UZAKLIK KORUYAN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Damla TOPAL

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UZAKLIK KORUYAN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

Damla TOPAL

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Damla TOPAL tarafından hazırlanan "Uzaklık Koruyan Dönüşümler Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 30/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Başkan : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edeb. Fak.

Üye : Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,

- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,

- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,

- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30/06/2021

Damla TOPAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UZAKLIK KORUYAN DÖNÜŞÜMLER
ÜZERİNE

Damla TOPAL
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, Mazur-Ulam teoremi ve ispatı verilmiştir. Dördüncü bölümde, birim uzaklık koruyan dönüşümler ele alınmıştır. Beşinci bölümde, Möbius dönüşüm tanımı ve hiperbolik geometrideki temel tanımlar verilmiştir. Daha sonra ise Beckman - Quarles teoreminin hiperbolik geometride ki ispatı verilmiştir.

2021, vi + 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Mazur Ulam teoremi, İzometri, Aleksandrov problemi, Beckman ve Quarles teoremi, Kesin konveks, Lipschitz dönüşümü.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ON DISTANCE PRESERVING MAPPINGS

Damla TOPAL
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Oğuzhan DEMİREL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions recalled. In the third chapter, Mazur- Ulam theorem and proof is given. In the fourth chapter, the transformations that maintain the unit distance are discussed. İn the fifth chapter, the definition of Möbius transformation and basic definitions in hyperbolic geometry are given. Then Beckman – Quarles theorem is proved that hyperbolic geometry.

2021, vi + 33 pages

Key Words: İsometry, Strictly convex, Lipschitz mapping, Aleksandrov problem, Mazur- Ulam theorem, Beckman-Ouarles theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında araştırmalarımı yönlendiren, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan danışman hocam Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşım Leyla ASLAN ' a teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

Damla TOPAL

Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\widehat{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\widehat{\mathbb{C}}$	Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{D}$	Kompleks Birim Disk
$\mathbb{H}$	Hiperbolik Düzlem
$\|.\|$	Norm
$\langle\, ,\rangle$	İç çarpım
$\lvert\,.\,\rvert$	Modül

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

İzometriler sadece matematikle değil, matematik dışında fizik ve birçok mühendislik alanında karşımıza çıkan metrik uzaylar arasında tanımlanan ve uzaklıkları koruyan özel dönüşümlerdir. Öteleme, dönme, yansıma iyi bilinen izometri örnekleridir. İzometriler daima birebirlik koşulunu sağlarken örten olmak zorunda değildirler. İzometriler birçok matematikçi tarafından ele alınmış olup literatürde çeşitli karakterizasyonları vardır.

Bunlardan en meşhuru Beckman ve Quarles tarafından 1953 de verilmiştir. Beckman ve Quarles $n-$ boyutlu $(2 \leq n < \infty)$ E^n Öklid uzayından kendisine tanımlı bir T dönüşümünün $\alpha > 0$ olacak biçimde $\alpha-$ uzaklığını koruması durumunda tüm uzaklıkları koruduğunu ispatladılar. Özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa birim uzaklığı koruyan Öklid uzayından kendisine tanımlı bir T dönüşümü tüm uzaklıkları korur. Beckman – Quarles teoremi matematikte uzaklık koruyan dönüşümlerle ilgili birçok yeni teorinin ortaya çıkmasına imkan sağlamıştır. Örneğin X ve Y reel normlu vektör uzayları olmak üzere birim uzaklığı koruyan $f : X \to Y$ dönüşümü için $f : X \to f(X) \subset Y$ nin bir izometri olup olmayacağı problemi A.D Aleksandrov tarafından 1970 de verilmiştir. Birim uzaklığı koruyan bir f dönüşümü için eğer f^{-1} dönüşümü de birim uzaklığı koruyorsa bu durumda f dönüşümünün bir izometri olup olmadığına dair de literatürde bazı çalışmalar mevcuttur.

Bunun dışında literatürde Lipschitz dönüşümleri, contractive uzaklığa sahip dönüşümler, extensive uzaklığa sahip dönüşümlerin hangi koşullar altında izometri olacağına dair birçok çalışma mevcuttur. İzometriler ile afin dönüşümler arasında da yakın bir ilişki olup bu ilişki Mazur – Ulam teoremi ile verilmiştir. İki normlu uzay arasında tanımlı birebir örten bir izometri afin dönüşümdür.

Birim uzaklık koruyan dönüşümler sadece Öklid uzayında değil, son yıllarda Öklid dışı geometrilerde de karşımıza çıkmaktadır. Bu tez çalışmasında Beckman – Quarles teoreminin hiperbolik geometrinin Poincare disk modelindeki karşılığı ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 : V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise V kümesi $\mathbb{K}$ cismi üstünde bir vektör uzayı denir.

$(V1)$ V kümesinde + ile gösterilen ve adına toplama denilen bir işlem vardır ve bu işlem aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\forall\, u, v \in V$ için $u + v$ tanımlıdır ve $u + v \in V$

dir. Yani, V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2. $\forall\, u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$

dir. Yani, V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

3. $[\exists\, 0 \in V, (\forall\, u \in V$ için $u + 0 = u \; ve \; 0 + u = u)]$

dir. Yani, V kümesinde toplama işleminin etkisiz (birim) elemanı vardır. Bu etkisiz elemanı 0 simgesi ile gösterdik.

4. $\forall\, u \in V$ için V kümesinde $-u$ ile gösterilen ve

$$u + (-u) = 0 \; ve \; (-u) + u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Yani, V kümesindeki her bir u elemanının toplamaya göre tersi vardır. u elemanının tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

5. $\forall\, u, v \in V$ için $u + v = v + u$ tir. Yani, V kümesinde toplama işleminin değişme

özelliği vardır.

$(V2)$ $\mathbb{K} \times V \to V,\ (a, u) \to au$ biçiminde, adına skalarla çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

1) $\forall\, a \in \mathbb{K}, \forall\, u, v \in V$ için $a(u + v) = au + av$.
2) $\forall\, a, b \in \mathbb{K}, \forall\, u \in V$ için $(a + b)u = au + bu$.
3) $\forall\, a, b \in \mathbb{K}, \forall\, u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$.
4) $\mathbb{K}$ nın çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre V nin her bir elemanı için

$$1u = u$$

dur.

Tanım 2.2 : Bir vektör uzayının her bir elemanına vektör adı verilir.

Tanım 2.3 : X boş olmayan bir küme olsun.

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

M_1) $\forall\, x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır. $(d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

M_2) $d(x, y) = d(y, x)$

M_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine ise metrik uzay denir.

Tanım 2.4 : $\mathbb{K}$ bir cisim ve N kümesi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\,.\,\| : N \rightarrow \mathbb{K}$$

fonksiyonunu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\|\,.\,\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm denir.

N_1) $\forall\, x \in N$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N_2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, x \in N$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

N_3) $\forall\, x, y \in N$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(N, \|\,.\,\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.5 : X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\langle\, , \rangle : X \times X \rightarrow F$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir.

- $\forall\, x \in X$ için; $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall\, x, y \in X$ için; $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

- $\forall\, x, y, z \in X$ için; $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
- $\forall\, x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için; $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$(X, \langle\, ,\rangle)$ ikilisine iç çarpım uzayı (veya ön- Hilbert uzayı) denir.

$$\|x\| = \langle x, x\rangle$$

biçiminde tanımlanan norma X üzerinde iç-çarpım normu denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. İç çarpım yardımıyla tanımlanan d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X e Hilbert Uzay denir.

Tanım 2.6 : X ve Y, $\mathbb{R}$ üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\forall\, u, v \in X\ ve\ \forall\, c \in \mathbb{R}$ için;

$$T: X \to Y$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağladığında T dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

1) $\forall\, u, v \in X$ için $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2) $\forall\, u \in X$ için $T(cu) = cT(u)$ $(\forall\, c\ \in\ \mathbb{R})$

Tanım 2.7 : $\omega : X \to X$ dönüşümü $\forall\, x, y\ \in X\ ve\ \mu\ \in\ \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ortogonaldir denir.

1) $\omega(x + y\,) = \omega(x) +\ \omega\,(y)$,
2) $\omega(\mu x) =\ \mu\omega(x)$,
3) $\langle x, y\rangle = \langle w(x), w(y)\rangle$

Tanım 2.8 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun. $f: X \to Y$ dönüşümü $\forall\, a, b \in X$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\big((1 - t)a + tb\big) = (1 - t)f(a) + tf(b)$$

koşulunu sağlıyorsa f dönüşümüne afin dönüşüm denir.

Tanım 2.9 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun. $f: X \to Y$ dönüşümü $k > 0$ ve

$\forall\ x, y \ \in X$ için ;

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

koşulu sağlanıyorsa bu dönüşüme Lipschitz dönüşümü denir.

Tanım 2.10 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun.

$$f : X \to Y$$

dönüşümü $\forall\ x, y \in X$ için;

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

koşulunu sağlıyorsa bir izometri denir. f bir izometri ise, $f^{-1}: Y \to X$ ters dönüşümü de bir izometridir. X den Y ye bir izometri varsa bu uzaylara izometriktir denir.

Tanım 2.11 : $(X, \| . \|)$ normlu uzayında $\|x\| = \|y\| = 1$ olacak biçimdeki farklı her $x, y \in X$ için $\|x + y\| < 2$ oluyorsa bu uzaya strictly konveks uzay denir. Kesin konveks uzayda birim küre üstünde alınan farklı iki noktayı birleştiren doğru parçası küreyi sadece bu iki noktada keser.

Tanım 2.12 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun.

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu

$$\|x - y\| = \rho \ \text{ iken } \ \|f(x) - f(y)\| \leq \rho$$

özelliğini sağlıyorsa ρ uzaklığına contractive uzaklık denir.

Tanım 2.13 X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun.

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu

$$\|x - y\| = \rho \ \text{ iken } \|f(x) - f(y)\| \geq \rho$$

özelliğini sağlıyorsa ρ uzaklığına extensive uzaklık denir.

3. MAZUR-ULAM TEOREMİ

X ve Y birer normlu vektör uzayı olmak üzere;

$$f : X \to Y$$

dönüşümünün afin olduğunu göstermek için,

$$T(x) = f(x) - f(0)$$

biçiminde tanımlı

$$T : X \to Y$$

fonksiyonunun lineer olduğunu göstermek yeterlidir. Bir izometri afin olmak zorunda değildir. Bunu görmek için özel bir örnek seçilsin. $X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{R}^2$ olsun. $\mathbb{R}^2$ de ki norm;

$$\|x\| = max(|x_1|, |x_2|)$$

olarak alınsın. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall\ s, t \in \mathbb{R}$ için;

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t|$$

olacak biçimde tanımlansın. Özel olarak, $\varphi(t) = sint$ veya $\varphi(t) = |t|$ alınabilir.

$$\begin{aligned} f&: X \to Y \\ s &\mapsto f(s) = (s, \varphi(s)) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu bir izometridir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(t)\| &= \|(s, \varphi(s)) - (t, \varphi(t))\| \\ &= \|s - t, \varphi(s) - \varphi(t)\| \\ &= |s - t| \end{aligned}$$

olup, f bir izometridir.

$$f\big((1-t)a + tb\big) = \Big((1-t)a + tb\ , \varphi\big((1-t)a + tb\big)\Big) \quad (3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} (1-t)f(a) + tf(b) &= (1-t)(a, \varphi(a)) + t(b, \varphi(b)) \\ &= \big((1-t)a + tb, (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)\ \big) \quad (3.2) \end{aligned}$$

olup f fonksiyonunun afin olması için;

$$\varphi\big((1-t)a+tb\big)=(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)$$

olmalıdır. $f: X \to Y$ izometrisinin afin olması için $\forall\, a, b \in X$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olması gerekir.

Teorem 3.1 : E ve F birer normlu uzay olmak üzere

$$f: E \to F$$

birebir , örten dönüşümü izometri ise afindir (Mazur ve Ulam 1932).

İspat. $a, b \in E$ seçelim ve $z=\frac{a+b}{2}$ olsun. $g: E \to E$ biçiminde a ve b noktalarını sabit bırakan tüm izometriler kümesi W ile gösterilsin.

$$\lambda = sup\{\|g(z)-z\| : g \in W\} \in [0,\infty)$$

$\|g(z)-a\|=\|g(z)-g(a)\|=\|z-a\|$ dır. Böylece;

$$\begin{aligned}\|g(z)-z\| &= \|g(z)-z-a+a\|\\ &\le \|g(z)-a\|+\|a-z\|\\ &= \|z-a\|+\|z-a\|\\ &= 2\|z-a\|\end{aligned}$$

olup, bu durumda λ sonludur. ψ, E de z noktasına göre simetri olsun. $g \in W$ ise,

$$g^{*}=\psi g^{-1}\psi g \in W$$

olur. Buradan;

$$g^{*}(a)=\psi g^{-1}\psi g(a)=\psi g^{-1}\psi(a)=\psi g^{-1}(b)=\psi(b)=a$$

olup $g^{*}(b)=b$ dir. ψ, g, g^{-1} izometri olduğundan, g^{*} da izometridir. Bu durumda ;

$$\|g^{*}(z)-z\| \le \lambda$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}2\|g(z)-z\| = \|\psi g(z)-g(z)\| &= \|g^{-1}\psi g(z)-z\|\\ &= \|\psi g^{-1}\psi g(z)-\psi(z)\|\end{aligned}$$

$$= \|g^*(z) - z\|$$

$$\leq \lambda$$

olup bu durum ancak $\lambda = 0$ için geçerlidir. Yani, $\forall\ g \in W$ için $g(z) = z$ dir. Böylece;

$$\|g(z) - z\| = 0$$

dır. $f: E \rightarrow F$ birebir, örten bir dönüşüm olup $f(z) = z' = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ olduğu gösterilmelidir. ψ' ; F de z' noktasına göre simetri olsun. Bu durumda, $h = \psi f^{-1} \psi' f \ \in W$ olup $h(z) = z$ dir. Buradan $\psi' f(z) = f(z)$ olup z' noktası ψ' altında sabit kalan tek nokta olup $f(z) = z'$ bulunur. Yani f, orta noktaları korur ve afindir.

4. BİRİM UZAKLIĞI KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Teorem 4.1 : $T : E^n \to E^n\,(2 \leq n < \infty)$ dönüşümü $a > 0$ için a −uzaklığını koruyorsa yani $d(p,q) = a$ olacak biçimdeki her p,q E^n için $d\big(T(p),T(q)\big) = a$ oluyorsa T, tüm uzaklıkları korur. Burada E^n ile n −boyutlu Öklid uzayı gösterilmiştir (Beckman ve Quarles 1953).

İspat. Teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyulur. $n = 2$ için ispat aşağıdaki biçimindedir. $a = 1$ almak genelliği bozmaz.

Lemma 4.1 : T, tek değerlidir (Beckman ve Quarles 1953).

İspat. T, tek değerli olmasın. O halde öyle bir p_1 noktası vardır ki p_1 noktasının $T'(p_1)$ ve $T''(p_1)$ gibi en az iki görüntüsü vardır. $\triangle\, p_1p_2p_3$ birim kenarlı eşkenar üçgen olacak şekilde $p_2\,, p_3 \in E^n$ noktaları seçilsin ve bu noktaların sırasıyla görüntüleri $T(p_2), T(p_3)$ olsun. O halde; $T(p_2)T'(p_1)T(p_3)T''(p_1)$ dörtgeni bir eşkenar dörtgen olup $d\big(T'(p_1),T''(p_1)\big) = \sqrt{3}$ tür. p_4, p_5, p_6 ve p_7 noktaları;

$$d(p_1,p_4) = d(p_1,p_7) = \sqrt{3}\,,\ d(p_4,p_7) = d(p_5,p_1) = d(p_6,p_1) = 1$$

olacak biçimde seçilsin. p_4 noktasının görüntüsü ya $T'(p_1)$ dir ya da $T''(p_1)$ dir. $d(p_5,p_1) = 1$ olduğundan;

$$d\big(T(p_5),T'(p_1)\big) = \mathrm{d}\big(T(p_5),T''(p_1)\big) = 1$$

dir. Ayrıca $d(p_6,p_1) = 1$ olduğundan;

$$d\big(T(p_6),T'(p_1)\big) = \mathrm{d}\big(T(p_6),T''(p_1)\big) = 1$$

dir. Buradan $\{T(p_5),T(p_6)\} = \{T(p_2),T(p_3)\}$ olduğu görülür. O halde; $T(p_7) = T'(p_1)$ veya $T(p_7) = T''(p_1)$ elde edilir. Ayrıca $d(p_4,p_7) = 1$ olmasına rağmen görüntüsü $d\big(T(p_4),T(p_7)\big) = 0$ ya da $d\big(T(p_4),T(p_7)\big) = \sqrt{3}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde T tek değerlidir. Yani; $T'(p_1) = T''(p_1)$ dir.

Lemma 4.2 : Eğer;

$$\sqrt{3} - 1 \leq d(p_1,p_2) \leq \sqrt{3} + 1$$

ise $T(p_1) \neq T(p_2)$ dir (Beckman ve Quarles 1953).

İspat. Birim çemberin görüntüsü birim çember olduğu açıktır. p_1 merkezli C_1 birim çemberi ile p_2 merkezli C_2 birim çemberi alınsın. C_1 çemberi üzerinde a ve b noktaları, C_2 çemberi üzerinde de bir c olup a, b ve c noktaları arasındaki uzaklık 1 birim olacak şekilde bir eşkenar üçgen oluşturulsun. Eğer $T(p_1) = T(p_2)$ ise bu durumda a, b, c noktalarını köşe noktası kabul eden üçgenin görüntüsü $T(p_1) = T(p_2)$ merkezli birim çember üzerinde olup çelişki elde edilir.

Lemma 4.3 : T; $\sqrt{3}$ uzaklıkları korur. Böylece T dönüşümü tüm uzaklıkları korur (Beckman ve Quarles 1953).

İspat. Lemma 4.1 deki eşkenar dörtgen seçilsin. Lemma 4.2 den T; $\sqrt{3}$ uzaklığını koruduğu görülür.

Aynı şekilde $T, 2$ uzaklığını da korur. Bir kenar uzunluğu 1 birim olan düzgün altıgen çizilirse bu altıgen 6 tane birim kenarlı eşkenar üçgen içerir. T dönüşümü birim üçgenleri koruduğu için görüntüleri de aynı özelliktedir. Yani bu üçgenler de bir düzgün altıgen tanımlar. Karşılıklı köşeler arasındaki uzaklık 2 br olduğu için görüntüleri arasında ki uzaklık da 2 birimdir. Böylece T, 2 uzaklığını korur. Ayrıca T tüm pozitif tamsayı uzaklıkları korur. Şimdi $A, B \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere T altında $\frac{A}{2^B}$ uzaklıklarının da korunduğunu gösterelim. Lemma 4.2 den biliyoruz ki $A(\sqrt{3}-1) \le d(p_1, p_2) \le A(\sqrt{3}+1)$ olacak biçimde ki $\forall\, p_1, p_2$ noktası için $T(p_1) \neq T(p_2)$ dir. İki kenarının uzunluğu $2A$ ve bir kenarı A olan $\triangle\, KLM$ ikizkenar üçgenini inceleyelim. Bu üçgenin köşe noktaları korunur. T dönüşümü tamsayı uzunluklarını koruduğu için $\triangle\, KLM$ üçgeninin görüntüsü ikizkenar üçgendir. Çapı KL ve KM olan iki çember alalım. Bu çemberler iki noktada kesişir. Birincisi L ve M noktalarının orta noktasıdır. Bu orta nokta p_2 ile gösterilsin. Diğer nokta ise p_1 ile gösterilsin. $K = p_1$ olduğu açıktır. Görüntü çemberler ise $T(p_1)$ ve $T(p_2)$ noktalarından geçerler. Yani; LM nin orta noktası $\mathrm{T}(L)T(M)$ nin orta noktasına dönüşür. Böylece $\frac{A}{2}$ uzaklıkları da korunmuş olur. $A\left(\sqrt{3}-1\right) < d(p_1, p_2) = \frac{\sqrt{15}}{2}A < A(\sqrt{3}+1)$ olup $T(p_1) \neq T(p_2)$ dir. T ; $\frac{A}{2^2}$ ve $\frac{A}{2^B}$ uzaklıklarını korur. Pozitif rasyonel sayılar kümesi pozitif reel sayılar kümesinde yoğun olduğundan $d(p, q_i) = \frac{A}{2^B}$ olacak biçimde ;

$$\lim_{i\to\infty} d(p, q_i) = d(p, q) \text{ ve } \lim_{i\to\infty} q_i = q$$

özelliklerini sağlayan $\{q_i\}$ dizisi bulunabilir. q_i ; q ya yakınsadığında q_i ve q noktaları yarıçapı $\left(\frac{1}{2^B}\right)$ olan çember üzerinde kalır. Bu durumda T_{q_i} ve T_q noktaları da $\left(\frac{1}{2^B}\right)$ yarıçaplı çember üzerinde kalır ve bununla birlikte; $\lim_{i\to\infty} Tq_i = Tq$ olup tüm i ler için;

$$\lim_{i\to\infty} d(T(p),\, T(q_i)) = d(p,q)$$

elde edilir. $d(p,q_i)$ uzaklıklarını koruduğundan $d(T(p),T(q)) = d(p,q)$ dur.

X ve Y iki reel normlu vektör uzayı olmak üzere;

$$f: X \to Y$$

dönüşümü için aşağıdaki özellikleri göz önünde bulunduralım.

- $\|x - y\| = 1$ olacak biçimdeki $\forall\, x\,, y \in X$ için,

$$\|f(x) - f(y)\| = 1$$

oluyorsa bu özelliğe birim uzaklığı koruyan dönüşüm denir. Bu özellik kısaca DOPP ile gösterilir (Rassias ve Semrl 1993).

- $\|x - y\| = 1$ olacak biçimdeki $\forall\, x\,, y \in X$ için,

$$\|f(x) - f(y)\| = 1$$

oluyorsa ve f^{-1} içinde aynı eşitlik geçerli ise bu özelliğe güçlü birim uzaklığı koruyan dönüşüm denir ve kısaca SDOPP ile gösterilir (Rassias ve Semrl 1993).

Problem 4.1 : $f : X \to Y$ (DOPP) koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. (f sürekli olmak zorunda değildir.) Bu durumda $f : X \to f(X) \subset Y$ bir izometri midir ?

Problem 4.1 Aleksandrov tarafından 1970 de literatüre sunulmuştur (A.D Aleksandrov 1970).

Teorem 4.2 : X ve Y iki reel normlu vektör uzayı olsun ve bunlardan en az birinin boyutu birden büyük olsun. Kabul edelim ki f, (SDOPP) özelliğini sağlasın ve örten olsun. Bu durumda f, birebir bir dönüşüm olup $\forall\, x, y \in X$ için;

$$\big|\, \|f(x) - f(y)\| - \|x - y\| \,\big| < 1 \tag{4.1}$$

sağlanır. Üstelik f her iki doğrultuda $n \in \mathbb{Z}^+$ uzaklıklarını korur (Rassias ve Semrl 1993).

İspat. Her iki uzayında boyutunun birden büyük olduğunu gösterelim. İlk önce $boyY \geq 2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\|x - y\| = \|x - z\| = \|y - z\| = 1$$

olacak biçimde $x, y, z \in Y$ vardır. f, (SDOPP) özelliğini sağladığından ve örten olduğundan;

$$\|x_1 - y_1\| = \|y_1 - z_1\| = \|x_1 - z_1\| = 1$$

özelliğinde $x_1,\ y_1,\ z_1 \in X$ vardır. Burada $f(x_1) = x, f(y_1) = y, f(z_1) = z$ alınmıştır. Bu ise $boyX \geq 2$ olduğu anlamına gelir. f nin birebir olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki f birebir olmasın. Bu durumda $x \neq y$ iken $f(x) = f(y)$ olacak biçimde $x, y, \in X$ vardır.

$$\|x - z\| = 1,\ \|z - y\| \neq 1$$

olacak biçimde $z \in X$ vardır. Bu durumda (SDOPP) den dolayı $\|f(x) - f(z)\| = 1$ ve $\|f(y) - f(z)\| = 1$ dir. Bu ise $\|y - z\| = 1$ olmasını gerektirir. $\|z - y\| \neq 1$ ve $\|z - y\| = 1$ olup çelişki elde edilir. Bu nedenle f ; birebir ve örten dönüşüm olup hem f hem de f^{-1} birim uzaklığı koruyan dönüşümlerdir.

- $\overline{K}(x, r) = \{z : \ \|z - x\| \leq r\}$
- $K(x, r) = \{z : \ \|z - x\| < r\}$
- $C_x(n, n+1\,] = \{z : n < \ \|z - x\| \leq n + 1\}$

tanımlansın. x, X de keyfi bir vektör, n ise pozitif tamsayı ve $n > 1$ olsun. $z \in \overline{K}(x, n)$ olsun. $boyX > 1$ olduğundan;

$$\|x_{i+1} - x_i\| = 1\ ;\ i = 0,1, \dots, n-1$$

olacak biçimde,

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n = z$$

dizisi vardır. Sonuç olarak;

$$\|f(x_n) - f(x_o)\| = \ \|f(z) - f(x)\| \leq n$$

olur. Dolayısıyla,

$$f\big(\overline{K}(x, n)\big) \subset \ \overline{K}(f(x), n)$$

dir. f^{-1} içinde aynı sonuç elde edilir. O halde ;

$$f\big(\overline{K}(x, n)\big) = \overline{K}(f(x), n) \qquad x \in X,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

dir. Bununla birlikte f birebir ve örten olduğundan $x \in X$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için

$$f(C_x(n,n+1]) = C_{f(x)}(n,n+1] \tag{4.2}$$

dir. Sabit bir $x \in X$ ve $z \in C_x(1,2]$ kümesi seçilsin.

$$u = z + (\|z-x\|)^{-1}(z-x)$$

vektörü seçilsin. Bu durumda $u;$ $C_x(2,3]$ tarafından kapsanır. (4.2) den dolayı

$$f(u) \in C_{f(x)}(2,3]$$

elde edilir. Böylece;

$$\|f(x) - f(u)\| > 2 \tag{4.3}$$

dir. Şimdi

$$\|f(z) - f(x)\| \leq 1$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(u)\| &\leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(u)\| \\ &= \|f(x) - f(z)\| + 1 \\ &\leq 2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu (4.3) ile çelişir. Böylece,

$$f(C_x(1,2]) \subset C_{f(x)}(1,2]$$

olduğu kanıtlanmış olur. Aynı sonuç f^{-1} içinde geçerlidir.

$$f(C_x(1,2]) = C_{f(x)}(1,2] \text{ ve } f(K(x,1) = K(f(x),1)$$

tüm $x \in X$ ler için geçerlidir. Bu eşitlik (4.2) eşitliği ile (4.1) eşitsizliğini gerektirir. İspatı tamamlamak için her iki yönde tümevarım yöntemi uygulanarak ispatın doğruluğu gösterilmelidir. n için önerme sağlansın. Yani, $\|x - z\| = n$ iken $\|f(x) - f(z)\| = n$ olsun. $\|x - z\| = n + 1$ iken $\|f(x) - f(z)\| \leq n + 1$ olduğu gösterilmelidir.

$$u = f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{\|f(z) - f(x)\|}$$

vektörü seçilsin. f örten olduğu için $u = f(v)$ olacak biçimdeki $v \in X$ vardır. O halde

$\|u - f(x)\| = 1$ den $\|v - x\| = 1$ elde edilir. Eğer $\|u - f(z)\| < n$ ise $\|v - z\| < n$ dir. $\|v - x\| = 1$ olduğundan $\|x - z\| < n + 1$ olduğu görülür. Böylece $\|u - f(z)\| \geq n$ olup buradan,

$$n \leq \|u - f(z)\| = \left\| f(x)\left(1 - \frac{1}{\|f(x)-f(z)\|}\right) - f(z)\left(1 - \frac{1}{\|f(x)-f(z)\|}\right) \right\|$$

$$= |\ \|f(x) - f(z)\| - 1\ |$$

bulunur. Böylece $\|f(x) - f(z)\| = n + 1$ dir. Tersi içinde ispat geçerlidir.

Önerme 4.1 : Teorem 4.2 de ki X ve Y reel normlu vektör uzaylarının boyutunun birden büyük olma koşulu kaldırılırsa (4.1) eşitsizliği sağlanmaz (Rassias ve Semrl 1993).

İspat. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in Z \\ x, & x \notin Z \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Özel olarak $x = 1.2\,, y = 2$ olsun. Bu durumda; $f(x) = 1.2\,, f(y) = 4$ elde edilir.$|x - y| = 0.8$ ve $|f(x) - f(y)| = 2.8$ olup (4.1) eşitsizliği sağlanmaz.

Önerme 4.2 : Teorem 4.2 de ki (4.1) eşitsizliği keskindir (Rassias ve Semrl 1993).

İspat. $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ve $g_\varepsilon: [0,1] \to [0,1]$ için

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} t, & t \in [0, 1-\varepsilon] \\ \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} t + \left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right), & t \in [1-\varepsilon, 1] \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca $h_\varepsilon: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $h_\varepsilon(s) = [\![s]\!] + g_\varepsilon(s - [\![s]\!])$ tanımlansın. h_ε monoton artan bir fonksiyon özelliğinde olduğundan,

$|s - t| = n$ ($n = 1,2, \ldots$) olup $h_\varepsilon(s) = a$ ve $h_\varepsilon(t) = a + n$ elde edilir. Buradan $|h_\varepsilon(s) - h_\varepsilon(t)| = n$ dir. Ayrıca,

$|s - t| \leq n$ ise $n = 1,2, \ldots$ için $|h_\varepsilon(s) - h_\varepsilon(t)| \leq n$,

ve

$$|h_\varepsilon(s) - h_\varepsilon(t)| \leq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} |s - t|$$

elde edilir. $C[0,1]$, $[0,1]$ de tanımlanan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi olsun. $\phi_\varepsilon : C[0,1] \to C[0,1]$, $\big(\phi_\varepsilon(x)\big)(t) = h_\varepsilon(x(t))$ fonksiyonunu tanımlayalım. ϕ_ε, birebir ve örten dönüşüm olduğundan, $\left({\phi_\varepsilon}^{-1}(x)\right)(t) = {h_\varepsilon}^{-1}(x(t))$ olduğu görülür. Keyfi $x, y \in C[0,1]$ için $\|x-y\| = n$ ve $t_0 \in [0,1]$ için, $|x(t_0) - y(t_0)| = n$ ve tüm $t \in [0,1]$ için $|x(t) - y(t)| \leq n$ ise tüm $t \in [0,1]$ için $|(h_\varepsilon(x(t_0) - h_\varepsilon(y(t_0))| = n$ ve $|h_\varepsilon(x(t) - h_\varepsilon(y(t)| \leq n$ olup $\|\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(y)\| = n$ elde edilir. Böylece ϕ_ε; tüm n pozitif tam sayı uzaklıklarını korur. $x(t) \equiv 1 - \varepsilon \in C[0,1]$ ve $y(t) \equiv 1 \in C[0,1]$ alalım. Buradan $\|x-y\| = \varepsilon$ olup $\big(\phi_\varepsilon(x)\big)(t) \equiv \varepsilon$, $\big(\phi_\varepsilon(y)\big)(t) \equiv 1$ olduğu görülür. Böylece, $\|\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(y)\| = 1 - \varepsilon$ olduğu açıktır. Sonuç olarak;

$$|\|\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(y)\| - \|x-y\|| = 1 - 2\varepsilon$$

elde edilir. Burada ε istenildiği kadar küçük seçilebileceğinden Teorem 4.2 de ki (4.1) eşitsizliği keskindir.

Teorem 4.3 : X ve Y reel normlu vektör uzayları ve birinin boyutu birden büyük olsun. Kabul edilsin ki $f: X \to Y$ dönüşümü $k = 1$ için Lipschitz dönüşümü ve $\forall\, x, y \in X$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliğini sağlansın. Eğer f fonksiyonu örten ve (SDOPP) özelliğini sağlıyorsa bu durumda f bir izometridir. Böylece f lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir (Rassias ve Semrl 1993).

İspat. Teorem 4.2 ye göre herhangi bir n pozitif tam sayısı için f her iki doğrultuda n uzaklığını korur. $x, y \in X$ seçelim ve $\|x - y\| < n_0$ olacak biçimde n_0 pozitif tam sayısı bulabiliriz. Kabul edelim ki;

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \tag{4.4}$$

olsun ve

$$z = x + \frac{n_0}{\|y-x\|}(y - x)$$

vektörü seçilsin. Buradan,

$$\|z - x\| = n_0 \text{ ve } \|z - y\| = n_0 - \|y - x\|$$

olduğu açıktır ve

$$\|f(z)-f(x)\| = n_0 \text{ ve } \|f(z)-f(y)\| \leq n_0 - \|y-x\|$$

elde edilir. Diğer yandan;

$$\begin{aligned} \|f(z)-f(x)\| &\leq \|f(z)-f(y)\| + \|f(y)-f(x)\| \\ &< n_0 - \|y-x\| + \|y-x\| \\ &= n_0 \end{aligned}$$

olup, $\|f(z)-f(x)\| = n_0$ olması ile çelişir. Böylece (4.4) sağlanmaz. O halde $\forall\, x, y \in X$ için;

$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$$

olup f izometridir. Mazur- Ulam teoreminden f bir lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir.

Teorem 4.4 : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $k = 1$ için Lipschitz dönüşümü olsun ve $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ için;

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$$

olsun ve f fonksiyonu (DOPP) özelliğini sağlasın. Bu durumda f lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir (Rassias ve Xiang 2000).

İspat. $f(0) = 0$ almak genelliği bozmaz. Aksi halde f fonksiyonu yerine $f(x) - f(0)$ fonksiyonu incelenebilir. f fonksiyonu (DOPP) özelliğini sağladığından,

$$|f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$$

dir. Böylece $f(1) = 1$ veya $f(1) = -1$ olur.

(i) $f(1) = 1$ olması halinde öncelikle tüm negatif olmayan tamsayılar için $f(n) = n$ olduğu tümevarım yöntemi ile gösterilebilir. n; 1 den büyük bir tamsayı ve m ise $0 \leq m < n$ olacak biçimde herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $f(m) = m$ olsun.

Burada n, 1 den büyük bir pozitif tam sayıdır. Ayrıca,

$$|f(n) - f(n-1)| = |f(n) - (n-1)| = 1$$

olduğundan, $f(n) = n - 2$ veya $f(n) = n$ dir. Kabul edilsin ki;

$$f(n) = n - 2 \text{ ve } \quad r = \frac{(n-2)+(n-1)}{2}$$

olsun. f fonksiyonunun contractive özelliğinden;

$\frac{1}{2} \geq |f(r) - f(n-2)| \geq |f(n-1) - f(n-2)| - |f(r) - f(n-1)| \geq 1 - |r - (n-1)| = \frac{1}{2}$

elde edilir. Bu nedenle; $|f(r) - f(n-2)| = \frac{1}{2}$ dir. Aynı argüman kullanılarak,

$$|f(r) - f(n-1)| = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Ayrıca, $f(n-2) = n-2$ ve $f(n-1) = n-1$ olduğundan;

$$f(r) = \frac{(n-2) + (n-1)}{2}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$s = \frac{(n-1) + n}{2}$$

tanımlansın. Benzer şekilde;

$$|f(s) - f(n-1)| = \frac{1}{2},\ |f(s) - f(n)| = \frac{1}{2} \text{ ve } f(s) = \frac{(n-2)+(n-1)}{2}$$

elde edilir. Böylece; $|f(r) - f(s)| = 0$ ve $|r - s| = 1$ olması yani f nin (DOPP) özelliği ile çelişir. Bu durumda $f(n) = n$ olmak zorundadır.

Benzer biçimde $f(-1) = -1$ olmak zorundadır. Aksi halde $f(-1) = 1$ ve $f\left(\frac{-1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun (DOPP) özelliği ile çelişir. $\forall\, n \in Z$ için $f(n) = n$ dir. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $x \in [n_0,\ n_0 + 1]$ olacak biçimde n_0 tam sayısı vardır. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1$ için Lipschitz dönüşümü olduğundan ve yukarıdaki argümandan ,

$$|f(x) - f(n_0)| = |x - n_0| \text{ ve } |f(x) - f(n_0 + 1)| = |x - n_0 - 1|$$

yazılabilir. Bu nedenle $f(n) = n$ olmak zorundadır. Böylece f $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x$ özelliğindedir ve lineer izometridir.

(ii) $f(1) = -1$ durumunu inceleyelim. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = -f(x)$ olsun. g; (DOPP) ve $k = 1$ için Lipschitz dönüşümü özelliğindedir. O halde g, (i) den dolayı bir lineer izometri ve $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = x$ dir. Bu durumda $f(x) = -x$ olup bir lineer izometridir.

Bir uzaklık yerine iki uzaklık koruyan $f: X \to Y$ dönüşümleri için W. Benz ve Berens aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Teorem 4.5 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun. $boyX \geq 2$ ve Y kesin konveks olsun. $\forall\, x, y \in X$ için $f: X \to Y$ dönüşümü

- $\|x-y\| = \rho$ ise $\|f(x) - f(y)\| \leq \rho$
- $\|x-y\| = m\rho$ ise $\|f(x) - f(y)\| \geq m\rho \quad (1 < m \in Z)$

özelliklerini sağlarsa bu durumda f, lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir (Rassias ve Xiang 2000).

Teorem 4.6 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun. Kabul edelim ki $boyX \geq 2$, Y kesin konveks ve $f: X \to Y$ dönüşümü üç uzaklığı koruyan dönüşüm olsun. Bu uzaklıklar, $1, a, 1+a$ olsun. Bu durumda f, lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir (Rassias ve Xiang 2000).

İspat. (i) $x, y \in X$ için $\|x-y\| = 2+a$ olsun ve

$$x_1 = x + \frac{1}{2+a}(y-x) \text{ ve } x_2 = x + \frac{1+a}{2+a}(y-x)$$

vektörleri seçilsin. Buradan;

$\|x_1 - x\| = 1$, $\|x_1 - x_2\| = a$, $\|y - x_1\| = 1+a$, $\|x_2 - x\| = 1+a$, $\|y - x_2\| = 1$

dir. Buradan

$$\|f(x_1) - f(x)\| = 1,\ \|f(x_1) - f(x_2)\| = a\ ,\ \|f(y) - f(x_1)\| = 1+a,$$
$$\|f(x_2) - f(x)\| = 1+a,\ \|f(y) - f(x_2)\| = 1$$

ve

$$\|f(x_2) - f(x)\| = \|f(x_1) - f(x)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| = 1+a$$
$$\|f(y) - f(x_1)\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|f(y) - f(x_2)\| = 1+a$$

elde edilir. Y kesin konveks olduğundan

$$f(x_1) = f(x) + \tfrac{1}{1+a}(f(x_2) - f(x)) \text{ ve } f(x_2) = f(x_1) + \tfrac{a}{1+a}(f(y) - f(x_1)).$$

dir. Böylece,

$$f(x) = \frac{1+a}{a} f(x_1) - \frac{1}{a} f(x_2) \quad \text{ve} \quad f(y) = \frac{1+a}{a} f(x_2) - \frac{1}{a} f(x_1)$$

olup $\forall\, x, y \in X$ için;

$\|x - y\| = 2 + a$ iken $\|f(x) - f(y)\| = 2 + a$ elde edilir. Sonuç olarak $f, 2 + a$ uzaklığını korur.

(ii) $\forall\, x, y \in X$ olmak üzere $\|x - y\| = 2 + 2a$ olsun ve

$$x_1 = x + \frac{1+a}{2+2a}(y - x) \ \text{ ve } \ x_2 = x + \frac{2+a}{2+2a}(y - x)$$

vektörleri seçilsin. Buradan;

$\|x_1 - x\| = 1 + a$, $\|x_1 - x_2\| = 1$, $\|y - x_1\| = 1 + a$, $\|x_2 - x\| = 2 + a$,

$\|y - x_2\| = a$

dır. $f; 1, a, 1 + a$ ve $2 + a$ uzaklıklarını koruduğundan benzer biçimde $\|f(y) - f(x)\| = 2 + 2a$ dır ve böylece f dönüşümü $2 + 2a$ uzaklıklarını da korur. Teorem 4.5 den ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1 : Teorem 4.6 da ki $1, a, 1 + a$ uzaklıkları yerine a, b ve $a + b$ uzaklıkları da alınabilir (Rassias ve Xiang 2000).

Teorem 4.7 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun ve Y kesin konveks olsun. Kabul edilsin ki $f: X \to Y$ dönüşümü (DOPP) özelliğini sağlasın ve $k = 1$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

bir Lipschitz dönüşümü olsun. Bu durumda f, lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir (Rassias ve Xiang 2000).

İspat. $x, y \in X$ olmak üzere $\|x - y\| = \frac{1}{2}$ olsun. $z = x + 2(y - x)$ vektörü seçilsin. Böylece

$$\|x - z\| = 1, \|y - z\| = \frac{1}{2}$$

ve

$$\|x-y\| \geq \|f(x)-f(y)\| \geq \|f(z)-f(y)\| - \|f(y)-f(z)\| \geq 1 - \|z-y\| \geq \frac{1}{2}$$

dir. O halde $\|f(x)-f(y)\| = \frac{1}{2}$ olmalıdır. Benzer şekilde $\|f(y)-f(z)\| = \frac{1}{2}$ ve

$$\begin{aligned}\|f(z)-f(x)\| &= \|f(z)-f(y)+f(y)-f(x)\| \\ &\leq \|f(z)-f(y)\| + \|f(y)-f(x)\| \\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Ayrıca Y kesin konveks olduğundan,

$$f(y) = \frac{f(x)+f(z)}{2} \quad \text{ve} \quad \|f(y)-f(x)\| = \frac{1}{2}$$

olup böylece f; 1 ve $\frac{1}{2}$ uzaklıklarını korur. Teorem 4.6 da ki benzer yol uygulanırsa f her iki doğrultuda da pozitif n tamsayı uzaklıklarını korur. f contractive dönüşüm olduğundan Teorem 4.5 in ispatından dolayı f bir izometridir. Sonuç olarak f lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir.

Teorem 4.8 : X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun. Kabul edelim ki Y kesin konveks olsun. $f: X \to Y$ dönüşümü (DOPP) özelliğini sağlasın ve $\|x-y\| \leq 1$ özelliğindeki $\forall\, x, y \in X$ için ;

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$$

sağlanırsa f lineer izometri ile ötelemenin bileşkesidir (Rassias ve Xiang 2000).

Teorem 4.9 : $n \geq 1, n \in Z$ olmak üzere $N \geq n_m$ olacak biçimde öyle bir $n_m \in Z$ vardır ki $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ fonksiyonu (DOPP) özelliğini sağlar fakat bir izometri değildir (Rassias ve Xiang 2000).

Teorem 4.10 : X ve Y iki normlu reel uzay, $f: X \to Y$ dönüşümü (DOPP) özelliğini sağlasın. $\|x-y\| \leq 1$ olacak biçimde $x, y \in X$ için $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$ ve $n > 0$ için $\|x-y\| = n$ iken $\|f(x)-f(y)\| = n$ olsun. O halde f bir izometridir (Yumei ve Lijun 2012).

İspat. Önce $\|x-y\| \leq 1$ iken $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ olduğu gösterilsin. Kabul edilsin ki

$$\|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$$

olsun.

$$z = x + \frac{1}{\|y-x\|}(y-x)$$

vektörü seçilsin. Açık olarak

$$\|z-x\| = 1 \text{ ve } \|z-y\| = 1 - \|x-y\| \leq 1$$

olduğu görülür. (DOPP) özelliğinden ;

$$\begin{aligned} 1 = \|f(z)-f(x)\| &\leq \|f(z)-f(y)\| + \|f(x)-f(y)\| \\ &< 1 - \|x-y\| + \|x-y\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup, böylece $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ elde edilir. İkinci olarak herhangi bir $x, y \in X$ için $\|x-y\| > 1$ için öyle bir n tamsayısı vardır ki $n < \|x-y\| \leq n+1$ dir.

$$z = x + \frac{n}{\|y-x\|}(y-x)$$

vektörü seçilsin. f, (DOPP) özelliğini sağladığından

$$\|z-x\| = n, \|z-y\| = \|x-y\| - n < 1$$

dir. Buradan

$$\|f(z)-f(x)\| = n, \ \|f(z)-f(y)\| = \|z-y\|$$

olduğu görülür. Böylece

$$\|f(z)-f(x)\| + \|f(z)-f(y)\| = n + \|x-y\| - n = \|x-y\|$$

olup

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$$

elde edilir. Şimdi

$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$$

olduğunu gösterelim. Kabul edilsin ki $\|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$ olsun ve

$$z_1 = x + (n+1)\frac{1}{\|y-x\|}(y-x)$$

vektörü seçilsin. Böylece

$$\|z_1 - x\| = n+1 \text{ ve } \|z_1 - y\| = (n+1) - \|x-y\| \leq 1$$

ve

$$\begin{aligned} n+1 = \|f(z_1)-f(x)\| &\leq \|f(z_1)-f(y)\| + \|f(y)-f(x)\| \\ &< n+1-\|x-y\| + \|x-y\| \\ &= n+1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani; $\forall\ x, y \in X$ $i$çin $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ olup f bir izometridir.

5. HİPERBOLİK GEOMETRİDE BECKMAN-QUARLES TEOREMİ

$a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ olmak üzere genelleştirilmiş kompleks düzlemden kendisi üzerine tanımlı bir Möbius dönüşümü

$$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$
$$z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçiminde tanımlıdır. Möbius dönüşümleri bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve Möbius dönüşümleri açı koruyan (konform) dönüşümlerdir.

$\Omega = \{s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid s \text{ bir Öklidyen çember ya da genişletilmiş Öklidyen doğru}\}$ olmak üzere f bir Möbius dönüşüm olsun. Bu durumda $c \in \Omega$ için $f(c) \in \Omega$ dir. Literatürde çemberleri koruyan sürekli bir f dönüşümünün bir Möbius dönüşümü olduğuna dair birçok ispat vardır. Möbius dönüşümleriyle ilgili bir başka önemli özellik ise çifte oranı korumasıdır. Möbius dönüşümleri hiperbolik geometride de önemli bir yere sahip olup (Yang ve Shihai 2006) da ve (Yang ve Shihai 2011) de Lambart ve Saccheri dörtgenleriyle karakterize edilmiştir. Hiperbolik geometride ayrıca (Li ve Wang 2009) de üçgensel bölgelerle, (Demirel 2011) de hiperbolik düzgün çokgenlerle, (Demirel 2013) de yıldız tipli hiperbolik düzgün çokgenlerle ve (Liu 2006) da ise A tipinde hiperbolik düzgün çokgenlerle karakterize edilmiştir.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$$

birim diskini kendisine dönüştüren bir Möbius dönüşümü

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z_0 + z}{1 + \overline{z_0} z} \quad (\theta \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{D})$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\frac{z_0 + z}{1 + \overline{z_0} z} = a \oplus z$ ile gösterilirse $f(z) = e^{i\theta}(a \oplus z)$ biçiminde gösterilir. Buradaki "$\oplus$" işlemi kompleks birim disk üzerinde tanımlı "Möbius toplamı" olarak adlandırılır.

$$a \ominus z = a \oplus (-z)$$

biçiminde tanımlı "$\ominus$" işlemine "Möbius çıkarma" işlemi denir. $z \ominus z = 0$ ve $\ominus z = -z$ dir. Buradaki $\oplus$ işlemi birleşme özelliğini sağlamadığı için $(\mathbb{D},\oplus)$ bir grup değildir fakat bu ikili bir gyrogruptur.

Tanım5.1 : $G \neq \emptyset$, $\oplus$ ise G üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Eğer aşağıdaki dört özellik sağlanıyorsa $(G,\oplus)$ ikilisine bir gyrogrup denir.

(G_1) $\forall\, a \in G$ için $0 \oplus a = a$ olacak biçimde $\exists\, 0 \in G$ vardır. (Burada 0 sol birim elemandır.)

(G_2) $\forall\, a \in G$ için $b \oplus a = 0$ olacak biçimde $\exists\, b \in G$ vardır. (Burada b, a'nın sol tersidir.)

(G_3) $\forall\, a, b \in G$ için a ve b yardımıyla tanımlı bir $gyr[a,b]$ gyrootomorfizması vardır öyleki

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus\, gyr[a,b]\mathrm{c}$$

dır. Son eşitliğe sol gyrobirleşme özelliği denir.

(G_4) $\forall\, a, b \in G$ için $gyr[a,b] = gyr[a \oplus b, b]$ dir. (Sol loop özelliği)

Tüm bu aksiyomlarla birlikte

(G_5) $\forall\, a, b \in G$ için

$$(a \oplus b) = gyr[a,b](b \oplus a)$$

sağlanıyorsa $(G,\oplus)$ gyrogrubuna gyrodeğişmeli gyrogrup denir.

$(\mathbb{D},\oplus)$ ikilisinin bir gyrodeğişmeli gyrogrup olduğu açıktır. $\mathbb{D}$ diskini $\mathbb{R}^2$ deki orjin merkezli birim yarıçaplı açık yuvara $({\mathbb{R}_1}^2)$

$$\mathbb{C} \ni u = u_1 + iu_2 = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}e(\bar{u},\, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{D}}$$

$$|u| \;=\; \|u\|$$

biçiminde eşlersek ${\mathbb{R}_1}^2$ de Möbius toplamı

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+\bar{u}v} = \frac{(1 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2)u + (1 - \|u\|^2)v}{1 + 2\langle u, v\rangle + \|u\|^2\|v\|^2}$$

biçiminde gösterilir. Üstelik bu Möbius toplamı ${\mathbb{R}_1}^n$ de de geçerlidir. $(V, +, .)$ herhangi bir iç çarpım uzayı olmak üzere s −yarıçaplı

$$V_s = \{z \in V \mid \|z\| < s\}$$

açık yuvarında Möbius toplamı

$$u \oplus v = \frac{\left(1 + \frac{2}{s^2}\langle u, v\rangle + \frac{1}{s^2}\|v\|^2\right)u + \left(1 - \frac{\|u\|^2}{s}\right)v}{1 + \frac{2}{s^2}\langle u, v\rangle + \frac{1}{s^4}\|u\|^2\|v\|^2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $s \to \infty$ için V_s açık yuvarı V ye genişlerken

$$\lim_{s\to\infty} u \oplus v = u + v$$

dir. V_s de Möbius skalar çarpımı ise $r \in \mathbb{R}$ için

$$r \otimes v = s\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{\|v\|}{s}\right)\frac{v}{\|v\|}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu çarpımın aşağıdaki özellikleri sağlandığı açıktır.

$\forall\, r \in \mathbb{R}, u, v \in V_s\; v \neq 0$ ve $r \otimes 0 = 0$ olmak üzere;

(P_1) $n \otimes v = v \oplus v \oplus \dots \oplus v$ (n −tane)

(P_2) $(r_1 + r_2) \otimes v = r_1 \otimes v \oplus r_2 \otimes v$

(P_3) $(r_1 r_2) \otimes v = r_1 \otimes (r_2 \otimes v)$

(P_4) $r \otimes (r_1 \otimes v \oplus r_2 \otimes v) = r \otimes (r_1 \otimes v) \oplus r \otimes (r_2 \otimes v)$

(P_5) $\|r \otimes v\| = |r| \otimes \|v\|$

(P_6) $\frac{|r| \otimes v}{\|r \otimes v\|} = \frac{v}{\|v\|}$

(P_7) $gyr[a,b](r \otimes v) = r \otimes gyr[a,b]v$

(P_8) $1 \otimes v = v$

Tanım5.2 : Üzerinde tanımlı $\oplus$ Möbius toplamı ve $\otimes$ Möbius çarpımıyla $(V_s, \oplus, \otimes)$ üçlüsüne bir Möbius gyrovektör uzayı denir.

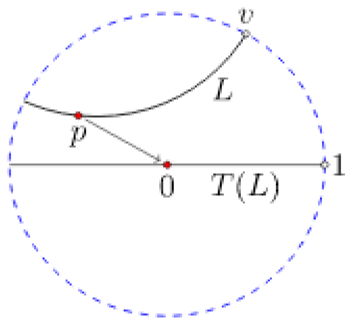
Bir vektör uzayında tanımlı toplama ve skalarla çarpma işlemleri sağladığı özellikleri Möbius gyrovektör uzaylarında $\oplus$ Möbius toplamı ve $\otimes$ Möbius çarpımı sağlar. Örneğin Öklidyen n −uzayında A, B noktalarından geçen bir Öklidyen doğru

$$\alpha(\lambda) = A + \lambda(B - A)$$
$$= A + \lambda\overrightarrow{AB}$$

biçiminde gösterilirken $(\mathbb{R}_1{}^n, \oplus, \otimes)$ de A ve B noktalarından geçen gyrodoğru

$$\alpha(\lambda) = A \oplus \lambda \otimes (B \ominus A)$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 5.1 : $\mathbb{D}$ diskinde p ve u noktalarından geçen gyrodoğru

Geometrik olarak $\alpha(\lambda)$; $\mathbb{R}_1{}^n$ de orjin merkezli birim yarıçaplı yuvarı dik kesen ve A ile B noktalarından geçen çember yayıdır. Bu doğrular ise hiperbolik geometrinin Poincare yuvar modelindeki doğruları gösterir.

Tanım 5.3 : $(V_s,\oplus)$ bir Möbius gyrogrup olmak üzere $A, B \in \mathbb{D}$ için A ile B arasındaki gyrouzaklık

$$d(A,B) = \|A \ominus B\|$$

ile gösterilir.

Tanım 5.4 : $(V_s,\oplus,\otimes)$ bir Möbius gyrovektör uzayı olmak üzere

$$f: (V_s,\oplus,\otimes) \to (V_s,\oplus,\otimes)$$

fonksiyonu verilsin. $\forall\, A, B \in V_s$ için

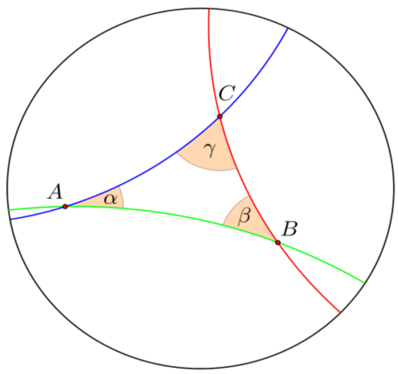
$$d(f(A), f(B)) = d(A,B)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ye bir gyroizometri denir. A.A. Ungar (Ungar 2005) de $({\mathbb{R}_1}^n,\oplus,\otimes)$ dan kendisine tanımlı bir gyroizometrinin

$$\rho(x) = A \oplus R(x)$$

biçiminde yazılabildiğini göstermiş olup burada $\rho(0) = A$, R ise nxn tipinde bir ortogonal matristir.

Tanım 5.5 : K, L, M, $({\mathbb{R}_1}^n,\oplus,\otimes)$ Möbius gyrovektör uzayında aynı gyrodoğru üzerinde olmayan üç nokta olmak üzere bu noktaları köşe kabul eden ve bu noktalardan geçen gyrodoğrular yardımıyla çizilen üçgene Möbius gyroüçgen denir.



Şekil 5.2 : $\mathbb{D}$ diskinde A, B, C noktalarından geçen gyroüçgen

$$\boldsymbol{a} = \ominus L \oplus M \qquad a = \|\boldsymbol{a}\|$$
$$\boldsymbol{b} = \ominus M \oplus K \qquad b = \|\boldsymbol{b}\|$$
$$\boldsymbol{c} = \ominus K \oplus L \qquad c = \|\boldsymbol{c}\|$$

olmak üzere;

$$cos\alpha = \frac{\ominus K \oplus L}{\|\ominus K \oplus L\|} \frac{\ominus K \oplus M}{\|\ominus K \oplus M\|}$$

$$cos\beta = \frac{\ominus L \oplus K}{\|\ominus L \oplus K\|} \frac{\ominus L \oplus M}{\|\ominus L \oplus M\|}$$

$$cos\gamma = \frac{\ominus M \oplus K}{\|\ominus M \oplus K\|} \frac{\ominus M \oplus L}{\|\ominus M \oplus L\|}$$

dir. Kesişen iki gyrodoğru arasındaki açının ölçüsü kesişim noktasındaki Öklidyen teğetler arasındaki açının ölçüsüdür. Hiperbolik üçgenlerin Öklidyen üçgenlere göre avantajlı yanı aşağıdaki teoremdir.

Teorem 5.1 : $\triangle KLM$, $(\mathbb{R}_1{}^n,\oplus,\otimes)$ de bir Möbius gyroüçgen olmak üzere K, L, M köşelerindeki gyroaçılar α, β, γ olsun. Bu durumda;

$$\|\ominus L \oplus M\|^2 = \frac{cos\alpha + \cos(\beta + \gamma)}{cos\alpha + \cos(\beta - \gamma)}$$

$$\|\ominus M \oplus K\|^2 = \frac{cos\beta + \cos(\alpha + \gamma)}{cos\beta + \cos(\alpha - \gamma)}$$

$$\|\ominus K \oplus L\|^2 = \frac{cos\gamma + \cos(\alpha + \beta)}{cos\gamma + \cos(\alpha - \beta)}$$

dir.

Sonuç 5.1 : $\triangle KLM$ bir eşkenar gyroüçgen olsun. Yani,

$$\|\ominus L \oplus M\| = \|\ominus M \oplus K\| = \|\ominus K \oplus L\| = a$$

ve

$$\angle KLM = \angle LMK = \angle MKL = \alpha$$

olsun. Bu durumda;

$$a = \sqrt{2cos\alpha - 1}$$

dir.

Aşağıdaki sonuçlarda $f(x) = x'$ ile P ve Q noktalarından geçen gyrodoğru PQ ile, köşeleri P, Q, R olan gyroüçgen $\triangle PQR$ ile, köşeleri P, Q, R, S olan gyrodörtgen $PQRS$ ile, P ve Q noktalarından geçen gyrodoğru parçası $[P, Q]$ ile gösterilecektir.

Lemma 5.1 : $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ olmak üzere $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $a \in (0,1)$ gyrouzaklığını korusun. Bu durumda f tek değerlidir (Demirel vd. 2021).

İspat : Kabul edelim ki $f(A) = U,\ f(A) = V,\ U \neq V$ olacak biçimde $A \in \mathbb{D}$ olsun, yani f tek değerli olmasın. $d(A,B) = d(A,C) = d(B,C) = a$ olacak biçimde ABC gyroüçgenini oluşturalım. $f;\ a-$uzaklığını koruduğu için $d(A',B') = d(A',C') = d(B',C') = a$ olup $A'B'C'$ bir eşkenar gyroüçgendir. $\angle ABC := \alpha$ olsun. Bu durumda $a^2 = 2cos\alpha - 1$ olup buradan $cos\alpha = \frac{a^2+1}{2}$ dir. ABC gyroüçgeni yardımıyla $ABCD$ eşkenar gyrodörtgenini oluşturalım. Teorem 5.1 yardımıyla

$$d(A,D) = \sqrt{\frac{cos2\alpha + cos\alpha}{cos2\alpha + 1}} = \sqrt{1 + \frac{a^2 - 1}{(a^2+1)^2}}$$

elde edilir. B' ve C' noktalarına a birim uzaklıkta olan U ve V den başka nokta olmayacağından $D' = U$ yada $D' = V$ olmalıdır. $g_\theta;A$ noktasına göre $d(D, g_\theta(D)) = a$ ve $\angle g_\theta(D)AD = \theta$ olacak biçimde bir hiperbolik dönme fonksiyonu olsun. Daha açık olarak $g_\theta(x) = A \oplus e^{i\theta}(\ominus A \oplus x)$ biçiminde bir dönüşüm olsun. $g_\theta(D) = E$ ile gösterilsin. $d(A,D) = d(A,E)$ olduğu açıktır ve $Ag_\theta(B)Eg_\theta(C)$ dörtgeni $ABCD$ ye eş olan bir eşkenar gyrodörtgendir. $d(g_\theta(B),A) = a = d(g_\theta(C),A)$ olduğundan,

$$d\big(f\big(g_\theta(B)\big),U\big) = d(f(g_\theta(B)),V) = a$$

ve

$$d\big(f\big(g_\theta(C)\big),U\big) = d(f(g_\theta(C)),V) = a$$

dir. Buradan $\{f\big(g_\theta(B)\big), f\big(g_\theta(C)\big)\} = \{B',C'\}$ olup buradan $E' = U$ yada $E' = V$ elde edilir. Böylece $d(D',E') \in \left\{0, \sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}\right\}$ olup $d(E,D) = a$ olduğundan çelişki elde edilir. Kabulümüz yanlış olup f tek değerlidir.

Sonuç 5.2 : $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu $a \in (0,1)$ uzaklığını korusun. Bu durumunda f, $\sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}$ uzaklığını da korur (Demirel vd. 2021).

İspat. Lemma 5.1 deki $ABCD$ ve $Ag_\theta(B)Eg_\theta(C)$ eşkenar gyrodörtgenlerini oluşturalım. $d(A,D) = d(A,E) = \sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}$ olup $d(A',D') = 0$ ya da $d(A',D') = \sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}$ dir. $d(A',D') = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A' = D'$ olup böylece $d(A',E') = d(D',E') = 0$ ya da $d(A',E') = d(D',E') = \sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}$ dir.

$d(A,E) = a$ olduğu için bu bir çelişki olup $d(A',D') = \sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}$ olmak zorundadır.

$\psi(a) = \sqrt{1 + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}}$ fonksiyonu tanımlansın ve $\psi^n(a) = \psi(\psi(\dots\psi(a))\dots)$ (n-defa) olsun. $a < \psi(a)$ ve $i < j$ iken $\psi^i(a) < \psi^j(a)$ olduğu açıktır.

Sonuç 5.3 : $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu $a \in (0,1)$ gyrouzaklığını korusun. Bu durumda $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\psi^n(a)$ uzaklıkları korunur (Demirel vd. 2021).

Teorem 5.2 : $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu $a^2 \in \mathbb{Q}$ olacak biçimdeki $a \in (0,1)$ gyrouzaklığını korusun. Bu durumda f tüm gyrouzaklıklarını korur (Demirel vd. 2021).

İspat. (1. Adım) f nin a dan küçük tüm gyrouzaklıkları koruduğunu gösterelim. $d(P,Q) < a$ olacak biçimdeki $P,Q \in \mathbb{D}$ seçelim. Bu durumda $\mathbb{D}$ de $d(P,C) = a = d(Q,C)$ eşitliğini sağlayacak biçimde bir C noktası vardır. C merkezli a yarıçaplı gyroçemberi $S(C,a)$ ile gösterelim. Bu durumda bu gyroçemberin üstünde öyle bir R noktası vardır ki $d(P,R) = a$ eşitliği sağlanır. Kenar gyrouzunlukları a olan PRC eşkenar gyroüçgenini oluşturalım ve $\angle PRC = \alpha$ olsun. Şimdi $d(C, A_i) = d(C, A_{i+1}) = d(A_i, A_{i+1}) = a$, $A_1 = P$, $A_2 = R$, $\angle A_i C A_{i+1} = \alpha$ olacak biçimde $A_i C A_{i+1}$ gyroüçgen dizisini oluşturalım. $(i = 1,2,..)$ Eğer $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ olduğu gösterilirse bu durumda $A_1 = A_k$ olacak biçimde hiçbir k tamsayısının olmadığını söyleyebiliriz. Eğer $A_1 = A_k$ olacak biçimde k tam sayısı olursa bu durumda $k\alpha = 2\pi$ olup $\alpha = \frac{2\pi}{k} \in \pi\mathbb{Q}$ olur. [WK] de $\rho = \frac{m}{n}\pi$ $(m,n \in \mathbb{Z})$ olacak biçiminde ρ sayısı için $cos\rho = \mathbb{Q}$ oluyorsa bu durumda $cos\rho \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$ olması gerektiğini göstermiştir. $a^2 \in \mathbb{Q}$ olacak biçimde $\forall\, a \in (0,1)$ için $cos\alpha = \frac{a^2+1}{2} \notin \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$ olduğundan dolayı $A_j = \mathbb{Q}$ olacak biçimde $j \in \mathbb{N}$ vardır. f, a gyrouzaklığını koruduğu için ve dolayısıyla α gyroaçısını koruduğu için $d(P,Q) = d(P',Q')$ bulunur.

(2. Adım) $f, 2 \otimes a = a \oplus a$ gyrouzaklığını korur. K ve L, $S(C,a)$ gyroçemberi üzerinde $d(K,L) = 2 \otimes a$ olacak biçimde iki nokta olsun. f, a kenar gyrouzunluğuna sahip tüm eşkenar gyroüçgenleri koruduğu ve dolayısıyla bu gyroüçgenlerin α gyroaçılarını koruduğu için 1. Adımdan $d(K',L') = 2 \otimes a$ olur. Benzer düşünceyle f nin $n \otimes a = a \oplus \dots \oplus a$ gyrouzaklığını da koruduğunu görmek kolaydır. $a^2 \in \mathbb{Q}$ olacak biçimdeki $\forall\, a \in (0,1)$ için $n \otimes a \in (0,1)$ ve $(n \otimes a)^2 \in \mathbb{Q}$ dir. Üstelik 1.

Adımdan

$$d(A,B) = d(A,C) = d(B,C) = n \otimes a$$

olacak biçimde ABC gyroüçgeni için $\angle ABC = \beta$ ise $cos\beta \in \mathbb{Q}$ ve $\beta \notin \pi\mathbb{Q}$ dir.

(3. Adım) $f; a$ dan büyük gyrouzaklıkları da korur. $d(P,Q) > a$ olacak biçimdeki $P,Q \in \mathbb{D}$ seçelim. $d(P,Q) < k \otimes a$ olacak biçimindeki $k \in \mathbb{Z}^{+}$ seçelim. 1. Adımdaki gibi P ve Q noktalarından geçen $k \otimes a$ yarıçaplı bir gyroçember oluşturalım. Bu gyroçemberlerin merkezini D ile gösterelim. Bu durumda $S(D, k \otimes a\ )$ üzerinde öyle bir W noktası vardır ki DPW bir eşkenar gyroüçgendir. $\angle DPW = \phi$ ile gösterelim. 2. Adımdan $cos\phi \in \mathbb{Q}$ olduğundan $f;\ k \otimes a$ dan küçük tüm gyrouzaklıkları korur. Böylece f tüm gyrouzaklıkları korur.

6. KAYNAKLAR

Vaisala J, 2003, A proof of the Mazur Ulam theorem, Amer. Math. Monthly, 110, 7, 633 – 635.

Mazur S, Ulam S, 1932, Sur les transformationes isometryques d’espace vectoriels normes , C.R. Acad. Sci. Paris, 194, 946 – 948.

Beckman F S , Quarles D A, 1953, On isometries of Euclidean spaces, Amer. Math. Soc., 4, 810 – 815.

Rassias T M, 1983, Is a distance one preserving mapping between metric spaces always an isometry? , Amer. Math. Monthly, 90, 200 .

Rassias T M , Xiang S, 2000, On mappings with conservative distances and Mazur – Ulam Theorem, Univ. Beograd. Publ. Elektrothen Fak., 11, 1 – 8 . .

Benz W , Berens B, 1987, A contribtion to a theorem of Ulam and Mazur, Aeq. Math, 34, 61 – 63.

Rassias T M, Semrl P, 1993, On the Mazur – Ulam theorem and the Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings, Proc. Amer Math. Soc., 118, 919 – 925.

Yumei M, Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings, Acta Math. Sci to appear .

Rassias T M, 1987, Some remarks on isometric mappings, Facta Univ. Ser. Math. Inform, 2, 49 – 52.

Yumei M, Lijun L, 2012, The Benz Theorem and Aleksandrov Problem for preserving distance mapping, Internetional Mathematical Forum, 12, 597 – 601.

Benz W, 1987, An elementary proof of the theorem of Beckman and Quarles, Elem. Math., 42, 4 – 9.

Zaks J, 2001, The Beckman – Quarles Theorem for rational spaces, J. Of Geom., 72, 199 – 205.

Zaks J, 2003, The Beckman – Quarles Theorem for rational spaces, Discrete Math., 265, 311 – 320.

Tyszka A, 2001, Discrete version of the Beckman Quarles theorem for rational eight-space, Aequationes Math., 62, 85 – 93.

Ungar A A, 2005, Analytic Hyperbolic Geometry: Mathematical Foundations and

Applications, Word Scientific, Singapore.

Yang S S, 2006, A new characteristic of Möbius transformations in hyperbolic geometry, J. Math. Appl., 2, 660 – 664.

Yang S S, 2011, Corrigendum to “ A new characteristic of Möbius transformation in Hyperbolic geometry “ , J. Math. Anal. Appl. 319 (2) (2006) 66064, J. Math. Anal. Appl., 1, 383 – 384.

Li B, Wang Y, 2009, A new characterization for isometries by triangles, New York J. Math., 15, 423 – 429.

Demirel O, Seyrantepe E S, 2011, A characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic regular polygons, J. Math. Anal. Appl, 2, 566 – 572.

Demirel O, 2013, A characterization of Möbius transformations by use of hyperbolic regular star polgons, Proc. Rom. Acad. Ser. A. Math. Phys.Tech. Sci. Inf. Sci, 14, 13 – 19.

Liu J, 2006, A new characteristic of Möbius transformations by use of polygons having type A, J. Math. Anal. Appl., 1, 281 – 284.

Demirel O, Topal D, Aslan L, 2021, The Beckman-Quarles Theorem in Hyperbolic Geometry, Journal of Mathematics, doi.org/10.1155/2021/5552198 .

İnternet Kaynakları

1- https://mysite.science.uottawa.ca/hsalmasi/report/report-gail.pdf, 11.11.2019

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Damla TOPAL

Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar / 23.12.1995

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon / e-posta) : damla.1tpl@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Atatürk Lisesi (2009 – 2013)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü (2013– 2017)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Ens., Matematik ABD, (2017 – 2021)

Yayınları (SCI ve diğer) :

Demirel O, Aslan L, Topal D, 2020, A Characterist of Similarites by Use of Steinhaus' Problem on Partition of Triangles, Mathematical Sciences and Applications, 8, 117 – 122.

Demirel O, Aslan L, Topal D, 2020, A New Proof the Lester's Perimeter Theorem in Euclidean Space, Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences, 2, 57-59.

Demirel O, Topal D, Aslan L, 2021, The Beckman-Quarles Theorem in Hyperbolic Geometry, Journal of Mathematics, doi.org/10.1155/2021/5552198 .