ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERDE ASİMPTOTİK İDEAL İNVARYANT DENKLİK TİPLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan YENİSARI

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

Bu tez çalışması 19.FEN.BİL.29 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Birimi tarafından desteklenmiştir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERDE ASİMPTOTİK İDEAL İNVARYANT DENKLİK TİPLERİ

Hasan YENİSARI

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Hasan YENİSARI tarafından hazırlanan "Çift İndisli Dizilerde Asimptotik İdeal İnvaryant Denklik Tipleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 01/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...... /...... /......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01 / 07 / 2021

Hasan YENİSARI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERDE ASİMPTOTİK
İDEAL İNVARYANT DENKLİK TİPLERİ

Hasan YENİSARI
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez çalışmasında ele alınan konunun tarihi gelişimi anlatılmıştır. İkinci bölümde, tez çalışmasında yararlanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, hem tek diziler ve hem de çift diziler için asimptotik invaryant yakınsaklık ile invaryant denklik tipleri ve özellikleri not edilmiştir. Dördüncü bölümde, küme dizileri için asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ve $\mathcal{I}^*$-invaryant denklik kavramları tanıtılarak bu kavramların bazı önemli özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ispatlarıyla verilmiştir. Beşinci bölümde, çift diziler için asimptotik $\mathcal{I}_2$-invaryant denklik ve p-kuvvetli $\mathcal{I}_2$-invaryant denklik kavramları tanıtılarak bunların bazı önemli özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler teoremlerle açıklanmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, tez çalışmasında yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2021, v + 37 sayfa

Anahtar Kelimeler : Asimptotik denklik, Çift indisli dizi, İdeal yakınsaklık, İnvaryant yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ASYMPTOTICALLY IDEAL INVARIANT
EQUAIVALENCE TYPES IN DOUBLE SEQUENCES

Hasan YENİSARI

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis study consists of six chapters.

In the first chapter, the historical development of the subject addressed in the thesis has been explained. In the second chapter, some basic definitions and concepts that will be used in the thesis are given. In the third chapter, asymptotic invariant convergence and invariant equivalence types and properties are noted for both single and double sequences. In the fourth chapter, the concepts of asymptotic $\mathcal{I}$-invariant equivalence and $\mathcal{I}^*$-invariant equivalence for set sequences are introduced and some important properties of these concepts and the theorems that examine the relations between these concepts are given with their proofs. In the fifth chapter, the concepts of asymptotic $\mathcal{I}_2$-invariant equivalence and p-strong $\mathcal{I}_2$-invariant equivalence for even sequences are introduced and some important properties of them and the relationships between these concepts are explained with theorems.

In the sixth section, which is the last section, the sources in the literature used in the thesis are listed.

2021, v + 37 pages

Keywords : Asymptotic equivalence, Double sequences, Ideal convergence, Invariant convergence, Wijsman convergence.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından ve sabırlarından dolayı danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili anneme ve babama teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatımın her anında olduğu gibi tez çalışmam sırasında da beni destekleyen ve bana yardımcı olan sevgili eşim Merve YENİSARI ile çalışmalarımın tamamlanmasını sabırla bekleyen oğlum Yunus Aras YENİSARI'ya sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasına 19.FEN.BİL.29 numaralı proje kapsamında destek veren Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Birimine teşekkür ederim.

Hasan YENİSARI

Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
(a_n)	Reel sayı dizisi
(a_{mn})	çift indisli dizi
$\lim a_n$	a_n dizisinin limiti
$a \sim b$	$a = (a_n)$ ve $b = (b_n)$ dizilerinin denkliği
ℓ_∞	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
$\{C_i\}$	Küme dizisi
$\lvert A \rvert$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$st - \lim a_n$	(a_n) dizisinin istatistiksel limiti
$[V_\sigma]$	Tüm kuvvetli invaryant yakınsak dizilerin kümesi
$[V_\sigma]_p$	p-kuvvetli invaryant yakınsak dizilerin kümesi
$S_\sigma - \lim a_n$	(a_n) dizisinin invaryant istatistiksel limiti
$2^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ nin kuvvet kümesi
$\mathcal{I}$	$2^{\mathbb{N}}$ üzerinde tanımlı ideal
$2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin kuvvet kümesi
$\mathcal{I}_2$	$2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ üzerinde tanımlı ideal
$C_i \overset{WS_\sigma}{\sim} D_i$	$\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerinin L katlı Wijsman asimptotik invaryant istatistiksel denkliği
$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$	$\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerinin L katlı Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invariant denkliği
$a \overset{\mathcal{I}_2^\sigma}{\sim} b$	$a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ dizilerinin asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denkliği

Kısaltmalar

h.h. n	hemen hemen her n

1. GİRİŞ

Matematik anabilim dalında uzaklık kavramı yardımıyla tanımlanan yakınsaklık ve limit kavramları analiz ve fonksiyonlar teorisi bilim dalı toplanabilme teorisinin temel kavramlarındandır. Doğal sayılar kümesi olan $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin doğal yoğunluğuyla tanımlanan Fast (1951) ve Steinhaus (1951) un birbirlerinden bağımsız olarak tanımladığı yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise bu bilim dalındaki toplanabilme teorisinin önemli konularından biridir. İstatistiksel yakınsaklık kavramının tanımlanmasından sonra bu kavram ve bir çok özelliği üzerine Fridy (1985) başta olmak üzere birçok bilim insanı tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır.

Yakın geçmişte Kostyrko vd. (2000) tarafından doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin bir sınıfı olan ideal kavramı yardımıyla istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olarak tanımlanan $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı toplanabilme teorisine bir yenilik getirmiştir. Bu kavram ve bazı özellikleri üzerine Kostyrko vd. (2005), Kumar (2007) ve Dündar (2010) gibi araştırmacılar çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca, Das vd. (2008) çift dizilerde $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık kavramlarını tanıtmışlardır.

Küme dizilerinde yakınsaklık kavramı ile ilgili çalışmalar başta Beer (1985,1994) ve Wijsman (1964) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır. Nuray ve Rhoades (2012) tarafından yapılan bir çalışmada küme dizileri için Wijsman istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ve Hausdoff istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

İnvaryant kavramı ve bu kavramın bazı özellikleri son yıllarda bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Raimi (1963) toplanabilme teorisinde invaryant ortalama, invaryant yakınsaklık ve invaryant matris metodlarını tanıtmıştır. Schafer (1972), Mursaleen (1979,1983), Savaş (1989, 1989), Nuray ve Savaş (1994), Mursaleen ve Edely (2009), Ulusu (2018), Ulusu vd. (2018), Pancaroğlu Akın vd. (2019) ve daha birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Marouf (1993) asimptotik denklik kavramı ile asimptotik regüler matrisler için bazı temel kavramlar ve bu kavramların bazı önemli özelliklerini vermiştir. Son yıllarda Patterson (2003), Patterson ve Savaş (2006), Ulusu ve Nuray (2013), Kişi ve Nuray (2013), Savaş (2013), Yamancı ve Gürdal (2015) ve Hazarika (2015) gibi birçok araştırmacı asimptotik denklik kavramı ile ilgili önemli çalışmalar yapmışlardır. Asimptotik istatistiksel denklik ile ilgili kavramlar Patterson (2003) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramı ve özellikleri Patterson ve Savaş (2006) tarafından tanıtılmıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci ve üçüncü bölümlerinde, dizi uzayları ve toplanabilme alanında önemli olan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde, Ulusu ve Gülle (2019) tarafından tek indisli küme dizileri için verilen tanım ve teoremler ispatlarıyla birlikte not edilmiştir. Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik tanımı verilerek, Wijsman asimptotik invaryant denklik ile ilişkisi incelenmiş, Wijsman asimptotik kuvvetli p-invaryant denklik tanımı verilip, Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ile ilişkisini inceleyen teoremler ispatlarıyla verilmiştir. Daha sonra Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ile Wijsman asimptotik istatistiksel invaryant denklik arasındaki çift taraflı gerektirme ve Wijsman asimptotik $\mathcal{I}^*$-invaryant denklik tanımı verilip, Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ile çift taraflı gerektirme ilişkisi not edilmiştir.

Bu tez çalışmasının beşinci bölümünde, çift indisli diziler için Dündar vd. (2020) tarafından verilen tanım ve teoremler ispatlarıyla birlikte not edilmiştir. Asimptotik invaryant denklik ve asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denklik tanımları verilerek, aralarındaki ilişki incelenmiş, kuvvetli asimptotik invaryant denklik ve p-kuvvetli asimptotik invaryant denklik tanımları tanıtılıp, p-kuvvetli asimptotik invaryant denklik ile asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denklik arasındaki çift taraflı gerektirme ilişkisi verilmiştir. Son olarak asimptotik S_2^σ-denklik ile asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denklik arasındaki ilişki incelenmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilecektir. İlk olarak metrik uzay, dizi, dizinin yakınsaklığı, asimptotik denklik, küme dizilerinin yakınsaklığı gibi temel kavramlardan bahsedilecektir.

2.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 2.1.1 V boştan farklı bir küme ve

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $a, b, c \in V$ için

(M1) $d(a, a) = 0$,

(M2) $d(a, b) = d(b, a)$,

(M3) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

şartları sağlanırsa, d fonksiyonuna V üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (V, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

(M1) $d(a, a) = 0$ şartı yerine

(M1)$'$ $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

şartını alırsak, d fonksiyonuna *metrik fonksiyonu* ve (V, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir (Maddox 1970).

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{R}$ reel uzay üzerinde

$$d(a, b) = |a - b|$$

biçiminde tanımlanan *mutlak değer metriği* gözönüne alınacaktır. Burada $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2 Tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Eğer dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ($\mathbb{R}$) ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani reel terimli dizi $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyondur (Balcı 2016).

Genel terimi a_n olan dizi $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.3 (a_n) bir reel terimli dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > k_0$ olduğunda

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (a_n) dizisi a ya *yakınsaktır* denir ve

$$\lim a_n = a \text{ veya } a_n \to a$$

biçiminde gösterilir (Balcı 2016).

Tanım 2.1.4 Negatif olmayan $a = (a_n)$ ve $b = (b_n)$ dizileri için eğer

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$$

limiti mevcut ise, bu durumda a ve b dizilerine asimptotik denk diziler denir ve $a \sim b$ ile gösterilir (Marouf 1993).

Tanım 2.1.5 (V, d) bir metrik uzay olsun. Herhangi $v \in V$ noktası ve V nin boş olmayan bir C alt kümesi için v ile C arasındaki uzaklık

$$\rho(v, C) = \inf_{c \in C} d(v, c)$$

olarak tanımlanır (Nuray ve Rhoades 2012).

Bu çalışma boyunca (V, d) bir metrik uzay ve C, C_i, D_i V nin boş olmayan kapalı alt kümleri olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.6 Eğer her bir $v \in V$ için

$$\lim_{i \to \infty} \rho(v, C_i) = \rho(v, C)$$

limiti mevcut ise, $\{C_i\}$ dizisi C ye Wijsman yakınsaktır denir (Nuray ve Rhoades 2012).

2.2. Çift Dizi

Bu kısımda, çift dizi, çift dizinin alt dizisi, çift dizi uzayları ile çift dizilerdeki yakınsaklık kavramları verilecektir.

Tanım 2.2.1 V boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere,

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to V,\ (m, n) \to h(m, n) = a_{mn}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna *çift indisli dizi* denir. Bundan sonraki kısımlarda çift indisli dizi yerine kısaca çift dizi veya sadece dizi ifadesi kullanılacaktır. Herhangi bir $a = (a_{mn})$ çift dizisinin a_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şekline bir tablo olarak düşünebiliriz. Ω ile kompleks veya reel tanımlı bütün çift dizilerin kümesini göstereceğiz. Buna göre;

$$\Omega = \{a = (a_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } a_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

olup, bu küme her $\beta \in \mathbb{C}$ ve $a, b \in \Omega$ için, $a + b = (a_{mn} + b_{mn})$ ve $\beta a = (\beta a_{mn})$ işlemleri altında lineer uzaydır (Altay 2002).

Tanım 2.2.2 Bir $a = (a_{mn})$ çift dizisi için $\sup_{m,n\geq 0} |a_{mn}| < \infty$ oluyorsa, a dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin kümesi

$$\mathcal{M}_u = \left\{ a = (a_{mn}) \in \Omega \ : \ \|a\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup, bu uzay $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı teşkil eder (Altay 2002).

Tanım 2.2.3 $a = (a_{mn})$ bir çift dizi ve $l \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda, $|a_{mn} - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa,

$a = (a_{mn})$ dizisi l sayısına *Pringsheim anlamında yakınsak* ve l değerine de a dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $a = (a_{mn})$ dizisine kısaca P-yakınsak dizi diyeceğiz ve limitini de $P - \lim a_{mn} = l$ ile göstereceğiz (Altay 2002).

Tanım 2.2.4

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow V, \quad (m, n) \longrightarrow h(m, n) = a_{mn}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad m \longrightarrow i(m) = i_m \;\; \text{ve} \;\; j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \longrightarrow j(n) = j_n$$

artan fonksiyonlar (diziler) olmak üzere,

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (m, n) \longrightarrow g(m, n) = (i_m, j_n)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$h \circ g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow V, \quad (m, n) \longrightarrow h \circ g(m, n) = a_{i_m j_n}$$

bileşke fonksiyonuna (a_{mn}) dizisinin bir *alt dizisi* denir (Altay 2002).

2.3. İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, öncelikle doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık kavramları ile istatistiksel yakınsaklığın genelleştirmesi olan ideal yakınsaklık ve bazı önemli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.1 $P \subset \mathbb{N}$ ve $P_n = \{i \in P : i \leq n\}$ olsun. Bu durumda P kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{|P_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big| \{ i \leq n : i \in P \} \Big|$$

biçiminde tanımlanır (Freedman ve Sember 1981).

Burada $|P_n|$ ifadesi, P_n kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

Tanım 2.3.2 (a_k) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : |a_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |a_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise, (a_k) dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim a_k = L$ biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

Yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Fakat bunun tersi daima doğru değildir. Bu durum aşağıda verilen örnekle açıklanabilir:

Genel terimi

$$a_k = \begin{cases} 3 & , \quad k = n^3 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan

$$(a_k) = (3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, ...)$$

dizisi alındığında; her $\varepsilon > 0$ için $P_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |a_k - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan, $st - \lim a_k = 0$ dır. Yani bu dizi istatistiksel yakınsak olduğu halde yakınsak değildir.

Tanım 2.3.3 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için eğer

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

ii. Her $P, R \in \mathcal{I}$ için $P \cup R \in \mathcal{I}$,

iii. Her $P \in \mathcal{I}$ ve $R \subset P$ için $R \in \mathcal{I}$

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{I}$ sınıfına $\mathbb{N}$ de bir *ideal* denir (Kostyrko vd. 2000).

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ ya bir *gerçek ideal* denir. Ayrıca, $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{I}$ idealine *uygun ideal* denir (Kostyrko vd. 2000).

Bu tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali bir uygun ideal olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.3.4 $X \neq \emptyset$ olsun. $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset 2^X$ sınıfı

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) $P, R \in \mathcal{F}$ ise $P \cap R \in \mathcal{F}$

iii) $P \in \mathcal{F}$ ve $P \subset R$ için $R \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlarsa, $\mathcal{F}$ ye X üzerinde bir *süzgeçtir (filtre)*, denir (Kostyrko vd. 2000).

$\mathcal{I}$, X üzerinde bir gerçek ideal ise,

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : \exists A \in \mathcal{I}, M = X \backslash A\}$$

sınıfı X üzerinde bir süzgeç olup, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ süzgecine $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç denir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.3.5 (a_n) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda (a_n) dizisi L ye $\mathcal{I}$-*yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - \lim a_n = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Açık olarak eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ olarak alınırsa, $\mathcal{I}_\delta$, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve bu durumda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık kavramı çakışır.

Tanım 2.3.6 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kümeler ailesi için, $P_n \triangle R_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sonlu küme ve

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathcal{I}$$

şartlarını sağlayan sayılabilir $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kümeler ailesi varsa, $\mathcal{I}$ ideali (AP) şartını sağlar denir (Kostyrko vd. 2000).

Şimdi, çift dizilerde ideal yakınsaklık ile ilgili temel kavramlar ve tanımlar verilecektir. Çift dizilerde çalışacağı için, $\mathbb{N}$ üzerindeki $\mathcal{I}$ ideali ile karıştırılmaması amacıyla $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerindeki bir ideal $\mathcal{I}_2$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.7 $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. Eğer her bir $k, l \in \mathbb{N}$ için $\{k, l\} \in \mathcal{I}_2$ oluyorsa, $\mathcal{I}_2$ idealine bir uygun ideal, $\{k\} \times \mathbb{N} \in \mathcal{I}_2$ ve $\mathbb{N} \times \{k\} \in \mathcal{I}_2$ oluyorsa, $\mathcal{I}_2$ idealine bir kuvvetli uygun ideal denir. Bir kuvvetli uygun ideal aynı zamanda bir uygun idealdir (Das vd. 2008).

Bu tez çalışması boyunca $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olarak ele alınacaktır.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde

$$\mathcal{I}_2^0 = \{A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m(A) \in \mathbb{N})(k, l \geq m(A) \Rightarrow (k, l) \notin A)\}$$

ideali bir kuvvetli uygun idealdir.

Bir $\mathcal{I}_2$ idealinin kuvvetli uygun ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}_2^0 \subset \mathcal{I}_2$ kapsamasının geçerli bulunmasıdır (Das vd. 2008).

Tanım 2.3.8 (V, d) bir metrik uzay ve $a = (a_{mn})$, X uzayında bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d(a_{mn}, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesi sağlanıyorsa $a = (a_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} a_{mn} = L$$

ile gösterilir. Eğer $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathcal{I}_2^0$ alınırsa, açık olarak ideal yakınsaklık Pringsheim anlamında yakınsaklık ile çakışır (Das vd. 2008).

3. İNVARYANT YAKISAKLIK ve İNVARYANT DENKLİK TİPLERİ

Bu kısımda, öncelikle tek indisli dizilerde invaryant limit, invaryant yakınsaklık ve asimptotik invaryant denklik tanımları ile bazı özellikleri verilecektir.

3.1. Tek Dizilerde İnvaryant Yakınsaklık ve İnvaryant Denklik Tipleri

Tanım 3.1.1 L, ℓ_∞ sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı lineer bir fonksiyonel olsun. Eğer L lineer fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahip ise bir *Banach limiti* adını alır.

(i) $n = 1, 2, ...$ için $a_n \geq 0 \Rightarrow L(a_n) \geq 0$,

(ii) $L(e) = 1$, $e = (1, 1, \dots)$,

(iii) $L(T_{a_n}) = L(a_n)$.

Burada T operatörü $(T_{a_n}) = a_{n+1}$ şeklinde tanımlanmış olan kaydırma operatörüdür (Lorentz 1948).

Tanım 3.1.2 (İnvaryant Limit) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü her m, n pozitif tamsayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde birebir bir dönüşüm olsun. Sürekli bir

$$\phi : \ell_\infty \to \mathbb{R}$$

lineer fonksiyoneline aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde *invaryant limit* veya σ-*limit* denir.

(i) $n = 1, 2, ...$ için $(a_n) \geq 0 \Rightarrow \phi(a_n) \geq 0$,

(ii) $\phi(e) = 1$, $e = (1, 1, \dots)$,

(iii) Her $(a_n) \in \ell_\infty$ için $\phi(a_{\sigma(n)}) = \phi(a_n)$.

Özel olarak $\sigma(n) = n + 1$ olması halinde, ϕ bir Banach limiti olur (Schaefer 1972).

Tanım 3.1.3 İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı diziye invaryant yakınsak veya σ-yakınsak dizi denir. σ-yakınsak dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir (Schaefer 1972).

İnvaryant yakınsaklığın başka bir tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.1.4 $a = (a_k)$ dizisi için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma^k(m)} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $a = (a_k)$ dizisi L sayısına invaryant yakınsaktır denir (Schaefer 1972).

Tanım 3.1.5 $a = (a_k)$ dizisi için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{\sigma^k(m)} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $a = (a_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir (Mursaleen 1983).

Tanım 3.1.6 $a = (a_k)$ bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{\sigma^k(m)} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $a = (a_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-invaryant yakınsaktır* denir (Mursaleen ve Edely 2009).

Tanım 3.1.7 $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$s_k = \min_n |K \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), ..., \sigma^k(n)\}|$$

ve

$$S_k = \max_n |K \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), ..., \sigma^k(n)\}|$$

olsun. Eğer

$$\underline{\mathcal{V}}(K) = \lim_{k\to\infty} \frac{s_k}{k} \quad \text{ve} \quad \overline{\mathcal{V}}(K) = \lim_{k\to\infty} \frac{S_k}{k}$$

limitleri mevcut ise, bu limitlere sırasıyla K kümesinin alt σ-düzgün yoğunluğu ve üst σ-düzgün yoğunluğu denir.

Eğer

$$\underline{\mathcal{V}}(K) = \overline{\mathcal{V}}(K)$$

eşitliği mevcut ise, bu durumda

$$\mathcal{V}(K) = \underline{\mathcal{V}}(K) = \overline{\mathcal{V}}(K)$$

olup, K kümesinin σ-düzgün yoğunluğu olarak adlandırılır.

$\mathcal{V}(K) = 0$ şartını sağlayan tüm $K \subseteq N$ kümelerinin sınıfı $\mathcal{I}_\sigma$ ile gösterilir (Nuray vd. 2011).

Tanım 3.1.8 Her $\beta > 0$ için

$$B_\beta = \{n : |a_n - L| \geq \beta\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

yani, $\mathcal{V}(B_\beta) = 0$ ise, $a = (a_n)$ dizisi L ye $\mathcal{I}_\sigma$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_\sigma - \lim a_n = L$ ile gösterilir (Nuray vd. 2011).

Şimdi tek indisli küme dizileri için invaryant yakınsaklık ve invaryant denklik tipleri not edilecektir.

Tanım 3.1.9 Eğer her bir $v \in V$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(v, C_{\sigma^i(m)}) = \rho(v, C)$$

limiti mevcut ise, $\{C_i\}$ dizisi C ye Wijsman invaryant yakınsaktır denir (Pancaroğlu ve Nuray 2013).

Tanım 3.1.10 $0 < p < \infty$ alalım. Eğer her bir $v \in V$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left|\rho(v, C_{\sigma^i(m)}) - \rho(v, C)\right| = 0$$

limiti mevcut ise, $\{C_i\}$ dizisi C ye Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır denir (Pancaroğlu ve Nuray 2013).

Tanım 3.1.11 Eğer her $\beta > 0$ ve her bir $v \in V$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{i \leq n : |\rho(v, C_{\sigma^i(m)}) - \rho(v, C)| \geq \beta\}\right| = 0,$$

limiti mevcut ise, bir $\{C_i\}$ dizisi C ye Wijsman invaryant istatistiksel yakınsaktır denir (Pancaroğlu ve Nuray 2013).

Tanım 3.1.12 Her bir $v \in V$ için

$$\rho(v, C_i) > 0 \text{ ve } \rho(v, D_i) > 0$$

olacak şekilde boştan farklı kapalı $C_i, D_i \subseteq X$ alt kümelerini alalım. Eğer her bir $v \in V$ için

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\rho(v, C_i)}{\rho(v, D_i)} = 1$$

limiti mevcut ise, $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine Wijsman asimptotik denk diziler denir ve

$$C_i \sim D_i$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray 2013).

Tanım 3.1.13 $\rho(v; C_i, D_i)$ terimi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\rho(v; C_i, D_i) = \begin{cases} \dfrac{\rho(v, C_i)}{\rho(v, D_i)}, & v \notin C_i \cup D_i \\ L, & v \in C_i \cup D_i. \end{cases}$$

(Ulusu ve Gülle 2019).

Tanım 3.1.14 Eğer her bir $v \in V$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho(v; C_{\sigma^i(m)}, D_{\sigma^i(m)}) = L$$

limiti mevcut ise, bu durumda $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine L katlı Wijsman asimptotik invaryant denk diziler denir ve

$$C_i \overset{WV_\sigma^L}{\sim} D_i$$

ile gösterilir (Pancaroğlu vd. 2013).

Tanım 3.1.15 Her $\beta > 0$ ve her $v \in V$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ i \le n : |\rho(v; C_{\sigma^i(m)}, D_{\sigma^i(m)}) - L| \ge \beta \} \right| = 0$$

limiti mevcut ise, bu durumda $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine L katlı Wijsman asimptotik invaryant istatistiksel denk diziler denir ve

$$C_i \overset{WS_\sigma^L}{\sim} D_i$$

biçiminde gösterilir (Pancaroğlu vd. 2013).

3.2. Çift Dizilerde İnvaryant Yakınsaklık ve İnvaryant Denklik Tipleri

Bu kısımda çift indisli dizilerde invaryant limit, invaryant yakınsaklık ve asimptotik invaryant denklik tanımları ile bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.2.1 $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve

$$s_{mn} = \min_{k,j} |K \cap \{(\sigma(k), \sigma(j)), (\sigma^2(k), \sigma^2(j)), ..., (\sigma^m(k), \sigma^n(j))\}|$$

ve

$$S_{mn} = \max_{k,j} |K \cap \{(\sigma(k), \sigma(j)), (\sigma^2(k), \sigma^2(j)), ..., (\sigma^m(k), \sigma^n(j))\}|$$

olsun. Eğer

$$\underline{V_2}(K) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{s_{mn}}{mn} \text{ ve } \overline{V_2}(K) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{S_{mn}}{mn}$$

limitleri mevcut ise, bu limitlere K kümesinin sırasıyla bir *alt ve üst σ-düzgün yoğunluğu* denir. Eğer $\underline{V_2}(K)$=$\overline{V_2}(K)$ eşitliği varsa, bu durumda

$$V_2(K) = \underline{V_2}(K) = \overline{V_2}(K)$$

ifadesine K kümesinin *σ-düzgün yoğunluğu* denir.

$V_2(K) = 0$ eşitliğini sağlayan tüm $K \subseteq N \times N$ kümelerinin sınıfı $\mathcal{I}_2^\sigma$ ile gösterilir (Tortop ve Dündar 2018).

Tanım 3.2.2 Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |a_{mn} - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2^\sigma,$$

yani

$$V_2(K(\varepsilon)) = 0$$

oluyorsa, bu durumda $a = (a_{mn})$ çift dizisi L ye *$\mathcal{I}_2$-invaryant yakınsak veya $\mathcal{I}_2^\sigma$-yakınsaktır* denir. Bu yakınsaklık

$$\mathcal{I}_2^\sigma - \lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = L \text{ veya } a_{mn} \to L(\mathcal{I}_2^\sigma)$$

biçiminde gösterilir.

Bütün $\mathcal{I}_2$-invaryant yakınsak çift dizilerin kümesi $\mathfrak{I}_2^\sigma$ ile gösterilir (Dündar vd. 2018).

Tanım 3.2.3 Eğer s, t ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,j=1,1}^{m,n} |a_{\sigma^k(s),\sigma^j(t)} - L| = 0$$

limiti mevcut ise, bu durumda $a = (a_{kj})$ çift dizisi L ye *kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir ve

$$a_{kj} \to L([V_\sigma^2])$$

biçiminde gösterilir (Dündar vd. 2018).

Tanım 3.2.4 $0 < p < \infty$ olmak üzere, eğer s, t ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,j=1,1}^{m,n} |a_{\sigma^k(s),\sigma^j(t)} - L|^p = 0,$$

limiti mevcut ise, bu durumda $a = (a_{kj})$ çift dizisi L ye *p-kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir ve

$$a_{kj} \to L([V_\sigma^2]_p)$$

biçiminde gösterilir.

Tüm p-kuvvetli invaryant yakınsak çift dizilerin kümesi $[V_\sigma^2]_p$ ile gösterilir (Dündar vd. 2018).

Tanım 3.2.5 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizileri için eğer

$$P - \lim_{k,l} \frac{a_{kl}}{b_{kl}} = 1$$

limiti mevcut ise, bu dizilere *P-asimptotik denk diziler* denir ve

$$a \sim^P b$$

ile gösterilir (Hazarika ve Kumar 2013).

Tanım 3.2.6 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{m,n} \frac{1}{mn} \left| \left\{ k \le m, l \le n : \left| \frac{a_{kl}}{b_{kl}} - L \right| \right\} \right| = 0$$

şartı sağlanıyorsa, bu dizilere L katlı *asimptotik istatistiksel denk diziler* denir ve

$$a \sim^{S^L} b$$

ile gösterilir.

Eğer $L = 1$ eşitliği varsa, bu durumda $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ dizilerine kısaca *asimptotik istatistiksel denk diziler* denir (Hazarika ve Kumar 2013).

Tanım 3.2.7 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \left|\frac{a_{kl}}{b_{kl}} - L\right| > \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_2$$

şartı sağlanıyorsa bu dizilere L *katlı asimptotik* $\mathcal{I}_2$*-denk diziler* denir ve

$$a \sim^{\mathcal{I}_2^L} b$$

ile gösterilir.

Eğer $L = 1$ eşitliği varsa, bu durumda $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ dizilerine kısaca *asimptotik* $\mathcal{I}_2$*-denk diziler* denir (Ulusu ve Dündar 2018).

4. KÜME DİZİLERİNİN ASİMPTOTİK $\mathcal{I}_\sigma$-DENKLİĞİ

Bu bölümde, Ulusu ve Gülle (2019) tarafından yapılan makalede tek indisli küme dizileri için verilen tanım, teorem ve lemmaları ispatlarıyla birlikte not edeceğiz. Bu bağlamda, öncelikle Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik tanımı verilerek, Wijsman asimptotik invaryant denklik ile ilişkisi incelenecektir. Sonra Wijsman asimptotik kuvvetli p-invaryant denklik tanımı verilip, Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ile ilişkisini inceleyen teoremler ispatlarıyla verilecektir. Daha sonra Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ile Wijsman asimptotik istatistiksel invaryant denklik arasındaki çift taraflı gerektirme verilecektir. Son olarak, Wijsman asimptotik $\mathcal{I}^*$-invaryant denklik tanımı verilip, Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ile çift taraflı gerektirme ilişkisi not edilecektir.

4.1. Küme Dizilerinde Asimptotik İdeal İnvaryant Denklik ve Özellikleri

Çalışma boyunca (V, d) bir metrik uzay ve C, C_i, D_i, V nin boştan farklı kapalı alt kümeleri olarak alınacaktır. Ayrıca, $\rho(v, C)$, $\rho(v, C_i)$ ve $\rho(v; C_i, D_i)$ yerine kısaca sırasıyla $\rho_v(C)$, $\rho_v(C_i)$ ve $\rho_v(C_i, D_i)$ alınacaktır.

Tanım 4.1.1 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerini alalım. Eğer her $\gamma > 0$ ve her bir $v \in V$ için

$$B^{\sim}_{\gamma,v} = \{i : |\rho_v(C_i, D_i) - L| \geq \gamma\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait yani,

$$\mathcal{V}(B^{\sim}_{\gamma,v}) = 0$$

ise, bu durumda $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine L katlı Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denk veya Wijsman asimptotik $\mathcal{I}_\sigma$-denktir denir. Bu durum

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

biçiminde gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise, $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine kısaca Wijsman asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denktir denir.

Tüm Wijsman asimptotik $\mathcal{I}_\sigma$-denk dizilerin kümesi $W^L_{\mathcal{I}_\sigma}$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.2 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$\rho_v(C_i) = \mathcal{O}(\rho_v(D_i))$$

olsun. Eğer

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

ise bu durumda

$$C_i \overset{WV^L_\sigma}{\to} D_i$$

dir.

İspat: Keyfi $m, n \in \mathbb{N}$ olsun ve $\gamma > 0$ verilsin. Şimdi

$$T_v(m,n) = \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L \right|$$

alınsın. Bu durumda, her bir $v \in V$ için

$$T^1_v(m,n) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{i=1 \\ |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma}}^{m} |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|$$

ve

$$T^2_v(m,n) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{i=1 \\ |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| < \gamma}}^{m} |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|$$

olmak üzere

$$T_v(m,n) \leq T^1_v(m,n) + T^2_v(m,n)$$

elde edilir. Her bir $v \in V$ ve her $n = 1, 2, ...$ için

$$T^2_v(m,n) < \gamma$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\rho_v(C_i) = \mathcal{O}(\rho_v(D_i))$$

olduğundan, bir $R > 0$ vardır öyleki her bir $v \in V$ için

$$|\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \leq R, \;\; (i = 1, 2, ...; n = 1, 2, ...)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} T_v^1(m,n) &\leq \frac{R}{m}|\{1 \leq i \leq m : |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma\}| \\ &\leq R\frac{\max_n |1 \leq i \leq m : |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma|}{m} \\ &= R\frac{S_m}{m} \end{aligned}$$

olup, böylece hipotezimizden dolayı

$$C_i \overset{WV_\sigma^L}{\rightarrow} D_i$$

elde edilir.

Tanım 4.1.3 $0 < p < \infty$ alalım. Her bir $v \in V$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p = 0$$

sağlanıyorsa $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine L katlı Wijsman asimptotik kuvvetli p-invaryant denktir denir. Bu durumda

$$C_i \overset{[WV_\sigma^L]_p}{\rightarrow} D_i$$

yazılır.

Eğer $L = 1$ ise, $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine kısaca Wijsman asimptotik kuvvetli p-invaryant denktir denir.

Teorem 4.1.4 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için eğer

$$C_i \overset{[WV_\sigma^L]_p}{\rightarrow} D_i$$

ise, bu durumda

$$C_i \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L}{\rightarrow} D_i$$

olur.

İspat: $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$C_i \overset{[WV_\sigma^L]_p}{\to} D_i$$

olsun ve $\gamma > 0$ verilsin. Her bir $v \in V$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p &\geq \sum_{i=1}^{m} |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p \\
&\geq \gamma^p |\{1 \leq i \leq m : |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma\}| \\
&\geq \gamma^p \max_n |\{1 \leq i \leq m : |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma\}|
\end{aligned}$$

yazıbilir ve böylece tüm n ler için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p &\geq \gamma^p \frac{\max_n |1 \leq i \leq m : |\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma|}{m} \\
&= \gamma^p \frac{S_m}{m},
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} = 0$$

olmasını sağlar ve sonuç olarak

$$C_i \overset{W_{I_\sigma}^L}{\to} D_i$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$\rho_v(C_i) = \mathcal{O}(\rho_v(D_i))$$

olsun. Eğer

$$C_i \overset{W_{I_\sigma}^L}{\to} D_i$$

ise, bu durumda

$$C_i \overset{[WV_\sigma^L]_p}{\to} D_i$$

olur.

İspat: $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$\rho_v(C_i) = \mathcal{O}(\rho_v(D_i))$$

ve $\gamma > 0$ verilsin. Ayrıca kabul edelim ki

$$C_i \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L}{\to} D_i$$

olsun. Bu durumda, kabulümüzden

$$\mathcal{V}(B_{\gamma,v}^{\sim}) = 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\rho_v(C_i) = \mathcal{O}(\rho_v(D_i))$$

olduğundan bir $R > 0$ vardır öyleki her bir $v \in V$ için

$$|\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \leq R, \ (i = 1, 2, ...; n = 1, 2, ...)$$

elde edilir. Bu durumda, her bir $v \in V$ ve tüm n ler için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p \\
&\quad + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p \\
&\leq R\frac{\max_n |1 \leq i \leq m : |\rho_z(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L| \geq \gamma|}{m} \\
&\quad + \gamma^p \\
&\leq R\frac{S_m}{m} + \gamma^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her bir $v \in V$ için

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|\rho_v(C_{\sigma^i(n)}, D_{\sigma^i(n)}) - L|^p = 0$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 ü birlikte düşünülürse aşağıdaki sonuç veribilir:

Sonuç 4.1.6 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$\rho_v(C_i) = \mathcal{O}(\rho_v(D_i))$$

olsun. Bu durumda,

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

olması için gerek ve yeter şart

$$C_i \overset{[WV^L_\sigma]_p}{\to} D_i$$

olmasıdır.

Şimdi $W^L_{\mathcal{I}_\sigma}$ ile WS^L_σ arasındaki ilişkiyi veren teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 4.1.7 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

olması için gerek ve yeter şart

$$C_i \overset{WS^L_\sigma}{\to} D_i$$

olmasıdır.

Tanım 4.1.8 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine L katlı Wijsman asimptotik $\mathcal{I}^*$-invaryant denk veya Wijsman asimptotik $\mathcal{I}^*_\sigma$-denktir denir gerek ve yeter şart bir

$$M = \{m_1 < m_2 < ... < m_i < ...\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_\sigma)$$

kümesi vardır öyleki her bir $v \in V$ için

$$\lim_{i\to\infty} \rho_v(C_{m_i}, D_{m_i}) = L$$

olmasıdır. Bu durum

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}^*_\sigma}}{\to} D_i$$

biçiminde gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise, $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizilerine kısaca Wijsman asimptotik $\mathcal{I}^*_\sigma$-denktir denir.

Teorem 4.1.9 $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için eğer

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}^*_\sigma}}{\to} D_i$$

ise, bu durumda

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

dir.

İspat: $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}^*_\sigma}}{\to} D_i$$

olsun. Bu durumda bir $H \in \mathcal{I}_\sigma$ kümesi vardır öyleki

$$M = \mathbb{N} \backslash H = \{m_1 < m_2 < ... < m_i < ...\}$$

ve her $v \in V$ için

$$\lim_{i \to \infty} \rho_v(C_{m_i}, D_{m_i}) = L \tag{4.1}$$

dir. $\gamma > 0$ verilsin. (4.1) eşitliğinden, bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $i > i_0$ için

$$|\rho_v(C_{m_i}, D_{m_i}) - L| < \gamma$$

sağlanır. Böylece, her $\gamma > 0$ ve her bir $v \in V$ için

$$\{i \in \mathbb{N} : |\rho_v(C_{m_i}, D_{m_i}) - L| \geq \gamma\} \subset H \cup \{m_1 < m_2 < ... < m_{i_0}\} \tag{4.2}$$

olduğu açıktır. $\mathcal{I}_\sigma$ uygun ideal olduğundan (4.2) nin sağ tarafındaki küme $\mathcal{I}_\sigma$ aittir. Buradan da

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

olduğu anlaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer $\mathcal{I}_\sigma$, (AP) özelliğine sahip ise, Teorem 4.1.9 in tersi de sağlanır.

Teorem 4.1.10 $\mathcal{I}_\sigma$ ideali (AP) özelliğine sahip olsun. $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ dizileri için eğer

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

ise, bu durumda

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}^*_\sigma}}{\to} D_i$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $\mathcal{I}_\sigma$ ideali (AP) özelliğini sağlasın ve

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}_\sigma}}{\to} D_i$$

olsun. Bu durumda, $\gamma > 0$ ve her $v \in V$ için

$$\{i : |\rho_v(C_i, D_i) - L| \geq \gamma\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

olur. Şimdi

$$X_1 = \{i : |\rho_v(C_i, D_i) - L| \geq 1\}$$

ve her $n \geq 2$ için $(n \in \mathbb{N})$

$$X_n = \left\{i : \frac{1}{n} \leq |\rho_v(C_i, D_i) - L| < \frac{1}{n-1}\right\}$$

alalım. Açık olarak her $v \in V$ ve $i \neq j$ için

$$X_i \cap X_j = \emptyset$$

dir. (AP) şartına göre bir $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyleki sonlu $j \in \mathbb{N}$ için $X_j \Delta Y_j$ sonlu kümelerdir ve

$$Y = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_j\right) \in \mathcal{I}_\sigma$$

dir. İspat için $G = \mathbb{N} \backslash Y$ ve her $v \in V$ için

$$\lim_{i\to\infty} \rho_v(C_i, D_i) = L \tag{4.3}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\delta > 0$ alalım. $\dfrac{1}{n+1} < \delta$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Böylece her $v \in V$ için

$$\{i : |\rho_v(C_i, D_i) - L| \geq \delta\} \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} X_j$$

elde edilir. $X_i \cap X_j$ $(j = 1, 2, ..., n+1)$ sonlu kümeler olduğundan, $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} Y_j\right) \cap \{i : i > i_0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} X_j\right) \cap \{i : i > i_0\} \tag{4.4}$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $i > i_0$ ve $i \notin Y$ ise, bu durumda

$$i \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} Y_j$$

ve (4.4) gereğince

$$i \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} X_j$$

elde edilir. Böylece her bir $v \in V$ için

$$|\rho_v(C_i, D_i) - L| < \frac{1}{n+1} < \delta$$

ve böylece (4.3) sağlanır. Sonuç olarak

$$C_i \overset{W^L_{\mathcal{I}^*_\sigma}}{\rightarrow} D_i$$

elde edilir.

5. ÇİFT DİZİLERİN ASİMPTOTİK İDEAL İNVARYANT DENKLİĞİ

Bu bölümde, Dündar vd. (2021) tarafından yapılan makalede çift indisli diziler için verilen tanım, teorem ve lemmaları ispatlarıyla birlikte not edeceğiz. Bu anlamda, öncelikle asimptotik invaryant denklik ve asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denklik tanımları verilerek, bu iki kavram arasındaki ilişki incelenecektir. Daha sonra kuvvetli asimptotik invaryant denklik ve p-kuvvetli asimptotik invaryant denklik tanımları tanıtılıp, p-kuvvetli asimptotik invaryant denklik ile asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denklik arasındaki çift taraflı gerektirme ilişkisi verilecektir. Son olarak asimptotik S_2^σ-denklik tanımı verilip, asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denklik arasındaki ilişki incelenecektir.

5.1. Çift Dizilerde Asimptotik İdeal İnvaryant Denklik ve Özellikleri

Tanım 5.1.1 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizilerini alalım. Eğer s ve t ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,l=1,1}^{m,n} \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} = L$$

limiti mevcut ise, a ve b çift dizilerine L katlı asimptotik invaryant denk veya asimptotik σ_2-denktir denir. Bu denklik

$$a \overset{V_{2(L)}^\sigma}{\sim} b$$

ile gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise, $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ çift dizilerine kısaca asimptotik σ_2-denktir denir.

Tanım 5.1.2 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizilerini alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \left|\frac{a_{kl}}{b_{kl}} - L\right| > \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_2^\sigma,$$

yani,

$$V_2(A_\varepsilon) = 0$$

sağlanıyorsa, a ve b çift dizilerine L katlı asimptotik $\mathcal{I}_2^{\sigma}$-denktir denir. Bu denklik

$$a \overset{\mathcal{I}_{2(L)}^{\sigma}}{\sim} b$$

ile gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ çift dizilerine kısaca asimptotik $\mathcal{I}_2^{\sigma}$-denktir denir.

Tüm L katlı asimptotik $\mathcal{I}_2^{\sigma}$-denk dizilerin kümesi $\mathfrak{I}_{2(L)}^{\sigma}$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.3 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ çift dizileri sınırlı olsun. Eğer a ve b çift dizileri L katlı asimptotik $\mathcal{I}_2^{\sigma}$-denk diziler ise, bu durumda a ve b çift dizileri L katlı σ_2-asimptotik denk dizilerdir.

İspat: Keyfi $m, n, s, t \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. Şimdi

$$u(m,n,s,t) = \left| \frac{1}{mn} \sum_{k,l=1,1}^{m,n} \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right|$$

olduğunu gösterelim.

$$u^{(1)}(m,n,s,t) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{k,l=1,1 \\ \left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L\right| \geq \varepsilon}}^{m,n} \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right|$$

ve

$$u^{(2)}(m,n,s,t) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{k,l=1,1 \\ \left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L\right| < \varepsilon}}^{m,n} \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right|$$

olmak üzere

$$u(m,n,s,t) \leq u^{(1)}(m,n,s,t) + u^{(2)}(m,n,s,t)$$

olduğu açıktır. Bu durumda, her $s, t = 1, 2, ...$ için

$$u^{(2)}(m,n,s,t) < \varepsilon$$

elde edilir. $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ sınırlı diziler olduğundan öyle bir $M > 0$ vardır öyleki $k, l = 1, 2, ...$ ve $s, t = 1, 2, ...$ için

$$\left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| \leq M$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu durumda, bu eşitsizlik

$$\begin{aligned} u^{(1)}(m,n,s,t) &\leq \frac{M}{mn} \left| \left\{ 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ l \leq n : \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq M \frac{\max\limits_{s,t} \left| \left\{ 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ l \leq n : \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{mn} \\ &= M \frac{S_{mn}}{mn}, \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Böylece, a ve b çift dizileri L katlı σ_2-asimptotik denk dizilerdir.

Teorem 5.1.3 ün tersi sağlanmaz. Örneğin a ve b çift dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \begin{cases} 2 \ , & k+l \text{ bir çift sayı ise} \\ \\ 0 \ , & k+l \text{ bir tek sayı ise .} \end{cases} \\ \\ b_{kl} &= 1. \end{aligned}$$

$\sigma(m) = m + 1$ ve $\sigma(n) = n + 1$ olduğunda bu diziler asimptotik σ_2-denk fakat asimptotik $\mathcal{I}_2^\sigma$-denk değildir.

Tanım 5.1.4 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizileri için eğer s ve t ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,l=1,1}^{m,n} \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| = 0$$

ise, a ve b çift dizilerine L katlı kuvvetli asimptotik invaryant denk veya kuvvetli asimptotik σ_2-denktir denir. Bu denklik

$$a \overset{[V_{2(L)}^\sigma]}{\sim} b$$

ile gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise, a ve b çift dizilerine kısaca kuvvetli asimptotik σ_2-denktir denir.

Tanım 5.1.5 $0 < p < \infty$ olsun. $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizileri için eğer s ve t ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,l=1,1}^{m,n} \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right|^p = 0$$

ise, a ve b çift dizilerine L katlı p-kuvvetli asimptotik invaryant denk veya p-kuvvetli asimptotik σ_2-denktir denir. Bu denklik

$$a \overset{[V_{2(L)}^{\sigma}]_p}{\sim} b$$

ile gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise, a ve b çift dizilerine kısaca p-kuvvetli asimptotik σ_2-denktir denir.

Tüm L katlı p-kuvvetli asimptotik σ_2-denk dizilerinin kümesi $[\mathcal{V}_{2(L)}^{\sigma}]_p$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.6 $0 < p < \infty$ olsun. $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizileri için eğer

$$a \overset{[V_{2(L)}^{\sigma}]_p}{\sim} b$$

ise, bu durumda

$$a \overset{\mathcal{I}_{2(L)}^{\sigma}}{\sim} b$$

dir.

İspat: $0 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$ ve

$$a \overset{[V_{2(L)}^{\sigma}]_p}{\sim} b$$

olsun. Bu durumda, her $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1,1}^{m,n} \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right|^p &\geq \sum_{\substack{k,l=1,1 \\ \left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L\right| \geq \varepsilon}}^{m,n} \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| \\
&\geq \varepsilon^p \left| \left\{ 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ l \leq n : \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\geq \varepsilon^p \max_{s,t} \left| \left\{ 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ l \leq n : \left| \frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}$$

ve her $s, t = 1, 2....$ için

$$\frac{1}{mn}\sum_{k,l=1,1}^{m,n}\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|^p \geq \varepsilon^p \frac{\max_{s,t}\left|\left\{1\leq k\leq m, 1\leq\ l\leq n : \left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{mn}$$

$$= \varepsilon^p \frac{S_{mn}}{mn}$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S_{mn}}{mn}=0$$

olmasını gerektirir ki ve böylece

$$a \overset{\mathcal{I}^{\sigma}_{2(L)}}{\sim} b$$

elde edilir.

Teorem 5.1.7 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ negatif olmayan çift dizileri için $a, b \in \mathcal{M}_u$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$a \overset{\mathcal{I}^{\sigma}_{2(L)}}{\sim} b$$

ise, bu durumda

$$a \overset{[V^{\sigma}_{2(L)}]_p}{\sim} b$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $a, b \in \mathcal{M}_u$ ve $a \overset{\mathcal{I}^{\sigma}_{2(L)}}{\sim} b$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Kabulümüzden

$$V_2(A_\varepsilon) = 0$$

olduğu açıktır. a ve b nin sınırlılığından bir $M > 0$ vardır öyleki $k, l = 1, 2, ...$ ve $s, t = 1, 2, ...$ için

$$\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|\leq M$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda her $s,t\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mn}\sum_{k,l=1,1}^{m,n}\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|^p &= \frac{1}{mn}\sum_{\substack{k,l=1,1\\ \left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|\geq\varepsilon}}^{m,n}\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|^p \\
&\quad+\frac{1}{mn}\sum_{\substack{k,l=1,1\\ \left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|<\varepsilon}}^{m,n}\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|^p \\
&\leq M\frac{\max_{s,t}\left|\left\{1\leq k\leq m, 1\leq\ l\leq n:\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{mn} \\
&\quad+\varepsilon^p \\
&\leq M\frac{S_{mn}}{mn}+\varepsilon^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece s ve t ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k,l=1,1}^{m,n}\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|^p=0$$

olduğu anlaşılır ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.8 $0<p<\infty$ için

$$\mathfrak{I}^{\sigma}_{2(L)}\cap\mathcal{M}_u=[\mathcal{V}^{\sigma}_{2(L)}]_p\cap\mathcal{M}_u$$

dir.

İspat: Bu teorem Teorem 5.1.6 ve Teorem 5.1.7 nin bir sonucudur.

Şimdi çift diziler için asimptotik S^{σ}_2-denklik tanımı ve asimptotik $\mathcal{I}^{\sigma}_2$-denklik ile asimptotik S^{σ}_2-denklik arasındaki ilişkiyi inceleyen teorem ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 5.1.9 $a=(a_{kl})$ ve $b=(b_{kl})$ negatif olmayan çift diziler için eğer her $\varepsilon>0$ için $s,t=1,2,...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\left\{k\leq m, l\leq n:\left|\frac{a_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}{b_{\sigma^k(s),\sigma^l(t)}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

limiti mevcut ise, a ve b çift dizilerine L katlı asimptotik S_2^{σ}-denktir denir. Bu denklik

$$a \overset{S_{2(L)}^{\sigma}}{\sim} b$$

biçiminde gösterilir.

Eğer $L = 1$ ise, $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ çift dizilerine kısaca asimptotik S_2^{σ}-denktir denir.

Teorem 5.1.10 $a = (a_{kl})$ ve $b = (b_{kl})$ çift dizileri L katlı asimptotik $\mathcal{I}_2^{\sigma}$-denktir gerek ve yeter şart bu diziler L katlı asimptotik S_2^{σ}-denktir.

6. KAYNAKLAR

Altay B, 2002, Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 72s, Malatya.

Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, Ankara.

Beer G, 1985, On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 31, 421–432.

Beer G, 1994, Wijsman convergence: A survey, Set-Valued Varitional Analysis, 2, 77–94.

Choudhary B, Nanda S, 1989, Functional Analysis with Applications, John Wiley-Sons, NewYork.

Das P, Kostyrko P, Wilczyński W, Malik P, 2008, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergence of double sequences, Mathematica Slovaca, 58(5), 605–620.

Dündar E, 2010, Çift Dizilerin $\mathcal{I}$-yakınsaklığı Üzerine, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 69s, Malatya.

Dündar E, Ulusu U, Nuray F, 2018, On ideal invariant convergence of double sequences and some properties, Creative Mathematics and Informatics, 27(2), 161–169.

Dündar E, Ulusu U, Nuray F, 2021, On asymptotically ideal invariant equivalence of double sequences, Thai Journal of Mathematics (Basımda).

Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241–244.

Freedman A R, Sember J J, 1981, Densities and summability, Pacific Journal of Mathematics, 95, 293–305.

Fridy J A, 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301–313.

Hazarika B, Kumar V, 2013, On asymptotically double lacunary statistical equivalent sequences in ideal context, Journal of Inequlities and Applications, 543, 1–15.

Hazarika B, 2015, On asymptotically ideal equivalent sequences, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 23, 67–72.

Kişi Ö, Nuray F, 2013, On $\mathcal{S}_{\lambda}^{L}(\mathfrak{I})$-asymptotically statistical equivalence of sequences of sets, ISRN Mathematical Analysis, 2013, Article ID 602963, 6 pages, doi: 10.1155/2013/602693

Kostyrko P, Šalát T, Wilczyński W, 2000, $\mathcal{I}$-convergence, Real Analysis Exchange, 26, 669–686.

Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, Sleziak M, 2005, $\mathcal{I}$-convergence and Extermal $\mathcal{I}$-limits points, Mathematica Slovaca, 55, 443–464.

Kumar V, 2007, On $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^{*}$-convergence of double sequences, Mathematical Communications, 12, 171–181.

Lorentz G G, 1948, A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Mathematica, 80, 167–190.

Maddox I J, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Marouf M, 1993, Asymptotic equivalence and summability, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 16(4), 755–762.

Mursaleen M, 1979, On finite matrices and invariant means, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 10, 457–460.

Mursaleen M, 1983, Matrix transformation between some new sequences spaces, Houston Journal of Mathematics, 9, 505–509.

Mursaleen M, Edely O H H, 2009, On the invariant mean and statistical convergence, Applied Mathematics Letters, 22(11), 1700–1704.

Nuray F, Gök H, Ulusu U, 2011, $\mathcal{I}_{\sigma}$-convergence, Mathematical Communications, 16(2), 531–538.

Nuray F, Rhoades B E, 2012, Statistical convergence of sequences of sets, Fasciculi Mathematici, 49, 87–99.

Nuray F, Savaş E, 1994, Invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25(3), 267–274.

Pancaroğlu N, Nuray F, 2013, On invariant statistically convergence and lacunary invariant statistical convergence of sequences of sets, Progress in Applied Mathematics, 5(2), 23–29.

Pancaroğlu N, Nuray F, Savaş E, 2013, On asymptotically lacunary invariant statistical equivalent set sequence, AIP Conference Proceedings, 1558(1),780-781.

Pancaroğlu Akın N, Dündar E, Nuray F, 2019, Wisjman $\mathcal{I}$-invariant convergence of sequences of sets, Bulletion of Mathematical Analysis and Applications, 11(1), 1-9.

Patterson R. F, 2003, On asymptotically statistically equivalent sequences, Demostratio Mathematica, 36(1), 149–153.

Patterson R F, Savaş E, 2006, On asimptotically lacunary statistically equivalent sequences, Thai Journal of Mathematics, 4(2), 267–272.

Pringsheim A, 1900, Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, Mathematische Annalen, 53, 289–321.

Raimi R A, 1963, Invariant means and invariant matrix methods of summability, Duke Mathematical Journal, 30(1), 81–94.

Savaş E, 1989, Some sequence spaces involving invariant means, Indian Journal of Mathematics, 31, 1–8.

Savaş E, 1989, Strongly σ-convergent sequences, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 81, 295–300.

Savaş E, 2013, On $\mathcal{I}$-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences, Advances in Difference Equations, 111, 7 pages.

Savaş E, Nuray F, 1993, On σ-statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence, Mathematica Slovaca, 43(3), 309–315.

Schaefer P, 1972, Infinite matrices and invariant means, Proceedings of the American Mathematical Society, 36, 104–110.

Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et La convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.

Tortop Ş, Dündar E, 2018, Wijsman $\mathcal{I}_2$-invariant convergence of double sequences of sets, Journal of Inequalities and special Functions, 9(4), Pages 90–100.

Ulusu U, 2018, Asymptotically ideal invariant equivalence, Creative Mathematics and Informatics, 27(2), 215–220.

Ulusu U, Dündar E, 2018, Asymptotically lacunary $\mathcal{I}_2$-invariant equivalence, Journal of Inequalities and Special Functions, 9(4), 90–100.

Ulusu U, Dündar E, Nuray F, 2018, Lacunary $\mathcal{I}_2$-invariant convergence and some properties, International Journal of Analysis and Applications, 16(3), 317–327.

Ulusu U, Nuray F, 2013, On asymptotically lacunary statistical equivalent set sequences, Journal of Mathematics, 2013, 5 pages.

Ulusu U, Gülle E, 2019, Asymptotically $\mathcal{I}_\sigma$-equivalence of sequences of sets, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 23(5), 718–723.

Wijsman R A, 1964, Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, Bulletin American Mathematical Society, 70, 186–188.

Yamancı U, Gürdal M, 2015, On asymptotically generalized statistical equivalent double sequences via ideals, Electronics Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3(1), 89–96.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hasan YENİSARI
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bornova / 11.02.1986
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 05445695924 / hasanyenisari@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: İzmir 80. Yıl Anadolu Lisesi, (2000-2004)
Lisans	: Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2004-2009)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2018-2021)

Çalıştığı Kurum(lar)

: Milli Eğitim Bakanlığı, (2011-Devam Ediyor)