ASİMPTOTİK LACUNARY İDEAL İNVARYANT DENK DİZİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut NARTTÜRK

Danışman
Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASİMPTOTİK LACUNARY İDEAL İNVARYANT DENK DİZİLER

Umut NARTTÜRK

Danışman
Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Umut NARTTÜRK tarafından hazırlanan "Asimptotik Lacunary İdeal İnvaryant Denk Diziler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 01/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Uğur ULUSU

Başkan : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/07/2021

Umut NARTTÜRK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ASİMPTOTİK LACUNARY İDEAL İNVARYANT DENK DİZİLER

Umut NARTTÜRK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Uğur ULUSU

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihi gelişimi ve genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın daha anlaşılabilir olması için gerekli olduğunu düşündüğümüz bazı temel tanım ve notasyonlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, tek indisli reel sayı dizileri için bazı asimptotik lacunary denklik kavramları tanıtılarak, bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca, bu kavramların asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramı ile ilişkisinden de bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, tek indisli küme dizileri için Wijsman anlamında bazı asimptotik lacunary denklik kavramları tanıtılarak, bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca, bu kavramların Wijsman asimptotik lacunary invaryant denklik ve Wijsman asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramları ile ilişkisinden de bahsedilmiştir. Beşinci bölümde, çift indisli reel sayı dizileri için bazı asimptotik lacunary denklik kavramları tanıtılarak, bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2021, v + 32 sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik denklik, lacunary dizi, ideal yakınsaklık, invaryant yakınsaklık, küme dizisi, Wijsman yakınsaklık, çift indisli dizi.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

ASYMPTOTIC LACUNARY IDEAL INVARIANT EQUIVALENT SEQUENCES

Umut NARTTÜRK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Matematics

Supervisor: Assoc. Prof. Uğur ULUSU

This study consists of six chapters. In the first chapter, the historical development of the thesis subject and general literature information are given. In the second chapter, some basic definitions and notations that are necessary for the study to be more understandable are mentioned. In the third chapter, some concepts of asymptotic lacunary equivalence for single real number sequences are introduced and the relationships between these concepts are given. Also, the relationship between these concepts and the concept of asymptotic lacunary invariant statistical equivalence are examined. In the fourth chapter, some concepts of asymptotic lacunary equivalence in Wijsman sense for single set sequences are presented and the relationships between these concepts are given. Also, the relationship between these concepts with Wijsman asymptotic lacunary invariant equivalence and Wijsman asymptotic lacunary invariant statistical equivalence is mentioned. In the fifth chapter, some concepts of asymptotic lacunary equivalence for double set sequences are introduced and the relationships between these concepts are studied. In the last chapter, the references that used in this study are listed.

2021, v + 32 pages

Keywords: Asymptotic equivalence, lacunary sequence, ideal convergence, invariant convergence, set sequence, Wijsman convergence, double sequence.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı başta tez danışmanım sayın Doç. Dr. Uğur ULUSU olmak üzere, yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Umut NARTTÜRK
Afyonkarahisar, 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

(x_m)	Reel sayı dizisi
$\theta = \{j_s\}$	Lacunary dizi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
ℓ_∞	Sınırlı diziler kümesi
$\sigma^m(u)$	σ dönüşümünün u daki $m.$ ötelemesi
$\lvert\{A\}\rvert$	A kümesinin eleman sayısı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$2^{\mathbb{N}}$	Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
$x_m \sim y_m$	Asimptotik denk diziler
$\mathfrak{I}_{\sigma\theta}^{\lambda}$	λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk diziler sınıfı
$\left[\mathfrak{N}_{\sigma\theta}^{\lambda}\right]_r$	λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk diziler sınıfı
$\{E_m\}$	Küme dizisi
$\mu(y, E)$	y noktasının E kümesine uzaklığı
$E_m \overset{W}{\sim} F_m$	Wijsman anlamında asimptotik denk küme dizileri
$\mathcal{O}$	Büyük "O" fonksiyonu
(x_{mn})	Çift indisli reel sayı dizisi
$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$	Çift indisli lacunary dizi
$A \times B$	A ile B kümelerinin Kartezyen çarpımı
$x_{mn} \sim y_{mn}$	Çift indisli asimptotik denk diziler
$\mathfrak{I}_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}$	λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk çift indisli diziler sınıfı
ℓ_∞^2	Çift indisli sınırlı diziler kümesi
$\left[\mathfrak{N}_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}\right]_r$	λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk çift indisli diziler sınıfı

1. GİRİŞ

Matematik alanında uzaklık kavramı yardımıyla tanımlanan yakınsaklık, matematiksel analiz alanının temel kavramlarındandır. Özellikle toplanabilme teorisinde önemli uygulama ve araştırma alanları olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast (1951) ve Steinhaus (1951) in çalışmalarında eş zamanlı olarak verilmiş ve ilerleyen zamanlarda bu kavram üzerine çalışmalara Šalát (1980) ve Fridy (1985) nin çalışmaları öncülük etmiştir. Özellikle Fridy ve Orhan (1993) ın çalışmasında, lacunary dizi kavramı kullanılarak, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklık kavramıyla ilişkisi verilmiştir.

İnvaryant ortalama kavramı ve invaryant yakınsak diziler üzerine başta Raimi (1963), Schaefer (1972), Mursaleen (1979) olmak üzere, Savaş (1989), Mursaleen ve Edely (2009), Nuray vd. (2011) ve daha pek çok araştırmacı çalışmalar yapmıştır. Özellikle Savaş (1990) ın çalışmasında, lacunary dizi kavramı kullanılarak, lacunary kuvvetli invaryant yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Bunun ardından Savaş ve Nuray (1993), istatistiksel yakınsaklık kavramını da göz önünde bulundurarak, lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramını vermiştir. Son zamanlarda Pancaroğlu ve Nuray (2013b), lacunary invaryant toplanabilme kavramı ve $[V_{\sigma\theta}]_q$ dizi uzayı üzerine çalışmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının önemli bir genelleştirmesi olan ve temelde doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin altkümelerine dayanan bir ideal yapısıyla ilişkili olarak tanımlanan ideal yakınsaklık kavramı da ilk olarak Kostyrko vd. (2000) nin çalışmasında verilmiş ve bu kavram üzerine de pek çok araştırmacı çalışmalar yapmıştır. Özellikle Ulusu ve Nuray (2020), çalışmalarında doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin bir E altkümesinin lacunary invaryant düzgün yoğunluğu kavramını tanıtmış ve bu kavramla ilişkili olarak lacunary ideal invaryant yakınsaklık kavramını vermişlerdir.

Marouf (1993) asimptotik denk diziler ve asimptotik regüler matrisler için tanımlar vermiştir. Bundan bir süre sonra reel dizilerin asimptotik denkliği kavramı istatistiksel yakınsaklık, lacunary dizi, invaryant yakınsaklık, ideal yakınsaklık vb. kavramları kullanılarak başta Patterson (2003a), Patterson ve Savaş (2006), Savaş ve Patterson (2006), Savaş (2013) ve Ulusu (2018) olmak üzere daha pek çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

Reel diziler için yakınsaklık kavramları pek çok araştırmacı tarafından küme dizilerine transfer edilmiştir. Bu tez çalışmasında küme dizileri için Wijsman anlamında yakınsaklık kavramı göz önüne alınmıştır. Wijsman anlamında yakınsaklık kavramı Wijsman (1964, 1966) tarafından tanıtılmış ve bu kavram üzerine başta Beer (1985,1994) ve Baronti ve Papini (1986) olmak üzere istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Nuray ve Rhoades (2012), lacunary dizi kavramı kullanılarak Ulusu ve Nuray (2012), invaryant yakınsaklık kavramı kullanılarak Pancaroğlu ve Nuray (2013a), ideal yakınsaklık kavramı kullanılarak Kişi ve Nuray (2013) ve daha pek çok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Reel diziler için asimptotik denklik kavramları ilk olarak Ulusu ve Nuray (2013) tarafından yapılan çalışmada istatistiksel yakınsaklık ve lacunary dizi kavramları da kullanılarak küme dizileri için asimptotik denklik kavramlarına transfer edilmiştir. Daha sonra Pancaroğlu vd. (2013) ve Kişi vd. (2013) sırasıyla küme dizileri için asimptotik invaryant denklik ve asimptotik ideal denklik kavramları üzerine çalışmıştır.

Çift indisli diziler için yakınsaklık kavramının Pringsheim (1900) tarafından tanıtılmasından uzun süre sonra bu kavram başta Mursaleen ve Edely (2003) tarafından istatistiksel yakınsaklık, çift indisli lacunary dizi kavramı kullanılarak Patterson ve Savaş (2005) tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklık, Savaş ve Patterson (2009) tarafından lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık ve Das vd. (2008) tarafından da ideal yakınsaklık kavramları verilmek üzere daha pek çok araştırmacı tarafından günümüze kadar geliştirilmiştir. Özellikle Ulusu vd. (2018), çalışmalarında $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin bir F altkümesinin lacunary invaryant düzgün yoğunluğu kavramını tanıtmış ve bu kavramla ilişkili olarak çift indisli diziler için lacunary ideal invaryant yakınsaklık kavramını vermişlerdir.

Çift indisli dizilerin asimptotik denkliği kavramından ise ilk olarak Patterson (2003b) tarafından yapılan çalışmada bahsedilmiş ve daha sonra istatistiksel yakınsaklık, çift indisli lacunary dizi ve ideal yakınsaklık kavramları kullanılarak bu kavram başta Hazarika ve Kumar (2013) olmak üzere daha pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, çalışmamızın daha anlaşılabilir olabilmesi için gerekli olduğunu düşündüğümüz bazı temel tanım ve notasyonlar verilmiştir.

İlerleyen bölümlerde, reel diziler ve küme dizileri için asimptotik denklik kavramları üzerine sırasıyla Ulusu (2017), Gülle ve Ulusu (2020) ve Ulusu ve Dündar (2019) tarafından yapılan çalışmalardaki temel tanım, örnek ve teoremler analiz edilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, çalışmamızın daha anlaşılabilir olabilmesi için gerekli olduğunu düşündüğümüz bazı temel tanım ve notasyonlar verilmiştir.

Her $m > 0$ için $|x_m| \leq \beta$ olacak biçimde bir $\beta > 0$ sayısı varsa, (x_m) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı 2016).

$\{j_s\}$; $j_0 = 0$ ve $h_s = j_s - j_{s-1} \to \infty$ olacak biçimde $\mathbb{Z}^+$ üzerinde artan bir dizi ise, $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olarak adlandırılır (Fridy ve Orhan 1993).

Çalışma boyunca; $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_s = (j_{s-1}, j_s]$ ile belirtilip, ayrıca $\frac{j_s}{j_{s-1}}$ oranı ise q_s ile gösterilecektir.

σ, $\mathbb{Z}^+$ üzerinde bir dönüşüm olsun. Sınırlı reel sayı dizi uzayı ℓ_∞ üzerinde sürekli bir lineer ϕ fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa, invaryant ortalama veya σ-ortalama olarak adlandırılır:

- Her m için $x_m \geq 0$ şartını sağlayan (x_m) dizisi için $\phi(x_m) \geq 0$,
- $e = (1,1,1,\dots)$ olmak üzere, $\phi(e) = 1$ ve
- Her $(x_m) \in \ell_\infty$ için $\phi\left(x_{\sigma(m)}\right) = \phi(x_m)$

(Savaş ve Nuray 1993).

σ dönüşümünün u daki m. ötelemesi $\sigma^m(u)$ ile gösterilmek üzere, her $u, m \in \mathbb{Z}^+$ için $\sigma^m(u) \neq u$ şartını sağlayan birebir dönüşüm olduğu kabul edilir. Böylece, ϕ yakınsak diziler uzayı c üzerindeki limit fonksiyonelinin bir genişlemesidir, yani $(x_m) \in c$ için $\phi(x_m) = \lim x_m$ dir.

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m \in I_s} x_{\sigma^m(u)} = \mu$$

limiti $u = 1,2,\dots$ ya göre düzgün ise, (x_m) dizisi μ ye lacunary invaryant toplanabilirdir denir (Pancaroğlu ve Nuray 2013b).

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m\in I_s} \left| x_{\sigma^m(u)} - \mu \right| = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, (x_m) dizisi μ ye kuvvetli lacunary invaryant toplanabilirdir denir (Savaş 1990).

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. $0 < r < \infty$ olmak üzere,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m\in I_s} \left| x_{\sigma^m(u)} - \mu \right|^r = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, (x_m) dizisi μ ye kuvvetli r-lacunary invaryant toplanabilirdir denir (Pancaroğlu ve Nuray 2013b).

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. Her $\xi > 0$ için

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \left| \left\{ m \in I_s : \left| x_{\sigma^m(u)} - \mu \right| \geq \xi \right\} \right| = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, (x_m) dizisi μ ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır denir (Savaş ve Nuray 1993).

$\boldsymbol{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir ideal olması için gerek ve yeter şart,

- $\emptyset \in \boldsymbol{I}$,
- Her $E, F \in \boldsymbol{I}$ için $E \cup F \in \boldsymbol{I}$
- Her $E \in \boldsymbol{I}$ ve $F \subset E$ için $F \in \boldsymbol{I}$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko vd. 2000).

Eğer $\mathbb{N} \notin \boldsymbol{I}$ ise, $\boldsymbol{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine gerçek ideal denir. Ayrıca $\boldsymbol{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\{m\} \in \boldsymbol{I}$ oluyorsa, $\boldsymbol{I}$ idealine uygun ideal denir (Kostyrko vd. 2000).

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi ve $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Ayrıca,

$$l_s = \min_u \left| E \cap \{\sigma^m(u) : m \in I_s\} \right|$$

ve

$$L_s = \max_u |E \cap \{\sigma^m(u): m \in I_s\}|$$

ile gösterelim. Eğer

$$\underline{V_\theta}(E) = \lim_{s\to\infty} \frac{l_s}{h_s} \quad \text{ve} \quad \overline{V_\theta}(E) = \lim_{s\to\infty} \frac{L_s}{h_s}$$

limitleri mevcut ise bu limitlere, sırasıyla, E kümesinin alt $\sigma\theta$-düzgün yoğunluğu ve üst $\sigma\theta$-düzgün yoğunluğu denir. Ayrıca, eğer $\underline{V_\theta}(E) = \overline{V_\theta}(E)$ ise,

$$V_\theta(E) = \underline{V_\theta}(E) = \overline{V_\theta}(E)$$

ifadesi E kümesinin $\sigma\theta$-düzgün yoğunluğu olarak adlandırılır (Ulusu ve Nuray 2020).

$V_\theta(E) = 0$ şartını sağlayan $E \subseteq \mathbb{N}$ kümelerinin sınıfı $\boldsymbol{I}_{\sigma\theta}$ ile gösterilir. $\boldsymbol{I}_{\sigma\theta}$ sınıfının bir uygun ideal olduğu açıktır.

Eğer her $\xi > 0$ için

$$A(\xi) = \{m \in I_s: |x_m - \mu| \geq \xi\} \in \boldsymbol{I}_{\sigma\theta}$$

yani $V_\theta(A(\xi)) = 0$ ise, (x_m) dizisi μ ye lacunary ideal invaryant yakınsaktır denir (Ulusu ve Nuray 2020).

$x = (x_m)$ ve $y = (y_m)$ dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_m}{y_m} = 1$$

ise, (x_m) ve (y_m) dizilerine asimptotik denktir denir ve $x \sim y$ şeklinde gösterilir (Marouf 1993).

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. (x_m) ve (y_m) dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \left| \left\{ m \in I_s: \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right| = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, (x_m) ve (y_m) dizilerine λ katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denktir denir (Savaş ve Patterson 2006).

3. REEL DİZİLER İÇİN ASİMPTOTİK LACUNARY İDEAL İNVARYANT DENKLİK

Bu kısımda, tek indisli reel sayı dizileri için bazı asimptotik lacunary denklik kavramları tanımlanarak, bu kavramlar arasındaki ilişkiler verildi. Ayrıca, bu kavramların asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramı ile ilişkisinden de bahsedildi.

Bu kısım için Ulusu (2017) tarafından yapılan çalışmadaki tanım, teorem ve örneklerden yararlanılmıştır.

Tanım 3.1

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. (x_m) ve (y_m) dizileri negatif olmamak üzere, her $\xi > 0$ için

$$B(\xi) = \left\{ m \in I_s : \left| \frac{x_m}{y_m} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \in \boldsymbol{I}_{\sigma\theta},$$

yani $V_\theta(B(\xi)) = 0$ ise, (x_m) ve (y_m) dizilerine λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denktir denir ve bu durum $x_m \overset{\boldsymbol{I}_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ için asimptotik lacunary ideal invaryant denklik kavramı elde edilir.

λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk diziler sınıfı $\mathfrak{I}_{\sigma\theta}^{\lambda}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. (x_m) ve (y_m) dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m\in I_s} \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} = \lambda$$

limiti u ya göre düzgün ise, (x_m) ve (y_m) dizilerine λ katlı asimptotik lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $x_m \overset{N_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ olması durumunda asimptotik lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

Teorem 3.1

$(x_m),(y_m) \in \ell_\infty$ olmak üzere (x_m) ve (y_m) dizileri λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk ise, bu diziler λ katlı asimptotik lacunary invaryant denktir.

İspat:

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi, $u \in \mathbb{N}$ keyfi ve $\xi > 0$ olsun. Şimdi,

$$T(s,u) = \left| \frac{1}{h_s} \sum_{m \in I_s} \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right|$$

ifadesini hesaplayalım.

$$T^{(1)}(s,u) = \frac{1}{h_s} \sum_{\substack{m \in I_s \\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda\right| \geq \xi}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right|$$

ve

$$T^{(2)}(s,u) = \frac{1}{h_s} \sum_{\substack{m \in I_s \\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda\right| < \xi}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right|$$

olmak üzere, üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$T(s,u) \leq T^{(1)}(s,u) + T^{(2)}(s,u)$$

dur. Her $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi ve her $u = 1,2,\ldots$ için

$$T^{(2)}(s,u) < \xi$$

olduğu açıktır. Eğer $(x_m),(y_m) \in \ell_\infty$ ise, her $m \in I_s, u = 1,2,\ldots$ için

$$\left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \leq \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır. O halde

$$T^{(1)}(s,u) \leq \frac{\beta}{h_s}\left|\left\{m \in I_s : \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda\right| \geq \xi\right\}\right|$$

$$\leq \beta \frac{\max\limits_{u}\left|\left\{m \in I_s : \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda\right| \geq \xi\right\}\right|}{h_s}$$

$$= \beta \frac{L_s}{h_s}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $x_m \overset{I_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m$ ise, $x_m \overset{N_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m$ olduğu görülür.

Bu teoremin karşıtı genelde doğru değildir. Örnek olarak (x_m) ve (y_m) dizileri aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$x_m = \begin{cases} 2 & , \quad j_{s-1} < m < j_{s-1} + \left[\sqrt{h_s}\right], \quad \text{ve } m \text{ çift tamsayı ise,} \\ 0 & , \quad j_{s-1} < m < j_{s-1} + \left[\sqrt{h_s}\right], \quad \text{ve } m \text{ tek tamsayı ise.} \end{cases}$$

$$y_m = 1.$$

Bu durumda σ dönüşümü, $\sigma(u) = u + 1$ olarak tanımlanırsa, bu diziler asimptotik lacunary invaryant denktir fakat asimptotik lacunary ideal invaryant denk değildirler.

Tanım 3.3

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi ve $0 < r < \infty$ olsun. (x_m) ve (y_m) dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s}\left|\sum_{m\in I_s} \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda\right|^r = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, (x_m) ve (y_m) dizilerine λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $x_m \overset{\left[N_{\sigma\theta}^{\lambda}\right]_r}{\sim} y_m$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ olması durumunda asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk diziler sınıfı $\left[\mathfrak{N}_{\sigma\theta}^{\lambda}\right]_r$ ile gösterilir.

Teorem 3.2

$0 < r < \infty$ olmak üzere (x_m) ve (y_m) dizileri λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk ise, bu diziler λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denktir.

İspat:

$\xi > 0$ olsun. Her $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi ve her $u \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{m \in I_s} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right|^r \geq \sum_{\substack{m \in I_s \\ \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \geq \xi}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right|^r$$

$$\geq \xi^r \left| \left\{ m \in I_s : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|$$

$$\geq \xi^r \max_u \left| \left\{ m \in I_s : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|$$

dir ve buradan

$$\frac{1}{h_s} \sum_{m \in I_s} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right|^r \geq \xi^r \frac{\max_u \left| \left\{ m \in I_s : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|}{h_s}$$

$$= \xi^r \frac{L_s}{h_s}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $x_m \overset{[N_{\sigma\theta}^{\lambda}]_r}{\sim} y_m$ ise, $x_m \overset{I_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m$ olduğu görülür.

Teorem 3.3

$(x_m), (y_m) \in \ell_\infty$ ve $0 < r < \infty$ olmak üzere (x_m) ve (y_m) dizileri λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk ise, bu diziler λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denktir.

İspat:

$\xi > 0$ olsun. Eğer $(x_m), (y_m) \in \ell_\infty$ ise, her $m \in I_s, u = 1,2, \ldots$ için

$$\left| \frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}} - \lambda \right| \leq \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır. O halde, burada $\theta = \{j_s\}$ nin lacunary dizi ve $u \in \mathbb{N}$ keyfi olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{h_s}\sum_{m\in I_s}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}}-\lambda\right|^r$$

$$=\frac{1}{h_s}\sum_{\substack{m\in I_s\\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}}-\lambda\right|\geq\xi}}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}}-\lambda\right|^r+\frac{1}{h_s}\sum_{\substack{m\in I_s\\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}}-\lambda\right|<\xi}}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}}-\lambda\right|^r$$

$$\leq \beta\frac{\max_u\left|\left\{m\in I_s : \left|\frac{x_{\sigma^m(u)}}{y_{\sigma^m(u)}}-\lambda\right|\geq\xi\right\}\right|}{h_s}+\xi^r$$

$$\leq \beta\frac{L_s}{h_s}+\xi^r$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $x_m \overset{I_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m$ ise, $x_m \overset{[N_{\sigma\theta}^{\lambda}]_r}{\sim} y_m$ olduğu görülür.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 birlikte göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1

$0 < r < \infty$ olsun. Bu durumda, her $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi için

$$\ell_\infty \cap \mathfrak{I}_{\sigma\theta}^{\lambda} = \ell_\infty \cap \left[\mathfrak{N}_{\sigma\theta}^{\lambda}\right]_r$$

dir.

Aşağıdaki teorem, yukarıda verdiğimiz asimptotik lacunary ideal invaryant denklik kavramı ile Savaş ve Patterson (2006) tarafından verilen asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramı arasında bir ilişki verir.

Teorem 3.4

(x_m) ve (y_m) dizilerinin λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk olması için gerek ve yeter şart bu dizilerin λ katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denk olmasıdır.

Sonuç 3.2

(x_m) ve (y_m) negatif olmayan iki dizi olsun. Yukarıdaki Teorem 3.4, Ulusu (2018) tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 2.5 ve Savaş ve Patterson (2006) tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 3.6 dikkate alındığında,

$$1 < \liminf_{s} q_s < \limsup_{s} q_s < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan her $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi için

$$x_m \overset{I_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} y_m \Leftrightarrow x_m \overset{I_{\sigma}^{\lambda}}{\sim} y_m$$

dir.

4. KÜME DİZİLERİ İÇİN ASİMPTOTİK LACUNARY İDEAL İNVARYANT DENKLİK

Bu kısımda, tek indisli küme dizileri için Wijsman anlamında bazı asimptotik lacunary denklik kavramları tanımlanarak, bu kavramlar arasındaki ilişkiler verildi. Ayrıca, bu kavramların Wijsman asimptotik lacunary invaryant denklik ve Wijsman asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramları ile ilişkisinden de bahsedildi.

Bu kısım için Gülle ve Ulusu (2020) tarafından yapılan çalışmadaki tanım, teorem ve örneklerden yararlanılmıştır.

Burada öncelikle küme dizilerinden, küme dizilerinin Wijsman anlamında yakınsaklığından ve küme dizilerinin Wijsman anlamında asimptotik denkliği kavramlarından bahsetmek faydalı olacaktır.

$Y \neq \emptyset$ olmak üzere, $g: \mathbb{N} \to 2^Y$ biçiminde tanımlı fonksiyon her $m \in \mathbb{N}$ için 2^Y de bir

$$g(m) = E_m \in 2^Y$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun görüntü kümesini oluşturan $E_1, E_2, \ldots$ kümelerinin oluşturduğu $\{E_m\} = \{E_1, E_2, \ldots\}$ dizisine küme dizisi denir (Wijsman 1964).

(Y, ρ) metrik uzay olsun. Herhangi bir $y \in Y$ ve Y nin boştan farklı herhangi bir E altkümesi için; y noktasının E kümesine uzaklığı

$$\mu(y, E) = \inf \{\rho(y, e): e \in E\}$$

olarak tanımlanır (Bayraktar 2006).

Buradan itibaren, aksi belirtilmedikçe, (Y, ρ) metrik uzay ve E, E_m, F_m kümeleri de Y nin boştan farklı kapalı altkümeleri olarak kabul edilecektir.

Her $y \in Y$ için

$$\lim_{m \to \infty} \mu(y, E_m) = \mu(y, E)$$

oluyorsa, $\{E_m\}$ küme dizisi E kümesine Wijsman anlamında yakınsaktır denir (Nuray ve Rhoades 2012).

$E_m, F_m \subseteq Y$ kümeleri her $y \in Y$ için $\rho(y, E_m) > 0$, $\rho(y, F_m) > 0$ şartlarını sağlamak üzere, her bir $y \in Y$ için

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mu(y, E_m)}{\mu(y, F_m)} = 1$$

oluyorsa, $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında asimptotik denktir denir ve $E_m \overset{W}{\sim} F_m$ ile gösterilir (Ulusu ve Nuray 2013).

Buradan itibaren, aksi belirtilmedikçe, kısalık olması açısından

$$\frac{\mu(y, E_m)}{\mu(y, F_m)} := \mu_y\left(\frac{E_m}{F_m}\right)$$

olarak belirtilecektir.

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. $E_m, F_m \subseteq Y$ kümeleri her $y \in Y$ için $\rho(y, E_m) > 0$, $\rho(y, F_m) > 0$ şartlarını sağlamak üzere, her bir $y \in Y$ için

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m\in I_s} \mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) = \lambda$$

limiti u ya göre düzgün ise, $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $E_m \overset{W^{\lambda}_{N_{\sigma\theta}}}{\sim} F_m$ ile gösterilir (Pancaroğlu vd. 2013).

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. $E_m, F_m \subseteq Y$ kümeleri her $y \in Y$ için $\rho(y, E_m) > 0$, $\rho(y, F_m) > 0$ şartlarını sağlamak üzere, her $\xi > 0$ ve her bir $y \in Y$ için

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \left| \left\{ m \in I_s : \left| \mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right| = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denktir denir ve bu durum $E_m \overset{W^{\lambda}_{S_{\sigma\theta}}}{\sim} F_m$ ile gösterilir (Pancaroğlu vd. 2013).

Tanım 4.1

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. $E_m, F_m \subseteq Y$ kümeleri her $y \in Y$ için $\rho(y, E_m) > 0$, $\rho(y, F_m) > 0$ şartlarını sağlamak üzere, her $\xi > 0$ ve her bir $y \in Y$ için

$$B(\xi, y) = \left\{ m \in I_s : \left| \mu_y \left(\frac{E_m}{F_m} \right) - \lambda \right| \geq \xi \right\} \in \boldsymbol{I}_{\sigma\theta},$$

yani $V_\theta\big(B(\xi, y)\big) = 0$ ise, $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denktir denir ve bu durum $E_m \overset{W^{\lambda}_{J_{\sigma\theta}}}{\sim} F_m$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ olması durumunda Wijsman anlamında asimptotik lacunary ideal invaryant denklik kavramı elde edilir.

Teorem 4.1

$\mu_y(E_m) = O\big(\mu_y(F_m)\big)$ olmak üzere $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ dizileri Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk ise, bu küme dizileri Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary invaryant denktir.

İspat:

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi, $u \in \mathbb{N}$ keyfi ve $\xi > 0$ olsun. Şimdi,

$$\mathcal{T}(s, u, y) = \left| \frac{1}{h_s} \sum_{m \in I_s} \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|$$

ifadesini hesaplayalım.

$$\mathcal{T}^{(1)}(s, u, y) = \frac{1}{h_s} \sum_{\substack{m \in I_s \\ \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right| \geq \xi}} \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|$$

ve

$$\mathcal{T}^{(2)}(s, u, y) = \frac{1}{h_s} \sum_{\substack{m \in I_s \\ \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right| < \xi}} \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|$$

olmak üzere, üçgen eşitsizliğinden dolayı her bir $y \in Y$ için

$$\mathcal{T}(s,u,y) \leq \mathcal{T}^{(1)}(s,u,y) + \mathcal{T}^{(2)}(s,u,y)$$

dir. Her $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi, $u = 1,2,...$ ve her bir $y \in Y$ için

$$\mathcal{T}^{(2)}(s,u,y) < \xi$$

olduğu açıktır. Eğer $\mu_y(E_m) = O\big(\mu_y(F_m)\big)$ ise, her bir $y \in Y$ için

$$\left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right| \leq \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır ($m \in I_s, u = 1,2,...$). O halde

$$\mathcal{T}^{(1)}(s,u,y) \leq \frac{\beta}{h_s}\left|\left\{m \in I_s: \left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right| \geq \xi\right\}\right|$$

$$\leq \beta \frac{\max_u \left|\left\{m \in I_s: \left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right| \geq \xi\right\}\right|}{h_s}$$

$$= \beta \frac{L_s}{h_s}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $E_m \overset{W_{J_{\sigma\theta}}^{\lambda}}{\sim} F_m$ ise, $E_m \overset{WN_{\sigma\theta}^{\lambda}}{\sim} F_m$ olduğu görülür.

Tanım 4.2

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi olsun. $E_m, F_m \subseteq Y$ kümeleri her $y \in Y$ için $\rho(y, E_m) > 0$, $\rho(y, F_m) > 0$ şartlarını sağlamak üzere, her bir $y \in Y$ için

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m \in I_s} \left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right| = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında λ katlı asimptotik kuvvetli lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $E_m \overset{[W_{N_{\sigma\theta}}^{\lambda}]}{\sim} F_m$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ olması durumunda Wijsman anlamında asimptotik kuvvetli lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

Tanım 4.3

$\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi ve $0 < r < \infty$ olsun. $E_m, F_m \subseteq Y$ kümeleri her $y \in Y$ için $\rho(y, E_m) > 0$, $\rho(y, F_m) > 0$ şartlarını sağlamak üzere, her bir $y \in Y$ için

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{h_s} \sum_{m\in I_s} \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|^r = 0$$

limiti u ya göre düzgün ise, $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ küme dizilerine Wijsman anlamında λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $E_m \overset{[W_{N_{\sigma\theta}}^{\lambda}]_r}{\sim} F_m$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ olması durumunda Wijsman anlamında asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

Teorem 4.2

$0 < r < \infty$ olmak üzere $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ dizileri Wijsman anlamında λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk ise, bu küme dizileri Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denktir.

İspat:

$\xi > 0$ olsun. Her $\theta = \{j_s\}$ lacunary dizi, $u \in \mathbb{N}$ ve her bir $y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in I_s} \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|^r &\geq \sum_{\substack{m\in I_s \\ \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right| \geq \xi}} \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|^r \\
&\geq \xi^r \left| \left\{ m \in I_s : \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right| \\
&\geq \xi^r \max_u \left| \left\{ m \in I_s : \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|
\end{aligned}$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_s} \sum_{m\in I_s} \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right|^r &\geq \xi^r \frac{\max_u \left| \left\{ m \in I_s : \left| \mu_y \left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}} \right) - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|}{h_s} \\
&= \xi^r \frac{L_s}{h_s}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $E_m \overset{[W_{N_{\sigma\theta}}^{\lambda}]_r}{\sim} F_m$ ise, $E_m \overset{W_{J_{\sigma\theta}}^{\lambda}}{\sim} F_m$ olduğu görülür.

Teorem 4.3

$\mu_y(E_m) = O\big(\mu_y(F_m)\big)$ ve $0 < r < \infty$ olmak üzere $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ dizileri Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk ise, bu küme dizileri λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denktir.

İspat:

$\xi > 0$ olsun. Eğer $\mu_y(E_m) = O\big(\mu_y(F_m)\big)$ ise, her bir $y \in Y$ için

$$\left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right| \leq \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır ($m \in I_s, u = 1,2,\ldots$). O halde, burada $\theta = \{j_s\}$ nin lacunary dizi ve $u \in \mathbb{N}$ keyfi olduğu da göz önüne alınırsa, her bir $y \in Y$ için

$$\frac{1}{h_s}\sum_{m\in I_s}\left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right|^r$$

$$= \frac{1}{h_s}\sum_{\substack{m\in I_s \\ \left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right)-\lambda\right|\geq\xi}}\left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right|^r + \frac{1}{h_s}\sum_{\substack{m\in I_s \\ \left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right)-\lambda\right|<\xi}}\left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right|^r$$

$$\leq \beta\,\frac{\max\limits_u \left|\left\{m \in I_s : \left|\mu_y\left(\frac{E_{\sigma^m(u)}}{F_{\sigma^m(u)}}\right) - \lambda\right| \geq \xi\right\}\right|}{h_s} + \xi^r$$

$$\leq \beta\,\frac{L_s}{h_s} + \xi^r$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $E_m \overset{W_{J_{\sigma\theta}}^{\lambda}}{\sim} F_m$ ise, $E_m \overset{[W_{N_{\sigma\theta}}^{\lambda}]_r}{\sim} F_m$ olduğu görülür.

Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 birlikte göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1

$\mu_y(E_m) = O\big(\mu_y(F_m)\big)$ ve $0 < r < \infty$ olsun. $\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ dizilerinin Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk olması için gerek ve yeter şart bu küme dizilerinin Wijsman anlamında λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk olmasıdır.

Aşağıdaki teorem, yukarıda verdiğimiz Wijsman anlamında asimptotik lacunary ideal invaryant denklik kavramı ile Pancaroğlu vd. (2013) tarafından verilen Wijsman anlamında asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramı arasında bir ilişki verir.

Teorem 4.4

$\{E_m\}$ ve $\{F_m\}$ dizilerinin Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk olması için gerek ve yeter şart bu küme dizilerinin Wijsman anlamında λ katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denk olmasıdır.

5. ÇİFT DİZİLER İÇİN ASİMPTOTİK LACUNARY İDEAL İNVARYANT DENKLİK

Bu kısımda, çift indisli reel sayı dizileri için bazı asimptotik lacunary denklik kavramları tanımlanarak, bu kavramlar arasındaki ilişkiler verildi.

Bu kısım için Ulusu ve Dündar (2019) tarafından yapılan çalışmadaki tanım, teorem ve örneklerden yararlanılmıştır.

Burada öncelikle çift indisli dizilerden ve çift indisli dizilerin yakınsaklığından ve çift indisli dizilerin asimptotik denkliği kavramlarından bahsetmek faydalı olacaktır.

Her $m,n > 0$ için $|x_{mn}| \leq \beta$ olacak biçimde bir $\beta > 0$ sayısı varsa, (x_{mn}) çift indisli dizisine sınırlı dizi denir (Pringsheim 1900).

$\{j_s\}$ ve $\{k_t\}$; $j_0 = 0, h_s = j_s - j_{s-1} \to \infty$ ve $k_0 = 0, \bar{h}_t = k_t - k_{t-1} \to \infty$ olacak biçimde $\mathbb{Z}^+$ üzerinde artan iki dizi ise, $\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ dizisi çift indisli lacunary dizi olarak adlandırılır (Patterson ve Savaş 2005).

Çalışma boyunca; çift indisli lacunary dizi ile ilgili olarak aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$$h_{st} = h_s\bar{h}_t, \quad I_{st} = \{(m,n): j_{s-1} < m \leq j_s \text{ ve } k_{t-1} < n \leq k_t\}.$$

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n\in I_{st}} x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)} = \mu$$

limiti $u, v = 1,2, \dots$ ya göre düzgün ise, (x_{mn}) çift indisli dizisi μ ye lacunary invaryant toplanabilirdir denir.

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n\in I_{st}} |x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)} - \mu| = 0$$

limiti $u, v = 1,2, \ldots$ ya göre düzgün ise, (x_{mn}) çift indisli dizisi μ ye kuvvetli lacunary invaryant toplanabilirdir denir (Savaş ve Patterson 2009).

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. $0 < r < \infty$ olmak üzere,

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n\in I_{st}} |x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)} - \mu|^r = 0$$

limiti $u, v = 1,2, \ldots$ ya göre düzgün ise, (x_{mn}) çift indisli dizisi μ ye kuvvetli r-lacunary invaryant toplanabilirdir denir.

Eğer her $m \in \mathbb{N}$ için $\{m\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \times \{m\}$ kartezyen çarpımları $\boldsymbol{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ gerçek idealine ait ise $\boldsymbol{I}_2$ idealine kuvvetli uygun ideal denir (Das vd. 2008).

Bir kuvvetli uygun idealin aynı zamanda uygun ideal olduğu açıktır.

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ lacunary dizi ve $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. Ayrıca

$$l_{st} = \min_{u,v} |F \cap \{(\sigma^m(u), \sigma^n(v)) : (m,n) \in I_{st}\}|$$

ve

$$L_{st} = \max_{u,v} |F \cap \{(\sigma^m(u), \sigma^n(v)) : (m,n) \in I_{st}\}|$$

ile gösterelim. Eğer

$$\underline{V_2^\theta}(F) = \lim_{s,t\to\infty} \frac{l_{st}}{h_{st}} \quad \text{ve} \quad \overline{V_2^\theta}(F) = \lim_{s,t\to\infty} \frac{L_{st}}{h_{st}}$$

limitleri mevcut ise bu limitlere, sırasıyla, F kümesinin alt $\sigma\theta_2$-düzgün yoğunluğu ve üst $\sigma\theta_2$-düzgün yoğunluğu denir. Ayrıca, eğer $\underline{V_2^\theta}(F) = \overline{V_2^\theta}(F)$ ise,

$$V_2^\theta(F) = \underline{V_2^\theta}(F) = \overline{V_2^\theta}(F)$$

ifadesi F kümesinin $\sigma\theta_2$-düzgün yoğunluğu olarak adlandırılır (Ulusu vd. 2018).

$V_2^\theta(F) = 0$ şartını sağlayan $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümelerinin sınıfı $\boldsymbol{I}_2^{\sigma\theta}$ ile gösterilir. $\boldsymbol{I}_2^{\sigma\theta}$ sınıfının bir kuvvetli uygun ideal olduğu açıktır.

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ lacunary dizi olsun. Eğer her $\xi > 0$ için

$$A_2(\xi) = \{(m,n) \in I_{st}: |x_{mn} - \mu| \geq \xi\} \in \boldsymbol{I}_2^{\sigma\theta}$$

yani $V_2^{\theta}(A_2(\xi)) = 0$ ise, (x_{mn}) çift indisli dizisi μ ye lacunary ideal invaryant yakınsaktır denir (Ulusu vd. 2018).

(x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{x_{mn}}{y_{mn}} = 1$$

ise, (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizilerine asimptotik denktir denir ve $x_{mn} \sim y_{mn}$ biçiminde gösterilir (Patterson 2003b).

Tanım 5.1

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n\in I_{st}} \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} = \lambda$$

limiti u, v ye göre düzgün ise, (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizilerine λ katlı asimptotik lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $x_{mn} \overset{N_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ alındığında, çift indisli diziler için asimptotik lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

Tanım 5.2

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri negatif olmamak üzere, her $\xi > 0$ için

$$B_2(\xi) = \left\{(m,n) \in I_{st}: \left|\frac{x_{mn}}{y_{mn}} - \lambda\right| \geq \xi\right\} \in \boldsymbol{I}_2^{\sigma\theta},$$

yani $V_2^{\theta}(B_2(\xi)) = 0$ ise, (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizilerine λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denktir denir ve bu durum $x_{mn} \overset{\boldsymbol{I}_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ alındığında, çift indisli diziler için asimptotik lacunary ideal invaryant denklik kavramı elde edilir.

λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk çift indisli diziler sınıfı $\Im_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}$ ile gösterilir.

Teorem 5.1

$(x_{mn}), (y_{mn}) \in \ell_\infty^2$ olmak üzere (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk ise, bu çift indisli diziler λ katlı asimptotik lacunary invaryant denktir.

İspat:

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi, $u, v \in \mathbb{N}$ keyfi ve $\xi > 0$ olsun. Şimdi,

$$T_2(s,t,u,v) = \left| \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n \in I_{st}} \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right|$$

ifadesini hesaplayalım.

$$T_2^{(1)}(s,t,u,v) = \frac{1}{h_{st}} \sum_{\substack{m,n \in I_{st} \\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda\right| \geq \xi}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right|$$

ve

$$T_2^{(2)}(s,t,u,v) = \frac{1}{h_{st}} \sum_{\substack{m,n \in I_{st} \\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda\right| < \xi}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right|$$

olmak üzere, üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$T_2(s,t,u,v) \leq T_2^{(1)}(s,t,u,v) + T_2^{(2)}(s,t,u,v)$$

dir. Her $\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi ve her $u, v = 1,2, ...,$ için

$$T_2^{(2)}(s,t,u,v) < \xi$$

olduğu açıktır. Eğer $(x_{mn}), (y_{mn}) \in \ell_\infty^2$ ise, her $m, n \in I_{st}$, $u, v = 1,2, ...,$ için

$$\left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \leq \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır. O halde

$$T_2^{(1)}(s,t,u,v) \leq \frac{\beta}{h_{st}} \left| \left\{ (m,n) \in I_{st} : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|$$

$$\leq \beta \frac{\max_{u,v} \left| \left\{ (m,n) \in I_{st} : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|}{h_{st}}$$

$$= \beta \frac{L_{st}}{h_{st}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $x_{mn} \overset{\boldsymbol{I}_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ ise $x_{mn} \overset{N_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ olduğu görülür.

Bu teoremin karşıtı genelde doğru değildir. Örnek olarak (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$x_{mn} = \begin{cases} 2 \quad , & \begin{array}{l} j_{s-1} < m < j_{s-1} + [\sqrt{h_s}], \\ k_{t-1} < n < k_{t-1} + [\sqrt{\bar{h}_t}], \end{array} \quad \text{ve} \quad m+n \text{ çift tamsayı ise,} \\ \\ 0 \quad , & \begin{array}{l} j_{s-1} < m < j_{s-1} + [\sqrt{h_s}], \\ k_{t-1} < n < k_{t-1} + [\sqrt{\bar{h}_t}], \end{array} \quad \text{ve} \quad m+n \text{ tek tamsayı ise.} \end{cases}$$

$$y_{mn} = 1.$$

Bu durumda σ dönüşümü $\sigma(u) = u+1, \sigma(v) = v+1$ olarak tanımlanırsa, bu çift indisli diziler asimptotik lacunary invaryant denktir fakat asimptotik lacunary ideal invaryant denk değildirler.

Tanım 5.3

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n\in I_{st}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| = 0$$

limiti u, v ye göre düzgün ise, (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizilerine λ katlı asimptotik kuvvetli lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $x_{mn} \overset{[N_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}]}{\sim} y_{mn}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ alındığında, çift indisli diziler için asimptotik kuvvetli lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

Tanım 5.4

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi ve $0 < r < \infty$ olsun. (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \sum_{m,n\in I_{st}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right|^r = 0$$

limiti u, v ye göre düzgün ise, (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizilerine λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denktir denir ve bu durum $x_{mn} \overset{\left[N_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}\right]_r}{\sim} y_{mn}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ alındığında, çift indisli diziler için asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denklik kavramı elde edilir.

λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk çift indisli diziler sınıfı $\left[\mathfrak{N}_{2(L)}^{\sigma\theta}\right]_r$ ile gösterilir.

Teorem 5.2

$0 < r < \infty$ olmak üzere (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denk ise, bu çift indisli diziler λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denktir.

İspat:

$\xi > 0$ olsun. Her $\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi ve her $u, v \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n\in I_{st}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right|^r &\geq \sum_{\substack{m,n\in I_{st} \\ \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \geq \xi}} \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right|^r \\
&\geq \xi^r \left| \left\{ (m,n) \in I_{st} : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right| \\
&\geq \xi^r \max_{u,v} \left| \left\{ (m,n) \in I_{st} : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right|
\end{aligned}$$

dir ve buradan

$$\frac{1}{h_{st}}\sum_{m,n\in I_{st}}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|^r \geq \xi^r \frac{\max_{u,v}\left|\left\{(m,n)\in I_{st}:\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|\geq\xi\right\}\right|}{h_{st}}$$

$$=\xi^r\frac{L_{st}}{h_{st}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $x_{mn} \overset{[N_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}]_r}{\sim} y_{mn}$ ise $x_{mn} \overset{I_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ olduğu görülür.

Teorem 5.3

$(x_{mn}),(y_{mn}) \in \ell_\infty^2$ ve $0<r<\infty$ olmak üzere (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk ise, bu çift indisli diziler λ katlı asimptotik kuvvetli r-lacunary invaryant denktir.

İspat:

$\xi>0$ olsun. Eğer $(x_{mn}),(y_{mn}) \in \ell_\infty^2$ ise, her $m,n\in I_{st}, u,v=1,2,\ldots$ için

$$\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|\leq\beta$$

olacak şekilde $\beta>0$ sayısı vardır. O halde, burada $\theta_2=\{(j_s,k_t)\}$ nin çift indisli lacunary dizi ve $u,v\in\mathbb{N}$ keyfi olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{h_{st}}\sum_{m,n\in I_{st}}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|^r$$

$$=\frac{1}{h_{st}}\sum_{\substack{m,n\in I_{st}\\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|\geq\xi}}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|^r+\frac{1}{h_{st}}\sum_{\substack{m,n\in I_{st}\\ \left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|<\xi}}\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|^r$$

$$\leq\beta\frac{\max_{u,v}\left|\left\{(m,n)\in I_{st}:\left|\frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}-\lambda\right|\geq\xi\right\}\right|}{h_{st}}+\xi^r$$

$$\leq\beta\frac{L_{st}}{h_{st}}+\xi^r$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da eğer $x_{mn} \overset{I_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ ise $x_{mn} \overset{[N_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}]_r}{\sim} y_{mn}$ olduğu görülür.

Teorem 5.2 ve Teorem 5.3 birlikte göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1

$0 < r < \infty$ olsun. Bu durumda, her $\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi için

$$\ell_\infty^2 \cap \mathfrak{I}_{2(\lambda)}^{\sigma\theta} = \ell_\infty^2 \cap [\mathfrak{N}_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}]_r$$

dir.

Tanım 5.5

$\theta_2 = \{(j_s, k_t)\}$ çift indisli lacunary dizi olsun. (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizileri negatif olmamak üzere,

$$\lim_{s,t\to\infty} \frac{1}{h_{st}} \left| \left\{ (m,n) \in I_{st} : \left| \frac{x_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}}{y_{\sigma^m(u)\sigma^n(v)}} - \lambda \right| \geq \xi \right\} \right| = 0$$

limiti u, v ye göre düzgün ise, (x_{mn}) ve (y_{mn}) çift indisli dizilerine λ katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denktir denir ve bu durum $x_{mn} \overset{S_{2(\lambda)}^{\sigma\theta}}{\sim} y_{mn}$ ile gösterilir. Ayrıca, $\lambda = 1$ alındığında, çift indisli diziler için asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramı elde edilir.

Aşağıdaki teorem, çift indisli diziler için asimptotik lacunary ideal invaryant denklik ve asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denktir kavramları arasında bir ilişki verir.

Teorem 5.4

(x_{mn}) ve (y_{mn}) dizilerinin λ katlı asimptotik lacunary ideal invaryant denk olması için gerek ve yeter şart bu çift indisli dizilerin λ katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denk olmasıdır.

6. KAYNAKLAR

Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, 362s, Ankara.

Baronti M, Papini P, 1986, Convergence of Sequences of Sets, Micchelli C A, Pai D V, Limaye B V (Ed.), Methods of Functional Analysis in Approximation Theory (133-155), Birkhäuser, 410p, Basel.

Bayraktar M, 2006, Fonksiyonel Analiz, Pegem Akademi Yayınevi, 320s, Ankara.

Beer G, 1985, On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 31, 421-432.

Beer G, 1994, Wijsman convergence: A survey, Set-Valued Analysis, 2, 77-94.

Das P, Kostyrko P, Wilczynski W, Malik P, 2008, I and I^*-convergence of double sequences, Mathematica Slovaca, 58, 605-620.

Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241-244.

Fridy J A, 1985, On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

Fridy J A, Orhan C, 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific Journal of Mathematics, 160, 43-51.

Gülle E, Ulusu U, 2020, Asymptotically lacunary I_σ-equivalence of sequences of sets, Karaelmas Science and Engineering Journal, 10, 88-93.

Hazarika B, Kumar V, 2013, On asymptotically double lacunary statistical equivalent sequences in ideal context, Journal of Inequalities and Applications, 543, 15 pages.

Kişi Ö, Nuray F, 2013, New convergence definitions for sequences of sets, Abstract and Applied Analysis, 2013(Article ID 852796), 6 pages.

Kişi Ö, Nuray F, 2013, On $S_\lambda^L(I)$-asymptotically statistical equivalence of sequences of sets, ISRN Mathematical Analysis, 2013(Article ID 602963), 6 pages.

Kostyrko P, Salat T, Wilczynski W, 2000, I-convergence, Real Analysis Exchange, 26, 669-686.

Marouf M, 1993, Asymptotic equivalence and summability, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 16, 755-762.

Mursaleen M, 1979, On finite matrices and invariant means, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 10, 457-460.

Mursaleen M, Edely O H H, 2003, Statistical convergence of double sequences, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 223-231.

Mursaleen M, Edely O H H, 2009, On the invariant mean and statistical convergence, Applied Mathematics Letters, 22, 1700-1704.

Nuray F, Gök H, Ulusu U, 2011, I_σ-convergence, Mathematical Communications, 16, 531-538.

Nuray F, Rhoades B E, 2012, Statistical convergence of sequences of sets, Fasciculi Mathematici, 49, 87-99.

Pancaroğlu N, Nuray F, 2013a, On invariant statistically convergence and lacunary invariant statistical convergence of sequences of sets, Progress in Applied Mathematics, 5, 23-29.

Pancaroğlu N, Nuray F, 2013b, Statistical lacunary invariant summability, Theoretical Mathematics & Applications, 3, 71-78.

Pancaroğlu N, Nuray F, Savaş E, 2013, On asymptotically lacunary invariant statistical equivalent set sequences, AIP Conference Proceedings, 1558, 780-781.

Patterson R F, 2003a, On asymptotically statistically equivalent sequences, Demonstratio Mathematica, 36, 149-153.

Patterson R F, 2003b, Rates of convergence for double sequences, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 26, 469-478.

Patterson R F, Savaş E, 2005, Lacunary statistical convergence of double sequences, Mathematical Communications, 10, 55-61.

Patterson R F, Savaş E, 2006, On asymptotically lacunary statistically equivalent sequences, Thai Journal of Mathematics, 4, 267-272.

Pringsheim A, 1900, Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen, Mathematische Annalen, 53, 289-321.

Raimi R A, 1963, Invariant means and invariant matrix methods of summability, Duke Mathematical Journal, 30, 81-94.

Savaş E, 1989, Some sequence spaces involving invariant means, Indian Journal of Mathematics, 31, 1-8.

Savaş E, 1990, On lacunary strong σ-convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 21, 359-365.

Savaş E, Nuray F, 1993, On σ-statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence, Mathematica Slovaca, 43, 309-315.

Savaş E, Patterson R F, 2006, σ-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences, Central European Journal of Mathematics, 4, 648-655.

Savaş E, Patterson R F, 2009, Double σ-convergence lacunary statistical sequences, Journal of Computational Analysis & Applications, 11, 610-615.

Savaş E, 2013, On I-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences, Advances in Difference Equations, 111, 7 pages.

Schaefer P, 1972, Infinite matrices and invariant means, Proceedings of the American Mathematical Society, 36, 104-110.

Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73-74.

Šalât T, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139-150.

Ulusu U, Nuray F, 2012, Lacunary statistical convergence of sequence of sets, Progress in Applied Mathematics, 4, 99-109.

Ulusu U, Nuray F, 2013, On asymptotically lacunary statistical equivalent set sequences, Journal of Mathematics, 2013(Article ID 310438), 5 pages.

Ulusu U, 2017, Lacunary I_σ-asimptotik denklik, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 17, 899-905.

Ulusu U, Dündar E, Nuray F, 2018, Lacunary I_2-invariant convergence and some properties, International Journal of Analysis and Applications, 16, 317-327.

Ulusu U, 2018, Asymptotically ideal invariant equivalence, Creative Mathematics and Informatics, 27, 215-220.

Ulusu U, Dündar E, 2019, Asymptotically lacunary I_2-invariant equivalence, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 36, 467-472.

Ulusu U, Nuray F, 2020, Lacunary I-invariant convergence, Cumhuriyet Science Journal, 41, 617-624.

Wijsman R A, 1964, Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, Bulletin of the American Mathematical Society, 70, 186-188.

Wijsman R A, 1966, Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, Transactions of the American Mathematical Society, 123, 32-45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Umut NARTTÜRK
Doğum Yeri ve Tarihi	: Seyhan / ADANA - 06.08.1996
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0544 659 35 53 / baba_.umut@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Sungurbey Anadolu Lisesi - Çukurova / ADANA (2010-2014)
Lisans	: Eskişehir Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü (2014-2018)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Özel Artı Bir Özel Öğretim Kursu - Çukurova / ADANA (2019-2020)

Özel Reşatbey Yeni Nesil Kişisel Gelişim Kursu - Seyhan / ADANA (2020 - Halen)