische Nachrichten, 26, 115–148.

Gähler S, 1964, 2-Normed Spaces, Mathematische Nachrichten, 28, 1–43.

Gezer F, Karakuş S, 2005, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergent Function Sequences, Mathematical Communications, 10, 71-80.

Gökhan A, Güngör M, 2002, On Pointwise Statistical Convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 33, 1379–1384.

Gökhan A, Güngör M, Et M, 2007, Statistical Convergence of Double Sequences of Real-Valued Functions, International Mathematical Forum, 2, 365-374.

Gunawan H, Mashadi M, 2001, On n-Normed Spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27, 631–639.

Gunawan H, Mashadi M, 2001, On Finite Dimensional 2-Normed Spaces, Soochow Journal of Mathematics, 27, 321–329.

Gürdal M, Pehlivan S, 2004, The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces, Thai Journal of Mathematics, 2, 107–113.

Gürdal M, 2006, On Ideal Convergent Sequences in 2-Normed Spaces, Thai Journal of Mathematics, 4, 85–91.

Gürdal M, Açık I, 2008, On $\mathcal{I}$-Cauchy Sequences in 2-Normed Spaces, Mathematical Inequalities and Applications, 11, 349–354.

Gürdal M, Pehlivan S, 2009, Statistical Convergence in 2-Normed Spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33, 257–264.

Iyer V G, 1985, Mathematical Analysis, 3^{rd} ed. Tata McGraw- Hill Publihing Company Limited New Delhi.

Kostyrko P, Šalát T, Wilczyński W, 2000, $\mathcal{I}$-convergence, Real Analysis Exchange, 26, 669–686.

Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, Sleziak M, 2005, $\mathcal{I}$-Convergence and Extremal $\mathcal{I}$-Limit Points, Mathematica Slovaca, 55, 443–464.

Maddox I J, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Mursaleen M, Alotaibi A, 2011, On $\mathcal{I}$-convergence in Random 2-Normed Spaces, Mathematica Slovaca, 61, 933–940.

Mursaleen M, Edely O H H, 2003, Statistical Convergence of Double Sequences, Journal of Mathematical Analysis and Applications 288, 223–231.

Mursaleen M, Mohiuddine S A, 2012, On Ideal Convergence in Probabilistic Normed Spaces, Mathematica Slovaca, 62, 49-62.

Musayev B, Alp M, 2000, Fonksiyonel Analiz, Kütahya.

Nabiev A, Pehlivan S, Gürdal M, 2007, On $\mathcal{I}$-Cauchy Sequence, Taiwanese Journal of Mathematics, 11, 569–576.

Niven I, Zuckermann H S, Montgomery H L, 1991, An Introduction to The Theory of Numbers, John Wiley and Sons Incorporated Company, New York.

Šalát T, 1980, On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139–150.

Sarabadan S, Talebi S, 2011, Statistical Convergence and Ideal Convergence of Seuences of Functions in 2-Normed Spaces, International Journal of Mathematical Sciences, 2011, 1–10.

Sarabadan S, Talebi S, 2011, Statistical Convergence of Double Sequences in 2-Normed Spaces International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6,373–380

Sarabadan S, Talebi S, 2012, On $\mathcal{I}$-convergence of Double Sequences in 2-Normed Spaces, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 7, 673–684

Şahiner A, Gürdal M, Saltan S, Gunawan H, 2007, Ideal Convergence in 2-Normed Spaces, Taiwanese Journal of Mathematics, 11, 1477–1484.

Savaş E, Gürdal M, 2016, Ideal Convergent Function Sequences in Random 2-Normed Spaces, Filomat, 30, 557–567.

Sever Y, Dündar E, 2015, Regularly Ideal Convergence and Regularly Ideal Cauchy Double Sequences in 2-Normed Spaces, Filomat, 28, 907–915.

Sharma A, Kumar K, 2008, Statistical Convergence in Probabilistic 2-Normed Spaces, Mathematical Sciences, 2, 373–390.

Steinhaus H, 1951, Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.

Tripathy B, 1998, On Statistical Convergence, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics and Mathematics, 47, 299–303.

Yamancı U, Gürdal M, 2014, $\mathcal{I}$-statistical Convergence in 2-Normed Space, Arab Journal of Mathematical Sciences, 20, 41–47.

Yegül S, Dündar E, 2017, On Statistical Convergence of Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Journal of Classical Analysis, 10, 49–57.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Sevim YEGÜL GÜZEY
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar/1989
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 05522334383 / sevimyegull@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 2007
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2012
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2015
Doktora	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2016 - 2020)
Çalıştığı Kurum(lar)	: Özel Limit Anadolu lisesi, 2018 - ...

Yayınları (SCI-E, ESCI ve Diğer)

Yegül S, Dündar E, 2017, On Statistical Convergence of Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Journal of Classical Analysis, 10, 49–57. 57–62.

Yegül S, Dündar E, 2018, Statistical Convergence of Double Sequences of Functions and Some Properties in 2-Normed Spaces, Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics, 33, 705–719.

Yegül S, Dündar E, 2019, $\mathcal{I}_2$-convergence of Double Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Universal Journal of Mathematics and Applications, 2, 130-137.

Yegül S, Dündar E, 2020, $\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of Double Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics, 35, 801–814.

Dündar E, Arslan M, Yegül S, 2020, On $\mathcal{I}$-uniform Convergence of Sequences of Functions in 2-Normed Spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 50, 1637–1646. (SCI-E)