BİRİM ALANLI VE
BİRİM ÇEVRELİ ÜÇGENLERİ
KORUYAN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leyla ASLAN

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİM ALANLI VE BİRİM ÇEVRELİ ÜÇGENLERİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

Leyla ASLAN

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Leyla ASLAN tarafından hazırlanan "Birim Alanlı ve Birim Çevreli Üçgenleri Koruyan Dönüşümler Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 30/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Başkan **:** Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edeb. Fak.

Üye **:** Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30/06/2021

Leyla ASLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİM ALANLI VE BİRİM ÇEVRELİ ÜÇGENLERİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

Leyla ASLAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, birim alanlı üçgenleri koruyan dönüşümler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise, birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşümler ele alınmıştır.

2021, v + 29 sayfa

Anahtar Kelimeler: Öklidyen uzay, Öklidyen hareket, afin dönüşüm, hiperbolik uzay, alan-koruyan dönüşümler, çevre-koruyan dönüşümler, izometri, reel iç çarpım uzayları, Lineer ortogonal dönüşüm.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON THE MAPPINGS WHICH
PRESERVİNG TRİANGLES WITH UNIT
AREA AND UNIT PERIMETER

Leyla ASLAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Oğuzhan DEMİREL

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, the basic required concepts for our study are given. In the third chapter we considered the transformations which preserve the triangles with unit area. In the fourth chapter we dealed with the transformations preserving triangles with unit perimeter.

2021, v + 29 pages

Key Words: Euclidean space, Euclidean motion, affine transformation, hyperbolic space, area preserving mappings, perimeter-preserving mappings, isometry, real ınner product spaces, linear orthogonal transformation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında araştırmalarımı yönlendiren, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan danışman hocam Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşım Damla TOPAL ARI 'ya teşekkür ederim.

Leyla ASLAN

Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\|\Delta xyz\|$	n-boyutlu Öklid uzayında Δxyz üçgenin çevresi
$\Delta(x, y, z)$	n-boyutlu Öklid uzayında Δxyz üçgenin Alanı
$\angle(x, y)$	n-boyutlu Öklid uzayında x ve y arasındaki açı
$(x - y)$	n- boyutlu Öklid uzayında xy – kenarı
$\|x - y\|$	n-boyutlu Öklid uzayında x ve y arasındaki uzaklık
$x \perp y$	n-boyutlu Öklid uzayında x noktasının y noktasına dikliği
$\langle\ ,\ \rangle$	iç çarpım
$\\|.\\|$	Norm
$\|\ \|$	Modül

1. GİRİŞ

Afin dönüşümler geometride oldukça önemli yere sahiptir. Afin dönüşümler doğruların ve hiperdüzlemlerin, üçgenlerin, paralelkenarların, doğru parçalarının, n-kenarlı çokgenlerin, paralelliğin, aynı (paralel) doğru üstündeki doğru parçalarının uzunluklarının oranlarının ve üçgenlerin alanlarının oranlarının korunduğu özel dönüşümler olup bu dönüşümler birçok matematikçi tarafından ele alınmış ve bu dönüşümler doğrular, hiperdüzlemler, üçgenler vb. birçok geometrik objeler yardımıyla karakterize edilmiştir. Örneğin (Jeffers 2000) Öklidyen $n-$uzaydan kendisine tanımlı birebir-örten bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün doğruları koruması durumunda bir afin dönüşüm olduğunu kanıtlamıştır. (Li ve Wang 2005) birebirlik ya da örtenlik koşulunu kullanmadan doğruları koruyan bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün bir afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşulun f nin non-dejenere olması gerektiğini (yani $f(\mathbb{R}^n)$ nin bir çember tarafından kapsanmaması gerektiğini) gösterdiler. Li daha sonra bu sonucu $r-$hiperdüzlemleri koruyan bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün bir afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşulun f nin non-dejenere olması gerektiğini göstererek daha genel bir sonuç elde etmiştir. (Chubarev ve Pinelis 1999) $r-$hiperdüzlemleri koruyan örten bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün bir afin dönüşüm olması gerektiğini gösterdiler. (Li ve Wang 2009) birebir-örten bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün afin dönüşüm olabilmesi için gerek ve yeter koşulun f nin üçgensel bölge koruyan dönüşüm olması gerektiğini ispatladılar. Aynı çalışmada (Li ve Wang) birebir-örten bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün afin dönüşüm olabilmesi için gerek ve yeter koşulun f nin üçgen koruyan bir dönüşüm olması gerektiğini de kanıtladılar. Afin dönüşümlerle ilgili en meşhur teorem ise afin dönüşümlerin temel teoremi olarak bilinen "Doğrusal olmayan üç noktayı doğrusal olmayan üç noktaya eşleyen bir ve yalnız bir afin dönüşüm vardır" biçimindeki teoremdir. Bu teorem geometrideki en temel teoremlerin ispatlarında kullanılır. Bir afin dönüşüm uzaklığı korumak zorunda değildir. Literatürde Martin teoremi olarak bilinen fakat Lester tarafından yayınlanan aşağıdaki teoremler birim alanlı ve birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşümlerin birer uzaklık koruyan afin dönüşüm olması gerektiğini göstermektedir. Daha açık olarak $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(1 < n < \infty)$ biçiminde tanımlı bir f fonksiyonu birim alanlı üçgenleri koruyorsa bu durumda f nin bir uzaklık koruyan afin dönüşüm olması gerekmektedir. Bu teoremi (Lester 1985) de $n = 2$ için ispatlarken, (Lester 1986) de ise farklı bir ispat tekniği kullanarak $(2 < n < \infty)$ için ispatlamıştır. Lester daha sonra bu teoremdeki "birim alanlı üçgenleri koruyan dönüşümler" yerine "birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşümleri" alarak aynı sonuca ulaşmıştır. Uzaklık koruyan bir afin dönüşüm

$$f(x) = w(x) + t$$

biçiminde yazılıp, burada w bir lineer ortogonal dönüşüm olup t ise öteleme vektörüdür. (Benz 2004) ise sonlu boyutlu olmayan bir iç çarpım uzayında

$$f(x) = w(x) + t$$

biçiminde yazılmayan fakat birim alanlı üçgenleri koruyan dönüşümlerin varlığını kanıtlamıştır. Bu çalışmada Lester'in ispatlamış olduğu "Martin çevre teoreminin" hem $n = 2$ için hem de $2 < n < \infty$ için geçerli bir ispatını vereceğiz. Bu ispatta n −boyutlu dönel elipsodin bazı geometrik özelliklerinden yararlanacağız.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 X bir vektör uzayı olsun. $x, y \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan

$$\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

fonksiyonuna X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle , \rangle)$ ikilisine ise bir iç çarpım uzayı denir.

i) $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

iii) $\forall x, y \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle = \langle x, cy \rangle$

iv) $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$

Tanım 2.2 Üzerinde iç çarpım fonksiyonu tanımlanan sonlu boyutlu vektör uzayı Öklid uzay olarak tanımlanır ve E^n ile gösterilir. Burada n sayısı Öklid uzayının boyutudur.

Tanım 2.3 X bir küme olmak üzere

i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır.
ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri özelliği)
iii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Tanım 2.4 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay olsun. $f : X \to Y$ dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani $\forall\, x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \rho\big(f(x), f(y)\big)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna izometri denir.

Tanım 2.5 E^2 iki boyutlu Öklid uzayı olmak üzere $f : E^2 \to E^2$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in E^2$ için $|x - y| = \rho$ iken $|f(x) - f(y)| = \rho$ oluyorsa Öklidyen hareket denir (Lester 1985).

Tanım 2.6 $E \neq \emptyset$ bir küme ve X de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi : E \times E \to X$$

dönüşümü $p, q \in E$ için

$$(p, q) \to \psi(p, q) \in X$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise E kümesine X ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i) $\forall p, q, r \in E$ için $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$

ii) $\forall p \in E$ ve $\forall \alpha \in X$ için $\overrightarrow{pq} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $q \in E$ noktası vardır.

$\overrightarrow{pq}$ vektöründe p noktasına başlangıç noktası ve q noktasına uç noktası denir.

Tanım 2.7 E bir afin uzay olmak üzere bir

$$\psi : E \to E$$

dönüşümüne karşılık gelen ψ dönüşümü herhangi bir $p \in E$ noktası için lineer ise f dönüşümüne afin dönüşüm denir.

Afin dönüşüm ile ilgili bazı özellikler şunlardır

1) Afin dönüşüm doğrular arasındaki açıları korumak zorunda değildir.
2) Afin dönüşüm paralel doğruları paralel doğrulara götürür.
3) Afin dönüşüm doğruları doğrulara götürür.
4) Afin dönüşüm n-kenarlı çokgenleri n-kenarlı çokgenlere götürür.
5) Afin dönüşüm iki paralelkenarın uzunlukları oranlarını korur.
6) Afin dönüşüm iki şeklin alanları oranını korur.
7) İki afin dönüşümün bileşkesi bir afin dönüşümdür.
8) Bir afin dönüşümün tersi yine bir afin dönüşümdür.

Teorem 2.8 (Afin dönüşümlerin temel teoremi) Her biri üç noktadan oluşan iki küme verildiğinde, bir kümeyi diğerine eşleyen belirli bir sıraya göre eşleyen tek bir afin dönüşüm vardır.

Sonuç 2.9

(i) Verilen herhangi iki üçgenin birini diğerine götüren bir afin dönüşüm vardır.
(ii) Verilen herhangi iki paralelkenarın birini diğerine götüren bir afin dönüşüm vardır.

Teorem 2.10 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu birebir, örten olmak üzere f doğruları doğrulara götürüyorsa afindir (Jeffers 2000).

Tanım 2.11 X reel iç çarpım uzayı olmak üzere

$$w : X \to X$$
$$x \mapsto w(x)$$

dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa w fonksiyonuna X üzerinde ortogonal dönüşüm denir.

i) $w(x+y) = w(x) + w(y)$
ii) $w(cx) = cw(x)$
iii) $\langle x, y \rangle = \langle w(x), w(y) \rangle$

ortogonal dönüşümler Öklidyen uzaklıkları korur.

Tanım 2.12 (Beckman-Quarles Teoremi) $f : E^n \to E^n$ $(2 \leq n < \infty)$ dönüşümü $\rho > 0$ için ρ-uzaklığını koruyorsa yani $|x - y| = \rho$ olacak biçimdeki her $x, y \in E^n$ için $|f(x) - f(y)| = \rho$ oluyorsa f kendi üzerine örten bir Öklidyen harekettir (Beckman-Quarless 1953).

Tanım 2.13 E ve F iki küme olsun. Eğer $E \to F$ birebir eşlemesi $(E \sim F)$ var ise o zaman E ve F aynı kardinaliteye sahiptir denir ve $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliği) $(X, \langle\, ,\rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

eşitsizliğine Cauchy – Schwarz eşitsizliği denir.

3. BİRİM ALANLI ÜÇGENLERİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Geometrik dönüşümler genellikle korudukları özellikler ile karakterize edilir. Örneğin reel invers düzlemde Möbius dönüşümleri, aynı çember üstünde bulunan nokta dörtlülerini koruyan dönüşümler olarak tanımlanabilir (Schwerdtfeger 1979). Klasik bir örnek daha vermek gerekirse; $\mathbb{R}^2$ nin doğrusullağı koruyan birebir ve örten dönüşümleri afin dönüşümleri karakterize eder. Bu teorem afin geometrinin temel teoremi olarak bilinir. Bu teorem $\mathbb{R}^n$ uzayında da geçerlidir.
Benzer şekilde Öklid düzleminin dönüşümleri de karakterize edilebilir. Beckman ve Quarles (Beckman-Quarles 1953) E^n $(2 \leq n \leq \infty)$ uzayından kendisine tanımlı bir f dönüşümü $|x-y| = \rho$ olacak biçimde $\forall x, y \in E^n$ için $|f(x) - f(y)| = \rho$ koşulunu sağladığı taktirde bir Öklidyen hareket olduğunu gösterdiler. Bu teorem sabit bir ρ uzaklığını koruyan dönüşümlerin tüm uzaklıkları koruması gerektirdiğini göstermektedir.

Teorem 3.1 (Martin Teoremi) $f : E^2 \to E^2$ biçimindeki birebir ve örten f fonksiyonu

$$\Delta(x, y, z) = 1 \text{ iken } \Delta\big(f(x), f(y), f(z)\big) = 1$$

ilişkisini koruyorsa f, eş-afindir (Lester 1985).

Aşağıda G.Martin'in sonucunun kanıtı verilmiştir.

$f : E^2 \to E^2$, $\forall x, y, z \in E^2$ olmak üzere $f(x) = \bar{x}$ birebir ve örten dönüşüm olsun. $\Delta(x, y, z) = 1$ iken $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1$ dir. $a, b \in E^2$ ve $a \neq b$ olsun. $\Delta(a, b, x) = 1$ olacak şekilde x noktalarının geometrik yeri ab doğrusuna paralel olan doğru çiftidir.

Aşağıdaki Lemma paralel doğru çiftlerinin farklı doğrular üzerindeki nokta çiftlerini karakterize eder.

Lemma 3.2 p_1 ve q_1 noktalarından geçen iki paralel doğru verilsin. p_1 ve q_1 noktasının farklı doğrular üzerinde olması için gerek ve yeter şart $i = 1,2,3$ ve $j = 2,3$ olmak üzere bu doğrular üstündeki noktalarla tanımlı $\Delta p_1 q_i p_j$, $\Delta q_1 p_i q_j$ biçiminde alanları 1 birim olan 12 üçgenin var olmasıdır (Lester 1985).

İspat.
$\Rightarrow$ p_1 ve q_1 farklı doğrular üzerinde olsun. p_i' ler aynı doğru üzerinde, q_i' ler ise diğer doğru üzerinde olsun. Bu noktalar

$$|p_1 - p_2| = |p_1 - p_3| = |q_1 - q_2| = |q_1 - q_3| = 2\delta^{-1}$$

eşitliğini sağlayacak biçimde olsun. Burada δ, iki doğru arasındaki uzaklığı göstermektedir.

Bu durumda alanları 1 birim olan 12 üçgen vardır.

$\Leftarrow$ Şimdi $\boldsymbol{p_1}$ ve q_1' in aynı doğru üzerinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda istenilen özellikte p_2, q_2, p_3, q_3 noktaları vardır ve bu noktalar diğer doğru üzerinde olup buradan

$$|p_2 - q_2| = |p_3 - q_2| = |p_2 - q_3| = |p_3 - q_3| = 2\delta^{-1}$$

elde edilir, fakat bu mümkün değildir. ■

Buradan paralel doğru çiftlerindeki her bir doğru bir doğruya dönüşür. Böylece $f(x) = \bar{x}$ dönüşümü doğrusal noktaları doğrusal noktalara götürür. Bununla birlikte afin geometrinin temel teoreminden f dönüşümü afindir. Ayrıca, alanı 1 birim olan üçgenleri koruduğundan, dönüşümün eş afin olduğu kolayca söylenebilir. Böylece Teorem 3.1 ispatlanmıştır.

Teorem 3.3 (Martin Teoremi) $E^{\boldsymbol{n}}$ $(3 \leq n < \infty)$ kendisi üzerine tanımlı Öklid uzayı olmak üzere birim alanlı üçgenleri koruyan $f(x) = \bar{x}$ birebir dönüşümü verilsin. Bu durumda $f(x) = \bar{x}$ dönüşümü bir Öklidyen harekettir (Lester 1986).

Bu teoremi ispatlamak için bazı sonuçlara ihtiyaç duyulur.

Teorem 3.4 Δxyz üçgeninin alanının 1 olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle x - z, x - z\rangle\langle y - z, y - z\rangle - \langle x - y, y - z\rangle^2 = 4$$

olmasıdır (Lester 1986).

İspat.

$\Delta(x, y, z) = 1$ olsun. $z = 0$ olduğunu kabul edilirse

$$\begin{aligned} 4\big(\Delta(x, y, 0)\big)^2 &= 4\left(\frac{1}{2}|x - z|.|y - z|\, sin(\angle(x, y))\right)^2 \\ &= |x|^2|y|^2\sin^2(\angle(x, y)) \\ &= \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle(1 - \cos^2(\angle(x, y)) \\ &= \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2 \end{aligned}$$

olup

$$4 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2$$

elde edilir.

$z \neq 0$ olduğu kabul edildiğinde ve $\Delta(x, y, z) = 1$ den

$$\langle x - z, x - z\rangle\langle y - z, y - z\rangle - \langle x - y, y - z\rangle^2 = 4$$

olduğu kolayca görülür. ■

Lemma 3.5 $|x - z| = |y - z| = \sqrt{2}$ ve $(x - z) \perp (y - z)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki üçgenlerin alanı 1 olacak şekilde p, q ve r noktaları vardır (Lester 1985).

i) $\Delta(z, x, p)$, $\Delta(z, x, q)$, $\Delta(z, x, r)$, $\Delta(z, y, q)$, $\Delta(z, y, p)$, $\Delta(z, y, r)$

ii) $\Delta(p, x, q)$, $\Delta(q, x, r)$, $\Delta(p, z, q)$, $\Delta(q, z, r)$, $\Delta(p, y, q)$, $\Delta(q, y, r)$

İspat. $z = 0$ olduğu kabul edilsin. x ve y ye dik olan s vektörü seçilsin. $\langle s, s\rangle = \frac{3}{2}$ olsun, ve

$$p = \frac{1}{2}(x - y) + s, \qquad q = \frac{1}{2}(x + y) + s, \qquad r = \frac{1}{2}(y - x) + s$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda (i) ve (ii) deki üçgenlerin alanları 1 birimdir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Dikkat edilecek olursa Δxyz üçgeninінde alanı 1 dir. Teorem 3.4 de $f(x) = \bar{x}$ dönüşümü altında x, y, z, p, q ve r noktaları yardımıyla tanımlanan birim alanlı üçgenlerin görüntüleri de birim alanlıdır.

Lemma 3.6 $x, p, q \in E^n$ noktaları için $\Delta(0, x, p)$, $\Delta(0, x, q)$, $\Delta(p, 0, q)$, $\Delta(p, x, q)$ üçgenleri birim alanlı olsun. Bu durumda

$$p + q = x \quad \text{veya} \quad |p - q| = |x|$$

dir (Lester 1986).

İspat. x e ortogonal olan s ve t vektörleri ve ω, σ skalerleri için

$$p = \omega x + s, \qquad q = \sigma x + t$$

olsun. $\Delta 0xp$ ve $\Delta 0xq$ üçgenlerinin alanları 1 olduğundan Teorem 3.4 deki eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta(x,p,0)=1 &\Rightarrow \langle x,x\rangle\langle p,p\rangle-\langle x,p\rangle^2=4\\ &\Rightarrow \langle x,x\rangle\langle \omega x+s,\omega x+s\rangle-\langle x,\omega x+s\rangle^2=4\\ &\Rightarrow \langle x,x\rangle(\omega^2\langle x,x\rangle+\langle s,s\rangle)-\omega^2\langle x,x\rangle^2=4\\ &\Rightarrow \langle x,x\rangle\langle s,s\rangle=4\\ &\Rightarrow \langle s,s\rangle=4\langle x,x\rangle^{-1}=\rho>0\end{aligned}$$

bulunur.

$\Delta 0xq$ üçgeni için de Teorem 3.4 deki formül kullanılarak benzer işlemler yapılırsa

$$\langle t,t\rangle=4\langle x,x\rangle^{-1}=\rho>0$$

elde edilir. $\lambda=\langle t,s\rangle$ olsun. Bu durumda Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$\rho^2\geq\lambda^2$$

olur. Buradan $\rho+\lambda$ ve $\rho-\lambda$ negatif değillerdir.

$\Delta p0q$ ve Δpxq üçgenlerinin de alanları 1 olduğundan Teorem 3.4 deki eşitlik ve $\langle t,t\rangle=\langle s,s\rangle=4\langle x,x\rangle^{-1}$ eşitliği

$$\begin{aligned}\Delta(p,q,0)=1 &\Rightarrow \langle p,p\rangle\langle q,q\rangle-\langle p,q\rangle^2=4\\ &\Rightarrow \langle \omega x+s,\omega x+s\rangle\langle \sigma x+t,\sigma x+t\rangle-\langle \omega x+s,\sigma x+t\rangle^2=4\\ &\Rightarrow (\omega^2\langle x,x\rangle+\langle s,s\rangle)(\sigma^2\langle x,x\rangle+\langle t,t\rangle)-(\omega\sigma\langle x,x\rangle+\langle s,t\rangle)^2=4\\ &\Rightarrow (\rho^2-\lambda^2)+4\omega^2+4\sigma^2-2\omega\sigma\lambda\langle x,x\rangle=4 \qquad (3.1)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler Δpxq üçgeni içinde yapılırsa

$$(\rho^2-\sigma^2)+4(\omega-1)^2+4(\sigma-1)^2-2(\omega-1)(\sigma-1)\lambda\langle x,x\rangle=4$$

elde edilir. Elde edilen bu iki denklem önce taraf tarafa çıkarılırsa

$$-4(\omega+\sigma-1)+\lambda\langle x,x\rangle(\omega+\sigma-1)=0$$

bulunur. Son eşitlik $\frac{1}{\langle x,x\rangle}$ ile çarpılırsa

$$(\omega+\sigma-1)(\rho-\lambda)=0$$

elde edilir. Buradan $\omega+\sigma=1$ veya $\rho=\lambda$ bulunur.

i) $\rho=\lambda$ olsun. Bu durumda $t=s$ olur. Böylece

$$p-q=\omega x+s-\sigma x-t$$

$$p-q=(\omega-\sigma)x$$

bulunur. Ayrıca $\lambda\langle x,x\rangle=4$ olduğundan (3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(\omega-\sigma)^2=1$$

elde edilir. Buradan

$$|p-q|=|x|$$

bulunur.

ii) $\rho\neq\mp\lambda$ olsun. Bu durumda $\omega+\sigma=1$ dir. Buradan her iki tarafın karesi alınırsa

$$\omega^2+\sigma^2=1-2\omega\sigma$$

bulunur ve (3.1) eşitliğinde kullanılırsa $4=\rho\langle x,x\rangle$ eşitliğinden

$$2\omega\sigma\langle x,x\rangle=\rho-\lambda \tag{3.2}$$

bulunur. Böylece

$$p-q=(\omega-\sigma)x+s-t$$

olup (3.2) den

$$|p-q|^2=(\omega-\sigma)^2\langle x,x\rangle+2(\rho-\lambda)$$

$$=(\omega+\sigma)^2\langle x,x\rangle$$

$$= \langle x, x \rangle$$

elde edilir. Böylece

$$|p - q| = |x|$$

elde edilir. ■

$\rho = -\lambda \neq \lambda$ durumu incelendiğinde $s = -t$ olur ve $\omega + \sigma = 1$ dir. Buradan $p + q = x$ bulunur.

Lemma 3.7 $\Delta 0xy$, $\Delta 0yq$, $\Delta 0xp$ ve Δpyq üçgenlerinin alanları 1 olsun. Bu durumda $p + q = x$ ise $y \perp (y - x)$ dir (Lester 1986).

İspat. x ve y ye ortogonal olan s ve t vektörleri, α, β, γ ve δ skalerleri için

$$p := \alpha x + \beta y + s \quad \text{ve} \quad q := \gamma x + \delta y + t$$

olarak tanımlansın. $p + q = x$ olduğundan

$$p + q = x \Rightarrow (\alpha x + \beta y + s) + (\gamma x + \delta y + t) = x$$

$$\Rightarrow x(\alpha + \gamma) + y(\beta + \delta) + s + t = x$$

olup buradan $\alpha + \gamma = 1, \beta + \delta = 0$ ve $t = -s$ olmalıdır. O halde

$$\langle t, t \rangle = \langle s, s \rangle = \langle t, -s \rangle$$

olur. $\Delta 0xy$ üçgeninin alanı 1 olduğundan,

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 = 4$$

olup, $\Delta 0yp$ ve $\Delta 0yq$ üçgenleri yardımıyla

$$4(1 - \alpha^2) = \langle y, y \rangle \langle s, s \rangle = 4(1 - \gamma^2) \tag{3.3}$$

elde edilir. Böylece $\alpha^2 = \gamma^2$ dir. Buradan $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ bulunup (3.3) eşitliğinde yazıldığında $\langle y, y \rangle \langle s, s \rangle = 3$ bulunur.

$\Delta 0xp$ ve Δpyq üçgenlerinin alanları 1 olduğundan

$$4(1-\beta^2) = \langle x, x\rangle\langle s, s\rangle$$

ve

$$4(1-\beta^2) = \langle x, x\rangle\langle s, s\rangle + 4\langle s, s\rangle\langle y, (y-x)\rangle$$

elde edilir. Bu iki denklemin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları eşitlenirse

$$4\langle s, s\rangle\langle y, (y-x)\rangle = 0$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının 4 ile bölünmesiyle

$$\langle s, s\rangle\langle y, (y-x)\rangle = 0$$

elde edilir. $\langle y, y\rangle\langle s, s\rangle = 3$ olduğundan $\langle s, s\rangle = 3\langle y, y\rangle^{-1}$ olup $\langle s, s\rangle \neq 0$ dır. Böylece $\langle y, (y-x)\rangle = 0$ olup $y \perp (y-x)$ dir. ■

Lemma 3.8 $x, y, z, p, q, r \in E^n$ için aşağıdaki üçgenlerin alanları 1 olsun.

i) Δzxp, Δzxq, Δzxr, Δzyp, Δzyq, Δzyr
ii) Δpxq, Δqxr, Δpzq, Δqzr, Δpyq, Δqyr
iii) Δxyz

Bu durumda $|x-z| = |y-z|$ dur (Lester 1986).

İspat. $z = 0$ olsun. $p + q = x$ olduğunu kabul edelim. O halde $p + q \neq y$ ve Lemma 3.7 dan $y \perp (y-x)$ dir. x, $(y-x)$ ye dik olmadığından (Lemma 3.7 de x ve y yer değiştirilerek p nin yerine r konularak) $q + r \neq y$, böylece $|q-r| = |y|$ dir (Lemma 3.6 de x ve y nin yeri değiştirilerek p yerine r konularak). Fakat $q + r \neq a$ $(p = r$ değilse) yani $|q-r| = |x|$ dir (Lemma 3.6 de p yerine r konularak). O halde $|x| = |y|$ olmalıdır. Fakat $y \perp (y-x)$ olduğundan bu imkansızdır. Böylece $p + q \neq x$ dir.

Bu durumda Lemma 3.6 dan $|p-q| = |x|$ olup benzer şekilde $|p-q| = |y|$, yani $|x| = |y|$ dir. ■

Şimdi Teorem 3.3 ün ispatına geçilebilir. Yani f dönüşümün bir hareket olduğu gösterilebilir. Öncelikle $|x-z| = |y-z| = \sqrt{2}$ ve $(x-y) \perp (y-z)$ olsun. Bu durumda Lemma 3.6 nın koşullarını sağlayacak şekilde p, q, r noktaları vardır.

$f(x) = \bar{x}$ dönüşümü altında bu noktaların görüntüleri Lemma 3.8 in koşullarını sağlar, yani $|\bar{x} - \bar{z}| = |\bar{y} - \bar{z}|$ dir.

$x_1, x_2, z \in E^n$ için $|x_1 - z| = |x_2 - z| = \sqrt{2}$ olsun. Bu durumda $|y - z| = \sqrt{2}$ olacak biçimde $y \in E^n$ noktası vardır öyle ki $(y - z) \perp (x_1 - z)$ ve $(y - z) \perp (x_2 - z)$ dir. Böylece $|\overline{x_1} - z| = |\bar{y} - \bar{z}| = |\overline{x_2} - z|$ dir.

Son olarak $x, y, z, t \in E^n$ için $|x - y| = |z - t|$ olsun. E^n de $\sqrt{2}$ uzunluğundaki herhangi iki doğru parçası uç uca eklenmiş olan $\sqrt{2}$ uzunluğunda doğru parçaları ile birleştirildiğinden, $|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{z} - \bar{t}|$ dir.

Beckman-Quarles teoreminden yola çıkarak $f(x) = \bar{x}$ dönüşümü bir hareketin skaler çarpımıdır. Birim alanlı üçgenleri koruduğundan bu dönüşüm bir harekettir. Bu Teorem 3.3 ün kanıtını tamamlar. ■

June Lester aşağıdaki sonucun ispatını vermiştir.

Sonuç 3.9 X reel iç çarpım uzayı sonlu-boyutlu ise, $\forall x \in X$ için f fonksiyonu

$$f(x) = w(x) + t \tag{3.4}$$

formunda yazılmalıdır. Burada $w : X \to X$ ortogonal lineer dönüşüm ve t, X reel iç çarpım uzayının sabit elemanıdır (Lester 1986).

W.Benz ise aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.10 X sonsuz-boyutlu reel iç çarpım uzayı olmak üzere birim alanlı üçgenleri koruyan ve (3.4) formunda yazılamayan $f : X \to X$ birebir dönüşümü vardır (Benz 2004).

İspat. $x, y, z \in X$ olmak üzere $\Delta(x, y, z) \geq 0$ olarak tanımlansın. Buradan

$$[\langle x - y, y - z \rangle]^2 = \langle (x - y)^2, (y - z)^2 \rangle - 4[\Delta(x, y, z)]^2 \tag{3.5}$$

dir. B; card$(B) \geq \aleph$ olacak biçimde bir küme ve X ise $\{b \in B \mid x(b) \neq 0\}$ sonlu olacak biçimdeki tüm

$$x : B \to \mathbb{R}$$

fonksiyonların kümesi olsun. x fonksiyonu

$$x = \sum_{b \in B} x(b).b$$

formunda yazılabilir. Bu notasyona göre; $b \in B$ elemanı, B kümesindeki $b' \neq b$ özelliğindeki tüm b' elemanları için $x(b) = 1$ ve $x(b') = 0$ olacak biçimde $x \in X$ elemanına eşittir.

$x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $x + y,\ \lambda x,\ xy$ verilsin ve

$$x + y := \sum_{b \in B} [x(b) + y(b)]b,$$

$$\lambda x := \sum_{b \in B} [\lambda x(b)]b,$$

$$xy := \sum_{b \in B} [x(b)y(b)]b$$

olarak tanımlansın. Bu durumda X; boyutu $\mathrm{card}(B)$ olan ve tabanı B olan reel iç çarpım uzayıdır. Farklı elemanlardan oluşan $\{b_1, \dots, b_n\}$ kümesi, B nin sonlu alt kümesi ise bu durumda r_i reel olmak üzere $(i = 1, \dots, n)$, $r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n$ formunda $\aleph^n = \aleph$ elemanları kesin olarak vardır. B nin tüm sonlu alt kümelerinin kümesinin kardinalitesi $\mathrm{card}(B)$ olduğundan, $B \subset X$ den

$$\mathrm{card}(X) \leq \aleph\, \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(X)$$

elde edilir. Yani $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(B)$. Buradan $\varphi : X \to B$ birebir ve örten dönüşümü vardır. Eğer $\mu : B \to B$, B nin keyfi bir birebir ve öten dönüşümü ise bu durumda

$$(\mu\varphi) : X \to B$$

olacak biçimde X ve B arasında birebir ve örten dönüşüm vardır.

Şimdi $\psi : X \to B$ birebir ve örten dönüşüm olsun ve $\forall x \in X$ için

$$f(x) := \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,.\,\psi(x)$$

tanımlansın. Buradan (3.5) den tüm farklı $x, y, z \in X$ için

$$\Delta\big(f(x), f(y), f(z)\big) = 1 \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır. Böylece f birim alanlı üçgenleri korur. Fakat (3.4) formunda değildir. ■

Teorem 3.11 X reel iç çarpım uzayı olmak üzere $f : X \to X$ dönüşümü birim alanlı üçgenleri korusun. Eğer

$$\Delta(x, y, z) = \Delta\big(f(x), f(y), f(z)\big) \tag{3.7}$$

olacak biçimde kenar uzunluğu $\sqrt{2}$ olan eşkenar Δxyz üçgeni varsa, bu durumda f (3.4) formunda olmalıdır (Benz 2004).

İspat. X; boyutu 3'den büyük olacak biçimde bir reel iç çarpım uzayı olmak üzere $f : X \to X$ dönüşümü birim alanlı üçgenleri korusun. Bu durumda, $\forall x, y \in X$ için $\|x - y\| = \sqrt{2}$ olduğunda

$$\|f(x) - f(y)\| = k$$

olacak biçimde $k > 0$ reel sayısı vardır (Lester 1985).

Şimdi (3.7) yi sağlayan ve $x, y, z \in X$ olmak üzere kenar uzunluğu $\sqrt{2}$ olan eşkenar üçgen olduğu kabul edilsin. Buradan,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(y) - f(z)\| = \|f(z) - f(x)\| = k$$

ve

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \Delta(x, y, z) = \Delta\big(f(x), f(y), f(z)\big) = \frac{k^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

olduğundan $k = \sqrt{2}$ bulunur. Böylece f, $\sqrt{2}$ uzaklığını korur. Ayrıca f, 2 uzaklığını da korur: $\| y - z \| = 2$ olacak biçimde $y, z \in X$ seçilsin.

$$\|x - y\| = \sqrt{2} = \|x - z\|$$

olacak biçimde $x \in X$ alınsın.

$t := \|f(y) - f(z)\|$ olsun. $\Delta(x, y, z) = 1$ olduğundan ve f birim alanlı üçgenleri koruduğundan

$$1 = \Delta\big(f(x), f(y), f(z)\big) = \frac{t}{2}\sqrt{4 - \frac{t^2}{4}},$$

elde edilir. Buradan $t = 2$ dir.

Lemma 3.12 $\alpha := 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ve $\beta := 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ olmak üzere $y, z \in X$ için $\|y - z\| = \alpha$ olsun. Bu durumda

$$\|f(y) - f(z)\| = \|y - z\|$$

dir (Benz 2004).

İspat.

i) $x \in X$ olmak üzere $\|x - y\| = 2 = \|y - z\|$ alınsın. $t := \|f(y) - f(z)\|$ olsun. $\Delta(x, y, z) = 1$ olduğundan

$$1 = \Delta\big(f(x), f(y), f(z)\big) = \frac{t}{2}\sqrt{4 - \frac{t^2}{4}},$$

elde edilir, yani $t \in \{\alpha, \beta\}$ dır.

ii) $x' \in X$ olmak üzere $\|x' - y\| = \sqrt{2} = \|x' - z\|$ alınsın. Buradan f, $\sqrt{2}$ uzaklığını koruduğundan

$$t = \|f(y) - f(z)\| \leq \|f(y) - f(x')\| + \|f(x') - f(z)\| = 2\sqrt{2}$$

bulunur. $t \in \{\alpha, \beta\}$ olduğu göz önünde tutulursa $t \leq 2\sqrt{2}$ olup $t = \alpha$ olur. ■

f dönüşümü α ve 2 uzaklığını korur. Ayrıca $2 > \sqrt{3}.\alpha$ dır. Böylece f, (3.4) formunu sağlar (Radó vd. 1986). ■

4. BİRİM ÇEVRELİ ÜÇGENLERİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde Öklid uzayında birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşümlerden bahsedilecektir. Çevre uzunluğu 1 birim olan üçgenler "birim çevreli üçgen" olarak adlandırılacaktır. Bir birim çevreli üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçüktür.

Teorem 4.1 Öklid düzleminden kendisi üzerine tanımlı birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşümler Öklidyen harekettir (Lester 1986).

Lemma 4.2 E^2 Öklid düzlemi olmak üzere x, y, z ve t noktaları tarafından oluşturulan dört üçgenin tümü birim çevreli üçgenler ise bu durumda x, y, z, t noktaları bir dikdörtgenin köşe noktalarıdır (Lester 1985).

İspat. x, y, z, t noktaları ile oluşturulan üçgenler birim çevreli üçgenler ise bu durumda

$$|x-y| + |y-z| + |x-z| = 1, \qquad |x-z| + |z-t| + |t-a| = 1$$

$$|x-y| + |y-t| + |t-x| = 1, \qquad |y-t| + |t-z| + |z-y| = 1$$

olur. Buradan $|x-y| = |z-t|$, $|x-t| = |y-z|$ ve $|x-z| = |y-t|$ bulunur. Böylece $xyzt$ eşit uzunlukta köşegenlere sahip bir paralelkenardır. Yani bir dikdörtgendir. ■

Buradan bir birim çevreli dik üçgenin köşelerinin görüntüsü bir birim dik üçgenin köşeleridir fakat dik açıların korunması ile ilgili kesin bilgi yoktur. Bu nedenle birim dik üçgenler daha yakından incelenmelidir.

Lemma 4.3 E^2 Öklid uzay olmak üzere $|x-y| < \frac{1}{2}$ olacak biçimde $x, y \in E^2$ verilsin. Eğer

i) $|x-y| > \sqrt{2} - 1$ ise xy kenarı dört birim çevreli dik üçgenin hipotenüsüdür.

ii) $|x-y| = \sqrt{2} - 1$ ise xy kenarı iki birim çevreli dik üçgenin hipotenüsüdür.

iii) $|x-y| < \sqrt{2} - 1$ ise xy kenarı hiçbir birim çevreli dik üçgenin hipotenüsü değildir (Lester 1985).

İspat. $|x - z| = \alpha,\ |y - z| = \beta$ olacak biçimde birim çevreli dik Δxyz üçgeni seçilsin. Bu durumda

$$\alpha + \beta + |x - y| = 1 \tag{4.1}$$

olur. Birim dik üçgende Pisagor teoreminden

$$\alpha^2 + \beta^2 = |x - y|^2 \tag{4.2}$$

bulunur. (4.1) ve (4.2) denkleminden

$$[1 - (|x - y| + \beta)]^2 + \beta^2 = |x - y|^2$$

elde edilir. Buradan

$$\beta^2 - (1 - |x - y|)\beta + \left(\frac{1}{2} - |x - y|\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri incelenirse $|x - y| > \sqrt{2} - 1$ için iki kök, $|x - y| = \sqrt{2} - 1$ için bir kök, aksi taktirde hiç kök olmadığı kolayca görülür. ■

Sonuç 4.4 $\sqrt{2} - 1 < |x - y| < \frac{1}{2}$ özelliğindeki $\forall\, x, y \in E^2$ için $\sqrt{2} - 1 < |\bar{x} - \bar{y}| < \frac{1}{2}$ olması için gerek ve yeter koşul bir kenarı xy olacak biçimde sekiz tane birim çevreli dik üçgenin olmasıdır (Lester 1985).

Şimdi bazı birim dik üçgenlerin dik-açılarının korunduğu gösterilebilir.

Lemma 4.5 $x, y, z \in E^2$ olmak üzere Δxyz birim çevreli bir dik üçgen olsun. Bu üçgenin dik açısı y de ve $|y - z| > \sqrt{2} - 1$ olsun. Bu durumda $\Delta \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ üçgeni de $\bar{y}$ de dik açılıdır (Lester 1985).

İspat. $|x-z|>|y-z|>\sqrt{2}-1$ olduğundan $|\bar{x}-\bar{z}|>\sqrt{2}-1$ ve $|\bar{y}-\bar{z}|>\sqrt{2}-1$ dir. Buradan $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{z},\ \bar{z}$ de dik-açılı olamaz. Başka bir ifadeyle

$$|\bar{x}-\bar{y}|=\sqrt{|\bar{x}-\bar{z}|+|\bar{y}-\bar{z}|}>\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)>\tfrac{1}{2}$$

dir.

$\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ birim dik üçgeninin $\bar{x}$ de dik-açılı olsun. Merkezi y olan $xypq$ eşkenar dörtgeni ele alınsın. $\Delta pyz, \Delta pyq$ ve Δxyq birim dik üçgen olduklarından $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{z}, \Delta\bar{p}\bar{y}\bar{q}$ ve $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ üçgenleri de birim çevreli dik üçgenlerdir. Belirtilen üçgenlerin hiçbiri $\bar{z}$ veya $\bar{q}$ da dik açılı değillerdir. Şimdi $\bar{x}$ veya $\bar{y}$ de dik açılı olması gereken $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ dik üçgenini ele alalım. Eğer $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ üçgeni $\bar{x}$ de dik-açılı ise $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ üçgeni ile benzerdir.
Yani $|\bar{y}-\bar{q}|=|\bar{y}-\bar{z}|$ dir.
$|\bar{y}-\bar{q}|+|\bar{q}-\bar{p}|+|\bar{y}-\bar{p}|=1=|\bar{y}-\bar{z}|+|\bar{p}-\bar{y}|+|\bar{z}-\bar{p}|$ olup buradan
$|\bar{p}-\bar{q}|=|\bar{p}-\bar{z}|$ dir. Yani $\bar{p},\ \bar{q}\bar{z}$ nin dik açıortayında bulunur. $\bar{p}\neq\bar{x}$ olduğundan, $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{z}$ dik-açılı değildir, yani bir çelişki elde edilir. Şimdi $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ üçgeninin $\bar{y}$ de dik-açılı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\bar{q}$ ve $\bar{z},\ \bar{x}\bar{y}$ kenarının zıt tarafında bulunurlar. Başka bir ifadeyle $\bar{q}=\bar{t}$, burada $q\neq t$ Lemma 4.2 deki gibi x,y,z,t dikdörtgeninin noktalarıdır. $\bar{p}\neq\bar{x}$ olduğundan ve $\Delta\bar{z}\bar{y}\bar{p}$ üçgeni geniş-açılı olmadığından, $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{q}$ üçgeni $\bar{y}$ de dik-açılı olamaz. Böylece $\bar{p}$ de dik açılı olmalıdır. Şimdi $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{z}$ üçgenini ele alalım. Bu üçgen $\bar{z}$ de dik-açılı değildir. $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{z}$ üçgeni $\bar{y}$ de dik açılı ise bu durumda $\bar{p},\ \bar{x}\bar{q}$ üzerinde olmalıdır ($\bar{x}\bar{q},\ \bar{z}\bar{y}$ ye paraleldir). Fakat bu imkansızdır. Çünkü $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ ve $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{q}$ üçgenleri birim çevreli üçgenlerdir. Böylece $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{z}$ üçgeni $\bar{p}$ de dik açılı olmalıdır. Fakat $\bar{p},\ \bar{z}\bar{q}$ doğrusu üzerindedir, böylece $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ üçgeninin içindedir. Hem $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{q}$ hem de $\Delta\bar{p}\bar{y}\bar{q}$ üçgenleri birim çevreli olduğundan imkansızdır. Bu durumda bütün olasılıklar incelenmiş olur. Yani $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ üçgeninin $\bar{x}$ de dik-açılı olduğu varsayımı yoktur. $\Delta\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ üçgeni $\bar{y}$ de dik açılıdır. ∎

Şimdi f dönüşümü için bir hareket olduğu ispatlanabilir. İlk olarak birim çevreli dik üçgenin kenar uzunlukları (hipotenüs olmayan) α ve β ise hipotenüs kuralı ve birim özelliğinden

$$\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

denklemini elde ederiz. Buradan

i) $2\alpha + 2\beta = 1 + 2\alpha\beta$

elde edilir. Bu eşitlikten ise

ii) $\beta > \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

iii) $\beta = 2\alpha$ ise $\beta = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

sonuçları elde edilir.

$x, y \in E^2$ olmak üzere $|x - y| < \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$ ve m, xy kenarının orta noktası olsun. xy kenarının dik açıortayı üzerinde bulunan z noktası için Δxmz ve Δymz birim üçgenler ve m de dik-açılıdırlar.

$$|a - m| = |b - m| < \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right) > \sqrt{2} - 1$$

olduğundan (ii) deki koşuldan $\Delta\bar{x}\bar{m}\bar{z}$ ve $\Delta\bar{y}\bar{m}\bar{z}$ birim çevreli üçgenlerdir ve $\bar{m}$ de dik-açılıdırlar ve Lemma 4.5 den $\bar{m}$, $\bar{x}\bar{y}$ nin orta noktasıdır. Bu tür üçlü noktalar bir araya getirilerek dönüşümün herhangi bir doğru parçasının orta noktasını koruduğu görülebilir. Herhangi bir dik üçgenin dik-açısını koruduğunu görmek kolaydır.

Şimdi $|x - y| = |y - z| = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$ olacak biçimde Δxyz dik-açılı ikizkenar üçgeni verilsin xm ve zn bu üçgenin kenarortayları olsun. Δmyx ve Δnyz üçgenleri birim çevreli ve y de dik-açılı olduğundan $\Delta\bar{m}\bar{y}\bar{x}$ ve $\Delta\bar{n}\bar{y}\bar{z}$ üçgenleri de birim çevrelidir ve $\bar{y}$ de dik açılıdır. $\Delta\bar{m}\bar{y}\bar{x}$ üçgeni için (i) inci koşuldan

$$2|\bar{y} - \bar{m}| + 2|\bar{y} - \bar{x}| = 1 + |\bar{y} - \bar{z}||\bar{y} - \bar{x}|$$

elde edilir. Dolayısıyla $2|\bar{y} - \bar{m}| = |\bar{y} - \bar{z}|$ olduğundan

$$|\bar{y} - \bar{z}| + 2|\bar{y} - \bar{x}| = 1 + |\bar{y} - \bar{z}||\bar{y} - \bar{x}|$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Delta\bar{n}\bar{y}\bar{z}$ üçgeninden

$$2|\bar{y}-\bar{z}|+|\bar{y}-\bar{x}|=1+|\bar{y}-\bar{z}||\bar{y}-\bar{x}|$$

elde edilir. Dolayısıyla $|\bar{y}-\bar{z}|=|\bar{y}-\bar{x}|$ dir. Şimdi, $\Delta\bar{m}\bar{y}\bar{x}$ üçgeninden

$$|\bar{y}-\bar{x}|=|\bar{y}-\bar{z}|=2|\bar{y}-\bar{m}|$$

bulunur. Buradan (iii) bağıntısı kullanılarak $|\bar{y}-\bar{x}|=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ elde edilir.

x ve y noktaları $\rho:=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ uzunluğundan farklı noktalar olabilir. İncelediğimiz dönüşüm E^2 deki noktalar arasında ki uzaklığı korur böylece Beckman-Quarles teoreminden f bir Öklidyen harekettir. ■

Teorem 4.6 E^n $(3\leq n<\infty)$ kendisi üzerine tanımlı Öklid uzayı olmak üzere birim çevreli üçgenleri koruyan $f(x)=\bar{x}$ birebir dönüşümü verilsin. Bu durumda $f(x)=\bar{x}$ dönüşümü bir Öklidyen harekettir (Lester 1986).

Lemma 4.7 E^n Öklid uzayı olmak üzere $x,y,z\in E^n$ seçilsin. $|x-y|=|y-z|=\frac{1}{3}$ ve $\cos\left(\angle(x-y,z-y)\right)=-\frac{1}{3}$ olsun. Bu durumda

$$|\bar{x}-\bar{y}|=|\bar{y}-\bar{z}|$$

dir (Lester 1986).

İspat. E^n nin 3-boyutlu alt uzayında p,q,r,s_1 ve s_2 noktaları verilsin. p,q,r,s_1 ve p,q,r,s_2 köşe noktaları olmak üzere kenar uzunlukları $\frac{1}{3}$ olan düzgün dörtyüzlü verilsin. Düzgün dörtyüzlünün tüm yüzeylerinin çevresi 1 olduğundan görüntülerinde de çevre uzunluğu 1 olur. Yani, $\iota=1,2$ için

$$|\bar{p}-\bar{q}|+|\bar{q}-\bar{s_k}|+|\bar{s_k}-\bar{p}|=1,\qquad |\bar{p}-\bar{r}|+|\bar{r}-\bar{s_k}|+|\bar{s_k}-\bar{p}|=1$$

$$|\bar{q}-\bar{r}|+|\bar{r}-\bar{s_k}|+|\bar{s_k}-\bar{q}|=1,\qquad |\bar{p}-\bar{q}|+|\bar{q}-\bar{r}|+|\bar{r}-\bar{p}|=1$$

olur. Buradan $|\bar{s_k}-\bar{p}|=|\bar{q}-\bar{r}|$, $k=1,2$ bulunur. Dolayısıyla $|\bar{s_1}-\bar{p}|=|\bar{s_2}-\bar{p}|$ dir.

$\cos\left(\angle(x-y,z-y)\right)=-\frac{1}{3}$ olduğu açıktır. Böylece verilen koşulları sağlayan x,y,z noktaları böyle bir dörtyüzlünün parçaları olabilir. Buradan

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{y} - \bar{z}|$$

dir. ■

Sonuç 4.8 E^n Öklid uzayı olmak üzere $x, y, z \in E^n$ verilsin. $|x - y| = |y - z| = \frac{1}{3}$ ve $\angle(x - y, z - y) = 60^{\circ}$ ise

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{y} - \bar{z}|$$

dir (Lester 1986).

İspat. $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \cong 109^{\circ}$ dir. $60^{\circ} + 2\theta < 360^{\circ}$ ve $2\theta - 60^{\circ} > 0^{\circ}$ olduğundan

$$|y - t| = \frac{1}{3} \quad \text{ve} \quad \angle(x - y, t - y) = \angle(t - y, z - y)$$

olacak biçimde $t \in E^n$ vardır. Bu durumda

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{t} - \bar{y}| = |\bar{y} - \bar{z}|$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç olarak kenar uzunluğu $\frac{1}{3}$ olan birim çevreli üçgenler korunur, $\frac{1}{3}$ uzunluğu koruduğundan Beckman-Quarles teoreminden, $f(x) = \bar{x}$ dönüşümü Öklidyen hareket olmalıdır. ■

Şimdi Teorem 4.1 in uzayda basit bir ispatı verilecektir.

Teorem 4.9 $f : E^n \to E^n$ $(2 \leq n < \infty)$ fonksiyonu birim çevreli üçgenleri koruyan birebir örten bir dönüşüm olsun. Bu durumda f Öklidyen harekettir (Demirel vd. 2020).

Lemma 4.10 E^n uzayında $c > 0$ olmak üzere $F_1 = (c, 0,0, \dots ,0)$, $F_2 = (-c, 0,0, \dots ,0)$ noktaları verilsin. Bu iki noktayı köşe noktası kabul eden birim çevreli tüm $\Delta X F_1 F_2$ üçgenleri için X noktalarının geometrik yeri iki noktası delinmiş bir elipsoidtir. Bu elipsoidin denklemi $a + c = \frac{1}{2}$ ve $a^2 = b^2 + c^2$ olmak üzere

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{x_2}^2}{b^2} + \frac{{x_3}^2}{b^2} + \cdots + \frac{{x_n}^2}{b^2} = 1$$

dir. (Demirel vd. 2020)

İspat. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktası ΔXF_1F_2 üçgeni birim çevreli üçgen olacak biçimde bir nokta olsun. O halde

$$|X - F_1| + |X - F_2| + 2c = 1$$

dir.

$|X - F_1| + |X - F_2| = 1 - 2c := 2a$ olsun. Bu durumda $a + c = \frac{1}{2}$ dir.

$$|X - F_1| + |X - F_2| = 2a$$

olup buradan

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} + \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} = 2a$$

olur. Böylece

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} = 2a - \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$$

olup eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(x_1 - c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} + (x_1 + c)^2$$

$$\begin{aligned} &x_1{}^2 - 2x_1c + c^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 \\ &\qquad = 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2} + \quad x_1{}^2 + 2x_1c + c^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$-2x_1c = 2x_1c + 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$$

olup her iki tarafın karesi alınırsa

$$-4x_1c - 4a^2 = -4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$$

$$-4(x_1c - a^2) = -4a\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$$

$$x_1{}^2 + 2x_1c + a^4 = a^2x_1{}^2 + 2a^2x_1c + a^2c^2 + a^2x_2{}^2 + \cdots + a^2x_n{}^2$$

$$a^2(a^2-c^2) = {x_1}^2(a^2-c^2) + a^2{x_2}^2 + \cdots + a^2{x_n}^2$$

eşitliği elde edilir. $b^2 = a^2 - c^2$ olduğundan

$$a^2b^2 = {x_1}^2b^2 + a^2{x_2}^2 + \cdots + a^2{x_n}^2$$

dir. Eşitliğin her iki tarafının a^2b^2 ile bölünmesiyle

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{x_2}^2}{b^2} + \frac{{x_3}^2}{b^2} + \cdots + \frac{{x_n}^2}{b^2} = 1$$

elde edilir.

Bu denklem E^n uzayında bir elipsoid gösterir. XF_1F_2 birim çevreli üçgen olduğundan $X_1 = (a, 0,0, \dots ,0)$, $X_2 = (-a, 0,0, \dots ,0)$ noktaları alınmaz. O halde iki noktası delinmiş bir elipsoid elde edilir. ■

Sonuç 4.11 E^n uzayında sabit F_1, F_2 noktaları verilsin. $|F_1 - F_2| = 2c < \frac{1}{2}$ olmak üzere ΔXF_1F_2 birim çevreli üçgen olacak biçimde tüm X noktalarının geometrik yeri iki noktası delinmiş elipsoittir (Demirel vd. 2020).

Sonuç 4.12 $f : E^n \to E^n$ birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşüm olsun. $0 < |F_1 - F_2| < \frac{1}{2}$ olmak üzere ΔXF_1F_2 üçgeni birim çevreli olacak biçimdeki tüm X noktalarının görüntüleri odakları $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ olan $\Delta\overline{X}\overline{F_1}\overline{F_2}$ üçgeni birim çevreli üçgen olacak biçimde delinmiş elipsoid üstündedir (Demirel vd. 2020)

Lemma 4.13 $f : E^n \to E^n$ birim çevreli üçgenleri koruyan dönüşüm olsun. Bu durumda f dik açıları korur. (Demirel vd. 2020).

İspat. L_1 ve L_2 doğruları F_1 noktasında dik kesişsin. L_2 doğrusu üstünde $0 < |F_1 - F_2| < 2c < \frac{1}{2}$ olacak biçimde F_2 noktası seçilsin. ΔXF_1F_2 üçgeni birim çevreli üçgen olacak biçimde X noktalarının geometrik yeri olan iki noktası delinmiş elipsoidi çizelim. Bu elipsoid L_1 doğrusunu iki noktada keser. Bu noktalar A ve B ile gösterilsin. Benzer şekilde F_2 noktasından geçen L_2 ye dik ve L_1 e paralel olan doğru delinmiş elipsoidi iki noktada keser. Bu noktalar C ve D ile gösterilsin. Bu noktalar AF_1F_2C ve BDF_2F_1 birer dikdörtgen olacak biçimde seçilsin. AF_1F_2C

dikdörtgeni dört tane birim çevreli üçgen tanımlar. Hipotez gereği bu dört üçgenin görüntüleri de dört tane birim çevreli üçgen olacağından Lemma 4.2 den dolayı $\bar{A}\overline{F_1}\overline{F_2}\bar{C}$ de bir dikdörtgendir. Böylece $f(L_1)$ ve $f(L_2)$ dik olarak kesişir. ■

Lemma 4.14 $f : E^n \to E^n$ birim çevreli üçgenleri koruyan birebir bir dönüşüm olsun. $0 < c < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ ve $a + c = \frac{1}{2}$ olacak biçimde $a, c \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$|A - B| = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$$

olacak biçimde $\forall A, B \in E^n$ için f, AB doğru parçalarının orta noktalarını korur.

(Demirel vd. 2020).

İspat. F_1 ve F_2 uzayında $0 < |F_1 - F_2| < \frac{1}{2}$ olacak biçimde iki nokta olsun. Bu iki nokta yardımıyla Lemma 4.10 da inşa edilen (ΔXF_1F_2 birim çevreli üçgen olacak biçimde) iki noktası delinmiş elipsoidi inşa edelim. Bu durumda $\varphi_1 = \left\{\overrightarrow{F_1F_2}, \overrightarrow{F_1X_1}, \overrightarrow{F_1X_2}, \dots, \overrightarrow{F_1X_{n-1}}\right\}$ kümesi ortogonal olacak biçimde elipsoid üstünde $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ noktaları vardır. $1 \leq i \leq n - 1$ olacak biçimde her i için $\Delta\overline{X}\overline{F_1}\overline{F_2}$ üçgenleri birim çevrelidir.

f, Lemma 4.12 den dik açıları koruduğundan $\overline{\varphi_1} = \left\{\overline{\overrightarrow{F_1F_2}}, \overline{\overrightarrow{F_1X_1}}, \overline{\overrightarrow{F_1X_2}}, \dots, \overline{\overrightarrow{F_1X_{n-1}}}\right\}$ kümesi de ortogonal bir kümedir. $\overrightarrow{F_1Y_1} = -\overrightarrow{F_1X_1}$ olmak üzere $\varphi_2 = \left\{\overrightarrow{F_1F_2}, \overrightarrow{F_1Y_1}, \overrightarrow{F_1X_2}, \dots, \overrightarrow{F_1X_{n-1}}\right\}$ kümesi ortogonal olup hipotezden ve Lemma 4.12 den dolayı $\overline{\varphi_2} = \left\{\overline{\overrightarrow{F_1F_2}}, \overline{\overrightarrow{F_1X_1}}, \overline{\overrightarrow{F_1X_2}}, \dots, \overline{\overrightarrow{F_1X_{n-1}}}\right\}$ kümesi de ortogonaldir. $\overline{\varphi_1}$ ve $\overline{\varphi_2}$ kümelerinin $n - 1$ tane elemanları aynı olduğundan ve f birebir olduğundan $\overrightarrow{F_1Y_1} \neq \overrightarrow{F_1X_1}$ olup $\overrightarrow{F_1Y_1} = -\overrightarrow{F_1X_1}$ olmak zorundadır. Böylece F_1, X_1 ile Y_1 noktalarının orta noktası iken $\overline{F_1}$, $\overline{X_1}$ ile $\overline{Y_1}$ noktalarının orta noktasıdır. ■

Sonuç 4.15 $f : E^n \to E^n$ birim çevreli üçgenleri koruyan birebir dönüşüm olsun. Bu durumda f doğruları korur ve böylece f afindir (Demirel vd. 2020).

Şimdi teoremin ispatına geçilebilir.

ΔABC kenar uzunlukları $\frac{1}{3}$ olacak biçimde birim çevreli eşkenar bir üçgen olsun. B noktasından çizilen $|A-C|$ kenarını dik kesen doğru aynı zamanda kenarortaydır. Benzer şekilde A noktasından çizilen $|B-C|$ kenarını dik kesen doğru parçası ile C noktasından geçen AB kenarını dik kesen doğru parçası da birer kenarortaydır. $|A-C|, |A-B|, |B-C|$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla M_1, M_2, M_3 olsun. O halde $|B-M_1|, |C-M_2|, |A-M_3|$ kenarortaylardır. f, birim çevreli üçgenleri koruduğundan, $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ üçgeni de birim çevreli üçgendir. Sonuç 4.14 den $|B-M_1|, |C-M_2|, |A-M_3|$ doğruları, $|\bar{B}-\overline{M_1}|, |\bar{C}-\overline{M_2}|, |\bar{A}-\overline{M_3}|$ doğrularına dönüşür. f, orta noktaları koruduğundan $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ birim çevreli üçgeninin orta noktaları $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \overline{M_3}$ dür. Böylece $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ de bir kenar uzunluğu $\frac{1}{3}$ birim olan birim çevreli eşkenar üçgen olup f altında $\frac{1}{3}$ uzunlukları korunduğundan Beckman-Quarles teoremi gereğince f bir Öklidyen harekettir.

5. KAYNAKLAR

Jeffers J, 2000, Lost Theorem of Geometry, American Mathematical Monthly, 107, 800−802.

Li B, Wang Y, 2005, Transformations and non-degenerate maps, Sci. China Ser. A, Mathematics, 48, 195−205.

Li B, Wang Y, 2009, On Characterizations of Sphere-Preserving Maps, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 147, 439.

Chubarev A, Pinelis I, 1999, Fundemental Theorem of Geometry Without the 1-to-1 Assumption, Proc. Amer. Math. Society, 127, 2735-2744.

Li B, Wang Y, 2009, A New Characterization for İsometries by Triangles, New York J. Math. Society, 15, 423−429.

Beckman F S, Ouarles JR, D A, 1953, On İsometries of Euclidean Spaces, Proc. Amer. Math. Society, 4, 810−815.

Lester J A, 1982, Transformations of Robertson-Walker Spacetimes Preserving Seperstion Zero, Aequationes, Mathematics, 25, 216−232.

Lester J A, 1986, Martin’s Theorem for Euclidean n-space and Generalization to the Perimeter Case. Journal Geometry, 27, 29−35.

Guts A K, 1982, Axiomatic Relativity Theory, Russ Mathematics Survey, 37, 41−89.

Schwerdtfweger H, 1979, Geometry of Complex Numbers, Dover- New York.

Benz W, 1994, Real Geometries, BI Wissensschaftsverlag, Mannheim-Leipzing-Wien Zürich.

Lester J A, 1985, Euclidean Plane Point-Transformations Preserving Unit Area or Unit Perimeter, Arch Math Basel, 45, 561−564.

Lester J A, 1986, Martin’s for Euclidean n-Space and a Generalization to the Perimeter Case, Journal of Geometry, 27, 29−35.

Benz W, 2004, Mappings Preserving Area 1 of Triangles, Journal of Geometry, 79, 27−30.

Rado F, Andreescu D, Valcan D, 1986, Mappings of En into En Preserving Two Distances, Babeş-Bolyai University, Research Seminar on Geometry, 10, 9−22.

Mustafa N, 2016, Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz, Seçkin Yayınları.

Byer O, Lazebnik F, Smeltzer D L, 2010, Methods For Euclidean of Geometry, The Mathematical Association of America, 12, 251−255.

Demirel O, Aslan L, Topal D, 2020, A New Proof of the Lester's Perimeter Theorem in Euclidean Space, Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences, 2, 57−59.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Leyla ASLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Mersin / 13.10.1995
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon / e-posta)	: leylaaslan3356@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Mersin Gazi Lisesi (2009 – 2013)
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü (2013–2017)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Ens., Matematik ABD, (2017 – 2021)

Yayınları (SCI ve diğer) :

Demirel O, Aslan L, Topal D, 2020, A Characteristic of Similarities by Use of Steinhaus' Problem on Partition Triangles, Mathematical Sciences and Applications, 8, 117−122.

Demirel O, Aslan L, Topal D, 2020, A New Proof of the Lester's Perimeter Theorem in Euclidean Space, Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences, 2, 57−59.

Demirel O, Aslan L, Topal D, 2021, The Beckman-Quarles Theorem in Hyperbolic Geometry, Journal of Mathematics, doi.org/10.1155/5552198.