NEREDEYSE PARÇALANAN

DİZİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge ERDOĞAN

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEREDEYSE PARÇALANAN DİZİLER ÜZERİNE

Özge ERDOĞAN

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEREDEYSE PARÇALANAN DİZİLER ÜZERİNE

Özge ERDOĞAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Bu tez, artin cebirlerinin temsil teorisinde önemli rol oynayan ve kısa tam dizilerin özel bir tipi olan neredeyse parçalanan diziler üzerine yapılan çalışmalara dayanmaktadır. Bu diziler ilk olarak 1974'te M. Auslander ve I. Reiten tarafından tanımlanmış ve aynı yazarlar tarafından 1977'de yapılan üç makaleden oluşan bir makale serisinde bazı özellikleri incelenmiştir.

Üç bölümden oluşan tezin giriş bölümünde tez konusunun tarihsel gelişimine dair bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm, tez çalışması için gerekli kavramların tanımlarını ve bazı temel özellikleri içermektedir. Üçüncü bölümde; sonlu boyutlu bir cebir üzerindeki modül kategorisinin radikalinin özellikleri ifade edilmiştir. Daha sonra neredeyse parçalanan morfizm ve minimal morfizm kavramları verilmiş ve bunların indirgenmez morfizmlerle ilişkileri incelenmiştir. Üçüncü kısımda neredeyse parçalanan dizilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilmiştir. Son olarak neredeyse parçalanan dizilerin varlığı, Auslander-Reiten teorinin orijinal ruhuna yakın olarak, funktorsal bir yaklaşımla ispatlanmıştır.

2019, v+89 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrıştırılamaz modül, radikal morfizm, neredeyse parçalanan morfizm, minimal morfizm, indirgenmez morfizm, neredeyse parçalanan dizi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON ALMOST SPLIT SEQUENCES

Özge ERDOĞAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis is based on studies on almost split sequences, a special type of short exact sequences that play an important role in the representation theory of artin algebras. These sequences were first defined by M. Auslander and I. Reiten in 1974, and some of their properties were examined in a series of three articles by the same authors in 1977.

In the introduction part of the thesis, which consists of three parts, information about the historical development of the thesis subject is given. The second chapter includes the definitions of the necessary concepts and some basic features for the thesis work. In the third part; the properties of the radical of the module category on a finite-dimensional algebra are expressed. Then, the concepts of almost split morphism and minimal morphism are given and their relationship with irreducible morphisms are examined. In the third part, the definition and some characterizations of the almost split sequences are given. Finally, the existence of almost split sequences over finite dimensional algebras is proved by a functorial approach, close to the original spirit of the Auslander-Reiten theory.

2019, v+89 pages

Key Words: Indecomposable module, radical morphism, almost split morphism, minimal morphism, irreducible morphism, almost split sequence.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden her zaman faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA'ya, bilgilerini ve tecrübelerini paylaşarak bana yol gösteren Sayın Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalışmam süresince de hep benim yanımda olan, bana her zaman sevgi, sabır ve iyi niyetle yaklaşan, bugünlere gelmeme destek olan ve bana güvenen sevgili anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Özge ERDOĞAN

AFYONKARAHİSAR, 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\subseteq$	Altküme
$\leq$	Altmodül
$<$	Öz altmodül
$\cong$	İzomorfizm
$\ker f$	f'nin çekirdeği
$\mathrm{coker} f$	f'nin eşçekirdeği
$\mathrm{im} f$	f'nin görüntüsü
M	Sağ R-modül
M/N	Bölüm modülü
$\trianglelefteq$	Büyük altmodül
$\ll$	Küçük altmodül
$\mathcal{C}$	Herhangi bir kategori
$\mathrm{Ob}\mathcal{C}$	Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin nesneler sınıfı
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$	Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde M'den N'ye giden morfizmlerin kümesi
Mod-R	Sağ R-modüllerin kategorisi
$\mathbf{k}$	Herhangi bir cisim
$\mathbf{k}[x]$	$\mathbf{k}$ cismi üzerindeki polinomlar halkası
$M \oplus M'$	M ve M' modüllerinin dik toplamı
$\mathrm{Soc}M$	M'nin sokulu
$\mathrm{Rad}M$	M'nin radikali
A	Sonlu boyutlu $\mathbf{k}$-cebir
$\mathrm{mod}A$	Sonlu üretilmiş sağ A-modüllerin kategorisi
$\mathrm{rad}_A(M,N)$	$\mathrm{mod}A$'da M'den N'ye giden radikal morfizmlerin kümesi
$\mathrm{End}_A M$	M'nin endomorfizmlerinin kümesi
mod-$\mathbf{k}$	Sonlu boyutlu $\mathbf{k}$-vektör uzaylarının kategorisi
F	Herhangi bir funktor

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, modüllerin kısa tam dizilerinin özel bir tipi olan ve genel olarak artin cebirlerinin temsil teorisinde temel rol oyanayan neredeyse parçalanan dizi kavramı tanıtılacaktır. Aynı zamanda Auslander-Reiten dizileri olarak da adlandırılan neredeyse parçalanan diziler, Auslander cebirleri üzerindeki basit modüllerin projektif temsillerinin belirlenmesiyle bağlantılı olarak sonlu temsil tipli artin cebirleri için ilk olarak 1971'de gözlemlenmiş bir kavramdır. Keyfi artin cebirleri için, (Ringel, 1984) tarafından batak (sink) ve kaynak (source) dönüşümler olarak ta adlandırılan, sağ ve sol neredeyse parçalanan morfizmlerin varlığı iki farklı yaklaşımla ispatlanmıştır. Bunlardan biri, (Auslander, 1966) tarafından ispatlanan keyfi Λ artin cebirleri için, Λ üzerine kurulan modüllerin mod-Λ kategorisinden abelyen grupların kategorisine giden basit funktorların sonlu temsil edilmiş (finitely presented) olmasıdır. Diğer yaklaşım ise, (Auslander, 1974) tarafından ispatlanmış olup, sadece neredeyse parçalanan morfizmleri vermeyip neredeyse parçalan dizilerin varlığını da ortaya koyan, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}C)$'nin homolojik cebir hesaplamalarıyla $D\overline{\mathrm{End}_\Lambda}(C)$ olarak belirlenmesini de içeren ve bir neredeyse parçalanan $0 \to A \to B \to C$ dizisinin ilk ve son terimleri üzerindeki bağlantının $A \cong D\mathrm{Tr}C$ biçiminde olduğudur. Daha sonra M. Auslander ve I. Reiten tarafından 1977'de yazılan üç makale serisinde neredeyse parçalanan dizilerle ilgili özellikler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Özel olarak funktorların radikal serileriyle bir bağlantısını içeren indirgenmez morfizmler de tanıtılmıştır (Auslander vd. 1997).

Neredeyse parçalanan diziler artin cebirlerinin temsil teorisinde temel bir rol oynasa da önemlerinin takdir edilmeye başlamasından önce birkaç yıl geçmiştir. Onların önemini ortaya koyan, tüm sağ ve sol parçalanan morfizmlerin aynı anda incelenmesine olanak sağlayan, Auslander-Reiten kuiver kavramıdır. Örneğin (Ringel, 1978) ve (Riedtmann, 1980)'e göre kalıtsal (hereditary) cebirler ve sonlu temsil tipli selfinjektif cebirler üzerine yapılan ilk çalışmaların çoğu, onların Auslander-Reiten kuiverleri ya da buna denk olarak onların neredeyse parçalanan dizileri üzerine olmuştur. Neredeyse parçalanan dizilerin varlığı ile ilgili teoremler (Auslander and

Smalo, 1981) tarafından bir Λ artin cebiri üzerindeki modüllerin mod-Λ kategorisinin bazı altkategorilerinde ve artin cebirleri dışında da ispatlanmıştır.

Neredeyse parçalanan dizi kavramının; grup temsilleri, sıralama teorisi, cebirsel tekillik teorisi ve modüllerin model teorisi gibi farklı alanlarda faydalı olduğu kanıtlanmıştır. Ortadaki terimi ayrıştırılamaz olan bir neredeyse parçalanan dizinin sonlu temsil tipli cebirler için her zaman var olduğu (Auslander and Reiten, 1977) tarafından, genel durumda varlığı ise (Martinez-Villa, 1980) tarafından ispatlanmıştır (Auslander vd. 1997).

Sonlu boyutlu bir cebir üzerine kurulan modüllerin kategorisinde ayrıştırılamaz modülleri ve bunların arasındaki morfizmleri belirlemek için indirgenmez morfizm ve neredeyse parçalanan dizi kavramlarına ihtiyaç vardır. Bunlar sayesinde, ayrıştırılamaz modüller tüm modüller için birer yapı taşı, indirgenmez morfizmler de bu modüller arasındaki tüm morfizmler için birer yapı taşı görevi göreceği için modül kategorisinin tamamı belirlenmiş olur. Neredeyse parçalanan morfizmler, indirgenmez morfizmlerin dışında, dual iki kavram olan, sol neredeyse parçalanan morfizmler ve sağ neredeyse parçalanan morfizmler kullanılarak ta tanımlanır. Bu kavramlar; sadece neredeyse parçalanan dizileri tanımlamakla kalmaz, aynı zamanda indirgenmez morfizmlerle de ilişkilidirler.

A bir sonlu boyutlu $\mathbf{k}$-cebir olmak üzere A üzerine kurulan sağ A-modüllerin mod-A kategorisinin radikalinin elemanlarına radikal morfizm (radical morphism) denir. Başka radikal morfizmler üzerinden faktörlenen morfizmler ise neredeyse parçalanan morfizm (almost split morphism) olarak adlandırılır. Bunlar aynı zamanda minimal neredeyse parçalanan ve indirgenmez morfizmlerdir. Bu morfizmlerin tanım ve değer kümeleri ayrıştırılamaz olduğu için modül kategorisinin radikaline ait fakat radikalin karesine ait değildirler. Bundan dolayı modül kategorisinde yeterli sayıda minimal neredeyse parçalanan morfizm var mıdır sorusu doğal olarak ortaya çıkmıştır. N ayrıştırılamaz projektif olmayan bir A-modül, ya da buna denk olarak, L ayrıştırılamaz injektif olmayan bir A-modül olmak üzere

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

biçiminde bir neredeyse parçalanan dizisi vardır. Bunun bir sonucu olarak modül kategorisinde minimal neredeyse parçalanan morfizmler yeterince vardır. Yani; her ayrıştırılamaz L modülü için, bir sol minimal neredeyse parçalanan $L \to M$ morfizmi ve benzer olarak, her ayrıştırılamaz N modülü için, bir sağ minimal neredeyse parçalanan $M \to N$ morfizmi vardır.

Üç bölümden oluşan bu tez çalışmasında temel amaç; bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılara, neredeyse parçalanan dizi kavramını ayrıntılı biçimde tanıtmaktır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde modüller, cebirler, tam diziler, kategoriler ve funktorlar ile ilgili tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. Neredeyse parçalanan diziler bir modül kategorisinin radikalinde bulunan morfizmlerin yapısı incelenirken ortaya çıkan bir kavram olduğu için, üçüncü bölümde ilk olarak sonlu boyutlu bir cebir üzerine kurulan modül kategorisinin radikalinin özellikleri ve bazı karakterizasyonları tanıtılmıştır. Daha sonra indirgenmez morfizm kavramı örneklerle açıklanmış ve bazı özellikleri ifade edilmiştir. Ayrıca parçalanan morfizm ve minimal morfizm kavramlarının tanımları verilmiş ve bunların indirgenmez morfizmlerle ilişkileri incelenmiştir. Üçüncü kısımda neredeyse parçalanan dizilerin tanımı ve bazı karakterizasyonları verilmiştir. Son olarak neredeyse parçalanan dizilerin varlığının ispatı, bununla ilgili farklı ispatlar bulunmasına karşın, Auslander-Reiten teorinin pek çok sonucunun orijinal ispatına ve orijinal ruhuna yakın olan, funktorsal bir yaklaşımla sunulmuştur. Üçüncü bölümde (Assem and Coelho, 2020) temel kaynak olarak kullanılmış olup, neredeyse parçalanan dizilerin sağladığı temel özellikler ayrıntılı biçimde ispatlanarak ele alınmıştır. Bu kaynakta dual olarak verilen ispatlar, tez çalışmasında detaylı bir şekilde incelendiğinden, bu tez; bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için Türkçe bir kaynak olması bakımından önemlidir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan bazı temel kavramlar tanıtılarak kullanılacak olan bazı özellikler ifade edilecektir. Bu bölümde kullanılan temel kaynaklar (Anderson and Fuller, 1974), (Pancar ve Alizade, 2016), (Assem and Coelho, 2020), (Rotman, 2009)'dur.

2.1. Modüller

Tanım 2.1.1 Boştan farklı bir R kümesi üzerinde

$$+ : R \times R \to R; \quad (a, b) \mapsto a + b$$

ve

$$\cdot : R \times R \to R; \quad (a, b) \mapsto ab$$

ikili işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa $(R, +, \cdot)$ sistemi bir *halka* (*ring*) olarak adlandırılır.

(i) $(R, +)$ bir abel grup,

(ii) Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$,

(iii) Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$.

Bir R halkasında her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R'ye *değişmeli* (*commutative*), her $a \in R$ için $a1 = 1a = a$ olacak şekilde $0 \neq 1 \in R$ varsa R'ye *birimli* (*with unity*) halka denir. Birimli bir R halkasında sıfırdan farklı her eleman tersinir ise, yani; her $0 \neq a \in R$ için $aa' = a'a = 1$ olacak şekilde $a' \in R$ varsa, R'ye *eğik cisim* (*skew field*) ya da *bölümlü halka* (*division ring*) denir. Değişmeli olan bir eğik cisim ise *cisim* (*field*) olarak adlandırılır. Tez çalışmasında aksi belirtilmedikçe R herhangi bir birimli halka olacaktır.

Tanım 2.1.2 R birimli bir halka ve M toplamsal bir abel grup olsun. $x \in M$ ve $a \in R$ olmak üzere $(x, a) \longmapsto xa$ ile bir $\cdot : M \times R \to M$ skaler çarpma işlemi tanımlansın. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa M'ye bir *sağ R-modül* (*right R-module*) denir ve M_R ile gösterilir: Her $a, b \in R$, $x, y \in M$ için:

(i) $(x+y)a = xa + ya$;

(ii) $x(a+b) = xa + xb$;

(iii) $x(ab) = (xa)b$;

(iv) $x1 = x$;

Benzer olarak sol R-modül tanımlanır ve ${}_RM$ ile gösterilir. Tez çalışmasında, aksi belirtilmedikçe tüm modüller sağ modül olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.3 R herhangi bir halka olsun. R'nin *karşıt halkası* (*opposite ring*); R'nin elemanları ile aynı elemanlara sahip, toplama işlemi R'deki ile aynı, çarpma işlemi $a, b \in R$ için $a \times_{op} b = ba$ (ba, R'de b ile a'nın çarpımı) olarak tanımlanan bir halkadır ve R^{op} ile gösterilir.

Tüm sağ R-modüllerin aynı zamanda sol R^{op}-modül olduğu açıktır.

Tanım 2.1.4 M bir R-modül ve N, M'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $x, y \in N$ ve her $a \in R$ için $x + y \in N$ ve $xa \in N$ oluyorsa N'ye M'nin bir *R-altmodülü* (*R-submodule*) denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. M'nin $0 = \{0_M\}$ sıfır altmodüllüne *trivial* altmodül denir. M'nin kendisinden farklı bir N altmodülüne *öz altmodül* (*proper submodule*) denir ve $N < M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 Kendisinden ve sıfırdan başka altmodülü bulunmayan sıfırdan farklı bir modüle *basit* (*simple*) modül denir.

Tanım 2.1.6 M_1 ve M_2 bir M R-modülünün altmodülleri olsun. Eğer $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ oluyorsa, M'ye M_1 ile M_2'nin *iç direkt toplamı* (*internal direct sum*) denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ ile gösterilir ve bu yazılış M'nin bir *dik ayrışımı* (*direct decomposition*) olarak adlandırılır. Bu durumda her $m \in M$ elemanı; $m_1 \in M_1$ ve $m_2 \in M_2$ olmak üzere $m = m_1 + m_2$ biçiminde tek türlü olarak yazılır. Burada M_1 ve M_2'ye M'nin *dik toplananları* (*direct summand*) denir. Eğer M_1; M'nin bir dik toplananı ise $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M'nin bir M_2 altmodülü vardır. Sıfırdan farklı bir M modülü sıfırdan farklı altmodüllerinin bir dik toplamı olarak yazılamıyorsa *ayrıştırılamaz* (*indecomposable*) olarak adlandırılır. M'nin $M = M \oplus 0$ biçiminde aşikar bir dik toplam ayrışımı her zaman vardır.

Krull-Schmidt Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teorem; sıfırdan farklı sonlu uzunluklu bir modülün izomorfizm farkıyla bir tek ayrıştırılamaz ayrışıma sahip olduğunu ifade eder.

Teorem 2.1.7 M sonlu uzunluklu sıfırdan farklı bir modül olsun. Bu durumda

(i) Her M_i ayrıştırılamaz olacak şekilde bir $M = \oplus_{i=1}^{m} M_i$ dik toplam ayrışımı vardır.

(ii) Bu ayrışım izomorfizm farkıyla birtektir. Yani; her bir M_i, N_j ayrıştırılamaz olmak üzere $M = \oplus_{i=1}^{m} M_i = \oplus_{j=1}^{n} N_j$ ise, $m = n$'dir ve her i için $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ olacak şekilde $\{1, \ldots, m\}$ kümesinin bir σ permütasyonu vardır.

Tanım 2.1.8 M ve N birer R-modül olsun. Her $x, y \in M$ ve her $a \in R$ için

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(xa) = f(x)a$

özelliklerini sağlayan bir $f : M \to N$ fonksiyonuna *R-lineer dönüşüm* (*R-linear map*) ya da bir *R-modül morfizmi* (*morphism of R-module*) denir. $f : M \to N$ birebir ise f'ye *monomorfizm*, $f : M \to N$ örten ise f'ye *epimofizm*, $f : M \to N$ hem birebir hem de örten ise f'ye *izomorfizm* denir. $f : M \to M$ morfizmi bir *endomorfizm*, $f : M \to M$ izomorfizmi bir *otomorfizm* olarak adlandırılır.

M'den N'ye giden tüm R-modül morfizmlerinin kümesi $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ile gösterilir. Özel olarak $N = M$ ise, bu uzay $\mathrm{End}_R M$ ile gösterilir ve M'nin *endomorfizm* (*endomorphism*) kümesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.9 M bir R-modül ve N; M'nin bir altmodülü olsun. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve her $a \in R$ için

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = m_1 + m_2 + N;$$

$$(m + N)a = ma + N$$

ile tanımlı işlemlerle bir R-modül yapısına sahip olan $M/N = \{m + N | m \in M\}$ kümesine M'nin N ile *bölüm modülü* (*factor module*) denir.

Tanım 2.1.10 $f : M \to N$ bir R-modül morfizmi olsun.

(i) f'nin *çekirdeği* (*kernel*); $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$,

(ii) f'nin *görüntüsü* (*image*); $\mathrm{im} f = \{f(m) \mid m \in M\}$,

(iii) f'nin *eşçekirdeği* (*cokernel*); $\mathrm{coker} f = N/\mathrm{im} f = \{n + \mathrm{im} f \mid n \in N\}$

ile tanımlanır.

Lemma 2.1.11 $f : M \to N$ ve $f' : N \to M$

$$ff' = 1_N$$

olacak şekilde morfizmler olsun. Bu durumda f bir epimorfizm, f' bir monomorfizm ve

$$M = \ker f \oplus \mathrm{im} f'$$

dir. (Anderson and Fuller, 1974)

Uyarı 2.1.12 Eğer bir $f : M \to N$ morfizmi $f = gh$ biçiminde yazılıyorsa, f; g ve h *üzerinden çarpanlanır veya faktörlenir* (*factor through* g *and* h) denir. Aşağıdaki Çarpan Teoremi (Factor Theorem) bir morfizmin çarpanlanmasının bir karakterizasyonunu ifade eder.

Teorem 2.1.13 M, M', N ve N' birer R-modül ve $f : M \to N$ bir R-modül morfizmi olsun.

(1) $\ker g \subseteq \ker f$ olacak şekilde bir $g : M \to M'$ epimorfizmi varsa

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M' \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani; $f = hg$ olacak şekilde, bir tek $h : M' \to N$ morfizmi vardır. Ayrıca $\ker h = g(\ker f)$ ve $\mathrm{im} h = \mathrm{im} f$ ve buradan h birebirdir $\Leftrightarrow$ $\ker g = \ker f$ ve h örtendir $\Leftrightarrow$ f örtendir.

(2) im$f \subseteq$ im$g$ olacak şekilde bir $g : N' \to N$ monomorfizmi varsa

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & N \\ & N' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani; $f = gh$ olacak şekilde, bir tek $h : M \to N'$ morfizmi vardır. Ayrıca ker$h$ = ker$f$ ve im$h = g^{-1}$(im$f$), ve buradan h birebirdir $\Leftrightarrow$ f birebirdir ve h örtendir $\Leftrightarrow$ im$g$ = im$f$'dir. (Anderson and Fuller, 1974)

Tanım 2.1.14 M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Her bir i için, *kompozisyon çarpanı* (*composition factor*) olarak adlandırılan, M_{i+1}/M_i bölüm modülü basit olacak şekilde M'nin altmodüllerinin bir sonlu

$$M = M_0 > M_1 > M_2 > \ldots > M_n = 0$$

dizisine M'nin n *uzunluklu kompozisyon serisi* (*composition series of length* n) denir. Jordan-Hölder Teoremi gereğince; bir M modülü bir kompozisyon serisine sahipse M'nin kompozisyon serilerinin her çifti izomorf olup, bunun bir sonucu olarak, bir kompozisyon serisine sahip olan herhangi bir modülün tüm kompozisyon serilerinin uzunlukları aynıdır. Bu sayıya M modülünün *uzunluğu* (*length*) denir ve $l(M)$ ile gösterilir. M'nin hiç kompozisyon serisi yoksa, bu durum $l(M) := \infty$ ile ifade edilir. Ayrıca $l(M) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.1.15 M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun. $K \cap L = 0$ olacak şekildeki her $L \leq M$ için $L = 0$ oluyorsa K'ya *büyük* (*essential, large*) altmodül denir ve $K \trianglelefteq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 Bir $f : L \to M$ R-modül monomorfizmi için im$f \trianglelefteq M$ ise, f'ye *büyük monomorfizm* (*essential monomorphism*) denir. Bir $f : L \to M$ büyük monomorfizmi ve hf monomorfizm olacak şekilde bir h morfizmi verilmiş ise h monomorfizmdir.

Tanım 2.1.17 M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun. $K + L = M$ olacak şekildeki her $L \leq M$ için $L = M$ oluyorsa K'ya *küçük* (*superfluous, small*) altmodül denir ve $K \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18 Bir $g : M \to N$ R-modül epimorfizmi için $\ker g \ll M$ ise, g'ye *küçük epimorfizm* (*superflouos epimorphism*) denir. Bir $g : M \to N$ küçük epimorfizmi ve gk epimorfizm olacak şekilde bir k morfizmi verilmiş ise k epimorfizmdir.

Tanım 2.1.19 M bir R-modül ve N; M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olmak üzere herhangi bir $L \leq M$ için $L \leq N$ iken $L = 0$ veya $L = N$ oluyorsa N'ye M'nin bir *minimal* altmodülü denir. Basit ve minimal modüllerin çakışık olduğu açıktır. M'nin tüm minimal (yani basit) altmodüllerinin toplamına M'nin *sokulu* (*socle*) denir ve $\mathrm{soc}M$ ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{soc}M = \sum \{K_i \mid K_i, M\text{'nin basit (minimal) altmodülü}\}$$

olup (Anderson and Fuller, 1974) gereğince

$$\mathrm{soc}M = \bigcap \{E_i \mid E_i, M\text{'nin büyük altmodülü}\}$$

ile tanımlıdır. M'nin hiç minimal altmodülü yoksa $\mathrm{soc}M = 0$ yazılır.

Tanım 2.1.20 M bir R-modül ve N; M'nin bir öz altmodülü olmak üzere herhangi bir $L \leq M$ için $N \leq L$ iken $L = N$ veya $L = M$ oluyorsa N'ye M'nin bir *maksimal* altmodülü denir. M'nin tüm maksimal altmodüllerinin arakesitine M'nin *radikali* (*radical*) denir ve $\mathrm{rad}M$ ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{rad}M = \bigcap \{N_i \mid N_i, M\text{'nin maksimal altmodülü}\}$$

olup (Anderson and Fuller, 1974) gereğince

$$\mathrm{rad}M = \sum \{S_i \mid S_i, M\text{'nin küçük altmodülü}\}$$

ile tanımlıdır. M'nin hiç maksimal altmodülü yoksa $\mathrm{rad}M = M$ yazılır.

Tanım 2.1.21 P bir R-modül olsun. Her $f : B \longrightarrow C$ R-modül epimorfizmi için

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diagramını değişmeli yapan, yani $g = fh$ olacak şekilde, bir $h : P \longrightarrow B$ R-modül morfizmi varsa P'ye *projektif* (*projective*) modül denir.

Tanım 2.1.22 I bir R-modül olsun. Her $f : A \longrightarrow B$ R-modül monomorfizmi için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

diagramını değişmeli yapan, yani $g = hf$ olacak şekilde, bir $h : B \longrightarrow I$ R-modül morfizmi varsa I'ya *injektif* (*injective*) modül denir.

Tanım 2.1.23 Bir P projektif R-modülüne, $f : P \to M$ küçük epimofizmi ile birlikte M modülünün *projektif örtüsü* (*projective cover*) denir. Bir modülün projektif örtüsü varsa izomorfizm farkıyla tektir.

Tanım 2.1.24 Bir I injektif R-modülüne, $f : M \to I$ büyük monomorfizmi ile birlikte M modülünün *injektif bürümü* (*injective envelope*) denir. Bir modülün injektif bürümü her zaman vardır ve izomorfizm farkıyla tektir.

2.2. Cebirler

Tanım 2.2.1 $\mathbf{k}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki denk koşullardan biri sağlanırsa $\mathbf{k}$'ya bir *cebirsel kapalı cisim* (*algebraically closed field*) denir.

(i) $\mathrm{der}(p) \geq 1$ olacak şekildeki her $p \in \mathbf{k}[x]$ polinomunun $\mathbf{k}$'da bir kökü vardır.

(ii) $\mathbf{k}$ üzerindeki her indirgenmez polinomun derecesi 1 dir.

(iii) $\mathrm{der}(p) \geq 1$ olacak şekildeki her $p \in \mathbf{k}[x]$ polinomu $c, c_1, \cdots, c_n \in k$ olmak üzere

$$p = c(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

biçiminde yazılır.

Tez çalışmasında, aksi belirtilmedikçe $\mathbf{k}$ cebirsel kapalı bir cisim olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.2 $\mathbf{k}$ bir cisim olsun. A birimli bir halka ve aynı zamanda bir $\mathbf{k}$-vektör uzayı olmak üzere her $a, b \in A$ ve her $\lambda \in \mathbf{k}$ için

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

oluyorsa A'ya bir ***k**-cebir* (***k**-algebra*) denir. Burada A birimli halkasının toplamsal yapısı ile A **k**-vektör uzayının toplamsal yapısı birbiriyle uyumludur. A bir **k**-vektör uzayı olarak sonlu boyutlu, yani $\dim_{\mathbf{k}} A$ sonlu ise, A'ya bir *sonlu boyutlu **k**-cebir* (*finite dimensional **k**-algebra*) denir.

Tanım 2.2.3 A ve B birer **k**-cebir olsun.

(i) φ bir halka homomorfizması,

(ii) φ bir **k**-lineer dönüşüm

özelliklerini sağlayan bir $\varphi : A \to B$ fonksiyonuna bir **k**-*cebir morfizmi* (**k**-*algebra morphism*) denir. Bijektif (birebir ve örten) bir **k**-cebir morfizmi bir ***k**-cebir izomorfizmi* (**k**-*algebra isomorphism*) olarak adlandırılır.

Uyarı 2.2.4 Tanım 2.1.2'de herhangi bir R halkası yerine A **k**-cebiri alınarak sağ A-modül tanımlanır ve M_A ile gösterilir. Benzer olarak sol A-modül tanımlanır ve $_AM$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 M bir A-modül olsun. Bir $d \in \mathbb{N}$ sayısı ve $f : A^d \to M$ epimorfizmi varsa M *sonlu üretilmiş* (*finitely generated*) olarak adlandırılır. Böylece A^d'nin standart tabanındaki vektörlerin f altındaki görüntülerinin kümesi M için bir *sonlu üreteç kümesi* olur.

Tez çalışmasında, aksi belirtilmedikçe A bir sonlu boyutlu **k**-cebir ve tüm modüller sonlu üretilmiş sağ A-modül olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.6 Bir A-modülünün sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul o modülün altında yatan **k**-vektör uzayının sonlu boyutlu olmasıdır. (Assem and Coelho, 2020)

İspat ($\Rightarrow$) M sonlu üretilmiş bir A-modül olsun. Bu durumda bir $A^d \to M$ epimorfizmi vardır. A; **k**-vektör uzayı olarak sonlu boyutlu olduğundan $\dim_k A^d < \infty$ ve buradan $\dim_k M < \infty$ olup ispat tamamlanır.
($\Leftarrow$) M **k**-vektör uzayı olarak sonlu boyutlu olsun. Bu durumda M'nin sonlu üretilmiş olduğu açıktır.

Lemma 2.2.7 M bir (sonlu üretilmiş) A-modül ve $f \in \mathrm{End}M$ olsun. f birebir ya da örten ise, f bijektiftir. (Assem and Coelho, 2020)

Bir modülün radikalinin tanımında R halkası yerine A **k**-cebiri alınarak ve her halkanın kendisi üzerindeki modül yapısı kullanılarak cebirin Jacobson radikalinin aşağıdaki karakterizasyonları verilebilir.

Uyarı 2.2.8 A_A modülünün radikali tüm maksimal sağ altmodüllerinin arakesiti olarak tanımlanır ve rad$A$ ile gösterilir. Aynı zamanda rad$A$, A'nın bir ideali olup aşağıda verilen iki küme ile karakterize edilir.

$$\{a \in A \mid \text{ her bir } x \in A \text{ için } 1 - ax \text{ sağ tersinirdir}\}$$

$$\{a \in A \mid \text{ her bir } x \in A \text{ için } 1 - xa \text{ sol tersinirdir}\}$$

Aşağıda sonlu boyutlu cebirler üzerinde geçerli olan bir sonuç verilmiştir.

Teorem 2.2.9 A bir sonlu boyutlu **k**-cebir olsun. Bu durumda rad$A$; aşağıdaki özellikleri sağlayan A'nın iki yanlı bir tek I idealidir:

(i) I nil idealdir (yani; I'nın her bir elemanı nilpotenttir);

(ii) A/I bir yarıbasit cebirdir.

Tanım 2.2.10 Bir tek maksimal sağ (sol) ideali bulunan bir cebir *yerel* (*local*) olarak adlandırılır.

Her cebir; temelde bir halka yapısına sahip olduğundan, aşağıda herhangi bir R halkasının yerel olması için verilen karakterizasyonlar, sonlu boyutlu cebirler için de geçerlidir.

Önerme 2.2.11 $J(R) = \mathrm{rad}(_RR)$ olmak üzere herhagi bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R bir yerel halkadır;

(ii) R bir tek maksimal sol ideale sahiptir;

(iii) $J(R)$ bir maksimal sol idealdir;

(iv) R'nin (sol) tersi var olmayan elemanlarının kümesi toplama işlemi altında kapalıdır;

(v) $J(R) = \{x \in R \mid Rx \neq R\}$;

(vi) $R/J(R)$ bir bölümlü halkadır;

(vii) $J(R) = \{x \in R \mid x \text{ tersinir değil}\}$;

(viii) $x \in R$ ise, x veya $1 - x$ tersinirdir.

(Anderson and Fuller, 1974)

Yerel cebirlerin tez çalışmasında kullanılacak olan bazı özellikleri aşağıda listelenmiştir.

Uyarı 2.2.12

(i) A bir yerel cebir ise, A'nın tüm tersinir olmayan elemanlarından oluşan ideali A'nın radikalidir.

(ii) Sonlu boyutlu bir yerel cebirin her elemanı ya nilpotenttir ya da tersinirdir.

(iii) M sonlu uzunluklu ayrıştırılamaz bir modül ise, End$M$ yereldir.

2.3. Tam Diziler

Tanım 2.3.1 R-modül morfizmlerinin bir sonsuz $\cdots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$ dizisine, $i \in \mathbb{Z}$ için imf_i=kerf_{i+1} olması durumunda *tam* (*exact*) denir. Özel olarak

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam diziye *kısa tam dizi* (*short exact sequence*) denir. Burada f birebir, im$f$ = ker$g$ ve g örtendir.

Tanım 2.3.2 $f : L \to M$ bir R-modül morfizmi olsun. $hf = 1_L$ olacak şekilde $h : M \to L$ varsa f'ye bir *kesit* (*section*) morfizmi denir. f bir kesit morfizmi ise, f'nin birebir olduğu açıktır.

Tanım 2.3.3 $g : M \to N$ bir R-modül morfizmi olsun. $gk = 1_N$ olacak şekilde $k : N \to M$ varsa g'ye bir *büzme* (*retraction*) morfizmi denir. g bir büzme morfizmi ise, g'nin örten olduğu açıktır.

Teorem 2.3.4 $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "h"] & C \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "k"] & 0 \end{tikzcd}$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) f bir kesit morfizmidir;

(ii) g bir büzme morfizmidir;

(iii) $\mathrm{im} f$; B'nin bir dik toplananıdır. Ayrıca $B \cong A \oplus C$ dir.

Tanım 2.3.5 Teorem 2.3.4'teki denk koşullardan biri gerçeklendiğinde

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine *parçalanan (split) dizi* denir.

Lemma 2.3.6 (Kısa 5-Lemma) Aşağıdaki diyagram tam satırlara sahip ve değişmeli olacak şekilde A-modül morfizmlerinden oluşsun.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) α ve γ monomorfizm ise, β monomorfizmdir.

(ii) α ve γ epimorfizm ise, β epimorfizmdir.

(iii) α ve γ izomorfizm ise, β izomorfizmdir.

Tanım 2.3.7 M bir A-modül olsun. Herhangi $j \geq 0$ için P_j'ler projektif olmak üzere mod$A$'da bir

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. $f_0 : P_0 \to M$ epimorfizmi ile birlikte projektif A-modüllerin

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \longrightarrow 0$$

tam dizisine M'nin *projektif çözücüsü* (*projective resolution*) denir. Herhangi bir M modülünün mod$A$'da bir projektif çözüsü her zaman vardır. $P_0 \xrightarrow{f_0} M$ ve her $j \geq 1$ için $P_j \longrightarrow \mathrm{im} f_j$ birer projektif örtü ise yukarıdaki tam dizi M'nin bir *minimal projektif çözücüsü* (*minimal projective resolution*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.8 M bir A-modül olsun. Herhangi $i \geq 0$ için I^i'ler injektif olmak üzere mod$A$'da bir

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g^0} I^0 \xrightarrow{g^1} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^m \xrightarrow{g^{m+1}} I^{m+1} \longrightarrow \cdots$$

tam dizisi vardır. $M \xrightarrow{g^0} I^0$ monomorfizmi ile birlikte injektif A-modüllerin

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{g^1} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^m \xrightarrow{g^{m+1}} I^{m+1} \longrightarrow \cdots$$

tam dizisine M'nin *injektif çözücüsü* (*injective resolution*) denir. Herhangi bir M modülünün mod$A$'da bir injektif çözüsü her zaman vardır. $M \xrightarrow{g_0} I^0$ ve her $i \geq 1$ için $\mathrm{im} g^i \longrightarrow I^i$ birer injektif bürüm ise yukarıdaki tam dizi M'nin bir *minimal injektif çözücüsü* (*minimal injective resolution*) olarak adlandırılır.

2.4. Kategoriler ve Funktorlar

Bu bölümde bazı kategorik kavramların tanımlarına ve özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 2.4.1 Bir $\mathcal{C}$ *kategorisi* (*category*):

(i) *Nesnelerin* (*objects*) oluşturduğu bir Ob$\mathcal{C}$ sınıfı;

(ii) $(A, B) \neq (C, D)$ iken $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$ olacak şekildeki her (A, B) nesne çifti için *morfizmlerin* (*morphisms*) oluşturduğu bir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kümesi ile;

(iii) Her bir $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için

(1) Birleşme Özelliği: Her $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ve her $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ve $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(2) Birim Eleman Özelliği: Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ objesinin; her $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ için $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ birim morfizmi vardır.

özelliklerini sağlayan $(g, f) \mapsto g \circ f$ ile tanımlı $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ *bileşke* (*composition*) işleminin oluşturduğu bir sistemdir.

Tez çalışmasında kullanılacak bazı kategori örnekleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.4.2

(i) R birimli bir halka olmak üzere;

- nesneleri; sağ R-modüller,
- morfizmleri; R-modül morfizmleri,
- bileşke işlemi; bilinen bileşke

ile tanımlı kategoriye sağ R-modüllerin kategorisi denir ve $\mathrm{Mod}R$ ile gösterilir. Sol R-modüllerin kategorisi $R\mathrm{Mod}$ ile gösterilir.

(ii) A bir sonlu boyutlu $\mathbf{k}$-cebir olmak üzere;

- nesneleri; sonlu üretilmiş sağ A-modüller,
- morfizmleri; A-modül morfizmleri,
- bileşke işlemi; bilinen bileşke

ile tanımlı kategoriye sonlu üretilmiş sağ A-modüllerin kategorisi denir ve $\mathrm{mod}A$ ile gösterilir. Sonlu üretilmiş sol A-modüllerin kategorisi $A\mathrm{mod}$ ile gösterilir. Özel olarak ayrıştırılamaz sonlu üretilmiş sağ A-modüllerin kategorisi $\mathrm{ind}A$ ile gösterilir.

(iii) $\mathbf{k}$ bir cisim olmak üzere;

- nesneleri; sonlu boyutlu $\mathbf{k}$-vektör uzayları,
- morfizmleri; $\mathbf{k}$-lineer dönüşümler,
- bileşke işlemi; bilinen bileşke

ile tanımlı kategoriye sonlu boyutlu **k**-vektör uzaylarının kategorisi denir ve mod**k** ile gösterilir.

Tanım 2.4.3 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$'nin her A nesnesine $\mathcal{D}$'nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{C}$'deki her $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ morfizmine $\mathcal{D}$'deki bir $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ morfizmini karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kovaryant funktor (covariant functor)* denir, öyle ki:

(i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için $F(gf) = F(g)F(f)$ dir.

(ii) Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.

Tanım 2.4.4 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$'nin her A nesnesine $\mathcal{D}$'nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{C}$'deki her $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ morfizmine $\mathcal{D}$'deki bir $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(B), F(A))$ morfizmini karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kontravaryant funktor (contravariant functor)* denir, öyle ki:

(i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için $F(gf) = F(f)F(g)$ dir.

(ii) Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.

Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde A keyfi bir nesne olmak üzere sırasıyla kovaryant ve kontravaryant olan $\mathrm{Hom}(A, -)$ ve $\mathrm{Hom}(-, A)$ ile gösterilen iki önemli funktor vardır. Bu funktorlar aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 2.4.5

(i) $\mathrm{Hom}(A, -)$ funktoru; bir $\mathcal{C}$ kategorisinden **k**-vektör uzaylarının mod**k** kategorisine giden bir kovaryant funktordur, öyle ki:

  (1) $\mathcal{C}$'de bir B nesnesini A'dan B'ye giden tüm morfizmlerin kümesi olan $\mathrm{Hom}(A, B)$'ye götürür.

  (2) $\mathcal{C}$'de bir $f : B \to C$ morfizmini aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $f_*(g) = f \circ g$ ile tanımlı $\mathrm{Hom}(A, f) = f_* : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ morfizmine götürür.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ g"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Burada f_*; f'nin *ileri itmesi (push forward)* olarak adlandırılır.

(ii) $\mathrm{Hom}(-, A)$ funktoru; bir $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathbf{k}$-vektör uzaylarının mod$\mathbf{k}$ kategorisine giden bir kontravaryant funktordur, öyle ki:

(1) $\mathcal{C}$'de bir B nesnesini B'den A'ya giden tüm morfizmlerin kümesi olan $\mathrm{Hom}(B, A)$'ya götürür.

(2) $\mathcal{C}$'de bir $f : B \to C$ morfizmini aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlı $\mathrm{Hom}(f, A)$=f^*: $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(B, A)$ morfizmine götürür.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Burada f^*; f'nin *geri çekmesi (pull back)* olarak adlandırlılır.

Tanım 2.4.6 Aşağıdaki özelliklere sahip bir $\mathcal{C}$ kategorisi *toplamsal* (*additive*) olarak adlandırılır.

(i) Her $A, B \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kümesinin bir toplamsal abel grup yapısı vardır;

(ii) Her $f, g : A \to B$ ile $h, k : B \to C$ morfizmleri için $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ ve $(h + g) \circ f = h \circ f + k \circ f$ dağılma özellikleri sağlanır;

(iii) $\mathcal{C}$ kategorisinin, hem başlangıç (initial) hem de bitiş (terminal) nesnesi olan, bir sıfır nesnesi vardır;

(iv) $\mathcal{C}$ kategorisinde sonlu çarpımlar (products) ve sonlu eşçarpımlar (coproducts) vardır.

Tanım 2.4.7 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ toplamsal kategoriler olmak üzere, her $f, g : A \to B$ morfizmleri için $F(f + g) = F(f) + F(g)$ özelliğine sahip bir $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funktoruna *toplamsal* (*additive*) funktor denir. Yani $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA, FB)$ fonksiyonu $f \mapsto F(f)$ ile tanımlı bir abelyen grup homomorfizmdir.

Tanım 2.4.8

(a) $F : \text{Mod}R \to Ab$ bir kovaryant funktor olsun.

Her $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \cdots$ tam dizisi için

$$\cdots \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tamsa, F' ye *tam funktor (exact functor)* denir.

(i) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

dizisi tamsa, F' ye *soldan tam funktor (left exact functor)* denir.

(ii) Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi için

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

dizisi tamsa, F' ye *sağdan tam funktor (right exact functor)* denir.

(b) $T : \text{Mod}R \to Ab$ bir kontravaryant funktor olsun.

Her $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \cdots$ tam dizisi için

$$\cdots \longrightarrow T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tamsa, T' ye *tam funktor (exact functor)* denir.

(i) Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi için

$$0 \longrightarrow T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A)$$

dizisi tamsa, T'ye *soldan tam funktor (left exact functor)* denir.

(ii) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için

$$T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A) \longrightarrow 0$$

dizisi tamsa, T' ye *sağdan tam funktor (right exact functor)* denir.

Örnek 2.4.9 $\mathrm{Hom}(A,-)$ ve $\mathrm{Hom}(-,A)$ funktorları soldan tamdır.

Aşağıdaki ispatsız olarak verilen önerme, homoloji cebirde temel bir özellik olup (Alizade ve Pancar, 1999)'da da yer almaktadır.

Önerme 2.4.10 Her M R-modülü için $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ modülü M'ye izomorftur.

Uyarı 2.4.11 Toplamsal bir kategoride objelerin dik toplamları arasındaki morfizmler gösterilirken matris notasyonu kullanılır. Yani, $i = 1, 2 \ldots n$ için $f_i : X_i \to Y$ ve $g_i : Y \to Z_i$ morfizmleri verildiğinde $\iota_j : \; X_j \longrightarrow X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ içerim ve $p_i : \; Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_n \longrightarrow Z_i$ izdüşüm dönüşümleri olmak üzere dik toplam tanımı gereğince

$$\begin{tikzcd}
 & X_j \arrow[rr, "\iota_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & & X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \arrow[dl, dashed, "f"] & \\
 & & Y \arrow[dll, dashed, "g"'] \arrow[drr, "g_i"] & & \\
Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n \arrow[rrrr, "p_i"] & & & & Z_i
\end{tikzcd}$$

$f_j = f\iota_j$ olacak şekilde

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{pmatrix} : \; X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \longrightarrow Y$$

morfizmi tek türlü tanımlıdır. $g_i = p_i g$ olacak şekilde ve

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} : \; Y \longrightarrow Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n$$

morfizmi tek türlü tanımlıdır.

Ayrıca $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ ve $Z = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_m$ olmak üzere bir $h : X \to Z$ morfizmi

$$X_j \xrightarrow{\iota_j} X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{p_i} Z_i$$

ve $h_{ij} = p_i h \iota_j \in \mathrm{Hom}(X_j, Z_i)$ olmak üzere

$$h = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.4.12 Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : B \to A$ ve $g : C \to A$ morfizmleri verilsin. f ve g' nin *geri çekmesi* (*pullback, fibered product*) $g\alpha = f\beta$ olacak şekildeki $\alpha : D \to C$ ve $\beta : D \to B$ morfizmleri ile birlikte (D, α, β) üçlüsüdür, öyle ki: $g\alpha' = f\beta'$ olacak şekildeki her (X, α', β') üçlüsü için aşağıdaki üçgensel diyagramları değişmeli yapan, yani $\alpha' = \alpha\theta$ ve $\beta' = \beta\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta : X \to D$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, "\alpha'"] \arrow[ddr, "\beta'"'] & & \\ & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\ & B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Geri çekmeler var olduğu durumda uygun kategorilerdeki her bitiş objesi için izomorfizm farkıyla tek türlü tanımlıdırlar. Aşağıdaki önermede sağ R-modüllerin kategorisinde geri çekmelerin var olduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.4.13 Mod$R$'de $f : B \to A$ ve $g : C \to A$ morfizmlerinin geri çekmesi vardır.

İspat

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C \mid f(b) = g(c)\}$$

olmak üzere $\alpha : D \to C$; $(b, c) \mapsto \alpha(b, c) = c$ ve $\beta : D \to B$; $(b, c) \mapsto \beta(b, c) = b$ izdüşüm morfizmleri ile birlikte $g\alpha = f\beta$ olacak şekildeki (D, α, β) üçlüsü f ve g'nin geri çekmesidir, öyle ki: başka bir (X, α', β') üçlüsü $g\alpha' = f\beta'$ eşitliğini sağlarsa

$$\theta : X \to D$$

$$x \longmapsto \theta(x) = (\beta'(x), \alpha'(x))$$

olacak şekilde bir tek θ tanımlanır.

Tanım 2.4.14 Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : A \to B$ ve $g : A \to C$ morfizmleri verilsin. f ile g'nin *ileri itmesi* (*pushout, fibered sum*) $\beta g = \alpha f$ olacak şekildeki $\alpha : B \to D$ ve $\beta : C \to D$ morfizmleri ile birlikte (D, α, β) üçlüsüdür, öyle ki $\beta' g = \alpha' f$ olacak şekildeki her (Y, α', β') üçlüsü için aşağıdaki üçgensel diyagramları değişmeli yapan, yani $\beta' = \theta\beta$ ve $\alpha' = \theta\alpha$ olacak şekilde bir tek $\theta : D \to Y$ morfizmi vardır.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
B \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, "\alpha'"'] & D \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}
$$

İleri itmeler var olduğu durumda uygun kategorilerdeki her başlangıç objesi için izomorfizm farkıyla tek türlü tanımlıdırlar. Aşağıdaki önermede sağ R-modüllerin kategorisinde ileri itmelerin var olduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.4.15 Mod$R$'de $f : A \to B$ ve $g : A \to C$ morfizmlerinin ileri itmesi vardır.

İspat

$$S = \{(f(a), -g(a)) \in B \oplus C \mid a \in A\}$$

ile tanımlı, $B \oplus C$'nin S altmodülüne göre bölüm modülü, $D = (B \oplus C)/S$ olmak üzere $\alpha : B \to D$; $b \mapsto \alpha(b) = (b, 0) + S$ ve $\beta : C \to D$; $c \mapsto \beta(c) = (0, c) + S$ ile tanımlı içerim morfizmleri ile birlikte $\beta g = \alpha f$ olacak şekildeki (D, α, β) üçlüsü f ile g'nin ileri itmesidir. $\beta' g = \alpha' f$ olacak şekilde başka bir (Y, α', β') üçlüsü varsa

$$\theta : D \to Y$$

$$(b, c) + S \longmapsto \theta((b, c) + S) = \alpha'(b) + \beta'(c)$$

olacak şekilde bir tek θ tanımlıdır.

Tanım 2.4.16 Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{C}$ kategorisine ***k**-kategori* (***k**-category*) denir.

1. $\mathcal{C}$'deki nesnelerin her X, Y çifti için $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ kümesi bir abel gruptur;

2. Morfizmlerin bileşkesi $\mathbf{k}$-bilineerdir. Yani; her $f, f_1, f_2 : X \to Y$ ve her $g, g_1, g_2 : Y \to Z$ morfizmleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{k}$ skalerleri için

$$g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g \circ f_1) + \lambda_2 (g \circ f_2)$$

$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) \circ f = \mu_1 (g_1 \circ f) + \mu_2 (g_2 \circ f).$$

Tanım 2.4.17 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer $\mathbf{k}$-kategori olsun. $\mathcal{C}$'deki her bir $f, g : X \to Y$ morfizmi ve her bir $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ skaleri için

$$F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$$

özelliğini sağlayan (kovaryant veya kontravaryant) bir $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktoru bir ***k**-funktor* (***k**-functor*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.18 $\mathcal{C}$ bir $\mathbf{k}$-kategori olsun. $\mathcal{C}$'deki nesnelerin her sonlu ailesi bir dik toplam ve dik çarpıma sahip ise, $\mathcal{C}$'ye ***k**-lineer* (***k**-linear*) denir. $\text{mod}A$ kategorisi $\mathbf{k}$-lineerdir.

Tanım 2.4.19 Λ bir küme ve $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ $\mathbf{k}$-lineer kategorilerin bir ailesi olsun. $\mathcal{C}_\lambda$'ların *dik toplamı* (*direct sum*); en fazla sonlu sayıda $\lambda \in \Lambda$ dışında $X_\lambda = 0$ olacak şekildeki tüm $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ nesneleri ve bunların arasındaki aşikar morfizmlerden oluşan $\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda$'nın $\bigoplus_\lambda \mathcal{C}_\lambda$ dolu altkategorisi olarak tanımlanır. K; $\mathbf{k}$'yı kapsayan bir eğik cisim olmak üzere, bir $\mathbf{k}$-lineer $\mathcal{C}$ kategorisi $\text{mod}K$ formundaki kategorilerin bir dik toplamına denk oluyorsa $\mathcal{C}$ kategorisi *yarıbasit* (*semisimple*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.20 $\mathcal{C}$ toplamsal $\mathbf{k}$-kategori olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{C}$'nin morfizmlerinin bir $\mathcal{I}$ sınıfı $\mathcal{C}$'de bir *iki yanlı (two sided) ideal* olarak adlandırılır:

(a) Her bir $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ için, $0_x : X \to X$ sıfır morfizmi $\mathcal{I}$'ya aittir.

(b) $f, g : X \to Y$, $\mathcal{I}$'da morfizmler ve $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ olmak üzere $\lambda f + \mu g \in \mathcal{I}$ dır.

(c) $f \in \mathcal{I}$ ve g; f ile soldan bileşkeye girebilen $\mathcal{C}$'de bir morfizm ise $g \circ f \in \mathcal{I}$ dır.

(d) $f \in \mathcal{I}$ ve h; f ile sağdan bileşkeye girebilen $\mathcal{C}$'de bir morfizm ise $f \circ h \in \mathcal{I}$ dır.

Tanım 2.4.21 Bir $\mathcal{C}$ $\mathbf{k}$-kategorisinde bir $\mathcal{I}$ ideali verildiğinde $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ *bölüm kategorisi* (*quotient category*);

- nesneleri; $\mathcal{C}$'deki nesnelerin sınıfı ile aynı,
- morfizmleri; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(X,Y)}}{\mathcal{I}(X,Y)}$ ile tanımlı,
- morfizmlerin bilinen bileşkesi

ile tanımlıdır.

Tanım 2.4.22 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kontravaryant funktorlar olsun. $\mathcal{C}$'deki her bir $f : X \to Y$ morfizmi için;

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \\ {\scriptstyle T_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_X} \\ G(Y) & \xrightarrow{G(f)} & G(X) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $T_X F(f) = G(f) T_Y$ olacak şekildeki T_X funktorlarının oluşturduğu $T = (T_X) : F \to G$ fonksiyonuna bir *funktorsal morfizm* (*functorial morphism*) denir. T_X'lerin birebir olması durumunda T'ye *funktorsal monomorfizm* (*functorial monomorphism*), T_X'lerin örten olması durumda T'ye *funktorsal epimorfizm* (*functorial epimorphism*) denir. Kovaryant funktorlar için de benzer tanımlar yapılır.

Tanım 2.4.23 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ $\mathbf{k}$-kategoriler ve $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\mathbf{k}$-funktorlar olsun. Bir $\varphi : F \to G$ funktorsal monomorfizmi varsa F'ye G'nin bir *altfunktoru* (*subfunctor*) denir ve $F \subseteq G$ ile gösterilir. Bir funktorun kendisinden farklı bir altfunktoruna *öz altfunktor* (*proper subfunctor*) denir. F; bir G funktorunun bir öz altfunktoru olsun. $F \subseteq F'$ olacak şekilde G'nin bir F' altfunktoru var iken $F' = F$ oluyorsa, F'ye *maksimal* (*maximal*) altfunktor denir.

3. NEREDEYSE PARÇALANAN DİZİLER

Neredeyse parçalanan diziler bir modül kategorisinin radikalinde bulunan morfizmlerin yapısı incelenirken, Maurice Auslander ve Idun Reiten tarafından tanımlanan ve geliştirilen bir kavramdır. Neredeyse parçalanan diziler parçalanan olmayan kısa tam dizilerin minimalidir. mod$A$ kategorisinde tüm neredeyse parçalanan morfizmlerin belirlenmesi, izomorfizm farkıyla tüm ayrıştırılamaz A-modüllerin ve bunların arasındaki indirgenmez morfizmlerin bulunması bakımından önemlidir. Bu diziler yardımıyla bir cebirin Auslander-Reiten kuiveri denilen yeni bir kuiver oluşturulur ve bu sayede modül kategorisi hakkında tam bilgi elde edilir.

Bu bölümde ilk olarak sonlu boyutlu bir A-cebir üzerine kurulan modüllerin kategorisinin radikalinin yapısı incelenerek bazı karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra indirgenmez morfizm kavramı tanıtılarak bazı özellikleri incelenmiştir. Bunu takiben neredeyse parçalanan ve minimal morfizm kavramları verilerek, bazı özellikleri ve indirgenmez morfizmlerle ilişkileri ifade edilmiştir. Sonraki bölümde neredeyse parçalanan diziler tanıtılarak sahip oldukları özellikler verilmiştir. Son olarak neredeyse parçalanan dizilerin varlığı funktorsal bir yaklaşımla ele alınarak ispatlanmıştır.

Bu bölümde kullanılan temel kaynak (Assem ve Coelho, 2020)'dir.

3.1. mod$A$'nın Radikali

İlk olarak, ayrıştırılamaz A-modüllerin ind$A$ kategorisinde radikal tanımını verip daha sonra bu tanımı tüm mod$A$'ya genişleteceğiz. Bir cebirin radikalinde olduğu gibi modül kategorisinin radikalinin de bir ideal olduğunu göstereceğiz. Böylece her bir ayrıştırılamaz M ve N A-modülleri için, keyfi morfizmlerle sağdan ya da soldan bileşkeye girdiğinde yine $\mathrm{Hom}_A(M,N)$'nin $\mathrm{rad}_A(M,N)$ altuzayında kalan morfizmlerin kümesini belirlemiş olacağız.

Eğer $M = N$ ise, $\mathrm{rad}_A(M,N)$ radikali ile M'nin $\mathrm{End}M$ endomorfizm cebirinin $\mathrm{radEnd}_A M$ radikali aynı olmalıdır. M'yi ayrıştırılamaz kabul ettiğimiz için $\mathrm{End}M$ bir yerel cebir olur. Dolayısıyla $\mathrm{End}_A M$ cebirinin radikali M'den M'ye giden tüm tersinir (yani izomorfizm) olmayan morfizmlerden oluşur. M'nin N'ye eşit olmadığı durumda da bu gözlem dikkate alınırsa $\mathrm{rad}_A(M,N)$ uzayı M'den N'ye giden izomorfizm olmayan morfizmlerden oluşur.

Modül kategorisinde radikalin tanımını doğrulayan aşağıdaki lemmayı vererek başlayalım.

Lemma 3.1.1 M ve N A-modüller olsun. Her $q : M' \to M$ kesit morfizmi ve her $p : N \to N'$ büzme morfizmi için $pfq : M' \to N'$ izomorfizm olmayacak şekilde tüm $f : M \to N$ morfizmlerinin kümesi $\mathrm{mod}A$'nın bir tek idealidir ve rad_A ile gösterilir.

İspat Öncelikle M' ve N' A-modüllerinin ayrıştırılamaz olarak kabul edilebileceğini gösterelim. Yani;

$(*)$ $\quad f : M \to N \in rad_A(M,N) \Leftrightarrow$ M' ve N' ayrıştırılamaz olmak üzere her $q : M' \to M$ kesit morfizmi ve $p : N \to N'$ büzme morfizmi için $pfq : M' \to N'$ bir izomorfizm değildir.

ifadesini ispatlayalım.
($\Leftarrow$) rad_A'nın tanımından açıktır.
($\Rightarrow$) $f : M \to N \in \mathrm{rad}_A(M,N)$ olsun. Kabul edelim ki $g = pfq : M' \to N'$ bir izomorfizm olacak şekilde bir $q : M' \to M$ kesit morfizmi ve bir $p : N \to N'$ büzme morfizmi var olsun. Bu durumda $g^{-1}g = g^{-1}pfq = 1_{M'}$ olacak şekilde $g^{-1} : N' \to M'$ vardır. M' ayrıştırılabilir olsaydı, yani; X; M'' nün bir ayrıştırılamaz dik toplananı olsaydı; bu durumda

$$X \overset{v}{\hookrightarrow} M' \overset{u}{\twoheadrightarrow} X$$

içerim ve izdüşüm morfizmleri için $uv = 1_X$ olurdu. Buradan

$$\begin{aligned} 1_X = uv &= u1_{M'}v \\ &= u(g^{-1}g)v \\ &= u(g^{-1}pfq)v \\ &= (ug^{-1}p)f(qv) \end{aligned}$$

olup $ug^{-1}p : N \twoheadrightarrow N' \twoheadrightarrow M' \twoheadrightarrow X$ bir büzme morfizmi, $qv : X \hookrightarrow M' \hookrightarrow M$ bir kesit morfizmi ve X ayrıştırılamaz olmak üzere $(ug^{-1}p)f(qv)$'nin izomorfizm olması $f : M \to N \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ olması ile çelişirdi. Böylece M' ayrıştırılamaz olmalıdır. N''nün ayrıştırılamaz olması gerektiği benzer şekilde gösterilir. M ve N verildiğinde, $(*)$ ifadesi $\mathrm{Hom}_A(M, N)$' nin bir $\mathrm{rad}_A(M, N)$ altkümesini tek türlü tanımlar. Şimdi bu altkümenin bir ideal olduğunu gösterelim. $f, g \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ olsun. M' ve N' ayrıştırılamaz olmak üzere her $q : M' \to M$ kesit ve her $p : N \to N'$ büzme morfizmi için
I.Durum: $M' \ncong N'$ ise;

$$p(\lambda f + \mu g)q = \lambda(pfq) + \mu(pgq)$$

izomorfizm değildir. Yani $\mathrm{rad}_A(M, N)$ toplama ve skaler çarpmaya göre kapalı olur.
II.Durum: $M' \cong N'$ ise; yukarıdaki lineer bileşim $\mathrm{Hom}_A(M', N') \cong \mathrm{End}_A M'$'ye aittir. M' ayrıştırılamaz olduğundan $\mathrm{End}_A M'$ yerel olup tersinir olmayan iki elemanın toplamı yine tersinir değildir. Böylece $\mathrm{rad}_A(M, N)$; $\mathrm{Hom}_A(M, N)$'nin bir altuzayı bulunur.
Şimdi $\mathrm{rad}_A(M, N)$'nin bir ideal olduğunu gösterelim. Bunun için $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ ve $g \in \mathrm{Hom}_A(L, M)$ alalım. $fg \in \mathrm{rad}_A(L, N)$ olduğunu iddia ediyoruz. Kabul edelim ki $fg \notin \mathrm{rad}_A(L, N)$ olsun. Bu durumda L' ve N' ayrıştırılamaz olmak üzere $p(fg)q : L' \to N'$ bir izomorfizm olacak şekilde bir $q : L' \to L$ kesit morfizmi ve bir $p : N \to N'$ büzme morfizmi vardır. Bu durum $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ olması ile çelişir. Böylece $fg \in \mathrm{rad}_A(L, N)$ elde edilir. Benzer olarak $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ ve $h \in \mathrm{Hom}_A(N, L)$ için $hf \in \mathrm{rad}_A(M, L)$ bulunur. Sonuç olarak $\mathrm{rad}_A(M, N)$; $\mathrm{Hom}_A(M, N)$'nin bir idealidir.

Tanım 3.1.2 M ve N A-modüller olmak üzere "her $q : M' \to M$ kesit morfizmi ve her $p : N \to N'$ büzme morfizmi için $pfq : M' \to N'$ bir izomorfizm değil"özelliğini sağlayan tüm $f : M \to N$ morfizmlerinin $\mathrm{rad}_A(M, N)$ kümesine mod$A$' nın *radikali* (*radical*) denir ve

$$\mathrm{rad}_A(M, N) = \{f : M \to N \ \mid \ pfq : M' \to N' \text{ izomorfizm değildir}\}$$

kümesine ait olan bir ve f morfizmi *radikal morfizm* (*radical morphism*) olarak adlandırılır.

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Uyarı 3.1.3 *M ve N ayrıştırılamaz A-modüller olsun.*

(i) $M \ncong N$ ise, bu durumda $\mathrm{rad}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ dir.

(ii) $M \cong N$ ise, bu durumda $\mathrm{rad}_A(M, N) \cong \mathrm{radEnd}_A M$ kümesi tüm izomorfizm olmayan morfizmlerden, yani nilpotent endomorfizmlerden, oluşur.

İspat (i) $M \ncong N$ olsun. Tanımdan $\mathrm{rad}_A(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_A(M, N)$ olduğu açıktır. $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ alalım. Kabulden f bir izomorfizm değildir. O halde

$$1_N f 1_M : \ M \xhookrightarrow{1_M} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{1_N} N$$

var olup $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ bulunur. Sonuç olarak $\mathrm{rad}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ elde edilir.
(ii) $M \cong N$ olsun. Bu durumda $\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{End}_A M$ olur. M ayrıştırılamaz olduğundan $\mathrm{End}_A M$ yerel olup Uyarı 2.2.12(ii) gereğince ispat açıktır.

Ayrıca;

$$\mathrm{rad}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{m} M_i, \bigoplus_{j=1}^{n} N_j\right) = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{rad}_A(M_i, N_j)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Sonuç 3.1.4 *M ve N A-modüller olsun. $f : M \to N$'nin bir radikal morfizm olması için gerek ve yeter koşul her ayrıştırılamaz X modülü ve $u : X \to M$ ve $v : N \to X$ morfizmleri için vfu bileşkesinin bir izomorfizm olmamasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$ $f \in \mathrm{rad}_A(M,N)$ olsun. Kabul edelim ki X ayrıştırılamaz bir modül olmak üzere $u : X \to M$ ve $v : N \to X$ morfizmleri için vfu bir izomorfizm olsun. Bu durumda v bir büzme morfizmi ve u bir kesit morfizmi olur. Bu ise $f \in \mathrm{rad}_A(M,N)$ olması ile çelişir. O halde vfu bileşkesi bir izomorfizm değildir.
$(\Leftarrow)$ Açıktır.

Aşağıdaki sonuçta da görüleceği gibi M ve N A-modüllerinden birinin ayrıştırılamaz olması durumunda $\mathrm{rad}_A(M,N)$ kolayca belirlenir.

Sonuç 3.1.5 $f : M \to N$ bir A-modül morfizmi olsun.

(i) M ayrıştırılamaz ise, f radikal morfizmdir $\Leftrightarrow$ f bir kesit morfizmi değildir.

(ii) N ayrıştırılamaz ise, f radikal morfizmdir $\Leftrightarrow$ f bir büzme morfizmi değildir.

İspat (i) M ayrıştırılamaz olsun. Kabul edelim ki f bir kesit morfizmi olsun. Bu durumda $f'f = 1_M$ olacak şekilde bir $f' : N \to M$ morfizmi vardır. $f'f$ izomorfizm olduğundan $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$ olup ispat tamamlanır. Tersine f bir kesit morfizmi olmasın. Kabul edelim ki $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$ olsun. Bu durumda $pfq : M' \to N'$ bir izomorfizm olacak şekilde bir $q : M' \to M$ kesit morfizmi ve bir $p : N \to N'$ büzme morfizmi vardır. Bu durumda $q'q = 1_M$ olacak şekilde $q' : M \to M'$ morfizmi var olup Lemma 2.1.11 gereğince $M = \mathrm{im}q \oplus \ker q'$ yazılır. M ayrıştırılamaz olduğundan $\mathrm{im}q = M$ olup q örtendir. Aynı zamanda q bir kesit morfizmi olduğundan birebir olup q bir izomorfizmdir. $(pf)q$ izomorfizm ve q izomorfizm olduğundan pf bir izomorfizm olur. Böylece f'nin bir kesit morfizmi olduğu elde edilir. Bu durum kabul ile çelişir. Sonuç olarak f bir radikal morfizmdir.
(ii) N ayrıştırılamaz olsun. Kabul edelim ki f bir büzme morfizmi olsun. Bu durumda $ff' = 1_N$ olacak şekilde bir $f' : N \to M$ morfizmi vardır. ff' izomorfizm olduğundan $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$ olup ispat tamamlanır. Tersine f bir büzme morfizmi olmasın. Kabul edelim ki $f \notin \mathrm{rad}_A(M,N)$ olsun. Bu durumda $pfq : M' \to N'$ bir izomorfizm olacak şekilde bir $q : M' \to M$ kesit morfizmi ve bir $p : N \to N'$ büzme morfizmi vardır. Bu durumda $pp' = 1_{N'}$ olacak şekilde $p' : N' \to N$ morfizmi var olup Lemma 2.1.11 gereğince $N = \ker p \oplus \mathrm{im}p'$ yazılır. N ayrıştırılamaz olduğundan $\ker p = 0$ olup p birebirdir. Aynı zamanda p bir büzme morfizmi olduğundan örten

olup p bir izomorfizmdir. $p(fq)$ izomorfizm ve p izomorfizm olduğundan fq bir izomorfizmdir. Böylece f'nin bir büzme morfizmi olduğu elde edilir. Bu durum kabul ile çelişir. Sonuç olarak f bir radikal morfizmdir.

Teorem 2.2.9'deki ifadeye benzer olarak mod$A$'nın radikali için de aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.6 A bir cebir olmak üzere mod$A$/rad$A$ kategorisi yarıbasittir.

Uyarı 2.2.8 gözönüne alındığında bir cebirin radikalinin farklı karakterizasyonları sözkonusudur. Modül kategorisinin radikali için de benzer karakterizasyonlar vardır. Öncelikle mod$A$'nın radikali yardımıyla; N bir sabit A-modül olmak üzere kontravaryant $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ funktorunun $\mathrm{rad}_A(-,N)$ altfunktoru şu şekilde tanımlanır:

- Her M nesnesini $\mathrm{rad}_A(M,N)$ uzayına;
- Her $f : M' \to M$ morfizmini

$$\mathrm{rad}_A(-,N)(f) = \mathrm{rad}_A(f,N) : \mathrm{rad}_A(M,N) \to \mathrm{rad}_A(M',N)$$

$$\mathrm{rad}_A(f,N)(v) = vf$$

ile tanımlanan morfizme götürür. Benzer olarak sabit bir M modülü için kovaryant $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ funktorunun $\mathrm{rad}_A(M,-)$ altfunktoru şu şekilde tanımlanır:

- Her N nesnesini $\mathrm{rad}_A(M,N)$ uzayına;
- Her $f : N \to N'$ morfizmini

$$\mathrm{rad}_A(M,-)(f) = \mathrm{rad}_A(M,f) = \mathrm{Hom}_A(M,f) : \mathrm{rad}_A(M,N) \to \mathrm{rad}_A(M,N')$$

$$\mathrm{rad}_A(M,f)(u) = fu$$

ile tanımlanan morfizme götürür.

Lemma 3.1.7 $\mathcal{C}$ bir lineer kategori ve X; $\mathcal{C}$'nin bir nesnesi olsun.

(i) $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'in maksimal sağ idealleri ile $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$'in maksimal altfunktorları arasında birebir eşleme vardır.

(ii) $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'in maksimal sol idealleri ile $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$'in maksimal altfunktorları arasında birebir eşleme vardır.

İspat (i) I, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'in bir maksimal sağ ideali olmak üzere $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$'in bir maksimal altfunktoru $F_I : \mathcal{C} \to \mathrm{mod}A$ şu şekilde tanımlanır: $\mathcal{C}$'nin bir Y nesnesini;

$$F_I(Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(Y,X) \ \mid \ \text{her } g : X \to Y \text{ için } fg \in I\}$$

ile tanımlanan $\mathrm{Hom}_A(Y,X)$'in bir altuzayına,
$\mathcal{C}$'nin bir $u : Y' \to Y$ morfizmini; $F_I(u)(f) = \mathrm{Hom}_A(u,X)(f) = fu$ ile tanımlı

$$F_I(u) : F_I(Y) \to F_I(Y')$$

morfizmine götürür. $f \in F_I(Y)$ olsun. Herhangi bir $g : X \to Y'$ morfizmi için $ug : X \to Y$ olup $(fu)g = f(ug) \in I$ olduğundan $F_I(u)(f) = fu \in F_I(Y')$ bulunur. Böylece $F_I(u)$ iyi tanımlıdır.

$$F_I(Y) \subseteq \mathrm{Hom}_A(Y,X) \text{ ve } F_I(u) = \mathrm{Hom}_A(u,X)$$

biçiminde tanımlandığından F_I, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$'in bir altfunktorudur. Ayrıca

$$F_I(X) = \{f \in \mathrm{End}_A X \ \mid \ \text{her } g : X \to X \text{ için } fg \in I\} = I$$

olur. Şimdi F_I'nın maksimal altfunktor olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $F_I \subseteq F \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ olacak şekilde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$'in bir F funktoru var olsun. Özel olarak $\mathcal{C}$'nin her X nesnesi için $I = F_I(X) \subseteq F(X) \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$ kapsamaları vardır. $F(X)$; $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'de bir ideal olup her $u : X \to X$ morfizmi için;

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r] \arrow[d, "F(u)"] & Hom_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(u,X)"] \\
FX \arrow[r] & Hom_{\mathcal{C}}(X,X)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur. I maksimal olduğundan aşağıdaki iki durumdan biri sözkonusudur.
I.Durum: $F(X) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$ ise; her $f : Y \to X$ için

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r] \arrow[d, "F(f)"] & \mathrm{End}_{\mathcal{C}}X \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(f,X)}"] \\
FY \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)
\end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeliliğinden $F(f)(1_X) = 1_X f = f \in F(Y)$ olur ki buradan her Y nesnesi için $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) = F(Y)$ elde edilir. Böylece F ve $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ funktorları eşit olur.

II.Durum: $F(X) = F_I(X) = I$ ise; $f \in F(Y)$ ve $g : X \to Y$ morfizmi için aşağıdaki değişmeli diyagram gözönüne alınırsa;

$$\begin{tikzcd} FY \arrow[r] \arrow[d, "F(g)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(g,X)"] \\ FX \arrow[r] & \mathrm{End}_{\mathcal{C}}X \end{tikzcd}$$

$F(g)(f) = fg \in F(X) = I$ olup $f \in F_I(Y)$ olur. Böylece $F(Y) \subseteq F_I(Y)$ olup $F = F_I$ bulunur. Sonuç olarak F_I maksimal altfunktordur.

Tersine F; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$'in bir maksimal altfunktoru olsun. Bu durumda $F = F_I$ olacak şekilde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'in bir tek maksimal I idealinin var olduğunu iddia ediyoruz. $F(X) = I$ alalım. I; $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'in bir altuzayıdır. Dolayısıyla I'nın sağ ideal olması F'nin bir altfunktor olmasını gerektirir. Bu durumda I'nın maksimal olduğunu göstermek yeterlidir. $I \subseteq J$ olacak şekilde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}X$'in bir sağ ideali var olsun. $f \in F(Y)$ ve $g : Y \to X$ olsun. Bu durumda $F(g)(f) = fg \in F(X) = I \subseteq J$ olduğundan $f \in F_J(Y)$ bulunur. $F(X) = I \subseteq J = F_J(X)$ olduğundan $F \subseteq F_J$ elde edilir. F'nin maksimalliğinden $F = F_J$ ve buradan $I = F(X) = F_J(X) = J$ bulunur. Bu da I'nın maksimal olduğunu gösterir.

(ii) (i)'ye benzer olarak ispatlanır.

Sonuç 3.1.8 $\mathcal{C}$ bir lineer kategori ve $f : X \to Y$; $\mathcal{C}$'de bir morfizm olsun.

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$'nin her maksimal F altfunktoru için $f \in F(X)$ olması için gerek ve yeter koşul her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_Y - fg$'nin tersinir olmasıdır.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$'in her maksimal F altfunktoru için $f \in F(Y)$ olması için gerek ve yeter koşul her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_X - gf$'nin tersinir olmasıdır.

İspat (a) ($\Rightarrow$) Lemma 3.1.7 gereğince; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$'nin her maksimal F altfunktoru için $f \in F(X)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}Y$'nin her maksimal I ideali ve her $g : Y \to X$ morfizmi için $fg \in I$ olması ve bunun için gerek ve yeter koşul her $g : Y \to X$ morfizmi için $fg \in \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_{\mathcal{C}}Y$ olmasıdır. Böylece $1_Y - fg$ tersinirdir.

($\Leftarrow$) $g : Y \to X$ morfizmi için $1_Y - fg$ tersinir olsun. $h \in \text{End}_{\mathcal{C}}Y$ alalım. Kabulden $gh : Y \to X$ için $1_Y - f(gh) = 1_Y - fg(h)$ tersinir olduğundan $fg \in \text{rad}\ \text{End}_{\mathcal{C}}Y$ elde edilir.
(b) (a) şıkkına benzer olarak ispatlanır.

Lemma 3.1.9 $\mathcal{C}$ bir lineer kategori ve $f : X \to Y$; $\mathcal{C}$'de bir morfizm olsun.

(i) Her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_Y - fg$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ Her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_Y - fg$ sağ tersinirdir.

(ii) Her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_X - gf$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ Her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_X - gf$ sol tersinirdir.

İspat (i) ($\Rightarrow$)Açıktır.
($\Leftarrow$) $1_Y - fg$ sağ tersinir olsun. Bu durumda $(1_Y - fg)h = 1_Y$ olacak şekilde h sağ tersi vardır. Buradan $h = 1_Y - (f(-gh))$ olup kabulden h sağ tersinir olur. Böylece $hl = 1_Y$ olacak şekilde l sağ tersi vardır. $1_Y = hl = (1_Y + fgh)l = l + fg$ ve buradan $l = 1 - fg$ olup h; aynı zamanda $1 - fg$'nin sol tersi bulunur. Sonuç olarak $1 - fg$ tersinirdir.
(ii) (i)'ye benzer olarak ispatlanır.

Lemma 3.1.10 $\mathcal{C}$ bir lineer kategori ve $f : X \to Y$; $\mathcal{C}$'de bir morfizm olsun. Bu durumda; her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_X - gf$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ her $g : Y \to X$ morfizmi için $1_Y - fg$ tersinirdir.

İspat ($\Rightarrow$) $1_X - gf$ tersinir olsun. Bu durumda $h(1_X - gf) = 1_X$ olacak şekilde h vardır. Buradan $1_X - h + hgf = 0$ olur.

$$\begin{aligned}(1_Y + fgh)(1_Y - fg) &= 1_Y - fg + fhg - fhgfg \\ &= 1_Y - f(g - hg + hgfg) \\ &= 1_Y - f(1_X - h + hgf)g \\ &= 1_Y\end{aligned}$$

elde edilir. Kabulden $(1_X - gf)h = 1_X$ olup buradan

$$\begin{aligned}(1_Y - fg)(1_Y + fgh) &= 1_Y + fgh - fg - fgfhg \\ &= 1_Y - f(g - hg + gfhg) \\ &= 1_Y - f(1_X - h + gfh)g \\ &= 1_Y\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $1_Y - fg$ tersinirdir.
$(\Leftarrow)$ Benzer olarak ispatlanır.

Aşağıdaki teoremde modül kategorisinin radikalinin bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir.

Teorem 3.1.11 $f : M \to N$ bir A-modül morfizmi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$;

(b) $\mathrm{Hom}_A(-, N)$'nin her maksimal F funktoru için $f \in F(M)$;

(c) $\mathrm{Hom}_A(M, -)$'nin her maksimal F funktoru için $f \in F(N)$;

(d) Her $g : N \to M$ için $1_N - fg$ tersinirdir;

(e) Her $g : N \to M$ için $1_M - gf$ tersinirdir;

(f) Her $g : N \to M$ için $1_N - fg$ sağ tersinirdir;

(g) Her $g : N \to M$ için $1_M - gf$ sol tersinirdir.

İspat $(d) \Leftrightarrow (e)$ Lemma 3.1.10'dan, $(d) \Leftrightarrow (f)$ ve $(e) \Leftrightarrow (g)$ Lemma 3.1.9'dan açık olup $(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g)$ denklikleri sağlanır. Ayrıca Sonuç 3.1.8'den $(b) \Leftrightarrow (d)$ ve $(c) \Leftrightarrow (e)$ denklikleri açık olup $(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ denklikleri vardır. Şimdi (a) ile (f) denkliğini kanıtlamak için aşağıdaki kümeyi tanımlayalım:

$$\mathcal{R}(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid \text{ her } g : N \to M \text{ için } 1_N - fg \text{ sağ tersinir}\}$$

olsun.
(i) Öncelikle M ve N ayrıştırılamaz iken $\mathcal{R}(M, N) = \mathrm{rad}_A(M, N)$ olduğu gösterelim.

$f \in \mathcal{R}(M,N)$ alalım. Bu durumda f bir izomorfizm olamaz. Çünkü f bir izomorfizm olsaydı $ff^{-1} = 1_N$ olacak şekilde f^{-1} sağ tersi var olurdu. Buradan $1_N - ff^{-1} = 0$ olması $f \in \mathcal{R}(M,N)$ olması ile çelişirdi. Böylece $\mathcal{R}(M,N) \subseteq \mathrm{rad}_A(M,N)$ elde edilir. $f \in \mathrm{rad}_A(M,N)$ alalım. Bu durumda $f : M \to N$ bir izomorfizm değildir. Her $g : N \to M$ için $fg : N \to N$ bileşkesi de bir izomorfizm değildir. Çünkü fg bir izomorfizm olsaydı $(fg)g' = 1_N$ olacak şekilde g' var olurdu ve buradan f bir büzme morfizmi ve böylece örten olurdu. Diğer yandan M ayrıştırılamaz olduğundan $\mathrm{ker} f = 0$ olup f birebirdir. f'nin hem birebir hem de örten olması f'nin izomorfizm olmaması ile çelişirdi. N ayrıştırılamaz olduğundan $\mathrm{End}N$ yerel olup fg tersinir olmadığından $1 - fg$ sağ tersinir elde edilir. Bundan dolayı $f \in \mathcal{R}(M,N)$ olur. Böylece $\mathrm{rad}_A(M,N) \subseteq \mathcal{R}(M,N)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathrm{rad}_A(M,N) = \mathcal{R}(M,N)$ bulunur.

(ii) Şimdi $\mathcal{R}(M,N)$'nin $\mathrm{Hom}(M,N)$'nin altuzayı olduğunu gösterelim. $0 \in \mathcal{R}(M,N)$ olduğundan $\mathcal{R}(M,N)$ boştan farklı ve $\mathcal{R}(M,N) \subseteq \mathrm{Hom}(M,N)$ olduğu açıktır. $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(M,N)$ alalım. Bu durumda $1_N - f_1 g$ sağ tersinir olup $(1_N - f_1 g)h_1 = 1_N$ olacak şekilde $h_1 : N \to N$ vardır ve $1_N - f_2 g h_1$ sağ tersinir olup $(1_N - f_2 g h_1)h_2 = 1_N$ olacak şekilde $h_2 : N \to N$ vardır. $h_1 h_2$; $1 - (f_1 + f_2)g$'nin sağ tersidir. Gerçekten; $(1_N - f_1 g)h_1 = 1_N \Rightarrow h_1 - 1_N = f_1 g h_1$ ve $(1_N - f_2 g h_1)h_2 = 1_N \Rightarrow h_2 - 1_N = f_2 g h_1 h_2$ olduğu kullanılarak;

$$\begin{aligned}
[1_N - (f_1 + f_2)g]h_1 h_2 &= h_1 h_2 - f_1 g h_1 h_2 - f_2 g h_1 h_2 \\
&= h_1 h_2 - (h_1 - 1_N)h_2 - (h_2 - 1_N) \\
&= h_1 h_2 - h_1 h_2 + h_2 - h_2 + 1_N \\
&= 1_N
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(M,N)$ elde edilir. Ek olarak $f \in \mathcal{R}(M,N)$ ve $\lambda \in \mathbf{k}$ için $\lambda f \in \mathcal{R}(M,N)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $\mathcal{R}(M,N)$, $\mathrm{Hom}(M,N)$'nin bir altuzayıdır. Şimdi $\mathcal{R}(M,N)$'nin $\mathrm{mod}A$'nın bir ideali olduğunu gösterelim. $f \in \mathcal{R}(M,N)$ ve $u \in \mathrm{Hom}(L,M)$ olsun. Her $g : N \to L$ morfizmi için $ug : N \to M$' dir ve $1 - (fu)g = 1 - f(ug)$ sağ tersinirdir. Böylece $fu \in \mathcal{R}(L,N)$ elde edilir. $f \in \mathcal{R}(M,N)$ ve $v \in \mathrm{Hom}(N,L)$ olsun. Her $g : L \to M$ morfizmi için $gv : N \to M$'dir ve $f \in \mathcal{R}(M,N)$ olduğundan $1 - fgv$'nin sağ tersinirdir. Bu durumda $(1 - fgv)h = 1_N$

olacak şekilde $h : N \to N$ vardır. $h - 1_N = fgvh$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
(1_L - vfg)(1_L + vhfg) &= 1_L + vhfg - vfg - vfgvhfg \\
&= 1_L + vhfg - vfg - v(h - 1_N)fg \\
&= 1_L + vhfg - vfg - vhfg + vfg \\
&= 1_L
\end{aligned}$$

olduğundan $1 - vfg$ sağ tersinir olup $vf \in \mathcal{R}(M, L)$ elde edilir. $\mathcal{R}(M, N)$, mod$A$'nın bir idealidir.

(iii) M ve N keyfi modüller olsun. "$f \in \mathcal{R}(M, N) \;\Leftrightarrow\; M'$ ve N' ayrıştırılamaz olmak üzere her $p : M' \to M$ kesit morfizmi ve her $q : N \to N'$ büzme morfizmi için $pfq \in \mathcal{R}(M', N')$'dir."ifadesini ispatlayalım.

($\Rightarrow$) $f \in \mathcal{R}(M, N)$ olsun. (ii) şıkkından $\mathcal{R}(M, N)$ ideal olduğu için $pf \in \mathcal{R}(M, N)$ ve $pfq \in \mathcal{R}(M', N')$ olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) M_i ve N_j ayrıştırılamaz olmak üzere $M = \oplus_{i=1}^{m} M_i$ ve $N = \oplus_{j=1}^{N} N_j$ biçiminde yazılsın. $p_i : M \to M_i$ ile $p'_j : N \to N_j$ izdüşüm dönüşümleri ve $q_i : M_i \to M$ ile $q'_j : N_j \to N$ içerim dönüşümleri olsun. Kabulden her bir (i, j) çifti için $p'_j f q_i \in \mathcal{R}(M_i, N_j)$ olduğundan

$$f = 1_N f 1_M = \left(\sum_j q'_j p'_j \right) f \left(\sum_i q_i p_i \right) = \sum_{i,j} q'_j (p'_j f q_i) p_i \in \mathcal{R}(M, N)$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.12 $f : M \to N$ bir A-modül morfizmi olsun.Aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$

(b) Her $g : N \to M$ için gf nilpotenttir.

(c) Her $g : N \to M$ için fg nilpotenttir.

İspat $(a) \Rightarrow (b)$ $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.11 gereğince, her $g : N \to M$ için $1_M - gf$ tersinirdir. Böylece $gf \in$ rad EndM olup gf nilpotenttir.

$(b) \Rightarrow (a)$ Her $g : N \to M$ morfizmi için gf nilpotent olsun. Bu durumda $(gf)^n = 0$ fakat $(gf)^{n-1} \neq 0$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır.

$$(1_M - gf)(1_M + (gf) + \cdots + (gf)^{n-1}) = 1_M$$

olacak şekilde $1_M - gf$ sağ tersinirdir. Böylece $f \in \mathrm{rad}_A(M, N)$ olur.

$(a) \Rightarrow (c)$ ve $(c) \Rightarrow (a)$ gerektirmeleri benzer şekilde ispatlanır.

3.2. İndirgenmez Morfizmler

mod$A$ kategorisi hakkında bilgi almak (en azından ayrıştırılamaz modülleri belirlemek) için bu kategorinin radikali incelenmelidir. Dolayısıyla hangi morfizmlerin tüm radikal morfizmleri ardışık bileşkelerle ve lineer bileşimlerle ürettiği sorusu sorulabilir. Açıktır ki bu morfizmler, diğer radikal morfizmlerin bileşkelerinin toplamları olarak daha fazla çarpanlara ayrılamayan, ayrıştırılamaz modüller arasındaki radikal morfizmlerdir. Bu morfizmleri incelemeye başlamadan önce modül kategorisinin radikalinin karesini tanımlayalım.

$f : L \to M$ ve $g : M \to N$ radikal morfizmler olsun. Bu durumda gf bileşkesi rad_A^2'dedir. L ve N modülleri verildiğinde;

$$\mathrm{rad}_A^2(L, N) = \{\Sigma g_i f_i \mid f_i \in \mathrm{rad}_A(L, M_i), g_i \in \mathrm{rad}_A(M_i, N)\}$$

ile, eğer $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ biçiminde yazılırsa;

$$\mathrm{rad}_A^2(L, N) = \{gf \mid f \in \mathrm{rad}_A(L, M), g \in \mathrm{rad}_A(M, N), M \in \mathrm{mod}A\}$$

ile tanımlanır. Bundan sonraki bölümlerde radikalde olan fakat radikalin karesinde olmayan morfizmlerle ilgileneceğiz. Bu morfizmlerin ayrıştırılamaz modüller arasında olması koşulu kaldırılırsa aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.2.1 L ve M (ayrıştırılamaz olması gerekmeyen) birer A-modül olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $f : L \to M$ morfizmi *indirgenmez* (*irreducible*) olarak adlandırılır:

(i) f ne bir kesit morfizmi, ne de bir büzme morfizmidir,

(ii) f herhangi bir N modülü üzerinden faktörlendiğinde, yani aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak, yani; $f = f_1 f_2$ olacak, şekilde $f_1 : N \to M$ ve $f_2 : L \to N$ morfizmleri var olduğunda; ya f_1 bir büzme morfizmidir ya da f_2 bir kesit morfizmidir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\ & N \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

Bu notasyon yarı dualdir. Yani; $f : L \to M$'nin mod$A$'da indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul $Df : DM \to DL$'nin modA^{op}'ta indirgenmez olmasıdır. L'nin veya M'nin ya da her ikisinin de ayrıştırılamaz olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 3.2.2 $f : L \to M$ mod$A$'da bir morfizm olsun.

(i) L veya M ayrıştırılamaz modüller olsun. $f : L \to M$ indirgenmez morfizm ise, f radikal morfizmdir.

(ii) L ve M ayrıştırılamaz modüller olsun. $f : L \to M$ indirgenmez morfizm olması için gerek ve yeter koşul $f \in \mathrm{rad}_A(L, M) \setminus \mathrm{rad}^2_A(L, M)$ olmasıdır.

İspat (i) L'nin ayrıştırılamaz olduğunu kabul edelim. f indirgenmez olsun. Bu durumda f bir kesit morfizmi değildir. Sonuç 3.1.5'ten f bir radikal morfizmdir. Benzer olarak M'nin ayrıştırılamaz olduğu kabul edilirse f'nin bir büzme morfizmi olmadığı kullanılarak Sonuç 3.1.5'ten f'nin bir radikal morfizm olduğu görülür.

(ii) L ve M'nin her ikisi de ayrıştırılamaz olsun.
($\Rightarrow$) f'nin indirgenmez olduğunu kabul edelim. Bu durumda f bir kesit ve büzme morfizmi değildir. Sonuç 3.1.5 gereğince $f \in \mathrm{rad}_A(L, M)$ dir. $f \notin \mathrm{rad}^2(M, N)$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $f \in \mathrm{rad}^2(L, M)$ olsun. Bu durumda $f = gh$ olacak şekilde $h \in \mathrm{rad}_A(L, N)$ ve $g \in \mathrm{rad}_A(N, M)$ vardır. Böylece

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & M \\ & N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

f, N üzerinden faktörlenir. f indirgenmez olduğundan h bir kesit morfizmi ya da g bir büzme morfizmi olmalıdır. Buradan Sonuç 3.1.5'ten $h \notin \mathrm{rad}_A(L, N)$ ve $g \notin \mathrm{rad}_A(N, M)$ olmalıdır ki bu çelişki olur. Sonuç olarak $f \in \mathrm{rad}_A(L, M) \setminus \mathrm{rad}^2_A(L, M)$ dir.
($\Leftarrow$) $f \in \mathrm{rad}_A(L, M) \setminus \mathrm{rad}^2_A(L, M)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathrm{rad}_A(L, M)$ olup L ve M'nin her ikisi de ayrıştırılamaz olduğundan Sonuç 3.1.5 gereğince f bir kesit ve bir

büzme morfizmi değildir. $f = gh$ olacak şekilde f'nin N üzerinden faktörlendiğini kabul edelim.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & M \\ & N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$f \notin \mathrm{rad}^2(L, M)$ olduğundan ya $h \notin \mathrm{rad}_A(L, N)$ ya da $g \notin \mathrm{rad}_A(N, M)$ olur. Buradan Sonuç 3.1.5 gereğince h bir kesit morfizmi ya da g bir büzme morfizmi olup ispat tamamlanır.

İndirgenmez morfizmlerin diğer bir özelliği aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.2.3 Her indirgenmez morfizm; bir monomorfizm veya bir epimorfizmdir.

İspat Kabul edelim ki $f : L \to M$ indirgenmez morfizm olsun. f'nin görüntüsü üzerinden aşağıdaki aşikar faktorizasyonunu gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & M \\ & Imf \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

$f = jp$ olacak şekilde $j : \mathrm{im}f \hookrightarrow M$ içerim morfizmi ve $p : L \twoheadrightarrow \mathrm{im}f$ izdüşüm morfizmi vardır. f indirgenmez olduğundan j bir büzme morfizmi veya p bir kesit morfizmi olur. j büzme morfizmi ise örten olup Teorem 2.1.13(1) gereğince f bir epimorfizmdir. p bir kesit morfizmi ise birebir olup Teorem 2.1.13(2) gereğince f bir monomorfizmdir.

Uyarı 3.2.4 Bir M modülünden kendisine giden bir indirgenmez morfizm yoktur. Eğer bir indirgenmez $f : M \to M$ morfizminin var olduğu kabul edilirse Lemma 3.2.3'ten f bir monomorfizm veya f bir epimorfizm olur. Lemma 2.2.7 gereğince f bir izomorfizm olur ki bu durum f'nin indirgenmez oluşu ile çelişir.

Örnek 3.2.5 (1) P bir ayrıştırılamaz projektif A-modül olsun. $j : \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$ içerim morfizmi indirgenmezdir.
Gerçeten; j bir kesit ve büzme morfizmi değildir.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rad}P \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "h"'] & & P \\ & X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak, yani $j = gh$ olacak, şekilde $g : X \to P$ ve $h : \mathrm{rad}P \to X$ morfizmleri var olsun. g'nin büzme morfizmi olmadığını varsayalım. P projektif olduğundan g örten değildir. Eğer g örten olsaydı;

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ X \arrow[r, "g"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$gh = 1_P$ olacak şekilde h var olurdu ki bu g'nin büzme morfizmi olmaması ile çelişirdi. Bu durumda, $\mathrm{im}g \subseteq \mathrm{rad}P$ olur.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & P \\ & \mathrm{rad}P \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Yani $g = jg'$ olacak şekilde $g' : X \to \mathrm{rad}P$ vardır. $j = gh = (jg')h = j(g'h)$ ve j bir monomorfizm olduğundan $g'h = 1_{\mathrm{rad}P}$ olmalıdır. Böylece h'nin sol tersi var olduğundan h bir kesit morfizmi olup j indirgenmezdir.

(2) I bir ayrıştırılamaz injektif A-modül olsun. $p : I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}I$ izdüşüm morfizmi indirgenmezdir.

Gerçekten; p bir kesit ve büzme morfizmi değildir.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "h"'] & & I/\mathrm{soc}I \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak, yani $p = gh$ olacak, şekilde $g : Y \to I/\mathrm{soc}I$ ve $h : I \to Y$ morfizmleri var olsun. h'nin kesit morfizmi olmadığını varsayalım. I injektif olduğundan h birebir değildir. Eğer h birebir olsaydı;

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_I"'] & Y \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

$h'h = 1_I$ olacak şekilde h' varolurdu. Bu da h'nin kesit morfizmi olmaması ile çelişirdi. Bu durumda, $\mathrm{soc}I \subseteq \mathrm{ker}h$' dir.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & Y \\ & I/\mathrm{soc}I \arrow[ur, dashed, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

Yani $h = g'p$ olacak şekilde $g' : I/\text{soc}I \to Y$ vardır. $p = gh = g(g'p) = (gg')p$; ve p bir epimorfizm olduğundan $gg' = 1_{I/\text{soc}I}$ olmalıdır. Böylece g'nin sağ tersi var olduğundan g bir büzme morfizmi olup p indirgenmezdir.

Aşağıdaki örnek; Lemma 3.2.2(ii)'deki L ve M'nin her ikisinin de ayrıştırılamaz olma şartı kaldırıldığında ifadenin doğru olmadığını gösterir. Burada tanım kümesi ayrıştırılabilir olmak üzere radikalin karesinde bulunmayan bir indirgenmez olmayan radikal morfizmin var olduğunu göstereceğiz.

Örnek 3.2.6 L_1 ve M'nin her ikisi de ayrıştırılamaz olmak üzere $f : L_1 \to M$ bir indirgenmez morfizm olsun. L_2; ne L_1'e ne de M'ye izomorf olan $\text{rad}(\text{End}L_2) \neq 0$ olacak şekilde bir ayrıştırılamaz modül olsun. Bu durumda $\exists 0 \neq u \in \text{rad}(\text{End}L_2)$ vardır. $v : L_1 \to L_2$ keyfi (sıfır da olabilir) bir morfizm olsun. $(f, 0) : L_1 \oplus L_2 \to M$ bir indirgenmez morfizm değildir. Gerçekten; f indirgenmez morfizm olduğundan $(f, 0)$ ne bir kesit ne de bir büzme morfizmidir. Kabul edelim ki;

$$\begin{tikzcd}
L_1 \oplus L_2 \arrow[rr, "{(f,0)}"] \arrow[dr, swap, "{\left(\begin{smallmatrix} 1_{L_1} & 0 \\ v & u \end{smallmatrix}\right)}"] & & M \\
& L_1 \oplus L_2 \arrow[ur, swap, "{(f,0)}"] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olsun. Yani; $(f, 0) = (f, 0)\left(\begin{smallmatrix} 1_{L_1} & 0 \\ v & u \end{smallmatrix}\right)$ biçiminde yazılsın. $(f, 0)$ bir kesit morfizmi olmadığından $\left(\begin{smallmatrix} 1_{L_1} & 0 \\ v & u \end{smallmatrix}\right)$ bir büzme morfizmi olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 1_{L_1} & 0 \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ g' & h' \end{pmatrix} = 1_{L_1 \oplus L_2}$$

olacak şekilde sağ tersi var olur. Buradan;

$$\begin{pmatrix} g & h \\ vg + ug' & vh + uh' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{L_1} & 0 \\ 0 & 1_{L_2} \end{pmatrix}$$

olup $g = 1_{L_1}$, $h = 0$ ve $vh + uh' = 1_{L_2}$ bulunur. Böylece $uh' = 1_{L_2}$ olup u bir büzme morfizmi elde edilir ki bu durum $u \in \text{rad}(\text{End}L_2)$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $(f, 0)$ bir indirgenmez morfizm değildir. Diğer yandan $f \in \text{rad}_A(L_1, M) \setminus \text{rad}^2_A(L_1, M)$ olduğundan $(f, 0) \in \text{rad}(L_1 \oplus L_2, M)$ ve $(f, 0) \notin \text{rad}^2(L_1 \oplus L_2, M)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek; Lemma 3.2.2(i)'deki L ya da M'nin ayrıştırılamaz olma şartı kaldırılırsa ifadenin sağlanmadığını gösterir. Bunun için ayrıştırılabilir modüller arasında radikal morfizm olmayan bir indirgenmez morfizmin var olduğunu göstereceğiz.

Örnek 3.2.7 L ve M'nin her ikisi de ayrıştırılamaz olmak üzere $f : L \to M$ bir indirgenmez morfizm olsun. $\mathrm{Hom}_A(L,N) = 0$, $\mathrm{Hom}_A(N,L) = 0$, $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$, $\mathrm{Hom}_A(N,M) = 0$ özelliklerini sağlayan ayrıştırılamaz bir N modülü alalım. İddia ediyoruz ki,

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix} : L \oplus N \to M \oplus N$$

morfizmi indirgenmezdir. Gerçekten; $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{smallmatrix}\right)$ bir kesit morfizmi değildir. Aksi taktirde kesit morfizmi olsaydı;

$$\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_L & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}$$

olacak şekilde sol tersi var olurdu. Bu durumda $uf = 1_L$ ve buradan f bir kesit morfizmi olurdu ki bu bir çelişkidir. $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{smallmatrix}\right)$ bir büzme morfizmi de değildir. Aksi taktirde büzme morfizmi olsaydı;

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h \\ g' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_L & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}$$

olacak şekilde sağ tersi var olurdu. Bu durumda $fg = 1_L$ ve buradan f bir büzme morfizmi olurdu ki bu bir çelişkidir. Şimdi $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{smallmatrix}\right)$'nin aşağıdaki biçimde bir faktorizasyonunun var olduğunu kabul edelim.

$$\begin{tikzcd} L \oplus N \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, "(u' \ \ v')"'] & & M \oplus N \\ & X \arrow[ur, "\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani; $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u' & v' \end{smallmatrix}\right)$ olacak şekilde $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) : X \longrightarrow M \oplus N$ ve $\left(\begin{smallmatrix} u' & v' \end{smallmatrix}\right) : L \oplus N \longrightarrow X$ morfizmleri var olsun. Kabulden $uu' : L \longrightarrow M$, $uv' : N \longrightarrow M$ olup $uv' = 0$, $vu' : L \longrightarrow N$ olup $vu' = 0$, $vv' : L \longrightarrow M$ olduğu göz önüne alınarak;

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu' & uv' \\ vu' & vv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu' & 0 \\ 0 & vv' \end{pmatrix}$$

olup $f = uu'$ ve $vv' = 1_N$ bulunur. Buradan v bir büzme morfizmi ve v' bir kesit morfizmi olur. Ayrıca f indirgenmez olduğundan u bir büzme morfizmi ve u' bir kesit morfizmi bulunur. Şimdi bu durumları ayrı ayrı ele alalım.

I.Durum: u bir büzme morfizmi ise; $uu'' = 1_M$ olacak şekilde $u'' : M \to X$ sağ tersi vardır. Bu durumda $uv' : N \to M$ olup $uv' = 0$ ve $vu'' : M \to N$ olup $vu'' = 0$ olduğu gözönüne alınarak;

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu'' & uv' \\ vu'' & vv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_M & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece $\begin{pmatrix} u'' & v' \end{pmatrix} : M \oplus N \longrightarrow X$ sağ tersi var olduğundan $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ bir büzme morfizmi elde edilir.

II.Durum: u' bir kesit morfizmi ise $u''u' = 1_L$ olacak şekilde $u'' : X \longrightarrow L$ sol tersi vardır. Bu durumda $u''v' : N \to L$ olup $u''v' = 0$ ve $vu' : L \to N$ olup $vu' = 0$ olduğu gözönüne alınarak;

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u''u' & u''v' \\ vu' & vv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_L & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece $\left(\begin{smallmatrix} u'' \\ v \end{smallmatrix}\right) : X \longrightarrow L \oplus N$ sol tersi var olduğundan $\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix}$ bir kesit morfizmi elde edilir. Sonuç olarak $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{smallmatrix}\right) : L \oplus N \longrightarrow M \oplus N$ bir indirgenmez morfizmdir. Fakat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_N \end{pmatrix} = 1_N$$

olduğundan $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}$ bir radikal morfizm değildir.

Yukarıda verilen örnekler, indirgenmez morfizmlerin; radikalin karesinde bulunmayan radikal morfizmlerin öz genellemeleri olduğunu gösterir. İlerleyen bölümlerde tanım kümesi veya değer kümesi (ya da her ikisi de) ayrıştırılamaz olan morfizmlerle ilgileneceğiz. Özel olarak f ve/veya g indirgenmez olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizileri üzerinde çalışacağız. Bir indirgenmez monomorfizmin (ya da epimorfizmin) eşçekirdeğinin (ya da çekirdeğinin) ayrıştırılamaz olması gerektiğini ispatlayacağız. Öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.8 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ mod$A$'da parçalanan olmayan bir kısa tam dizi olsun.

(a) $f : L \to M$ morfizminin indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul her $v : V \to N$ morfizmi için $v = gv_1$ olacak şekilde $v_1 : V \to M$ vardır ya da $g = vv_2$ olacak şekilde $v_2 : M \to V$ vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, bend right, "v_2"'] & N \arrow[r] & 0 \\
& & & V \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, dashed, "v_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) $g : M \to N$ morfizminin indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul her $u : L \to U$ morfizmi için $u = u_1 f$ olacak şekilde $u_1 : M \to U$ vardır ya da $f = u_2 u$ olacak şekilde $u_2 : U \to M$ vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "u_1"'] & N \arrow[r] & 0 \\
& U \arrow[ur, dashed, bend right, "u_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

İspat (a) ($\Rightarrow$) f indirgenmez bir morfizm olsun. Herhangi bir $v : V \to N$ morfizmini alalım.

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[d, "v"] \\
M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

morfizmlerinin geri çekmesi E olmak üzere tam satırlara sahip değişmeli bir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal, "1_L"] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[u, "v"'] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. Birinci diyagramın değişmeli olmasından $f = uf'$ olup f indirgenmez olduğundan u bir büzme morfizmi veya f' bir kesit morfizmi olmalıdır.

I.Durum: f' kesit morfizmi ise Teorem 2.3.4 gereğince g' büzme morfizmi olur. Yani $g'g'' = 1_V$ olacak şekilde $g'' : V \to E$ sağ tersi vardır. Böylece $gv_1 = g(ug'') = (gu)g'' = (vg')g'' = v(g'g'') = v1_V = v$ olacak şekilde $v_1 = ug'' : V \to M$ aranılan dönüşümdür.

II.Durum: u büzme morfizmi ise $uu' = 1_M$ olacak şekilde bir $u' : M \to E$ bir sağ tersi vardır. $v_2 = g'u' : M \to V$ olarak alınırsa ikinci diyagramın değişmeliliği kullanılarak $vv_2 = v(g'u') = (vg')u' = (gu)u' = g(uu') = g1_M = g$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

($\Leftarrow$) Verilen ifadeler sağlansın. f'nin indirgenmez olduğunu gösterelim. Verilen dizi parçalanan olmadığından f bir kesit ve büzme morfizmi değildir. Kabul edelim ki

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\
& X \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$f = f_1 f_2$ olacak şekilde $f_1 : X \to M$ ve $f_2 : L \to X$ morfizmleri var olsun. Dizi tam olduğundan f birebir olup f_2 de birebirdir ve $V = \mathrm{coker} f_2$ olarak alınırsa

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, equal, "1_L"'] & X \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathrm{cokerf}_2 \arrow[r] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, shift left, "v_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, shift left, "v_2"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tam satırlara sahip ve değişmeli diyagramı vardır. Kabulden;

$v = gv_1$ olacak şekilde $v_1 : \mathrm{coker} f_2 \to M$ veya $g = vv_2$ olacak şekilde $v_2 : M \to \mathrm{coker} f_2$ morfizmleri vardır. v_1 ve v_2 morfizmlerinin var olmasını ayrı ayrı inceleyelim. Üstteki dizinin parçalanan olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten;

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{cokerf}_2 \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "1"] \arrow[ddr, bend right, "v_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_1"] & \mathrm{cokerf}_2 \arrow[d, "v"] \\
& M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

$v = gv_1$ olacak şekilde v_1 varsa; $v\pi = gf_1$ olup geri çekmenin evrensellik özelliğinden $\pi h = 1$ olacak şekilde π'nin sağ tersi var olduğundan π bir büzme morfizmi olup Teorem 2.3.4 gereğince f_2 bir kesit morfizmi bulunur.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "v_2"] \arrow[ddr, bend right, "1_M"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_1"] & \mathrm{coker} f_2 \arrow[d, "v"] \\
& M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

$g = vv_2$ olacak şekilde $v_2 : M \to V$ varsa $v\pi = gf_1$ olup geri çekmenin evrensellik özelliğinden $f_1 k = 1_M$ olacak şekilde f_1'in sağ tersi var olduğundan f_1 büzme morfizmidir. Sonuç olarak f indirgenmezdir.

(b) ($\Rightarrow$) $g : M \to N$ indirgenmez olsun. Herhangi bir $u : L \to U$ morfizmini alalım.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \\ U & \end{tikzcd}$$

morfizlerinin ileri itmesi P olmak üzere tam satırlara sahip değişmeli bir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f'"] & Y \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. İkinci diyagramın değişmeli olmasından $g = g'v$ olup g indirgenmez olduğundan g' bir büzme morfizmi veya v bir kesit morfizmi olmalıdır.

I.Durum: g' büzme morfizmi ise Teorem 2.3.4 gereğince f' bir kesit morfizmi olur. Yani $f''f' = 1_U$ olacak şekilde $f'' : Y \to U$ sol tersi vardır. Böylece $u_1 f = (f''v)f = f''(vf) = f''(f'u) = (f''f')u = u$ olacak şekilde $u_1 = f''v : M \to U$ aranılan dönüşümdür.

II.Durum: v kesit morfizmi ise $v'v = 1_M$ olacak şekilde $v' : Y \to M$ sol tersi vardır. Böylece $u_2 u = (v'f')u = v'(f'u) = v'(vf) = (v'v)f = 1_M f = f$ olacak şekilde $u_2 = v'f' : U \to M$ aranılan dönüşümdür.

($\Leftarrow$) Verilen ifadeler sağlansın. g'nin indirgenmez olduğunu gösterelim. Verilen dizi parçalanan olmadığından g bir kesit ve büzme morfizmi değildir. Kabul edelim ki

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_2"'] & & N \\ & Y \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

$g = g_1 g_2$ olacak şekilde $g_1 : Y \to N$ ve $g_2 : M \to Y$ morfizmleri var olsun. Dizi tam olduğundan g örten olup g_1 de örtendir. $U = \ker g_1$ olarak alınırsa

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "u_1"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker g_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[ur, dashed, "u_2"'] & P \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tam satırlara sahip değişmeli diyagramı vardır. Kabulden;

$u = u_1 f$ olacak şekilde $u_1 : M \to \ker g_1$ veya $f = u_2 u$ olacak şekilde $u_2 : \ker g_1 \to M$

morfizmleri vardır. u_1 ve u_2 morfizmlerinin var olmasını ayrı ayrı inceleyelim. Alttaki dizinin parçalanan olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten;

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "g_2"] \arrow[rdd, bend left, "u_1"] & \\
\ker g_1 \arrow[r, "\iota"'] \arrow[rrd, bend right, "1_{\ker g_1}"'] & Y \arrow[rd, "h"] & \\
& & \ker g_1
\end{tikzcd}$$

$u = u_1 f$ olacak şekilde u_1 varsa; $g_2 f = \iota u$ olup ileri itmenin evrensellik özelliğinden $h\iota = 1_{\ker g_1}$ olacak şekilde $h : Y \to \ker g_1$ sol tersi var olduğundan ι bir kesit morfizmi olup Teorem 2.3.4 gereğince g_1 bir büzme morfizmi olur.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "g_2"] \arrow[rdd, bend left, "1_M"] & \\
\ker g_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[rrd, bend right, "u_2"'] & Y \arrow[rd, "k"] & \\
& & M
\end{tikzcd}$$

$f = u_2 u$ olacak şekilde u_2 varsa; $g_2 f = \iota u$ olup ileri itmenin evrensellik özelliğinden $kg_2 = 1_M$ olacak şekilde $k : Y \to M$ sol tersi var olduğundan g_2 bir kesit morfizmi bulunur. Sanuç olarak g indirgenmezdir.

Sonuç 3.2.9

(a) Bir indirgenmez monomorfizmin eşçekirdeği ayrıştırılamazdır.

(b) Bir indirgenmez epimorfizmin çekirdeği ayrıştırılamazdır.

İspat (a) $f : L \to M$ bir indirgenmez monomorfizm olmak üzere $\mathrm{coker} f = N$ ve $g : M \to N$ epimorfizm olsun. Kabul edelim ki N ayrıştırılabilir olsun. Bu durumda $N = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde $0 \neq N_1, N_2$ altmodülleri vardır. $i = 1, 2$ için $q_1 : N_1 \hookrightarrow N$ ve $q_2 : N_2 \hookrightarrow N$ öz içerim monomorfizmleridir. Lemma 3.2.8 gereğince f indirgenmez olduğundan

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[rd, dashed, "v_1"] & N \\
& & & N_1 \arrow[u, hook, "q_1"'] \arrow[lu, dashed, bend left=20, "v_1'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[rd, dashed, "v_2"] & N \\
& & & N_2 \arrow[u, hook, "q_2"'] \arrow[lu, dashed, bend left=20, "v_2'"]
\end{tikzcd}$$

$g = q_1 v_1$ olacak şekilde $v_1 : M \to N_1$ morfizmi ve $g = q_2 v_2$ olacak şekilde $v_2 : M \to N_2$ morfizmi vardır. g örten olduğundan q_1 ve q_2 örten olup çelişki bulunur. Bundan dolayı Lemma 3.2.8'den $q_1 = g v_1'$ olacak şekilde $v_1' : N_1 \to M$ ve $q_2 = g v_2'$ olacak şekilde $v_2' : N_2 \to M$ morfizmleri vardır.

$$v = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix} : N = N_1 \oplus N_2 \to M$$

ile tanımlı v morfizmi için,

$$g\begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gv_1' & gv_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 1_N$$

olduğundan, $\begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix}$; g'nin sağ tersidir. Böylece g bir büzme morfizmi ve buradan f bir kesit morfizmi olur ki bu durum f'nin indirgenmez olması ile çelişir. Sonuç olarak N ayrıştırılamazdır.

(b) $g : M \to N$ bir indirgenmez epimorfizm olmak üzere ker$g = L$ ve $f : L \to M$ monomorfizm olsun. Kabul edelim ki L ayrıştırılabilir olsun. Bu durumda $L = L_1 \oplus L_2$ olacak şekilde $0 \neq L_1, L_2$ altmodülleri vardır. $i = 1, 2$ için $p_1 : L \to L_1$ ve $p_2 : L \to L_2$ öz izdüşüm epimorfizmleridir. Lemma 3.2.8 gereğince g indirgenmez olduğundan

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p_1"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, shift left, "u_1"] & N \arrow[r] & 0 \\ L_1 \arrow[ur, dashed, shift left, "u_1'"] & & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p_2"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, shift left, "u_2"] & N \arrow[r] & 0 \\ L_2 \arrow[ur, dashed, shift left, "u_2'"] & & & \end{tikzcd}$$

$f = u_1 p_1$ olacak şekilde $u_1 : L_1 \to M$ morfizmi ve $f = u_2 p_2$ olacak şekilde $u_2 : L_2 \to M$ morfizmi vardır. f birebir olduğundan p_1 ve p_2 birebir olup çelişki bulunur. Bundan dolayı Lemma 3.2.8'den $p_1 = u_1' f$ olacak şekilde $u_1' : M \to L_1$ ve $p_2 = u_2' f$ olacak şekilde $u_2' : M \to L_2$ morfizmleri vardır.

$$u = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} : M \to L = L_1 \oplus L_2$$

ile tanımlı u dönüşümü için,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} u_1' f \\ u_2' f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 1_L$$

olduğundan, $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}$; f'nin sol tersidir. Böylece f bir kesit morfizmi ve buradan g bir büzme morfizmi olur ki bu durum g'nin indirgenmez olması ile çelişir. Sonuç olarak L ayrıştırılamazdır.

3.3. Neredeyse Parçalanan ve Minimal Morfizmler

İndirgenmez morfizmler; radikal morfizmler için yapıtaşlarını belirleme ihtiyacından ortaya çıkmıştır. İndirgenmez morfizmler kullanılarak ardışık bileşke alma ve lineer birleşimlerle diğer radikal morfizmler belirlenebilir. Bu nedenle bu bölümde radikal morfizmlerin diğer radikal morfizmlerle nasıl faktörlendiğini inceleyeceğiz.

Tanım 3.3.1

(a) L ayrıştırılamaz olmak üzere $f : L \to M$ bir radikal morfizm olsun. Her $u : L \to U$ radikal morfizmi için $u'f = u$ olacak şekilde $u' : M \to U$ varsa, f *sol neredeyse parçalanan* (*left almost split*) olarak adlandırılır.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

(b) N ayrıştırılamaz olmak üzere $g : M \to N$ bir radikal morfizm olsun. Her $v : V \to N$ radikal morfizmi için $gv' = v$ olacak şekilde $v' : V \to M$ varsa, g *sağ neredeyse parçalanan* (*right almost split*) olarak adlandırılır.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

Bu kavramlar birbirinin dualidir. Yani $f : L \to M$'nin sol neredeyse parçalanan olması için gerek ve yeter koşul $Df : DM \to DL$'nin sağ neredeyse parçalanan olmasıdır.

Uyarı 3.3.2 Tanım 3.3.1(a)'dan L ayrıştırılamaz olmak üzere $u : L \to U$ bir radikal morfizm ise, Sonuç 3.1.5(i) gereğince u bir kesit morfizmi değildir. Buna ek olarak U ayrıştırılamaz ise, u bir izomorfizm değildir. Benzer olarak Tanım 3.3.1(b)'den N ayrıştırılamaz olmak üzere $v : V \to N$ bir radikal morfizm ise Sonuç 3.1.5(ii) gereğince v bir büzme morfizmi değildir. Buna ek olarak V ayrıştırılamaz ise, v bir izomorfizm değildir. Aşağıdaki lemmada verilen neredeyse parçalanan morfizmlerin karakterizasyonu onların orijinal tanımı olarak ta kullanılır.

Lemma 3.3.3

(a) Bir $f : L \to M$ morfizminin sol neredeyse parçalanan olması için gerek ve yeter koşul

(i) f'nin bir kesit morfizmi olmaması ve

(ii) Kesit morfizmi olmayan her $u : L \to U$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $u'f = u$ olacak şekilde, bir $u' : M \to U$ morfizminin var olmasıdır.

(b) Bir $g : M \to N$ morfizminin sağ neredeyse parçalanan olması için gerek ve yeter koşul

(i) g'nin bir büzme morfizmi olmaması ve

(ii) Büzme morfizmi olmayan her $v : V \to N$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $gv' = v$ olacak şekilde, bir $v' : V \to M$ morfizminin var olmasıdır.

İspat (a) ($\Leftarrow$) (i) ve (ii) sağlansın. L'nin ayrıştırılamaz olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Kabul edelim ki L ayrıştırılamaz olmasın. Bu durumda $L = L_1 \oplus L_2$ olacak şekilde $0 \neq L_1, L_2$ altmodülleri vardır. $p_1 : L \twoheadrightarrow L_1$ ve $p_2 : L \twoheadrightarrow L_2$ izdüşüm epimorfizmleri (birebir olmadıkları için) kesit morfizmi değillerdir. (ii) kabulünden;

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & M \arrow[dl, dashed, "p_1'"] \\ L_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] & M \arrow[dl, dashed, "p_2'"] \\ L_2 & \end{tikzcd}$$

$p_1 = p_1' f$ ve $p_2 = p_2' f$ olacak şekilde $p_1' : M \to L_1$ ve $p_2' : M \to L_2$ morfizmleri vardır. Böylece

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} p_1' f \\ p_2' f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 1_L$$

olup f kesit morfizmi bulunur. Bu durum (i) kabulü ile çelişir. Sonuç olarak L ayrıştırılamazdır.

($\Rightarrow$) $f : L \to M$ morfizmi sol neredeyse parçalanan morfizm olsun. Tanımdan (ii) açıktır. Ayrıca Sonuç 3.1.5(i) gereğince f bir kesit morfizmi olmadığı için (i) sağlanır.

(b) ($\Leftarrow$) (i) ve (ii) sağlansın. N'nin ayrıştırılamaz olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Kabul edelim ki N ayrıştırılamaz olmasın. Bu durumda $N = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde $0 \neq N_1, N_2$ altmodülleri vardır. $\iota_1 : N_1 \hookrightarrow N$ ve $\iota_2 : N_2 \hookrightarrow N$ içerim monomorfizmleri (örten olmadıkları için) büzme morfizmi değillerdir. (ii) kabulünden;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N & & M \arrow[r, "g"] & N \\ & N_1 \arrow[u, "\iota_1"'] \arrow[ul, dashed, "\iota_1'"] & & & N_2 \arrow[u, "\iota_2"'] \arrow[ul, dashed, "\iota_2'"] \end{tikzcd}$$

$\iota_1 = g\iota_1'$ ve $\iota_2 = g\iota_2'$ olacak şekilde $\iota_1' : N_1 \to M$ ve $\iota_2' : N_2' \to M$ morfizmleri vardır.

$$g\begin{pmatrix} \iota_1' & \iota_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\iota_1' & g\iota_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota_1 & \iota_2 \end{pmatrix} = 1_N$$

olup g büzme morfizmi bulunur. Bu durum (i) kabulü ile çelişir. Sonuç olarak N ayrıştırılamazdır.

($\Rightarrow$) $g : M \to N$ morfizmi sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun. Tanımdan (ii) açıktır. Ayrıca Sonuç 3.1.5(ii) gereğince g bir büzme morfizmi olmadığı için (i) sağlanır.

Örnek 3.3.4 (i) P bir ayrıştırılamaz projektif modül olsun. $j : \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$ içerim morfizmi sağ neredeyse parçalanandır. Gerçekten; $v : V \to P$ bir radikal morfizm olsun. Sonuç 3.1.5'ten v bir büzme morfizmi değildir. Aynı zamanda v örten de değildir. Çünkü v örten olsaydı P projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"] \arrow[dl, dashed, "k"'] & \\ V \arrow[r, "v"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$vk = 1_P$ olacak şekilde k sağ tersi var olurdu. Buradan v bir büzme morfizmi olup çelişki elde edilirdi. Bundan dolayı v örten değildir ve $\mathrm{im}v \subseteq \mathrm{rad}P$ olur.

$v = jv'$ olacak şekilde $v' : V \to \mathrm{rad}P$ morfizmi vardır. Sonuç olarak j sağ neredeyse parçalanan morfizmdir.

(ii) I bir ayrıştırılamaz injektif modül olsun. $p : I \to I/\mathrm{soc}I$ izdüşüm morfizmi sol neredeyse parçalanandır. Gerçekten; $u : I \to U$ bir radikal morfizm olsun. Sonuç 3.1.5'ten u bir kesit morfizmi değildir. Aynı zamanda u birebir de değildir. Çünkü u birebir olsaydı I injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_I"'] & U \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

$hu = 1_I$ olacak şekilde h sol tersi var olurdu. Buradan u bir kesit morfizmi olup çelişki elde edilirdi. Bundan dolayı u birebir değildir ve $\mathrm{ker}u \neq 0$ olup buradan $\mathrm{soc}I \subseteq \mathrm{ker}u$ olur. Böylece $I/\mathrm{soc}I \to I/\mathrm{ker}u$ dönüşümü tanımlanabilir. Diğer yandan $I/\mathrm{ker}u \cong \mathrm{im}u$ olduğundan

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & I/SocI \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

$u = u'p$ olacak şekilde $u' : I/\mathrm{soc}I \to U$ morfizmi vardır. Sonuç olarak p sol neredeyse parçalanan morfizmdir.

Aşağıdaki örnekte bir neredeyse parçalanan morfizm yardımıyla başka neredeyse parçalanan morfizmlerin bulunabileceği gösterilmiştir.

Örnek 3.3.5 $f : L \to M$ bir sol neredeyse parçalanan morfizm ve $f' : L \to M'$ bir radikal morfizm olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} : L \to M \oplus M'$ morfizmi de sol neredeyse parçalanan morfizmdir. Gerçekten f ve f' kesit morfizmi olmadığından $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ bir kesit morfizmi değildir. $u : L \to U$ bir radikal morfizm olsun. f sol neredeyse parçalanan morfizm olduğundan $u = u'f$ olacak şekilde $u' : M \to U$ morfizmi vardır. Böylece $h\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = u'f = u$ olacak şekilde $h = \begin{pmatrix} u' & 0 \end{pmatrix} : M \oplus M' \to U$ var olup ispat tamamlanır.

Benzer olarak $g : M \to N$ bir sağ neredeyse parçalanan morfizm ve $g' : M' \to N$ bir radikal morfizm iken $\begin{pmatrix} g & g' \end{pmatrix} : M \oplus M' \to N$ morfizminin sağ neredeyse parçalanan olduğu gösterilir.

Yukarıdaki örnekten hareketle, bir sol neredeyse parçalanan morfizmin değer kümesinin, bir sağ neredeyse parçalanan morfizmin de tanım kümesinin minimalliğinden söz edilebilir. Bundan dolayı aşağıda minimal morfizm tanımlarını verelim.

Tanım 3.3.6

(a) $f : L \to M$ bir morfizm olsun. $hf = f$ olacak şekildeki her $h \in \mathrm{End}M$ bir otomorfizm ise, f'ye *sol minimal*,

(b) $g : M \to N$ bir morfizm olsun. $gk = g$ olacak şekildeki her $k \in \mathrm{End}M$ bir otomorfizm ise, g'ye *sağ minimal*

denir.

Bu kavramlar birbirinin dualidir, yani; $f : L \to M$ morfizminin sol minimal olması için gerek ve yeter koşul $Df : DM \to DL$ morfizminin sağ minimal olmasıdır.

Örnek 3.3.7 Her epimorfizmin sol minimal ve her monomorfizmin de sağ minimal olduğu açıktır. Ek olarak, P bir ayrıştırılamaz projektif modül ise $j : \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$ içerim morfizmi sağ minimaldir. Benzer olarak I bir ayrıştırılamaz injektif modül ise, $p : I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}I$ izdüşüm morfizmi sol minimaldir.

Örnek 3.3.8 Her büyük monomorfizm sol minimaldir. Gerçekten; $f : L \to M$ bir büyük monomorfizm olsun. Kabul edelim ki $hf = f$ olacak şekilde $h : M \to M$ var olsun. f monomorfizm olduğundan hf de bir monomorfizmdir. Böylece h bir monomorfizm olur. Fakat M sonlu uzunluklu olduğundan, Lemma 2.2.7 gereğince h bir epimorfizm olup h bir izomorfizm bulunur. Benzer olarak her küçük epimorfizm sağ minimaldir.

Aşağıdaki lemmada indirgenmez morfizmler ve minimal morfizmler arasındaki ilişki verilmiştir.

Lemma 3.3.9 Her indirgenmez morfizm hem sol hem de sağ minimaldir.

İspat $f : L \to M$ bir indirgenmez morfizm olsun. $hf = f$ olacak şekilde $h \in \mathrm{End}M$ alalım. f indirgenemez olduğundan f bir kesit morfizmi veya h bir büzme morfizmi olmalıdır. f kesit morfizmi olmadığından h büzme morfizmi olup bir epimorfizmdir. M sonlu uzunluklu olduğundan Lemma 2.2.7 gereğince h bir otomorfizm olup f sol minimaldir. Benzer şekilde f'nin sağ minimal olduğu gösterelim. $fk = f$ olacak şekilde $k \in \mathrm{End}M$ alalım. f indirgenmez olduğundan f bir büzme morfizmi veya k bir kesit morfizmi olmalıdır. f büzme morfizmi olmadığından k bir kesit morfizmi olup birebirdir. M sonlu uzunluklu olduğundan Lemma 2.2.7 gereğince k bir otomorfizm olup f sağ minimaldir.

Örnek 3.3.10 Yukarıdaki lemmanın bir sonucu olarak; P bir ayrıştırılamaz projektif modül olmak üzere $j : \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$ içerim morfizmi ve I bir ayrıştırılamaz injektif modül olmak üzere $I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}I$ izdüşüm morfizmi Örnek 3.2.5 gereğince hem sağ hem de sol minimaldir.

Şimdi neredeyse parçalanan morfizmler için minimallik kavramını verebiliriz. Bir sol neredeyse parçalanan $f : L \to M$ morfizminin sol minimal olması için gerek ve yeter koşul tanım kümesi L olan sol neredeyse parçalanan morfizmlerin değer kümeleri arasında en küçük $l(M)$ kompozisyon uzunluğuna sahip kümenin M olmasıdır. Yani; $f' : L \to M'$ başka bir sol neredeyse parçalanan bir morfizm ise $l(M) \leq l(M')$'dir. Benzer olarak; bir sağ neredeyse parçalanan $g : M \to N$ morfizminin sağ minimal olması için gerek ve yeter koşul değer kümesi N olan sağ neredeyse parçalanan morfizmlerin tanım kümeleri arasında en küçük $l(M)$ kompozisyon uzunluğuna sahip kümenin M olmasıdır. Yani; $g' : M' \to N$ başka bir sağ neredeyse parçalanan bir morfizm ise $l(M) \leq l(M')$'dür.

Önerme 3.3.11

(a) $f : L \to M$ sol neredeyse parçalanan bir morfizm olsun. f'nin sol minimal olması için gerek ve yeter koşul tanım kümesi L olan sol neredeyse parçalanan morfizmlerin değer kümeleri arasında M'nin en küçük uzunluğa sahip olmasıdır. Ek olarak, bu özellik f'yi izomorfizm farkıyla tek türlü tanımlar.

(b) $g : M \to N$ sağ neredeyse parçalanan bir morfizm olsun. g'nin sağ minimal olması için gerek ve yeterkoşul değer kümesi N olan sağ neredeyse parçalanan morfizmlerin tanım kümeleri arasında M'nin en küçük uzunluğa sahip olmasıdır. Ek olarak, bu özellik g'yi izomorfizm farkıyla tek türlü tanımlar.

İspat (a) ($\Leftarrow$) Tanım kümesi L olan sol neredeyse parçalanan morfizmlerin değer kümelerinin uzunlukları arasında $l(M)$ minimal olmak üzere $f : L \to M$ bir sol neredeyse parçalanan morfizm olsun. f'nin sol minimal olduğunu gösterelim. $hf = f$ olacak şekilde $h \in \mathrm{End}M$ alalım. h'nin im$h = M'$ üzerinden aşağıdaki biçimde aşikar faktorizasyonu $h = jp$ olsun.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & M \\ & & M' \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

$pf : L \to M'$ bir sol neredeyse parçalanan morfizmdir. Gerçekten; p ve f kesit morfizmi olmadığından pf de kesit morfizmi değildir. L ayrıştırılamaz olduğundan Sonuç 3.1.5 gereğince pf bir radikal morfizmdir. $u : L \to U$ herhangi bir radikal morfizm olmak üzere f sol neredeyse parçalanan olduğundan

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "pf"] \arrow[d, "u"'] & M' \arrow[dl, dashed, "u'j"] \\ U & \end{tikzcd}$$

$u = u'f$ olacak şekilde $u' : M \to U$ var olup buradan

$$u = u'f = u'(hf) = u'(jp)f = u'j(pf)$$

olacak şekilde $u'j : M' \to U$ var olduğundan pf sol neredeyse parçalanandır. Kabulden $l(M) \leq l(M')$' dir. Diğer yandan $M' \subseteq M$ olduğundan $l(M') \leq l(M)$ olmalıdır. Böylece $l(M) = l(M')$ olup h örtendir. Lemma 2.2.7 gereğince h otomorfizm olup f sol minimal bulunur.

($\Rightarrow$) $f : L \to M$ sol neredeyse parçalanan morfizminin sol minimal olduğunu kabul edelim. $f' : L \to M'$ başka bir sol neredeyse parçalanan morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ M & \end{tikzcd}$$

f sol neredeyse parçalanan olduğundan $f' = hf$ olacak şekilde $h : M \to M'$ morfizmi ve f' sol neredeyse parçalanan olduğundan $f = h'f'$ olacak şekilde $h' : M' \to M$

morfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \| & & \downarrow h \\ L & \xrightarrow{f'} & M' \\ \| & & \downarrow h' \\ L & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Birinci eşitlik ikinci de yerine yazılırsa $f = h'(hf) = (h'h)f$ olup f'nin sol minimalliğinden $h'h$ bir otomorfizma elde edilir. Bundan dolayı h birebir olup $l(M) \leq l(M')$ bulunur.

Şimdi tanım kümesi L olan bir tek sol minimal morfizmin var olduğunu gösterelim. Bunun için $l(M)$ en küçük olacak şekilde $f : L \to M$ ve $f' : L \to M'$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizmlerini alalım. f' ve f'nin sol parçalanan morfizm olduğu kullanılarak

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ M & \end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapan, yani; $f' = hf$ ve $f = h'f'$ olacak şekilde h ve h' morfizmleri vardır. Bu iki eşitlik aynı anda gözönüne alınarak f'nin sol minimalliğinden hh' bir otomorfizm ve f''nün sol minimalliğinden $h'h$ bir otomorfizm bulunur. Böylece h ve h' birer izomorfizm olur ve $M \cong M'$ bulunur.

(b) ($\Leftarrow$) Değer kümesi N olan sağ neredeyse parçalanan morfizmlerin tanım kümelerinin uzunlukları arasında $l(M)$ minimal olmak üzere $g : M \to N$ bir sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun. g'nin sağ minimal olduğunu gösterelim. $gk = g$ olacak şekilde $k \in \mathrm{End}M$ alalım. k'nın $M/\mathrm{ker}k$ üzerinden aşikar faktorizasyonu $k = \alpha\pi$ olsun.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \arrow[r, "g"] & N \\ & M/\mathrm{ker}k \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

İddia ediyoruz ki $g\alpha : M/\mathrm{ker}k \to N$ sağ neredeyse parçalanan morfizmdir. Gerçekten g ve α büzme morfizmi olmadığından $g\alpha$ büzme morfizmi değildir. N ayrıştırılamaz olduğundan Sonuç 3.1.5 gereğince $g\alpha$ bir radikal morfizmdir. $v : V \to N$ herhangi bir radikal morfizm olmak üzere g sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ & V \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, dashed, "v'"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M/\mathrm{ker}k \arrow[r, "g\alpha"] & N \\ & V \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, dashed, "\pi v'"] \end{tikzcd}$$

$v = gv'$ olacak şekilde $v' : V \to M$ morfizmi var olup buradan

$$v = gv' = gkv' = g(\alpha\pi)v' = (g\alpha)\pi v'$$

olacak şekilde $\pi v' : V \to M/\mathrm{ker}k$ var olduğundan $g\alpha$ sağ neredeyse parçalanan morfizmdir. Kabulden $l(M) \leq l(M/\mathrm{ker}k)$ olur. Diğer yandan $M/\mathrm{ker}k \cong \mathrm{im}k \leq M$ olduğundan $l(M/\mathrm{ker}k) \leq l(M)$ bulunur. Böylece $l(M) = l(M/\mathrm{ker}k)$ olup $\mathrm{ker}k = 0$ elde edilir. Buradan Lemma 2.2.7'den k örten olup k bir otomorfizm bulunur. Böylece g sağ minimaldir.

($\Rightarrow$) $g : M \to N$ sağ neredeyse parçalanan morfizminin sağ minimal olduğunu kabul edelim. $g' : M' \to N$ başka bir sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ & M' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, dashed, "k'"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[r, "g'"] & N \\ & M \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "k"] \end{tikzcd}$$

g' sağ neredeyse parçalanan olduğundan $g' = gk'$ olacak şekilde $k' : M' \to M$ morfizmi ve g sağ neredeyse parçalanan olduğundan $g = g'k$ olacak şekilde $k : M \to M'$ morfizmi vardır. Buradan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & N \arrow[d, equal] \\ M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "k'"'] & N \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

$g = gk = (gk')k = g(k'k)$ olup g'nin sağ minimalliğinden $k'k$ bir otomorfizm olur. Bundan dolayı k birebir olup $l(M) \leq l(M')$ elde edilir.

Şimdi değer kümesi N olan bir tek sağ minimal morfizmin var olduğunu gösterelim. Bunun için $l(M)$ en küçük olacak şekilde $g : M \to N$ ve $g' : M' \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizmlerini alalım. g ve g''nün sağ parçalanan olduğu kullanılarak

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] & N \\
& M' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, dashed, "k'"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "g'"] & N \\
& M \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "k"]
\end{tikzcd}
$$

diyagramlarını değişmeli yapan, yani; $g' = gk'$ ve $g = g'k$ olacak şekilde k ve k' morfizmleri vardır. Bu iki eşitlik aynı anda gözönüne alınarak g'nin sağ minimalliğinden $k'k$ bir otomorfizm ve g''nün sağ minimalliğinden kk' bir otomorfizm bulunur. Böylece k ve k' birer izomorfizm olup $M \cong M'$ bulunur.

Şimdi minimal morfizm ile neredeyse parçalanan morfizm kavramlarını birleştirerek aşağıdaki tanımları verebiliriz.

3.4. Minimal Neredeyse Parçalanan Morfizmler

(a) Bir sol neredeyse parçalanan morfizm aynı zamanda sol minimal ise *sol minimal neredeyse parçalanan morfizm (left minimal almost split morphism)* olarak adlandırılır.

(b) Bir sağ neredeyse parçalanan morfizm aynı zamanda sağ minimal ise *sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm (right minimal almost split morphism)* olarak adlandırılır.

Önerme 3.3.11'in bir sonucu olarak bir ayrıştırılamaz L modülü verildiğinde; tanım kümesi L olan bir sol neredeyse parçalanan morfizm varsa, tanım kümesi L olan bir sol minimal neredeyse parçalanan morfizm vardır. Benzer olarak bir ayrıştırılamaz N modülü verildiğinde değer kümesi N olan bir sağ neredeyse parçalanan morfizmin varlığı, değer kümesi N olan bir sağ minimal neredeyse parçalanan morfizmin varlığını gerektirir.

Örnek 3.4.1 Örnek 3.3.4 ve Örnek 3.3.7 gereğince her ayrıştırılamaz projektif P modülü için $j : \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$ içerim morfizmi sağ minimal neredeyse parçalanandır ve her ayrıştırılamaz injektif I modülü için $I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}I$ izdüşüm morfizmi sol minimal neredeyse parçalanandır.

Sonuç 3.4.2

(a) $f' : L \to M'$ sol neredeyse parçalanan morfizm olsun. $f : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olmak üzere $M' = M \oplus X$ ayrışımı vardır ve $f' = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ biçiminde yazılır.

(b) $g' : M' \to N$ sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun. $g : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olmak üzere $M' = M \oplus Y$ ayrışımı vardır ve $g' = \begin{pmatrix} g & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde yazılır.

İspat (a) $f' : L \to M'$ sol neredeyse parçalanan morfizm olsun. Önerme 3.3.11 gereğince tanım kümesi L olan bir sol minimal neredeyse parçalanan $f : L \to M$ morfizmi vardır ve $l(M) \leq l(M')$'dür. Bu durumda f ve f' sol neredeyse parçalanan morfizm olduğundan $f' = hf$ ve $f = h'f'$ olacak şekilde $h : M \to M'$ ve $h' : M' \to M$ morfizmleri vardır.

$$f = h'f' = h'(hf) = (h'h)f$$

olup f'nin sol minimalliğinden $h'h$ bir otomorfizm olur. Bu durumda h bir kesit morfizmi ve h' bir büzme morfizmi olur. Böylece Lemma 2.1.11 gereğince $M = \mathrm{im}h$ ve $X = \mathrm{ker}h'$ olmak üzere $M' = M \oplus X$ bulunur. Bunun sonucu olarak $f' = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ biçiminde yazılır.

(b) $g' : M' \to N$ sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun. Önerme 3.3.11 gereğince değer kümesi N olan bir sağ minimal neredeyse parçalanan $g : M \to N$ morfizmi vardır ve $l(M) \leq l(M')$' dür. Bu durumda g ve g' sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan $g = g'k$ ve $g' = gk'$ olacak şekilde $k : M \to M'$ ve $k' : M' \to M$ morfizmleri vardır.

$$g = g'k = (gk')k = g(kk')$$

olup g'nin sağ minimalliğinden $k'k$ bir otomorfizm bulunur. Bu durumda k' bir büzme morfizmi ve k bir kesit morfizmi olur. Böylece Lemma 2.1.11 gereğince $M = \mathrm{im}k$ ve $Y = \mathrm{ker}k'$ olmak üzere $M' = M \oplus Y$ olur. Bunun sonucu olarak $g' = \begin{pmatrix} g & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde yazılır.

Aşağıdaki lemma; Lemma 3.3.9'un karşıtının "neredeyse parçalanan" olma koşulu altında sağlandığını gösterir.

Lemma 3.4.3 Her sağ ya da sol minimal neredeyse parçalanan morfizm indirgenmezdir.

İspat $f : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bu durumda f bir radikal morfizm ve L ayrıştırılamazdır. Sonuç 3.1.5 gereğince f kesit morfizmi değildir. f büzme morfizmi de değidir. Aksi halde büzme morfizmi olsaydı örten olacağından Lemma 2.2.7 gereğince f'nin izomorfizm olması gerekir ve bu da f'nin radikal morfizm olması ile çelişirdi. Kabul edelim ki

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\ & X \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $f = f_1 f_2$, olacak şekilde $f_1 : X \to M$ ve $f_2 : L \to X$ morfizmleri var olsun. Bu durumda f_2'nin bir kesit morfizmi veya f_1'in bir büzme morfizmi olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki f_2 kesit morfizmi olmasın. Bu durumda f sol neredeyse parçalanan morfizm olduğundan $f_2 = f_2' f$ olacak şekilde $f_2' : M \to X$ vardır. Buradan $f = f_1 f_2 = f_1(f_2' f) = (f_1 f_2')f$ olup f sol minimal olduğundan $f_1 f_2'$ bir otomorfizm olur. Böylece f_1 büzme morfizmi olur. Sonuç olarak f indirgenmezdir.

$g : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bu durumda g bir radikal morfizm ve N ayrıştırılamazdır. Sonuç 3.1.5 gereğince g büzme morfizmi değildir. g kesit morfizmi de değildir. Aksi halde kesit morfizmi olsaydı birebir olacağından Lemma 2.2.7 gereğince g'nin izomorfizm olması gerekir ve bu da g'nin radikal morfizm olması ile çelişirdi. Kabul edelim ki

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_2"'] & & N \\ & Y \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $g = g_1 g_2$ olacak şekilde $g_1 : Y \to N$ ve $g_2 : M \to Y$ morfizmleri var olsun. Bu durumda g_2'nin bir kesit morfizmi veya g_1'in bir büzme morfizmi olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki g_1 büzme morfizmi olmasın. Bu durumda g sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan $g_1 = g g_1'$ olacak şekilde $g_1' : Y \to M$ vardır. Buradan $g = g_1 g_2 = (g g_1')g_2 = g(g_1' g_2)$ olup g sağ minimal olduğundan $g_1'g_2$ bir otomorfizm olur. Böylece g_2 kesit morfizmi bulunur. Sonuç olarak g indirgenmezdir.

Aşağıdaki teorem, ayrıştırılamaz tanım (ya da değer) kümesiyle verilen indirgenmez morfizmlerin, aynı tanım (ya da değer) kümesine sahip bir minimal neredeyse parçalanan morfizm ile tamamlanabileceğini ifade eder.

Teorem 3.4.4

(a) $f : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bir $f' : L \to M'$ morfizminin indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul $M' \neq 0$ olması ve $M = M' \oplus M''$ ile $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olacak şekilde $f'' : L \to M''$ morfizminin var olmasıdır.

(b) $g : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bir $g' : M' \to N$ morfizminin indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul $M' \neq 0$ olması ve $M = M' \oplus M''$ ile $g = \begin{pmatrix} g' & g'' \end{pmatrix} : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olacak şekilde $g'' : M'' \to N$ morfizminin var olmasıdır.

İspat (a) $f : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun.
($\Longrightarrow$) $f' : L \to M'$ indirgenmez olsun. $M' \neq 0$ olduğu açıktır. Çünkü $M' = 0$ olsaydı $f' = 0$ sıfır morfizm olup f''nün indirgenmez olması ile çelişirdi. f sol neredeyse parçalanan morfizm olduğundan;

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

$f' = hf$ olacak şekilde $h : M \to M'$ morfizmi vardır. f' indirgenmez ve f kesit morfizmi olmadığı için h büzme morfizmi olmalıdır. Sonuç 3.4.2 gereğince ker$h = M'$ ve im$h' = M''$ olmak üzere $M = M' \oplus M''$ biçiminde yazılır ve $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan olacak şekilde $f'' = 0 : L \to M''$ morfizmi vardır.
($\Leftarrow$) $f = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olacak şekilde $M' \neq 0$ olmak üzere $M = M' \oplus M''$ ayrışımı ile $f' : L \to M'$ ve $f'' : L \to M''$ morfizmleri var olsun. f''nün indirgenmez olduğunu gösterelim. f' kesit morfizmi

değildir. Çünkü f' bir kesit morfizmi olsaydı, $hf' = 1_L$ olacak şekilde $h : M' \to L$ var olurdu. Buradan

$$\begin{pmatrix} h & 0 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hf' \\ 0f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_L \\ 0 \end{pmatrix} = 1_L$$

olması f'nin kesit morfizmi olmaması ile çelişirdi. f' büzme morfizmi değildir. Çünkü f' bir büzme olsaydı, Lemma 2.1.11'dan $\ker f'$; L'nin dik toplananı olurdu. Oysa L ayrıştırılamaz olduğundan $\ker f' = 0$ olup f' birebir olurdu. Lemma 2.2.7'den f' bir izomorfizm olup kesit morfizmi olmaması ile çelişki bulunurdu. Sonuç olarak f' bir kesit ve büzme morfizmi değildir. $f' = f_1 f_2$ olacak şekilde;

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M' \\ & X \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

$f_1 : X \to M$ ve $f_2 : L \to X$ morfizmleri var olsun. Kabul edelim ki f_2 kesit morfizmi olmasın. f sol neredeyse parçalanan morfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} h' & h'' \end{pmatrix}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani; $f_2 = \begin{pmatrix} h' & h'' \end{pmatrix} f$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} h' & h'' \end{pmatrix} : M \to X$ morfizmi vardır. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f_2 \\ f'' \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "f"] & \\ M' \oplus M'' \arrow[r, "\begin{pmatrix} h' & h'' \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix}"'] & X \oplus M'' \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix}"'] & M' \oplus M'' \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Buradan

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & h'' \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix} f$$

olup f'nin sol minimal olduğu kullanılarak $\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & h'' \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 h' & f_1 h'' \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix}$ bir otomorfizm ve buradan $f_1 h'$ izomorfizm bulunur. Böylece f_1 büzme morfizmidir. Sonuç olarak f' indirgenmezdir.

(b) $g : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun.

($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $g' : M' \to N$ indirgenmez olsun. Bu durumda $M' \neq 0$ olduğu açıktır. Çünkü $M' = 0$ olsaydı $g' = 0$ sıfır morfizmi olurdu ve bu da g''nün indirgenmez olması ile çelişirdi. g sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ & M' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, dashed, "k"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $g' = gk$, olacak şekilde $k : M' \to M$ vardır. g' indirgenmez olduğundan k bir kesit morfizmi ya da g bir büzme morfizmidir. Kabulden g büzme morfizmi olmadığı için k kesit morfizmi olmalıdır. Bu durumda $k'k = 1_{M'}$ olacak şekilde $k' : M \to M'$ sol tersi vardır. Böylece Lemma 2.1.11'dan im$k = M'$ ve ker$k' = M''$ olmak üzere $M = M' \oplus M''$ ayrışımı ve $g = \begin{pmatrix} g' & g'' \end{pmatrix} : M' \oplus M'' \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olacak şekilde $g'' = 0 : M'' \to N$ morfizmi vardır.

($\Longleftarrow$) $M' \neq 0$ olmak üzere $M = M' \oplus M''$ ve $g = \begin{pmatrix} g' & g'' \end{pmatrix} : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olacak şekilde $g' : M' \to N$ ve $g'' : M'' \to N$ morfizmleri var olsun. g'' nün indirgenmez olduğunu gösterelim. g' bir büzme morfizmi değildir. Gerçekten; g' büzme morfizmi olsaydı $g'k' = 1_{M'}$ olacak şekilde $k' : N \to M'$ sağ tersi var olurdu. Bu durumda;

$$\begin{pmatrix} g' & g'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k' \\ 0 \end{pmatrix} = g'k' = 1_N$$

olup $\begin{pmatrix} g' & g'' \end{pmatrix}$'nün sağ tersi var olup çelişki elde edilirdi. g' kesit morfizmi de değildir. Çünkü g' bir kesit morfizmi olsaydı img'; N'nin bir dik toplananı ve N ayrıştırılamaz olduğundan g' bir epimorfizm olurdu. Lemma 2.2.7'den g' bir izomorfizm olup büzme morfizmi olmaması ile çelişki bulunurdu. Sonuç olarak g' bir kesit ve büzme morfizmi değildir.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "g_2"'] & & N' \\ & Y \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$$

$g' = g_1g_2$ olacak şekilde $g_1 : Y \to N$ ve $g_2 : M' \to Y$ morfizmleri var olsun. Kabul edelim ki g_1 büzme morfizmi olmasın. Bu durumda $g : M \to N$ sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] & N \\
& Y \arrow[u, "g_1"'] \arrow[ul, dashed, "\begin{pmatrix} h' \\ h'' \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $g_1 = g\begin{pmatrix} h' \\ h'' \end{pmatrix}$, olacak şekilde $\begin{pmatrix} h' \\ h'' \end{pmatrix} : Y \to M$ vardır. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
& N & \\
M' \oplus M'' \arrow[ur, "g"] & Y \oplus M'' \arrow[u, "\begin{pmatrix} g_1 & g'' \end{pmatrix}"'] \arrow[l, "\begin{pmatrix} h' & 0 \\ h'' & 1_{M''} \end{pmatrix}"'] & M' \oplus M'' \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Buradan

$$g = g\begin{pmatrix} h' & 0 \\ h'' & 1_{M''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix}$$

olup g sağ minimal olduğundan $\begin{pmatrix} h' & 0 \\ h'' & 1_{M''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1_{M''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'g_2 & 0 \\ h''g_2 & 1_{M''} \end{pmatrix}$ otomorfizm olup $h'g_2$ izomorfizm ve buradan g_2 bir kesit morfizmi olur. Sonuç olarak g' indirgenmezdir.

Sonuç 3.4.5

(a) $f : L \to M$ bir sol minimal neredeyse parçalanan morfizm ve $p : M \to M'$ bir büzme morfizmi olsun. Bu durumda pf indirgenmezdir.

(b) $g : M \to N$ bir sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm ve $j : M' \to M$ bir kesit morfizmi olsun. Bu durumda gj indirgenmezdir.

İspat Sonuç 3.4.4'te f' yerine pf ve g' yerine gj alınırsa ispat açıktır.

Önerme 3.3.11'e benzer olarak ispatlanan aşağıdaki önermede, tanım kümesi aynı olan sol minimal neredeyse parçalanan morfizmlerin değer kümelerinin izomorf olduğu, değer kümesi aynı olan sağ minimal neredeyse parçalanan morfizmlerin tanım kümelerinin izomorf olduğu gösterilmiştir. (Assem vd., 2006).

Önerme 3.4.6

(a) $f : L \to M$ ve $f' : L \to M'$ A-modül morfizmleri sol minimal neredeyse parçalanan ise, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan yani $f' = hf$ olacak şekilde bir $h : M \to M'$ izomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

(b) $g : M \to N$ ve $g' : M' \to N$ A-modül morfizmleri sağ minimal neredeyse parçalanan ise, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan yani $g' = gk$ olacak şekilde bir $k : M' \to M$ izomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ & M' \arrow[u, "g'"'] \arrow[ul, dashed, "k"] \end{tikzcd}$$

Sonuç 3.2.9'da indirgenmez morfizmlerin çekirdek ve eşçekirdeklerinin ayrıştırılamaz olduğu gösterilmişti. Buna benzer olarak neredeyse parçalanan morfizmler de ayrıştırılamaz modüllerle yakından ilişkilidir. Aşağıdaki sonuçta bir sol neredeyse parçalanan morfizmin tanım kümesinin ve bir sağ neredeyse parçalanan morfizmin değer kümesinin ayrıştırılamaz olduğu ispatlanmıştır.

Lemma 3.4.7

(i) $f : L \to M$ bir sol neredeyse parçalanan morfizm ise, L ayrıştırılamazdır.

(ii) $g : M \to N$ bir sağ neredeyse parçalanan morfizm ise, N ayrıştırılamazdır.

İspat (i) $f : L \to M$ bir sol neredeyse parçalanan morfizm olsun. Kabul edelim ki L ayrıştırılamaz olmasın. Bu durumda L=$L_1 \oplus L_2$ olacak şekilde $0 \neq L_1, L_2 \leq L$ vardır. Buradan $i = 1, 2$ olmak üzere $p_i : L \to L_i$ izdüşüm morfizmleri (birebir olmadıkları için) kesit morfizmi değillerdir. Buradan $f : L \to M$ sol neredeyse parçalanan morfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & M \arrow[dl, dashed, "u_i"] \\ L_i & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani, $p_i = u_i f$ olacak şekilde $u_i : M \to L_i$ morfizmleri vardır. $u(m) = (u_1(m), u_2(m))$ ile tanımlı

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : \ M \longrightarrow L$$

u dönüşümü f'nin sol tersidir. Gerçekten; her $(a, b) \in L = L_1 \oplus L_2$ için,

$$\begin{aligned} (uf)(a,b) &= u(f(a,b)) \\ &= (u_1(f(a,b), u_2(f(a,b)) \\ &= ((u_1 f)(a,b), (u_2 f)(a,b)) \\ &= (p_1(a,b), p_2(a,b)) \\ &= (a,b) \\ &= 1_L(a,b) \end{aligned}$$

olup bu durum f'nin kesit morfizmi olmaması ile çelişir. O halde L ayrıştırılamazdır.
(ii) $g : M \to N$ bir sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun. Kabul edelim ki N ayrıştırılabilir olsun. Bu durumda N=$N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde $0 \neq N_1, N_2 \leq N$ vardır. $i = 1, 2$ olmak üzere $\iota_i : N \to N_i$ içerim morfizmleri (örten olmadıkları için) büzme morfizmi değillerdir. Buradan $g : M \to N$ sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ & N_i \arrow[u, "\iota_i"'] \arrow[ul, dashed, "v_i"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani, $\iota_i = g v_i$ olacak şekilde $v_i : N_i \to M$ morfizmleri vardır. $v((a, b)) = v_1(a) + v_2(b)$ ile tanımlı

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} : \ N \longrightarrow M$$

v dönüşümü g'nin sağ tersidir. Gerçekten; her $(a, b) \in N = N_1 \oplus N_2$ için,

$$\begin{aligned} (gv)(a,b) &= g(v(a,b)) \\ &= g(v_1(a) + v_2(b)) \\ &= gv_1(a) + gv_2(b) \\ &= \iota_1(a) + \iota_2(b) \\ &= (a,0) + (0,b) \\ &= (a,b) \\ &= 1_N(a,b) \end{aligned}$$

olup bu durum g'nin büzme morfizmi olmaması ile çelişir. O halde N ayrıştırılamazdır.

3.5. Neredeyse Parçalanan Diziler

Önceki bölümde, başka radikal morfizmler üzerinden faktörlenen radikal morfizmler yani neredeyse parçalanan morfizmleri inceledik. Sonuç 3.4.2 gereğince minimal neredeyse parçalanan morfizmlerin varlığını bilinmektedir. Lemma 3.4.3'te minimal neredeyse parçalanan morfizmlerin indirgenmez olduğu gösterilmiştir. Böylece bu morfizmlerin hem tanım kümesi hem de değer kümesi ayrıştırılamaz olup bu morfizmler modül kategorisindeki radikaldedir fakat radikalin karesinde değildir. Bundan dolayı modül kategorisinde yeterli sayıda minimal neredeyse parçalanan morfizm var mıdır sorusu ortaya çıkar. Bu bölümde bu sorunun üzerinde durulacak ve bileşkeye alınabilen indirgenmez morfizmlerden minimal neredeyse parçalanan morfizmlerin elde edilebileceği gösterilecektir.

Tanım 3.5.1

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinde f ve g indirgenmez ise, bu dizi *neredeyse parçalanan dizi* (*almost split sequence*) olarak adlandırılır.

Uyarı 3.5.2

(i) Bu kavram self-dualdir. Yani;

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin mod$A$'da neredeyse parçalanan dizi olması için gerek ve yeter koşul

$$0 \longrightarrow DN \xrightarrow{Dg} DM \xrightarrow{Df} DL \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin modA^{op}'ta neredeyse parçalanan dizi olmasıdır.

(ii) İndirgenemez morfizmler parçalanan olmadığı için neredeyse parçalanan diziler de hiçbir zaman parçalanan değildir.

(iii) $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ neredeyse parçalanan bir dizi olsun. Bu durumda bu dizi kısa tamdır ve f ile g indirgenmezdir. Sonuç 3.2.9'dan f'nin indirgenmezliği N'nin ayrıştırılamazlığını, g'nin indirgenmezliği de L'nin ayrıştırılamazlığını gerektirir. Böylece neredeyse parçalanan dizilerin ilk ve son terimleri daima ayrıştırılamazdır.

(iv) Lemma 3.3.9'dan f ve g indirgenmez morfizmleri hem sağ hem de sol minimaldir.

Örnek 3.5.3 $A = \mathbf{k}[t]/\langle t^2\rangle = \{a_0 + a_1 t + \langle t^2\rangle \mid a_i \in \mathbf{k}\}$ yerel cebiri gözönüne alınırsa izomorfizm farkıyla bir tek A_A ayrıştırılamaz projektif modülü vardır. A'nın radikali $\text{rad}A = S = \langle t\rangle/\langle t^2\rangle = \{at + \langle t^2\rangle \mid a \in \mathbf{k}\}$ biçiminde olup basit modüldür. Örnek 3.2.5 gereğince $j : S \to A$ içerim morfizmi ve (t ile çarpma dönüşümü olarak tanımlanan) bunun eşçekirdeği olan $p : A \to S$ izdüşüm morfizmi indirgenmezdir. Sonuç olarak bir neredeyse parçalanan

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{j} A \xrightarrow{p} S \longrightarrow 0$$

dizisi vardır.

Bu bölümde neredeyse parçalanan dizilerin aynı zamanda minimal neredeyse parçalanan morfizmler yardımıyla da tanımlanabileceği gösterilecektir. Öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.5.4

(i) N ayrıştırılamaz olmak üzere parçalanan olmayan tam satırlara sahip aşağıdaki değişmeli diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "1_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & N \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bu durumda u ve v birer otomorfizmdir.

(ii) L ayrıştırılamaz olmak üzere parçalanan olmayan tam satırlara sahip aşağıdaki değişmeli diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bu durumda u ve v birer otomorfizmdir.

İspat (i) N ayrıştırılamaz olmak üzere verilen diyagramı göz önüne alalım. Kabul edelim ki v bir otomorfizm olmasın. N ayrıştırılamaz olduğundan End$N$ yerel olup $v \in$ End$N$ nilpotenttir. Bu durumda $v^m = 0$ olacak şekilde $m > 0$ vardır. Buradan $v^m g = 0$ olup ikinci diyagramın değişmeliliğinden $gu^m = 0$ bulunur. Böylece

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "u^m"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

$gf = 0$ ve $gu^m = 0$ olacak şekilde başka bir $u^m : M \to M$ morfizmi var olduğundan çekirdeğin evrensellik özelliğinden $fh = u^m$ olacak şekilde $h : M \to L$ morfizmi vardır. Ayrıca birinci diyagramın değişmeliliğinden $f = uf$ olup bu iki eşitlik aynı anda gözönüne alınırsa $u^m f = fhf = f$ ve buradan f birebir olduğundan $hf = 1_L$ bulunur. Böylece f bir kesit morfizmi olur ki bu dizinin parçalanan olmaması ile çelişir. Sonuç olarak v bir otomorfizmdir. Lemma 2.3.6 gereğince u otomorfizm olur.

(ii) L ayrıştırılamaz olmak üzere verilen diyagramı göz önüne alalım. Kabul edelim ki u bir otomorfizma olmasın. L ayrıştırılamaz olduğundan End$L$ yerel olup $u \in$ End$L$ nilpotenttir. Bu durumda $u^n = 0$ olacak şekilde $n > 0$ vardır. Buradan $fu^n = 0$ olup birinci diyagramın değişmeliliğinden $fu = vf$ olduğundan $v^n f = 0$ bulunur. Böylece

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v^n"'] & N \arrow[dl, dashed, "k"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$gf = 0$ ve $v^n f = 0$ olacak şekilde başka bir $v^n : M \to M$ morfizmi var olduğundan eşçekirdeğin evrensellik özelliğinen $kg = v^n$ olacak şekilde bir $k : N \to M$ morfizmi vardır. Ayrıca ikinci diyagramın değişmeliliğinden $g = gv$ olup bu iki eşitlik aynı anda gözönüne alınırsa $gv^n = gkg = g$ ve buradan g örten olduğundan $gk = 1_N$ bulunur. Böylece g bir büzme morfizmi olur ki bu dizinin parçalanan olmaması ile çelişir. Sonuç olarak u bir otomorfizmdir. Lemma 2.3.6 gereğince v bir otomorfizm olur.

Bu lemmanın bir sonucu olarak, parçalanan olmayan bir kısa tam dizinin ilk ve son terimlerin ayrıştırılamazlığının morfizmlerin minimalliğini gerektirdiği aşağıda ifade edilmiştir.

Sonuç 3.5.5

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

parçalanan olmayan bir kısa tam dizi olsun. Bu durumda

(a) N ayrıştırılamaz ise, f sol minimaldir.

(b) L ayrıştırılamaz ise, g sağ minimaldir.

İspat (a) Verilen kısa tam dizi parçalanan olmasın. N'nin ayrıştırılamaz olduğunu kabul edelim. f'nin sol minimal olduğunu göstermek için $hf = f$ olacak şekilde $h \in \mathrm{End}M$ alalım. Lemma 3.5.4(i) gereğince

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "1_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramında h ve h' bir otomorfizm olur. Böylece f sol minimaldir.

(b) Verilen kısa tam dizi parçalanan olmasın. L'nin ayrıştırılamaz olduğunu kabul edelim. g' nin sağ minimal olduğunu göstermek için $gk = g$ olacak şekilde $k \in \mathrm{End}M$ alalım. Lemma 3.5.4(ii) gereğince

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramında k ve k' bir otomorfizm olur. Böylece g sağ minimaldir.

Aşağıdaki teorem bir neredeyse parçalanan dizinin sıfırdan farklı iki morfizmin herhangi biriyle karakterize edilebildiğini gösterir.

Teorem 3.5.6

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) Dizi neredeyse parçalanandır.

(b) f sol minimal neredeyse parçalanan morfizmdir.

(c) g sağ minimal neredeyse parçalanan morfizmdir..

İspat $(a) \Rightarrow (b)$ $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ dizisi neredeyse parçalanan olsun. Bu durumda f ve g indirgenmezdir. Lemma 3.3.9 gereğince f sol minimaldir. Şimdi f'nin sol neredeyse parçalanan morfizm olduğunu gösterelim. Sonuç 3.2.9'dan L ayrıştırılamazdır. f indirgenmez ve L ayrıştırılamaz olduğundan, Lemma 3.2.2'den f bir radikal morfizmdir. $u : L \to U$ herhangi bir radikal morfizm olsun. U'yu ayrıştırılamaz olarak kabul edebiliriz. (Bu durumda u izomorfizm değildir.) g indirgenmez olduğundan Lemma 3.2.8(b) gereğince

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, shift left, "u_2"] & N \arrow[r] & 0 \\ & U \arrow[ur, dashed, shift left, "u_1"] & & & \end{tikzcd}$$

$u = u_1 f$ olacak şekilde $u_1 : M \to U$ var ise f sol neredeyse parçalanan morfizm olup ispat tamamlanır. Diğer yandan; $f = u_2 u$ olacak şekilde $u_2 : U \to M$ vardır. f indirgenmez olduğundan u bir kesit morfizmi ya da u_2 bir büzme morfizmi olmalıdır. u radikal morfizm olduğundan kesit morfizmi değildir. O halde u_2 büzme morfizmidir. U ayrıştırılamaz olduğundan u_2 bir izomorfizm olur. Böylece $u_2^{-1} f = u_2^{-1}(u_2 u) = (u_2^{-1} u_2) u = u$ olacak şekilde $u_2^{-1} : M \to U$ var olduğundan f sol neredeyse parçalanan morfizmdir olup ispat tamamlanır.

$(b) \Rightarrow (c)$ f sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bu durumda f bir kesit morfizmi değildir. Buna denk olarak g bir büzme morfizmi değildir.

$v : V \to N$ herhangi bir radikal morfizm olsun. Lemma 3.4.3 gereğince f sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olduğundan indirgenmezdir. Sonuç 3.2.9'dan $\mathrm{coker} f = N$ ayrıştırılamazdır. v bir radikal morfizm ve N ayrıştırılamaz olduğundan Sonuç 3.1.5(b)'den v bir büzme morfizmi değildir.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

morfizmlerinin geri çekmesi E olmak üzere tam satırlara sahip aşağıdaki değişmeli diyagram vardır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

İddia ediyoruz ki üstteki dizi parçalanandır. Yani k bir büzme morfizmidir. Eğer k bir büzme morfizmi olmasaydı h bir kesit morfizmi olmazdı. Bu durumda f sol neredeyse parçalanan olduğundan

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ E & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani; $h = u'f$ olacak şekilde $u' : M \to E$ var olurdu.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u'"'] & N \arrow[dd, dashed, "v'"] \\ & E \arrow[d, "k"'] & \\ & V & \end{tikzcd}$$

Eşçekirdek tanımından; $gf = 0$ ve $(ku')f = kh = 0$ olacak şekilde başka bir morfizm olduğundan $ku' = v'g$ olacak şekilde $v' : N \to V$ vardır. Şimdi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u'"'] & N \\ E & \end{tikzcd}$$

morfizmlerinin ileri itmesi V olmak üzere tam satırlara sahip daha geniş olan aşağıdaki değişmeli diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u'"] & N \arrow[r] \arrow[d, "v'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

f kesit morfizmi olmadığından en alttaki ve en üstteki dizi parçalanan değildir. Ayrıca N ayrıştırılamaz olduğundan Lemma 3.5.4'ten vv' ve uu' birer otomorfizm olur. Bundan dolayı v bir büzme morfizmi olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak k bir büzme morfizmidir. O halde $kk' = 1_V$ olacak şekilde $k' : V \to E$ sağ tersi vardır. Böylece

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] & N \\
 & V \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, dashed, "u'k"]
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $g(u'k) = (gu)k' = (vk)k' = v(kk') = v$ olacak şekilde $u'k : V \to M$ morfizmi var olduğundan g sağ neredeyse parçalanandır. Diğer yandan Sonuç 3.5.5(b) gereğince g'nin sağ minimal olduğu açıktır.

$(c) \Rightarrow (b)$ g sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bu durumda g bir büzme morfizmi değildir. Buna denk olarak f bir kesit morfizmi değildir. $u : L \to U$ herhangi bir radikal morfizm olsun. Lemma 3.4.3'den g sağ minimal neredeyse parçalanan olduğundan g indirgenmezdir. Sonuç 3.2.9(b)'den $\ker g = L$ ayrıştırılamaz ve u bir radikal morfizm olduğundan Sonuç 3.1.5(a) gereğince u bir kesit morfizmi değildir.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \\
U &
\end{tikzcd}$$

morfizmlerinin ileri itmesi F olmak üzere tam satırlara sahip aşağıdaki değişmeli diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"] & F \arrow[r, "k"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

İddia ediyoruz ki alttaki dizi parçalanandır. Yani h bir kesit morfizmidir. Eğer h bir kesit morfizmi olmasaydı k bir büzme morfizmi olamazdı. Bu durumda g sağ neredeyse parçalanan morfizm olduğundan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ & F \arrow[u, "k"'] \arrow[ul, dashed, "v'"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $k = gv'$ olacak şekilde $v' : F \to M$ var olurdu.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "u'"'] & \\ & F \arrow[d, "v'"] & \\ L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Çekirdek tanımından; $gf = 0$ ve $g(v'h) = kh = 0$ olacak şekilde başka bir morfizm olduğundan $v'h = fu'$ olacak şekilde $u' : U \to L$ vardır. Şimdi

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "v'"] \\ L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

morfizmlerinin geri çekmesi U olmak üzere tam satırlara sahip daha geniş olan aşağıdaki değişmeli diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u'"] & F \arrow[r, "k"] \arrow[d, "v'"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

g büzme morfizmi olmadığı için en üstteki ve en alttaki dizi parçalanan değildir. L ayrıştırılamaz olduğundan Lemma 3.5.4(a)'dan $v'v$ ve $u'u$ birer otomorfizm olur. Bundan dolayı u bir kesit morfizmi olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak h bir kesit morfizmidir. O halde $h'h = 1_U$ olacak şekilde $h' : F \to U$ sol tersi vardır. Böylece

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, "h'v"] \\ U & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $(hv')f = h'(vf) = h'(hu) = (h'h)u = u$ olacak şekilde $h'v : M \to U$ morfizmi var olduğundan f sol neredeyse parçalanan morfizmdir. Diğer yandan Sonuç 3.5.5(a) gereğince f'nin sol minimal olduğu açıktır.

$(b) + (c) \Rightarrow (a)$ Lemma 3.4.3'ten minimal neredeyse parçalanan morfizmler daima indirgenmez olduğundan dizinin neredeyse parçalanan olduğu açıktır.

Sonuç 3.5.7

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanan dizisi L (ya da N) ile izomorfizm farkıyla tek türlü tanımlıdır.

İspat

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanan dizilerini alalım. $L = L'$ olduğunu kabul edelim. Diziler neredeyse parçalanan olduğundan Teorem 3.5.6' den f ve f' sol minimal neredeyse parçalanandır. Lemma 3.3.11 gereğince L' de başlayan bir tek sol minimal neredeyse parçalanan morfizm var olduğundan $M \cong M'$ olur. f sol minimal neredeyse parçalanan olduğundan $hf = f'$ olacak şekilde $h : M \to M'$ izomorfizmi vardır. Eşçekirdeğin evrensellik özelliğinden $gf = 0$ ve $(g'h)f = g'(hf) = g'f' = 0$ olacak şekilde başka bir $g'h : M \to N'$ var olduğundan $g'h = h'g$ olacak şekilde $h' : N \to N'$ morfizmi vardır. Lemma 3.5.4 gereğince $N \cong N'$ elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sonuç olarak L'de başlayan iki neredeyse parçalanan dizi birbirine izomorftur.

N'de biten iki neredeyse parçalanan dizinin izomorf olduğu benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.5.8

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) Dizi neredeyse parçalanandır.

(b) N ayrıştırılamaz ve f sol neredeyse parçalanandır.

(c) L ayrıştırılamaz ve g sağ neredeyse parçalanandır.

İspat $(a) \Rightarrow (b)$ ve $(a) \Rightarrow (c)$ Dizi neredeyse parçalanan olsun. Bu durumda f ve g indirgenmezdir. Sonuç 3.2.9'dan L ve N ayrıştırılamazdır. Ayrıca Teorem 3.5.6'dan f sol neredeyse parçalanan ve g sağ neredeyse parçalanandır.
$(b) \Rightarrow (a)$ N ayrıştırılamaz olsun. Sonuç 3.5.5(a) gereğince f sol minimaldir. Teorem 3.5.6'dan f sol minimal neredeyse parçalanan olduğundan dizi neredeyse parçalanandır.
$(c) \Rightarrow (a)$ L ayrıştırılamaz olsun. Sonuç 3.5.5(b) gereğince g sağ minimaldir. Teorem 3.5.6'dan g sağ minimal neredeyse parçalanan olduğundan dizi neredeyse parçalanandır.
$(b) \Rightarrow (c)$ N ayrıştırılamaz ve f sol neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bu durumda L'nin ayrıştırılamaz olduğu açıktır. Sonuç 3.5.5(a)'dan f sol minimaldir. Teorem 3.5.6(b)'den f sol minimal neredeyse parçalanan morfizm olduğundan g sağ neredeyse parçalanan morfizmdir. Böylece g sağ neredeyse parçalanan olur.
$(c) \Rightarrow (b)$ L ayrıştırılamaz ve g sağ neredeyse parçalanan morfizm olsun. Bu durumda N'nin ayrıştırılamaz olduğu açıktır. Sonuç 3.5.5(b)'den g sağ minimaldir. Teorem 3.5.6(c)'den g sağ minimal neredeyse parçalanan morfizm olduğundan f sol neredeyse parçalanan morfizmdir. Böylece f sol neredeyse parçalanan olur.

3.6. Neredeyse Parçalanan Dizilerin Varlığı

Bu bölümde, Auslander ve Reiten'e göre neredeyse parçalanan diziler için varlık teoremini ispatlayacağız. Bu teorem şunu ifade eder: A bir sonlu boyutlu $\mathbf{k}$-cebir, N bir ayrıştırılamaz projektif olmayan A-modül ya da L bir ayrıştırılamaz injektif olmayan A-modül olmak üzere bir neredeyse parçalanan

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

dizisi vardır.

Bu teoremin bir sonucu olarak, modül kategorisinde minimal neredeyse parçalanan morfizmler yeterince vardır. Yani her ayrıştırılamaz L modülü için bir sol minimal neredeyse parçalanan $L \longrightarrow M$ morfizmi ve her ayrıştırılamaz N modülü için bir sağ minimal neredeyse parçalanan $M \longrightarrow N$ morfizmi vardır. Neredeyse parçalanan dizilerin varlık teoreminin pek çok ispatı vardır. Bu bölümde neredeyse parçalanan dizilerin varlığı, Auslander-Reiten teorinin pek çok sonucunun orijinal ispatına ve ruhuna daha yakın olan, funktorsal bir yaklaşımla ispatlanacaktır. Bu bölümde, kontravaryant **k**-funktorlar kullanılarak ispat verilecektir. Benzer olarak kovaryant funktorlar kullanılarak ta varlık teoremi ispatlanır. Öncelikle kontravaryant **k**-funktorların oluşturduğu kategoriyi tanımlayalım:

- nesneleri; mod$A$'dan mod**k**'ya giden kontravaryant **k**-funktorlar,
- morfizmleri; funktorsal morfizmler,
- bileşke işlemi; bilinen bileşke

ile tanımlı kategori Fun$A$ olsun. Fun$A$ kategorisi **k**-lineer ve abelyandır. Modüllerle ilgili ifadelerin funktorlarla ilgili ifadelere dönüştürülmesinde ya da funktorlarla ilgili ifadelerin modüllerle ilgili ifadelere dönüştürülmesinde en etkili araç Yoneda'nın Lemmasıdır. Yoneda'nın Lemması, Cayley teoreminin grup teoriden kategori teoriye önemli bir genellemesidir.

Teorem 3.6.1 (Yoneda'nın Lemması) $\mathcal{C}$ bir **k**-lineer kategori, $F : \mathcal{C} \to \text{mod}\mathbf{k}$ bir kontravaryant **k**-funktor ve $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ olsun. Bu durumda $\varepsilon(\varphi) = \varphi_X(1_X)$ ile tanımlı bir

$$\varepsilon : \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F) \to F(X)$$

vektör uzayı izomorfizmi vardır.

İspat Her $\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to F$ funktorsal morfizmi ve her X nesnesi için $\varepsilon(\varphi) = \varphi_X(1_X) \in F(X)$ olduğundan ε iyi tanımlıdır. Şimdi ε'nun bir izomorfizm olduğunu göstermek için σ tersini tanımlayalım. $x \in F(X)$ olsun ve $\mathcal{C}$'nin herhangi bir Y nesnesini alalım. $f : Y \longrightarrow X$ iken $F(f) : F(X) \to F(Y)$ olduğundan $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ için

$$\sigma : F(X) \to \text{Hom}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F)$$

dönüşümü $\sigma(x)_Y(f) = F(f)(x)$ ile tanımlansın. Şimdi ε ve σ'nın birbirinin tersi olduğunu gösterelim. $x \in F(X)$ olsun.

$$\begin{aligned} \varepsilon\sigma(x) &= \sigma(x)_X(1_X) \\ &= F(1_X)(x) \\ &= 1_{F(X)}(x) \\ &= x \end{aligned}$$

olup $\varepsilon\sigma = 1$ bulunur. Diğer yandan her $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to F$ funktorsal morfizmi ve $\mathcal{C}$'deki her Y nesnesi için $\sigma\varepsilon(\varphi)_Y = \varphi_Y$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ alalım.

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{C}}(f,X)"] \arrow[d, "\varphi_X"] & Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeliliğinden

$$\begin{aligned} \sigma\varepsilon(\varphi)_Y(f) &= F(f)(\varepsilon(\varphi)_Y) \\ &= F(f)\varphi_X(1_X) \\ &= \varphi_Y \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)(1_X) \\ &= \varphi_Y(1_X \circ f) \\ &= \varphi_Y(f) \end{aligned}$$

olup $\sigma\varepsilon = 1$ elde edilir. Son olarak ε'nun bir **k**-vektör uzayı morfizmi olduğu görülebilir.

Kontravaryant funktorlar yerine kovaryant funktorlar kullanılarak ta Yoneda'nın Lemması ifade ve ispat edilebilir. Yoneda'nın Lemmasında sadece ε ve σ dönüşümlerinin varlığına ihtiyacımız yoktur aynı zamanda bunların nasıl tanımlandığına da ihtiyacımız vardır. Şimdi $\mathcal{C}$ kategorisi yerine özel olarak mod$A$ alınırsa aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.6.2 M ve N birer modül ve F, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, N)$'nin bir altfunktoru olsun. Bu durumda **k**-vektör uzaylarının $f \to \mathrm{Hom}_A(-, f)$ ile tanımlı bir

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), F) \to F(M)$$

izomorfizmi vardır. Özel olarak $F = \mathrm{Hom}_A(-, N)$ ise

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), \mathrm{Hom}_A(-, N)) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

olur.

İspat $f \in F(M)$ olsun. Yonedanın lemmasındaki σ izomorfizmi f'ye uygulandığında $\sigma(f) : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to F$ funktorsal morfizmi, $F \subseteq \mathrm{Hom}_A(-, N)$ olduğu gözönüne alınarak, şu şekilde tanımlanır: Her X nesnesi ve $g : X \to M$ morfizmi için

$$\sigma(f)_X(g) = \mathrm{Hom}_A(g, N)(f) = fg = \mathrm{Hom}_A(X, f)(g)$$

ile tanımlıdır. Böylece her X nesnesi için $\sigma(f)_X = \mathrm{Hom}_A(X, f)$ elde edilir. Sonuç olarak $\sigma(f) = \mathrm{Hom}_A(-, f)$ olur.

Tanım 3.6.3 H, Fun$A$'da bir nesne olsun. Her $\varphi : F \to G$ funktorsal epimorfizmi ve her $\eta : H \to G$ funktorsal morfizmi için

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[d, "\eta"] \arrow[dl, dashed, "\xi"'] \\ F \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $\eta = \varphi\xi$ olacak şekilde, bir $\xi : H \to F$ funktorsal morfizmi varsa H'ye *projektif* (*projective*) denir.

Sonuç 3.6.4 M bir A-modül olmak üzere $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ projektiftir.

İspat $\varphi : F \to G$ bir funktorsal epimorfizm ve $\eta : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to G$ bir funktorsal morfizm olsun.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_A(-, M) \arrow[d, "\eta"] \arrow[dl, dashed, "\xi=?"'] \\ F \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $\eta = \varphi\xi$ olacak şekilde, bir ξ funktorsal morfizminin var olduğunu gösterelim. φ yardımıyla; her $\psi : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to F$ funktorsal morfizmi için,

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}A(-, M), F) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), G)$$

morfizmini $\varphi^*(\psi) = \varphi\psi$ olarak tanımlayalım. Yoneda'nın lemmasında F ve G funktorlarına karşılık gelen ε izomorfizmleri;

$$\varepsilon_F : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), F) \to F(M)$$

$$\varepsilon_G : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), G) \to G(M)$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), F) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\varepsilon_F"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), G) \arrow[d, "\varepsilon_G"] \\
F(M) \arrow[r, "\varphi_M"] & G(M)
\end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. Her $\psi : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to F$ bir funktorsal morfizmi için

$$\begin{aligned}
\varphi_M \varepsilon_F(\psi) &= \varphi_M \psi_M(1_M) \\
&= (\varphi\psi)_M(1_M) \\
&= \varepsilon_G(\varphi\psi) \\
&= \varepsilon_G \varphi^*(\psi)
\end{aligned}$$

olduğundan $\varepsilon_G \varphi^* = \varphi_M \varepsilon_F$ olup bu diyagram değişmelidir. φ_M örten olduğundan φ yardımıyla tanımlanan φ^* örtendir. Böylece her $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), G)$ için $\varphi^*(\xi) = \varphi\xi = \eta$ olacak şekilde $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), F)$ var olup $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ projektif olur.

Yoneda'nın Lemması ve onun sonuçları keyfi modüllerle ilgili bazı soruları projektif funktorlarla ilgili sorulara indirgeyebilir. Projektif nesnelerle çalışmak, keyfi nesnelerle çalışmaktan her zaman daha kolaydır. Bu bakımdan mod$A$ kategorisinden Fun$A$ kategorisine neden geçildiği kısmi olarak açıklanmış olur.

Tanım 3.6.5 F herhangi bir funktor olmak üzere sonlu üretilmiş bir M A-modülü ve bir

$$\mathrm{Hom}_A(-, M) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

funktorsal epimorfizmi varsa, F funktoru *sonlu üretilmiş* (*finitely generated*) olarak adlandırılır.

Aşağıdaki lemmada, Fun$A$'daki sonlu üretilmiş projektif nesnelerin tam olarak $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ formunda funktorlar olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.6.6 Fun$A$'da bir F nesnesinin sonlu üretilmiş projektif olması için gerek ve yeter koşul $F \cong \mathrm{Hom}_A(-, M)$ olacak şekilde bir M A-modülünün var olmasıdır. Ayrıca F'nin ayrıştırılamaz olması için gerek ve yeter koşul M'nin ayrıştırılamaz olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) F sonlu üretilmiş projektif olsun. F sonlu üretilmiş olduğundan bir $\varphi : Hom_A(-, M) \to F$ funktorsal epimorfizmi vardır. Aynı zamanda F projektif olduğundan;

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "1_F"] & \\ \mathrm{Hom}_A(-, M) \arrow[r, "\varphi"] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $\varphi\psi = 1_F$ olacak şekilde, bir $\psi : F \to \mathrm{Hom}_A(-, M)$ sağ tersi var olup φ bir büzme morfizmi olur. $(\psi\varphi)^2 = \psi\varphi\psi\varphi = \psi\varphi$ olduğundan $\psi\varphi$: $\mathrm{Hom}_A(-, M) \to \mathrm{Hom}_A(-, M)$ bir idempotent funktorsal endomorfizmdir. Sonuç 3.6.2 gereğince $\psi\varphi = Hom_A(-, f)$ olacak şekilde $f : M \longrightarrow M$ endomorfizmi vardır. $\psi\varphi$ idempotent olduğundan f de idempotenttir. $\mathrm{Hom}_A(-, M')$; $\mathrm{Hom}_A(-, f) = \psi\varphi$'nin görüntüsü olacak şekilde $M' = \mathrm{im} f$, M'nin bir dik toplananıdır. Bu ise $F \cong \mathrm{Hom}_A(-, M')$ olduğunu gösterir.
($\Leftarrow$) Açıktır.

Aşağıdaki lemmada; ayrıştırılamaz sonlu üretilmiş projektif A-modüllerde olduğu gibi, Fun$A$'daki her ayrıştırılamaz sonlu üretilmiş projektif nesnenin bir tek maksimal altnesnesinin var ve bunun radikal olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.6.7 M ayrıştırılamaz bir modül olsun. $\mathrm{rad}_A(-, M)$, $\mathrm{Hom}_A(-, M)$'nin bir tek maksimal altfunktorudur.

İspat M ayrıştırılamaz olmak üzere $\mathrm{rad}_A(-, M) \subseteq F$ olacak şekilde $\mathrm{Hom}_A(-, M)$' nin bir F öz altfunktorunu alalım. Her ayrıştırılamaz L modülü için $F(L) \subseteq \mathrm{rad}_A(L, M)$ olduğunu aşağıdaki iki durumu gözönüne alarak gösterelim.
$L \ncong M$ ise; $\mathrm{Hom}_A(-, M) = \mathrm{rad}_A(L, M)$ olup ispat açıktır.

$L \cong M$ ise; $f : M \to M$ olmak üzere $f \in F(M)$ alalım. Sonuç 3.6.2'den ve Yoneda bijeksiyonundan

$$\mathrm{Hom}_A(-, f) : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to F$$

funktorsal morfizmi vardır. Diğer yandan

$$F \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, M)$$

öz içerim morfizmi var olduğundan izomorfizm olmayan bir

$$\mathrm{Hom}_A(-, f) : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to \mathrm{Hom}_A(-, M)$$

morfizmi vardır. Böylece f bir izomorfizm değildir ve $f \in \mathrm{rad}_A(M, M)$ olup ispat tamamlanır.

Tanım 3.6.8 Fun$A$'da bir sıfırdan farklı bir nesnenin kendisinden ve sıfırdan farklı bir altnesnesi yoksa *basit* (*simple*) olarak adlandırılır.

Lemma 3.6.7'den her ayrıştırılamaz M modülü için

$$S_M = \mathrm{Hom}_A(-, M)/\mathrm{rad}_A(L, M)$$

funktoru basittir. M ayrıştırılamaz olduğundan End$M$ yerel olup Önerme 2.2.11 gereğince $S_M(M)$ bir bölümlü halkadır. Yonedanın Lemması yardımıyla $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_A(-, M), S_M)$ bir bölümlü halka olur. Böylece S_M basit olduğundan bir

$$0 \neq \pi_M : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to S_M$$

epimorfizmi vardır. Sonuç olarak Fun$A$'da bir basit funktorun ve sıfırdan farklı bir π_M morfizminin var olduğu görülür. Karşıt olarak Fun$A$'daki her basit nesnenin ayrıştırılamaz bir M modülü için S_M biçiminde olduğunu ve π_M'nin bir projektif örtü olması gerektiğini göstereceğiz. Fakat öncelikle Fun$A$'da projektif örtü kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.6.9 H bir projektif funktor ve $\varphi : H \longrightarrow F$ bir epimorfizm olsun. H' projektif olmak üzere $\varphi' : H' \longrightarrow F$ bir başka epimorfizm ise,

$$\begin{tikzcd}
 & H' \arrow[dl, dashed, "\eta"'] \arrow[d, "\varphi'"] & \\
H \arrow[r, "\varphi"] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani; $\varphi' = \varphi\eta$ olacak şekilde bir $\eta : H' \longrightarrow H$ epimorfizmi varsa $\varphi : H \longrightarrow F$ ile birlikte H'ye F'nin *projektif örtüsü* (*projective cover*) denir. Özel olarak η bir büzme morfizmi ise, H; H''nün bir dik toplananıdır.

Lemma 3.6.10 S, Fun$A$'da bir basit funktor olsun. Bu durumda $S(M) \neq 0$ olacak şekilde izomorfizm farkıyla bir tek ayrıştırılamaz M modülü vardır ve $S \cong S_M$ olur. Ek olarak $\pi_M : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to S_M$ funktorsal morfizmi bir projektif örtüdür.

İspat Yonedanın Lemmasından her X modülü için $S(X) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul bir $\mathrm{Hom}_A(-, X) \to S$ funktorsal morfizminin var olmasıdır. S basit olduğundan bu bir epimorfizmdir. S sıfırdan farklı olduğundan $S(M) \neq 0$ olacak şekilde en az bir ayrıştırılamaz M modülü vardır. $S(X) \neq 0$ olacak şekilde bir X modülünü alalım. Sonuç 3.6.4 gereğince $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ ve $\mathrm{Hom}_A(-, X)$'in projektif olması kullanılarak

$$\begin{tikzcd} Hom_A(-,M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "Hom_A(-,u)"'] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ Hom_A(-,X) \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "Hom_A(-,v)"'] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ Hom_A(-,M) \arrow[r, "\pi_M"] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan $u : M \to X$ ve $v : X \to M$ morfizmleri Sonuç 3.6.2 gereğince vardır. M ayrıştırılamaz olduğundan End$M$ yerel olup Uyarı 2.2.12 gereğince $vu \in \mathrm{End}M$ morfizmi ya tersinirdir ya nilpotenttir.

vu nilpotent olsaydı; $(vu)^m = 0$ olacak şekilde $m > 0$ var olurdu. Yukarıdaki diyagramın değişmeliliğinden

$$\pi_M = \pi_M \mathrm{Hom}_A(-, v)\mathrm{Hom}_A(-, u) = \pi_M \mathrm{Hom}_A(-, (vu))$$

olup $\pi_M = \pi_M \mathrm{Hom}_A(-, (vu)^m) = 0$ bulunurdu. Bu ise $\pi_M \neq 0$ olması ile çelişirdi. O halde vu tersinir olup buradan $v : X \longrightarrow M$ bir büzme morfizmi bulunur. Böylece M, X'in bir dik toplananıdır. Özel olarak ayrıştırılamaz M modülü izomorfizm farkıyla tektir. Burada $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ yerine projektif F funktoru alınırsa π_M'nin projektif örtü olduğu görülür. Ayrıca S basit olduğundan ve Lemma 3.6.7 gereğince $\mathrm{rad}_A(-, M)$, $\mathrm{Hom}_A(-, M)$'nin bir tek maksimal altfunktoru olduğundan

$$S \cong \mathrm{Hom}_A(-, M)/\mathrm{rad}_A(-, M) = S_M$$

elde edilir.

Sonuç 3.6.11 M ayrıştırılamaz olmak üzere M ve N A-modülleri için $S_M(N) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart M'nin N'nin bir dik toplananına izomorf olmasıdır.

Lemma 3.6.12 $\mathcal{C}$ bir abelyan kategori olmak üzere $f_1 : M_1 \to M$ ve $f_2 : M_2 \to M$ morfizmlerinin geri çekmesi (P, p_1, p_2) olsun. $K_1 = \mathrm{im} f_1$ ve $K_2 = \mathrm{im} p_2$ olmak üzere f_1 ve p_2'nin $f_1 = j_1 g_1$ ve $p_2 = j_2 q_2$ aşikar faktörizasyonlarını gözönüne alalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $j_1 f = f_2 j_2$ olacak şekilde bir tek $f : K_2 \to K_1$ vardır.

(b) (P, p_1, p_2); $q_1 : M_1 \to K_1$ ve $f : K_2 \to K_1$ morfizmlerinin geri çekmesidir.

(c) $\ker f_1 \cong \ker p_2$'dir.

Lemma 3.6.13 N bir ayrıştırılamaz A-modül olsun. N'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul S_N basit funktorunun

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, N) \longrightarrow S_N \longrightarrow 0$$

formunda bir projektif çözücüsünün var olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ N projektif olsun. Lemma 3.6.7'den $\mathrm{rad}_A(-, N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, N)$ funktorsal monomorfizmi ve Tanım 3.6.8'in altındaki ifadeden $\pi_M : \mathrm{Hom}_A(-, M) \to S_M$ funktorsal epimorfizmi vardır. Bu durumda

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}_A(-, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, N) \longrightarrow S_N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Her X modülü için $\mathrm{rad}_A(-, M)$ vektör uzayı, Sonuç 3.1.5'ten X'ten Y'ye giden büzme olmayan morfizmlerden oluşur. Ayrıca N projektif olduğundan bu morfizmler örten değildir. N ayrıştırılamaz olduğundan $\mathrm{rad} N$; N'de maksimal olup $\mathrm{im} f \subseteq \mathrm{rad} N$ bulunur. Böylece $\mathrm{rad}_A(X, N) = \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{rad} N)$ olup yukarıdaki dizi

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{rad} N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, N) \longrightarrow S_N \longrightarrow 0$$

formunda yazılır.

($\Leftarrow$) S_N'nin

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, N) \longrightarrow S_N \longrightarrow 0$$

formunda bir projektif çözücüsü var olsun. Bu funktor dizisinin A_A modülünde aldığı değer göz önüne alınırak Önerme 2.4.10'dan

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow S_N(A) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Kabul edelim ki N projektif olmasın. Bu durumda Sonuç 3.6.11 gereğince $S_N(A) = 0$ olur. Ayrıca $M \cong N$ olduğundan $\mathrm{Hom}_A(-, M) \cong \mathrm{Hom}_A(-, N)$ olup $S_N = 0$ bulunur ki bu çelişkidir. Sonuç olarak N projektiftir.

Aşağıda; neredeyse parçalanan dizilerin varlık teoreminin ispatında kullanılacak temel bir sonuç ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.6.14 N ayrıştırılamaz A-modül olsun. S_N basit funktorunun

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, N) \longrightarrow 0$$

formunda bir minimal projektif çözücüsü vardır. N projektif ise, $L = 0$ olur. Aksi halde L ayrıştırılamazdır.

Önerme 3.6.15 N ayrıştırılamaz ve projektif olmayan bir A-modül ve

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(-,f)} \mathrm{Hom}_A(-, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(-,g)} \mathrm{Hom}_A(-, N) \longrightarrow S_N \longrightarrow 0$$

S_N'nin minimal projektif çözücüsü olsun. Bu durumda neredeyse parçalanan bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır.

İspat Bu funktor dizisinin A_A aldığı değer göz önüne alınırsa Önerme 2.4.10 gereğince

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow S_N \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Diğer yandan N projektif olmadığı için Sonuç 3.6.11 gereğince $S_N(A) = 0$ olup Teorem 3.6.14'ten L ayrıştırılamaz olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Sonuç 3.5.8'den g'nin sağ neredeyse parçalanan olduğu gösteri-lirse ispat tamamlanır. İlk olarak g'nin bir radikal morfizm olmadığını varsayalım. Bu durumda g bir büzme morfizmidir ve $gg' = 1_N$ olacak şekilde g' vardır. Her $h \in \mathrm{End}_A N$ için;

$$h = gg'h = \mathrm{Hom}_A(N, g)(g'h) \in \mathrm{im}\ \mathrm{Hom}_A(N, g) = \ker\pi_N$$

ve buradan $h \in \mathrm{radEnd}_A N$ olup bu durum $S_N(N) = 0$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla g bir radikal morfizmdir. V bir A-modül ve $v \in \mathrm{rad}_A(V, N)$ olsun. Teorem 3.6.14'den $\mathrm{rad}_A(V, N) = \mathrm{imHom}_A(V, g)$ olduğundan

$$v = \mathrm{Hom}_A(V, g)(v') = gv'$$

olacak şekilde $v' : V \to M$ morfizmi var olup g sağ neredeyse parçalanan elde edilir.

Aşağıdaki teorem neredeyse parçalanan diziler için varlık teoremidir.

Teorem 3.6.16 N ayrıştırılamaz projektif olmayan bir A-modül ya da L ayrıştırılamaz injektif olmayan bir A-modül olsun. Bu durumda

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanan dizisi vardır. Ek olarak bu dizi L ya da N ile izomorfizm farkıyla tek türlü belirlidir.

İspat N ayrıştırılamaz ve projektif olmayan bir A-modül olsun. Dizinin varlığı Teorem 3.6.14 ve Önerme 3.6.15'in bir direkt sonucudur. Eğer L ayrıştırılamaz ve injektif olmayan bir sağ A-modül ise, DL ayrıştırılamaz projektif olmayan bir sol A^{op}-modüldür. Bu nedenle modA^{op}'ta neredeyse parçalanan

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow M' \longrightarrow DL \longrightarrow 0$$

dizisi vardır. D dualite funktoru bu diziye uygulanırsa, mod$A$'da neredeyse parçalanan bir dizi var olur. Son olarak dizinin ilk ve son terimleri bakımından tek türlü var olması Sonuç 3.5.7'den açıktır.

Sonuç 3.6.17

(a) N ayrıştırılamaz bir A-modül ise, bir $g : M \to N$ sağ minimal neredeyse parçalanan morfizmi vardır.

(b) L ayrıştırılamaz bir A-modül ise, bir $f : L \to M$ sol minimal neredeyse parçalanan morfizmi vardır.

İspat

(a) Ayrıştırılamaz N A-modülü projektif ise, Örnek 3.4.1 gereğince N'de biten $\mathrm{rad}N \hookrightarrow N$ içerim morfizmi sağ minimal neredeyse parçalanandır. N projektif değilse, Teorem 3.6.16 gereğince g'nin sağ minimal neredeyse parçalanan olduğu bir

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

neredeyse parçalanan dizisi vardır.

(b) (a)'ya benzer olarak gösterilir.

4. KAYNAKLAR

Alizade R, Pancar A, 1999, Homoloji Cebirine Giriş, Ondokuz Mayıs Üniyersitesi, 178s, Samsun.

Anderson F W, Fuller K R, 1992, Rings and Categories of Modules, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 385p, New York, Inc.

Assem I, Simson D, Skowronski A, 2006, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, 1: Techniques of Representation Theory London Mathematical Society Student Texts, 65, 458p, Cambridge University Press.

Assem I, Coelho F U, 2020, Basic Representation Theory of Algebras, Graduate Text in Mathematics, Springer Nature, 311p, Switzerland.

Auslander M, 1966, Coherent Functors Proceedings Conference on Categorical Algebra, La Jolla, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Newyork, 189-231, 2, 269-310.

Auslander M, 1974, Representation theory of artin algebras II. Comm. in Algebra, 189-231.

Auslander M, Reiten I, 1977, Representation theory of artin algebras IV. Invariants given by almost split sequences, Comm. in Algebra, 5, 443-518.

Auslander M, Reiten I, 1977, Representation theory of artin algebras V. Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms, Comm. in Algebra, 5, 519-554.

Auslander M, Reiten I, 1978, Representation theory of artin algebras VI. A functorial approach to almost split sequences, Comm. in Algebra, 5, 279-291.

Auslander M, Smalo S O, 1981, Almost split sequences in subcategories, J Algebra, Comm. in Algebra, 69, 426-454, Addendum J. Algebra, 71, 592-594.

Hungerford T W, 1974, Algebra, Springer-Verlag, 229p, New York.

Martinez R, Villa, 1980, Almost projective modules over hereditary algebras. An. İns. Mat. Univ. Nac. Autonoma, Mexico,20, 1-89.

Riedtmann C, 1980, Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, Comm. Math.Helv., 55, 199-224.

Ringel C M, 1978, Finite dimensional heraditary algebras of vild representation type. Math. Z., 161, 235-255.

Ringel C M, 1984, Tame algebras and integral quadratic forms. Lectures Notes in Math., 1099, Springer-Verlag, 376p, Berlin-Heidelberg-Newyork.

Rotman J, 2009, An Introduction to Homological Algebra Second Edition, Springer, 110p, New York.

Schiffler R, 2014, Quiver Representations, Springer International Publishing, 230p, Switzerland.