İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İÇEREN CONFORMABLE KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE EKSTREM ÇÖZÜM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kefser KIZILTEN

Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İÇEREN CONFORMABLE KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE EKSTREM ÇÖZÜM

Kefser KIZILTEN

Danışman

Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Kefser KIZILTEN tarafından hazırlanan "İntegral Sınır Koşulları İçeren Conformable Kesirli Diferensiyel Denklemlerde Extrem Çözüm" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13 / 08 / 2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13 / 08 / 2021

Kefser KIZILTEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İÇEREN
CONFORMABLE KESİRLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERDE EKSTREM ÇÖZÜM

Kefser KIZILTEN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde gerekli temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise conformable kesirli diferensiyel denklemler olarak adlandırılan kesirli diferensiyel denklemlerin monoton yineleme tekniğini kullanarak ekstrem çözümlerin varlığı incelenmiştir. Dördüncü bölüm de Riemann-Stieltjes integral sınır koşullarını içeren conformable kesirli diferensiyel denklemlerin pozitif çözümleri incelenmiştir. Beşinci bölümde ise tartışma ve sonuca yer verilmiştir.

2021, iv + 31 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev, Conformable Kesirli Diferensiyel Denklem, Genişleme ve Sıkıştırma Teoremi, Sabit Nokta Teoremi, Monoton Fonksiyon

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THE EXTREMAL SOLUTION TO CONFORMABLE FRACTIONAL DIFFERANTIAL EQUATIONS INVOLVING INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

Kefser KIZILTEN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Applied Mathematics
Supervisor: Prof. Umut Mutlu ÖZKAN

This thesis study consists of five parts. The first chapter is devoted to the introduction and a general literature information is given. In the second chapter, necessary basic definitions and concepts are given. In the third chapter, the existence of extreme solutions by using monotone iteration technique of fractional differential equations called conformable fractional differential equations is examined. In the fourth chapter, positive solutions of conformable fractional differential equations including Riemann-Stieltjes integral boundary conditions are studied. In the fifth chapter, discussion and conclusion are included.

2021, iv + 31 pages

Keywords: Fractional Derivative, Conformable Fractional Differential Equation,Extension and Compression Theorem, Fixed Point Theorem, Monotone Function

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve yürütülmesinde değerli görüşlerinden faydalandığım, tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve arkadaşlarım Tuğba ÇINAR ve Merve KARAÇULHA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım

Kefser KIZILTEN

Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER ve KISALTMALAR v
1. GİRİŞ 1
2. TANIM ve TEOREMLER 3
3.İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İÇEREN CONFORMABLE KESİRLİ DİFERENSİYE DENKLEMLERDE EKSTRE ÇÖZÜM…………………………….....8
4.İNTEGRALLENEBİLEN KESİRLİ DİFERENSİYAL DENKLEMLERİN İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İLE POZİTİF ÇÖZÜMLERİ.............................. 16
5. TARTIŞMA ve SONUÇ 26
6. KAYNAKLAR 27
7. ÖZGEÇMİŞ 31

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	:Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	:Doğal Sayılar Kümesi
$\mathfrak{B}$	:Banach Alanı
T_α	:$\alpha -$ mertebeden Uyumlu Kesirli Türev
D_α	:$\alpha -$ mertebeden Lineer Uyumlu Kesirli Türev
$D_\alpha u(t)$	: Lineer Kesirli Türevin Alt Çözümü
I_α	:$\alpha -$ mertebeden Uyumlu Kesirli İntegral
I_α^a	:$\alpha -$ mertebeden Sol Uyumlu Kesirli İntegral
$\beta(x,y)$	:Beta Fonksiyonu
$\Gamma_k(x)$	:Gama Fonksiyonu

Kısaltmalar

BVP	Sınır Değer Problemleri

1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral, Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesidir. Kesirli mertebeden türev ile ifade edilmek istenen aslında herhangi bir mertebeden türevdir. Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları tamsayı mertebeden türev ve integral kavramları kadar eski olup, kesirli türev ifadesi birçok kaynakta da belirtildiği gibi ilk defa 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı mektupta geçmektedir. Leibniz'in mektubunda L'Hospital'a yönelttiği "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferensiyel kavramının ilk ortaya çıkışı olarak gösterilebilir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi de aynı konu üzerine çalışmışlardır. O zamandan beri, kesirli türev kapsamlı bir şekilde incelenmiştir ve son kırk yılda neredeyse her bilim, mühendislik ve matematik alanına uygulanmıştır.

Mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi birçok alanda eldeki problemin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin kurulması oldukça önemlidir. Bu modellemelerde ortaya konulan problemlerin çözülebilmesi ihtiyacı karşımıza diferensiyel denklemleri çıkartmaktadır. Doğada var olan problemlerin modellemesinde tamsayı mertebeli diferensiyel denklemler ile fiziksel olayları açıklamadaki eksiklikleri giderebilmesi ve bu problemlerin daha iyi modellenebilmesi için kesirli mertebeli diferensiyel denklemler kullanılmaktadır.

Kesirli türev için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville (R-L), Caputo, Grünwald-Letnikov, Wely, Riesz kesirli türevleridir. Ancak, kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türev, mertebesi tamsayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade tam sayı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır. Yapılan bazı çalışmalarda belirli şartlar altında bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen, tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları farklılık gösterir. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanının kullanılmasını ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar.

$\alpha \in (0,1)$ mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds$$

şeklinde tanımlanmıştır. Standart başlangıç koşullarına sahip kesirli başlangıç değer problemlerinin olası çözümlerini elde etmek amacıyla Riemann-Liouville kesirli türevi yeniden yorumlanarak

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau$$

şeklinde Caputo kesirli türev tanımı türetilmiştir. Bu nedenle günümüzde uygulamalı bilimciler tarafından en çok rağbet edilen tanım Caputo kesirli türevidir.

Son zamanlarda Khalil ve arkadaşları kesirli türev ve kesirli integralin yeni bir tanımını sundular. Bu yeni tanımın klasik analizde verilen klasik türevin özeliklerini sağladığını ve klasik türev tanımındaki gibi bir limit formundan yararlandığını göstermişlerdir. Çalışmalarında, bu yeni kesirli türev tanımı için çarpım kuralını, bölüm kuralını, zincir kuralını, kesirsel Rolle teoremini ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sundular (Khalil 2014).

Conformable kesirli diferensiyel denklemlerin başlangıç değer problemleri (Bayour ve Souahi 2017)'de tartışılmıştır ve bazı spesifik conformable kesirli kısmi diferensiyel denklemlere analitik çözümler de incelenmiştir. Conformable kesirli diferensiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin (kısaca BVP) tartışılması için bazı teorik gelişmelerde sağlanmıştır. Özellikle, bazı conformable sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler (Abdeljawad 2017 ve 2018); (Al-Rifae 2017)'de düzenli olarak conformable kesirli Sturn-Liouville özdeğer teoremi düşünülmüştür. Topolojik transversite teoremi kullanılarak bazı iki noktalı kesirli BVP'nin çözülebilirliği dikkate alınmıştır; sabit nokta teoremleri ile bir tür üç noktalı kesirli BVP (Asawasamrit 2016) da incelenmiştir: Alt ve üst çözümlerin metotları sayesinde bir periyodik BVP sınıfı (Asawasamrit 2016)'da tartışılmıştır. Operatörlerin yaklaşım yöntemlerini ve sabit nokta teoremlerini uygulayarak Xiaoyu Dong ve ark. (Dong 2017), iki nokta spesifik bir p-Laplacian BVP tipine pozitif çözümlerin varlığını araştırmıştır.

2. TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan tanım ve teoremler verilecektir. Burada ele alınacak teoremlerin ispatları, literatürde ayrıntılı bir şekilde verildiği için ayrıca yapılmamıştır.

Tanım 2.1 Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferensiyel denklem denir. Dolayısıyla kesirli diferensiyel denklemler, tamsayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferensiyel denklemlerdir.

Örnek 2.1 $xD^{1/2}y(x) - D^{2/3}y(x) - y(x) = \cos(x)$ (2.1)

Yukarıda verilen (2.1) denklemi kesirli diferensiyel denklemdir.

Kesirli diferensiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

a) Adi Kesirli Diferensiyel Denklemler

Örneğin:
$$D^{1/3}y(x) + 4y^2(x) = 5 \tag{2.2}$$
$$D^{1/2}y(z) + D^{1/2}x(z) = z \tag{2.3}$$
$$D^{3/2}y(t) + D^{1/2}y(t) - 2y(t) = 0 \tag{2.4}$$

b) Kısmi Kesirli Diferensiyel Denklemler

Örneğin:
$$D_t^{1/2}u(y,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} \tag{2.5}$$

Tanım 2.2 $\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır. Burada $Re > 0$ ve $z \in \mathbb{C}/\{0,-1,-2,...\}$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) = z!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx\, \Gamma(p)\Gamma(1-p) \frac{\pi}{sinp\pi} \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

Tanım 2.3 Birçok durumda gama fonksiyonunun belirli bir kombinasyonu yerine beta işlevini kullanmak daha uygundur.

Beta fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Beta fonksiyonun tanımından yola çıkarak

$$B(x+1,y+1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}dt$$

eşitliği elde edilir.

$B(x,y)$ nin tanımı için verilen üç ayrı ifade şunlardır:

1) $B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}(sin\theta)^{2x-1}cos\theta^{2y-1}d\theta$

2) $B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$

3) $B(x.y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Tanım 2.4 $n\in\mathbb{N}$, $n-1<\alpha\leq n$ olmak üzere $\alpha>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ için reel bir fonksiyonun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$(D_a^{\alpha}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\int_a^z\frac{f(x)}{(z-x)^{\alpha-n+1}}dx$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 $\alpha>0$ için α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$\left(\mathrm{J}_{a^+}^{\alpha}f\right)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-z)^{\alpha-1}f(z)dz \qquad x>a$$

$$(\mathrm{J}_{b^-}^{\alpha}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b(z-x)^{\alpha-1}f(z)dz \qquad x<b$$

α. mertebeden ($\alpha>0$) sol taraflı ve sağ taraflı şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(z)$ gama fonksiyonudur ve $\alpha=1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür.

Ayrıca $\alpha=0$ için $\left(\mathrm{J}_{a^+}^{\alpha}f\right)(z)=(\mathrm{J}_{b^-}^{\alpha}f)(z)=f(z)$ dir.

Tanım 2.6 (Khalil 2014, Abdeljawad 2015) $\alpha \in (0,1]$ olsun. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeden conformable kesirli türevi

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\in \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\in}$$

dir. $(0, b)$ üzerinde $T_\alpha f(t)$ varsa, $T_\alpha f(0) = \lim_{t\to 0} T_\alpha f(t)$ dir.

Tanım 2.7 (Khalil 2014, Abdeljawad 2015) $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeden conformable kesirli integrali

$$I_\alpha f(t) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t-s)^n s^{\alpha-n-1} f(s) ds$$

dir.

Lemma 2.1 (Abdeljawad 2015) $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ise, $t > 0$ için

$$I_\alpha D_\alpha f(t) = f(t)$$

dir.

Lemma 2.2 (Khalil 2014) $\alpha \in (0,1]$, $I_1, I_2, q, k \in \mathbb{R}$ ve f, h fonksiyonları $[0,+\infty)$ türevlenevilir.

i. $D_\alpha k = 0$ tüm sabit noktalar için $f(t) = k$;

ii. $D_\alpha(l_1 f + l_2 f) = l_1 D_\alpha f(t) + l_1 D_\alpha h(t)$;

iii. $D_\alpha t^q = q t^{q-\alpha}$;

iv. $D_\alpha(fh) = f(t) D_\alpha h(t) + h(t) D_\alpha f(t)$;

v. $D_\alpha \left(\frac{f}{h}\right) \frac{h D_\alpha f - f D_\alpha h}{h^2}$, $\quad h(t) \neq 0$

Teorem 2.1 (Khalil 2014) (Ortalama Değer Teoremi) $[a, b] \subset [0, +\infty)$ olsun ve $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ olsun. Varsayalım ki

1) $f, [a, b]$ üzerinde süreklidir.

2) $f, [a, b]$ deki bazı $\alpha \in (0,1]$ için α türevlenebilir.

Sonra bir sabit $\zeta \in (a, b)$ vardır, öyle ki

$$D_\alpha f(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha}$$

dır. Yani; Lemma 2.2'nin (iv).maddesidir.

Teorem 2.2 (Shapiro 1999, Arzela-Ascoli Teoremi) [0,1] aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi düzgün sınırlı ve eşsürekli ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin düzgün yakınsak bir $(f_n)_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır.
İspat İspatı 3 adımda yapacağız.

$\underline{1. Adım}$: Bir $X = [0,1]$ kompakt metrik uzayının ayrılabilir olduğunu yani sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olduğunu gösterelim.X kompakt metrik uzay olsun. O halde $n \in \mathbb{N}$ için

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde $S_n = \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset [0,1]$ sonlu kümesi mevcuttur.

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

olarak alalım. S kümesi X'in sayılabilir ve yoğun bir alt kümesidir.

$\underline{2. Adım}$: Bu adımda (f_n) dizisinin S üzerinde noktasal yakınsak olan bir alt dizisini bulacağız.
S ayrılabilir olduğundan S $= \{x_1, x_2, \ldots\}$ olarak yazılabilir. Hipotezden (f_n) sınırlı dizi olduğundan $\big(f_n(x_1)\big)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır, bu alt dizi $\big(f_{1,n}(x_1)\big)$ olsun. $(f_{1,n})$ dizisi de sınırlı olduğundan $\big(f_{1,n}(x_2)\big)$ sayı dizisi de sınırlıdır. Bolzano Weierstrass Teoreminden $\big(f_{1,n}(x_2)\big)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır, bu dizi $\big(f_{2,n}(x_2)\big)$ olsun.
Dikkat edilirse $(f_{2,n})$ dizisi $(f_{1,n})$ dizisinin alt dizisi olup x_1 ve x_2 noktalarında yakınsaktır. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{matrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots \\ & . & \\ & . & \end{matrix}$$

.

$$f_{n,1} \quad f_{n,2} \quad \cdots \quad \cdots$$

elde edilir ve n.satır $(n-1)$. satırın alt dizisi olup $x_1, x_{2,} \dots x_n$ noktalarında yakınsaktır. O halde $(f_{n,n})$ diyagonal dizisi (f_n) dizisinin $\boldsymbol{S}$ üzerinde yakınsak olan bir alt dizisidir.

<u>$3.\,Adım$</u>: Bir önceki adımda bulduğumuz (g_n) diyagonal dizisinin X üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

Eşsüreklilikten, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ mevcut öyle ki $d(x,y) < \delta$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

sağlanır. $M > \frac{1}{\delta}$ olacak şekildeki $M \in \mathbb{N}$ doğal sayısını sabitleyip, $S_M \subset S$ sonlu kümesini göz önüne alalım. (g_n) diyagonal dizisi S üzerinde noktasal yakınsak olup S_M üzerinde de noktasal yakınsaktır. O halde (g_n) diyagonal dizisi S_M üzerinde Cauchy dizisi olup her $s \in S_M$ için bir $N > 0$ mevcut öyle ki her $n, m > N$ için

$$|g_n(s) - g_m(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gerçeklenir.

Her $n, m > M$ için $x \in X$ sabit olsun. O zaman x elemanı için 1.adımdan $d(x,S) < \delta$ olur ki

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(s)| + |g_n(s) - g_m(s)| + |g_m(s) - g_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde (f_n) dizisinin (g_n) alt dizisi X üzerinde düzgün Cauchy dizisidir.

$C(X)$ tam uzay olduğundan, (g_n) dizisi X üzerinde düzgün yakınsaktır.

Sonuç 2.1 X kompakt metrik uzay ve X üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C(X)$ olsun. $A \subset C(X)$ olmak üzeri A kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart koşul A kümesinin kapalı, düzgün sınırlı ve eş sürekli olmasıdır. (Shapiro 1999).

3. İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İÇEREN CONFORMABLE KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE EKSTREM ÇÖZÜM

Bu bölümde, Meng ve Cui tarafından 2019 yılında yayımlanmış integral sınır koşullarını içeren conformable kesirli diferensiyel denklemler için ekstrem çözümlerin varlığı konusu incelenecektir.

Aşağıdaki varsayımlar kolaylık sağlamak için listelenmiştir.

(H_1): $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ süreklidir.

(H_2): $v_0, w_0 \in E = C[0,1]$ fonksiyonları (3.1) probleminin alt ve üst çözümleridir ve $v_o(t) \le w_o(t)$ dir.

(H_3): $v_o \le x \le \varphi \le w_o(t)$ olmak üzere,

$$f(t,x) - f(t,\varphi) \le M(t)(\varphi - x),$$

koşulunu sağlayan $\Delta_\alpha > 0$ için bir $M \in E$ fonksiyonu vardır.

Üst ve alt çözümler yöntemini ve bununla ilişkili monoton yineleme tekniğini kullanarak, integral sınır koşulunu içeren, $f \in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{cases} D_\alpha u(t) = f\big(t, x(t)\big), \ t \in [0,1] \\ u(0) = \int_0^1 x(t)d\mu(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

lineer olmayan conformable kesirli diferensiyel denklemi için çözümlerin varlığı bilinmektedir. Burada $\int_0^1 x(t)d\mu(t)$ integrali, pozitif Stieltjes μ-ölçüsüne sahip Riemann-Stieltjes integralidir. $D_\alpha f(t)$ ise conformable kesirli türevi ifade eder. Bir karşılaştırma sonucuna göre, üst ve alt çözümler kullanılarak iki monoton yinelemeli dizi elde edilir ve bu iki dizi verilen problemin uç çözümlerine yaklaşır. Şimdi bu özeti daha ayrıntılı bir şekilde inceleyelim.

Tanım 3.1 Eğer bir $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ fonksiyonu,

$$D_\alpha u(t) \le f\big(t, u(t)\big), \quad t \in [0,1] \tag{3.2}$$

$$u(o) \le \int_0^1 u(t)d\,\mu(t) \tag{3.3}$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa, u fonksiyonuna (3.1) in alt çözümüdür denir.

Eğer, (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri yön değiştirirse, $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ fonksiyonu (3.1) probleminin bir üst çözümüdür

Lemma 3.1 $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $M, N \in C([0,1], \mathbb{R})$ olsun.

$\Delta_\alpha = 1 - \int_0^1 e^{-\int_0^t s^{\alpha-1} M(S) ds} d\mu(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{cases} D_\alpha u(t) = -M(t)u(t) + N(t), \quad t \in [0,1] \\ u(0) = \int_0^1 u(t) d\mu(t) + a \end{cases} \tag{3.4}$$

integral sınır koşulları içeren lineer kesirli diferensiyel denkleminin bir tek çözümü vardır.

İspat (3.4) ün birinci denkleminin her iki tarafı $e^{\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds}$ ile çarpılır ve Lemma 2.2 kullanılırsa

$$e^{\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds} D_\alpha u(t) + M(t)u(t) e^{\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds} = N(t) e^{\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds}$$

elde edilir. Çarpımın diferensiyelinden yukarıdaki eşitlik

$$D_\alpha \left[e^{\int_o^t s^{\alpha-1} M(s) ds} u(t) \right] = N(t) e^{\int_o^t s^{\alpha-1} M(s) ds} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılır. (3.5) in her iki tarafına α basamaktan conformable kesirli integral uygulanırsa,

$$e^{\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds} u(t) - u(0) = I_\alpha \left[N(t) e^{\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds} \right]$$

$$= \int_0^t s^{\alpha-1} N(s)\, e^{\int_o^s \tau^{\alpha-1} M(\tau) d\tau} ds$$

bulunur. Buradan

$$u(t) = e^{-\int_0^t e^{\alpha-1} M(s) ds} [u(0) + \int_0^t s^{\alpha-1} N(s) e^{\int_0^s \tau^{\alpha-1} M(\tau) d\tau} ds] \tag{3.6}$$

elde edilir.

(3.4) ün sınır şartları ile

$$\left(1 - \int_0^1 e^{-\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds} d\mu(t)\right) u(o)$$

$$= \int_0^1 e^{-\int_0^t s^{\alpha-1} M(s) ds} \int_0^t s^{\alpha-1} N(s) e^{\int_0^s \tau^{\alpha-1} M(\tau) d\tau} ds d\mu(t) + a$$

yazılır. $\Delta_\alpha \neq 0$ olduğundan

$$u(o) = \frac{\int_o^1 e^{-\int_o^t s^{\alpha-1} M(S) ds} \int_0^t s^{\alpha-1} N(s) e^{\int_0^s \tau^{\alpha-1} M(\tau) d\tau} ds d\mu + a}{1 - \int_0^1 e^{-\int_0^1 s^{\alpha-1} M(s) ds} d\mu(t)}$$

dır. Böylece problem (3.4) tek bir çözüme sahiptir.

Bir sonraki Lemma da temel sonuçların ispatında önemli bir rol oynayacak lineer problemler için karşılaştırma sonuçları verilmiştir.

Lemma 3.2 $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Kabul edelim ki $M, u \in C([0,1], \mathbb{R})$ fonksiyonları

$$\begin{cases} D_\alpha u(t) \leq -M(t)u(t) \quad , \quad t \in [0,1] \\ u(o) \leq \int_0^1 u(t)d\mu(t) \end{cases}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda $\Delta_\alpha > 0$ olmak üzere, $[0,1]$ aralığında

$$u(t) \leq 0$$

dır.

İspat $N(t) = D_\alpha u(t) + M(t)u(t)$ ve $a = u(o) - \int_0^1 u(t)d\mu(t)$ olduğundan $N(t) \leq 0$, $a \leq 0$ ve

$$\begin{cases} D_\alpha u(t) = -M(t)u(t) + N(t), \qquad t \in [0,1] \\ \quad u(0) = \int_0^1 u(t)d\mu(t) + a \end{cases}$$

olduğu bilinir. $\Delta_\alpha > 0$ kullanarak

$$u(o) = \frac{\int_0^1 e^{-\int_0^t s^{\alpha-1}M(s)ds} \int_o^1 s^{\alpha-1}N(s)e^{\int_o^s \tau^{\alpha-1}M(\tau)d\tau} ds d\mu(t) + a}{1 - \int_0^1 e^{-\int_0^1 s^{\alpha-1}M(s)ds} d\mu(t)} \leq 0$$

elde edilir. Bu durumda (3.6) eşitliğinden

$$u(t) \leq e^{-\int_o^t s^{\alpha-1}M(s)ds} u(0) \leq 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 Kabul edelim ki $(H_1), (H_2), (H_3)$ sağlansın. Bu durumda $\{v_n\}_{n=0}^\infty$, $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ monoton yinelemeli dizileri mevcuttur öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad , \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w$$

yakınsamaları $[0,1]$ aralığında düzgündür ve $[v_o, w_o] = \{g \in E : v_o(t) \leq g(t) \leq w_o(t), \ \ 0 \leq t \leq 1\}$ bölgesinde v, w (3.1) probleminin ekstremal(uç) çözümleridir.

İspat $v_{n,} w_n \in E$ için

$$\begin{cases} D_\alpha v_{n+1}(t) = f\big(t, v_n(t)\big) - M(t)\big(v_{n+1}(t) - V_n(t)\big) \\ D_\alpha w_{n+1}(t) = f\big(t, w_n(t)\big) - M(t)\big(w_{n+1}(t) - w_n(t)\big) \\ v_{n+1}(0) = \int_0^1 v_{n+1}(t)d\mu(t), \quad w_{n+1}(0) = \int_0^1 w_{n+1} d\mu(t) \end{cases} \tag{3.7}$$

olsun. Böylece $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ yinelemeli dizileri Lemma 3.1 yardımıyla oluşturulabilir. İlk olarak;

$$v_n \leq v_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \, , \qquad n = 0,1,2, \dots$$

olduğu gösterilmelidir. $p = v_o - v_1$ olsun. (3.7) ve Tanım 3.1 e göre

$$\begin{cases} D_\alpha p(t) = D_\alpha v_v(t) - D_\alpha v_1(t) \le f\big(t, v_o(t)\big) - f\big(t, v_1(t)\big) + M(t)\big(v_1(t) - v_o(t)\big), \quad t \in [0,1\} \\ \quad p(0) \le \displaystyle\int_0^1 v_o(t) d\mu(t) - \int_0^1 v_1(t) d\mu(t) \end{cases}$$

yani

$$\begin{cases} D_\alpha p(t) \le -M(t) p(t), \quad t \in [0,1] \\ \quad p(0) \le \displaystyle\int_0^1 p(t) d\mu(t) \end{cases}$$

dir. Bu nedenle Lemma 3.2 den $v_0(t) \le v_1(t)$ dir. Benzer şekilde $t \in [0,1]$ için

$w_1(t) \le w_0(t)$ olduğunu kanıtlanabilir. Şimdi $r = v_1 - w_1$ olsun. (3.7) ve (H_3) e göre

$$\begin{cases} D_\alpha r(t) = f\big(t, v_0(t)\big) - f\big(t, w_o(t)\big) - M(t)(v_!(t) - v_0(t) - w_1(t) + w_0(t)) \\ \qquad \le M(t)\big(w_0(t) - v_o(t)\big) - M(t)(v_1(t) - v_o(t) - w_1(t) + w_o(t) \\ \qquad = -M(t) r(t) \\ \quad r(0) = \int_0^1 r(t) d\mu(t) \end{cases}$$

dir.

Lemma 3.2 den $t \in [0,1]$ için $v_1(t) \le w_1(t)$ dır.

İkinci olarak v_1, w_1 nin sırasıyla (3.1) in alt ve üst çözümleri olduğunu gösterilmelidir.

$$\begin{cases} D_\alpha v_1(t) = f\big(t, v_0(t)\big) - M(t)\big(v_1(t) - v_o(t)\big) - f\big(t, v_1(t)\big) + f(t, v_1(t)) \\ \qquad \le M(t)\big(v_1(t) - v_0(t)\big) - M(t)\big(v_1(t) - v_0(t)\big) + f\big(t, v_1(t)\big) \\ \qquad = f\big(t, v_1(t)\big), \\ \quad v_1(0) = \displaystyle\int_0^1 v_1(t) d\mu(t) \end{cases}$$

dir. (H_3) ve Tanım 3.1 e göre, v_1, (3.1) in bir alt çözümüdür. Benzer şekilde w_1 de (3.1) in bir üst çözümüdür. Yukarıdaki argümanlar ve matematiksel tümevarımla

$$v_0 \le \cdots \le v_n \le v_{n+1} \le w_{N+1} \le w_n \le \cdots \le w_0, \quad n = 0,1,2,... \qquad (3.8)$$

olduğu açıktır.

Üçüncü olarak; $\lim_{n\to\infty} v_n = n$, $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ olduğu gösterilmelidir. Dolayısıyla v_n, w_n nin [0,1] aralığında düzgün sınırlı ve sürekli olduğu sonucuna ihtiyaç vardır. v_n, w_n dizilerin düzgün sınırlılığı (3.8) den açıktır. Böylece

$$\left|f\big(t, v_n(t)\big) - M(t)(v_{n+1}(t) - v_n(t))\right| \leq L$$

ve

$$|f(t, w_n(t) - M(t)(w_{n+1}(t) - w_n(t))| \leq L$$

olacak şekilde $L > 0$ mevcuttur. Teorem 2.1 kullanarak,

$$|v_n(t_1) - v_n(t_2)| = \frac{1}{\alpha}\left|D_\alpha v_n(\zeta)\right| \left|t_1^\alpha - t_2^\alpha\right|$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left|f\big(\zeta, v_{n-1}(\zeta)\big) - M(\zeta)\big(v_n(\zeta) - v_{n-1}(\zeta)\big)\right| \left|t_1^\alpha - t_2^\alpha\right|$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\{v_n\}$ süreklidir. Benzer şekilde $\{w_n\}$ de süreklidir. Arzela-Ascoli Teoremlerinden $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ dizileri $\{v_{n_k}\}, \{w_{n_k}\}$ alt dizilerine sahiptir öyle ki $k \to \infty$ için $\{v_{n_k}\} \to v$ ve $\{w_{n_k}\} \to w$ dir. Buradan $\{v_n\}, \{w_n\}$ dizilerinin monotonluğu ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v(t) \ , \ \lim_{n\to\infty} w_n(t) = w(t)$$

olduğu elde edilir.

Buradaki $\{v_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} v_n(t) = e^{-\int_0^t s^{\alpha-1} M(s)ds}[v_{n-1}(0) + Rv_{n-1}(t)], & t \in [0,1] \\ v_n(0) = \int_0^1 v_n(t)d\mu(t), \ \ n = 1,2, \ldots \end{cases} \tag{3.9}$$

problemini sağlar. Burada

$$R_{v_{n-1}}(t) = \int_0^t s^{\alpha-1}[f\big(t, v_{n-1}(s)\big) + M(s)v_{n-1}(s)]e^{\int_0^s \tau^{\alpha-1}M(\tau)d\tau}ds$$

dir. Eğer (3.9) da $n \to \infty$ ise,

$$\begin{cases} v(t) = e^{-\int_0^t s^{\alpha-1} M(s)ds}[v(0) + R_v(t)], & t \in [0,1] \\ v(0) = \int_0^1 v(t)d\mu \end{cases}$$

bulunur. Bu v nin (3.1) lineer olmayan probleminin bir çözümü olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde w nin (3.1) lineer olmayan probleminin bir çözümü olduğu görülür. Ayrıca

$$v_0(t) \leq v(t) \leq w(t) \leq w_0(t), \qquad t \in [0,1]$$

dir.

Son olarak; $[v_o, w_o]$ bölgesinde v ve w nin (3.1) in minimal ve maksimal çözümleri olduğu gösterilecektir. Aşağıda bu tümevarım kullanılarak gösterildi.

Kabul edelim ki $g(t)$, $[v_o, w_o]$ da (3.1) probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$v_0(t) \leq g(t) \leq w_0(t), \qquad t \in [0,1]$$

yazılır. $v_n(t) \leq g(t) \leq w_n(t)$ sağlansın.

Eğer $p(t) = v_{n+1}(t) - g(t)$ ise,

$$\begin{cases} D_\alpha p(t) = D_\alpha v_{n+1}(t) - D_\alpha g(t) \\ \qquad = f\big(t, v_n(t)\big) - M(t)\big(v_{n+1}(t) - v_n(t)\big) - f(t, g(t)) \\ \qquad \leq M(t)\big(g(t) - v_n(t)\big) - M(t)(v_{n+1}(t) - v_n(t) \\ \qquad = -M(t)p(t), \\ p(0) = \int_0^1 p(t) d\mu(t) \end{cases}$$

dir.

Böylece Lemma 3.2 den $v_{n+1} \leq g(t)$, $t \in [0,1]$ elde edilir. Benzer bir yöntemle $g(t) \leq w_{n+1}(t)$, $t \in [0,1]$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak

$$v_n \leq g \leq w_n \,, \quad n = 1,2, \dots$$

dir.

Yukarıdaki eşitsizliklerde $n \to \infty$ alınırsa $v \leq g \leq w$ elde edilir. Bu ise v, w nin $[v_0, w_0]$ de (3.1) problemin uç nokta çözümleri olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1

$$\begin{cases} D_{\frac{1}{2}}x(t) = -\frac{2}{9}(1+x(t))^3 + 9sin\frac{x^2(t)}{4}, \quad t \in [0,1] \\ x(0) = \frac{1}{3}x\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}x\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

lineer olmayan problemi göz önüne alınsın.

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [0,\frac{1}{4}) \\ \frac{1}{3}, \quad t \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, \quad t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

olsun.

Açıktır ki; $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(t,x) = -\frac{2}{9}(1+x)^3 + 9sin\frac{x^2}{4}$ ve

$$\int_0^1 x(t)d\mu\,(t) = \frac{1}{3}x\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}x\left(\frac{1}{2}\right)$$

dir. Burada $x(t) = 1$ olduğunda

$$\int_0^1 d\mu(t) = \frac{1}{2}$$

bulunur. $v_o(t) = -2$, $w_0(t) = 0$ alınırsa,

$$\begin{cases} D_{\frac{1}{2}}v_0(t) = 0 < \frac{2}{9} + 9sin1 = f\big(t, v_0(t)\big), \\ v_o(0) = -2 < -1 = \int_0^1 v_0(t)d\mu(t), \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} D_{\frac{1}{2}}w_o(t) = 0 > -\frac{2}{9} = f\big(t, w_o(t)\big), \\ w_o(0) = 0 = \int_0^1 w_0(t)\,d\mu(t) \end{cases}$$

olur.

Böylece v_o, w_0 (3.10) probleminin alt ve üst çözümleridir. $M(t) = 1$ olduğunda (H_3) varsayımının geçerli olduğu doğrulanmış olur. Ek olarak,

$$\int_0^1 e^{-\int_0^t s^{\alpha-1}M(s)ds}d\mu(t) = \int_0^1 e^{-t^{\frac{1}{2}}}d\mu(t) < \int_0^1 d\mu(t) = \frac{1}{2} < 1$$

dir.

Teorem 3.1 e göre, problem (3.10) $[v_0, w_0]$ da ekstremal tekrarlanan çözüme sahiptir.

4. CONFORMABLE KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN İNTEGRAL SINIR KOŞULLARI İLE POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Zhong ve Wang. tarafından 2018 yılında yayımlanmış conformable kesirli diferensiyel sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerin varlığı konusu incelenecektir. Conformable kesirli diferensiyel denklemlerin pozitif çözümlerinin varlığını incelemek için $\alpha \in (1,2]$ olmak üzere,

$$\begin{cases} T_\alpha x(t) + f\big(t, x(t)\big) = 0\ ;\ \ t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \qquad\qquad x(1) = \mathcal{L}(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada T_α, conformable kesirli türevi ifade eder. λ pozitif bir parametre olmak üzere $\mathcal{L}(x) = \lambda \int_0^1 x(t)dt$ dir ve $f: [\alpha, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu süreklidir.

Conformable kesirli türevler bağlamında, literatürde, integral sınır koşullarına sahip conformable kesirli diferensiyel denklemlere pozitif çözümün varlığı için çok az sonuç elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen Green fonksiyonun tekil olduğunu belirtmek gerekir. Elde edilen koşullar klasik norm tipi genişleme ve sıkıştırma teoremi kullanılarak elde edilen koşullardan daha zayıftır. Son olarak, elde edilen sonuçların olası uygulamasını göstermek için bir örnek verilmiştir.

Lemma 4.1 $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Kabul edelim ki f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında süreklidir. Bu durumda $t > 0$ için

$$T_\alpha I_\alpha f(t) = f(t)$$

dir.

Lemma 4.2 $\alpha \in (n, n+1]$, $0 \leq t \leq 1$ ve $k = 1,2, \ldots, n$ için

$$T_\alpha t^k = 0$$

elde edilir.

Lemma 4.3 $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. $[0, \infty)$ aralığında $T_\alpha f(t)$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$I_\alpha T_\alpha f(t) = f(t) + c_o + c_1 t + \cdots + c_n t^n$$

dir. Burada c_k parametresi için $k = 1,2, \dots, n$ olduğu açıktır.

Lemma 4.3 den (4.1) sınır değer probleminin lineerleştirilmiş hali

$$\begin{cases} T_\alpha x(t) + h(t) = 0\,; \quad t \in [0,1] \\ \quad x(0) = 0 \qquad x(1) = \mathcal{L}(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır.

Lemma 4.4 Kabul edelim ki $h \in C[0,1]$ olsun. Eğer, $\lambda \neq 2$ ise (4.2) sınır değer probleminin $[0,1]$ aralığında tek çözümü

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s)h(s)ds \tag{4.3}$$

dir. Burada

$$K(t,s) = G(t,s) + H(t,s) \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} (1-t)s^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ ts^{\alpha-2}(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

ve

$$H(t,s) = \frac{2\lambda t}{2-\lambda}\int_0^1 G(\tau,s)d\tau \tag{4.6}$$

dir.

İspat h ın sürekliliği ve Lemma 2.3 den

$$x(t) = c_o + c_1 t - I_\alpha h(t)$$

sonucu elde edilir. Sınır koşulları ile birlikte $c_o = 0$ ve

$$c_1 = I_\alpha h(1) + \mathcal{L}(x)$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x(t) &= -I_\alpha h(t) + tI_\alpha h(1) + t\mathcal{L}(x) \\ &= -\int_0^t (t-s)s^{\alpha-2}h(s)ds + \int_0^t t(1-s)s^{\alpha-2}h(s)ds \\ &\quad + \int_t^1 t(1-s)s^{\alpha-2}h(s)ds + t\mathcal{L}(x) \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 G(t,s)h(s)ds + t\mathcal{L}(x) \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) nin her iki tarafına $\mathcal{L}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2}{2-\lambda}\int_0^1 G(t,s)h(s)ds \tag{4.8}$$

bulunur. Yukarıdaki ifade (4.7) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

G, H ve K fonksiyonları için birkaç önemli özellik aşağıdaki gibidir.

Lemma 4.5 $(0,1] \times (0,1]$ de herhangi bir (t,s) için

$$0 \leq q(t)G(s,s) \leq G(t,s) \leq G(s,s) \tag{4.9}$$

dir. Ayrıca λ parametresi, $[0,2)$ aralığında ise

$$0 \leq q(t)H(1,s) \leq H(t,s) \leq H(1,s) \tag{4.10}$$

$$0 \leq q(t).M(s) \leq K(t,s) \leq M(s) \tag{4.11}$$

olur. Burada $q(t) = t(1-t)$ ve $M(s) = G(s,s) + H(1,s)$ dir.

İspat G'nin tanımından $0 \leq s \leq t \leq 1$ için

$$G(t,s) = (1-t)s^{\alpha-1} \leq (1-s)s^{\alpha-1} = G(s,s)$$

ve $0 < t \leq s \leq 1$ için

$$G(t,s) = ts^{\alpha-2}(1-s) = \frac{t}{s}(1-s)s^{\alpha-1} \leq (1-s)s^{\alpha-1} = G(s,s)$$

dir. Böylece (0,1]×(0,1] de (t,s) için $G(t,s) \leq G(s,s)$ olduğu açıktır.
Üstelik $0 < s \leq t \leq 1$ için

$$G(t,s) = (1-t)s^{\alpha-1} \geq (1-t)s^{\alpha-1}(1-s) \geq q(t)G(s,s) \geq 0$$

ve $0 < t \leq s \leq 1$ için

$$G(t,s) = ts^{\alpha-2}(1-s) \geq ts^{\alpha-1}(1-s) \geq q(t)G(s,s) \geq 0$$

dir. Böylece

$$0 \leq q(t)G(s,s) \leq G(t,s) \leq G(s,s)$$

elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik ve H ve K tanımları (4.10) ve (4.11) eşitsizliklerini açıkça ortaya koymaktadır (Deimling 1985, Lan 1988).

Lemma 4.6 $\mathfrak{B}$ bir Banach uzayı $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{B}$ bir koni ve $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$olmak üzere Ω_1, Ω_2 $\mathfrak{B}$'nin orijin merkezli iki açık yuvarı olsun. kabul edelim ki

$$\Phi: \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$$

sürekli bir operatördür öyle ki;

$(C1)$ $\|\Phi x\| \leq \|x\|$, $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$.

$(C2)$ $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$ ve $\lambda > 0$ için $x \neq \Phi x + \lambda\Psi$ olacak şekilde $\Psi \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ vardır.

Bu durumda Φ, $\mathcal{P} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ içinde sabit bir noktaya sahiptir. $(C1)$ koşulu $\mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$ de ve $(C2)$ koşulu da $\mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ de geçerli olur.

Şimdi de sabit nokta teoremini kullanarak sınır değer problemlerinde çözümleri varlığını tartışmak için temel varsayım, $C[a,b]$ de bazı fonksiyon kümelerinin tanımı ve operatörler aşağıdaki şekilde verilsin:

(H) f fonksiyonu negatif olmayan ve $[0,1]x[0,\infty)$ üzerinde süreklidir ve λ parametresi $[0,2)$ aralığında olsun.

$\|x\| = sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$ normu ile $\mathfrak{B} = C[0,1]$ klasik Banach uzayı olsun. Ayrıca $\mathfrak{B}$'deki $\mathcal{P}$ konisi

$$\mathcal{P} = \left\{x \in \mathfrak{B} \,\middle|\, x(t) \geq q(t)\|x\|, \quad t \in [0,1]\right\}$$

dir. Burada $q(t)$ fonksiyonu Lemma 4.5 deki gibi tanımlanır. Pozitif bir r sayısı verildiğinde, $\mathfrak{B}$ uzayındaki Ω_r alt kümesi

$$\Omega_r = \{x \in \mathfrak{B}: \|x\| < r\}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\mathfrak{B}$ uzayından kendisine

$$(\Phi x)(t) = \int_0^1 K(t,s)\big(t, x(s)\big)ds \tag{4.12}$$

operatörü tanımlansın.Hipotez (H) altın da, operatör iyi tanımlıdır ve aşağıdaki özelliğe sahiptir.

Lemma 4.7 (H) hipotezi sağlansın. Bu durumda $\Phi(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ dir.

İspat $\mathcal{P}$'deki herhangi bir x için Φ nin tanımı ve (4.11) eşitsizliğinden

$$(\Phi x)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(t, x(s) ds \geq q(t) \int_0^1 M(s) f\big(t, x(s)\big)ds$$

ve

$$(\Phi x)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(t, x(s) ds \leq \int_0^1 M(s) f\big(t, x(s)\big)ds$$

olur. Böylece

$$(\Phi x)(t) \geq q(t)\|\Phi \mathrm{x}\|$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\Phi x \in \mathcal{P}$ dir. Bu ispat tamamlar.

Şimdi Φ operatörünün tamamen sürekliğini tartışalım. İlk olarak Φ operatörünü

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlansın. Burada Φ_1 ve Φ_2 operatörleri sırasıyla

$$(\Phi_1 x)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big)ds \tag{4.14}$$

$$(\Phi_2 x)(t) = \int_0^1 H(t,s) f\big(s, x(s)\big)ds \tag{4.15}$$

dir. Φ_1 ve $\Phi_2: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tamamen sürekli operatörler olduğu açıktır. Lemma 4.7 nin ispatına benzer bir argümanla, (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerini kullanarak $\Phi_1(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ ve

$\Phi_2(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ elde edilir. Ayrıca Φ_1'in $G(t,s)$ çekirdeğinin $[0,1]x[0,1]$ üzerinde tekil olduğu ve Φ_1 operatörün tamamen sürekliliği doğrulanmıştır (Dong 2016 ve 2017). Operatör Φ_2'ye gelince, Φ_2' nin $H(t,s)$ çekirdeği $[0,1]x[0,1]$ üzerinde sürekli ve standart argümanı kullanarak Φ_2 'nin tamamen sürekli olup olmadığını kolayca kontrol edilebilir. Böylece aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.8 Hipotez (H) geçerliyse, operatör $\Phi: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tamamen süreklidir.

Bir sonraki Lemma, (4.1) sınır değer problemini eşdeğer bir sabit notka problemine dönüştürür.

Lemma 4.9 Hipotez (H) sağlanıyor ise, $C[0,1]$ deki bir x fonksiyonu (4.1) sınır değer probleminin bir pozitif çözümüdür ancak ve ancak x, $\mathcal{P}$ de Φ nin sabit bir noktası ise.

İspat x , $\mathcal{P}$'de Φ nin sabit bir noktası ise,

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds = -I_\alpha f\big(t, x(t)\big) + t I_\alpha f\big(1, x(1)\big) + t\mathcal{L}(x), \tag{4.16}$$

dir ve böylece f in sürekliliği, Lemma 4.1, 4.2 ve 4.3 den

$$T_\alpha x(t) + f\big(t, x(t)\big) = 0$$

elde edilir.

Dahası, (4.16) eşitliğinden $x(0) = 0 \; ve \; x(1) = \mathcal{L}(x)$ olur. Bu nedenle x, (4.1) sınır değer probleminin pozitif bir çözümüdür. Diğer taraftan x, (4.1) sınır değer probleminin pozitif bir çözümü ise Lemma 4.4 den $\Phi x = x$ yazılır. Dahası Lemma 4.7'nin ispatındaki benzer bir argümanla, $t \in [0,1]$ için $x(t) \geq q(t)\|x\|$ elde edilir.. Böylece x, $\mathcal{P}$'de sabit bir Φ noktasıdır.

Ana sonuçları sunmadan önce, bazı gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$f_0 = \lim_{x\to 0} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} \qquad \text{ve} \qquad f^\infty = \lim_{x\to \infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x};$$

$$\Lambda_1 = \left(q(\delta) \int_\delta^{1-\delta} M(s) ds \right)^{-1} \qquad \text{ve} \qquad \Lambda_2 = \left(\int_0^1 M(s) ds \right)^{-1}$$

Burada δ, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ aralığında verilen pozitif bir sayıdır. $M(s)$ ve $q(t)$ fonksiyonları Lemma 4.5'teki gibi tanımlanır.

Teorem 4.1 (H) hipotezinin geçerli olduğunu varsayılsın. Eğer $f_o > \Lambda_1$ ve $f^{\infty} < \frac{n_2}{2}$ ise (4.1) sınır değer problemi en az bir pozitif çözüme sahip olur.

İspat Bu iddia Lemma 4.6 tarafından kanıtlanacaktır. Dikkat edilmelidir ki $\Phi: P \to P$ tamamen süreklidir. İlk önce Φ operatörünün Lemma 4.6'daki (C2) koşulunu sağladığı gösterilmelidir. $f_o > \Lambda_1$ olduğundan pozitif bir r_1 sayısı mevcuttur öyle ki $t \in [0,1]$ ve $0 \le x \le r_1$ için

$$f(t,x) \ge \Lambda_1 x$$

dir. Böylece $t \in [0,1]$ ve $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_1}$ için

$$f(t,x(t)) \ge \Lambda_1 x(t)$$

dir.

Şimdi $\Psi \equiv 1$ seçildiğinde açıkça bellidir ki Ψ fonksiyonu $\mathcal{P} \setminus \{0\}$'a aittir. Daha sonra belirli Ψ için, $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_1}$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere

$$x \ne \Phi x + \lambda\Psi$$

olduğu gösterilecek. Eğer durum böyle değilse o zaman $x_0 \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_1}$ fonksiyonu mevcuttur öyleki

$$x_0 = \phi x_0 + \lambda_0 \Psi$$

dir. Burada $\lambda_0 > 0$ dır.

$\overline{x_0} = min_{t\in[\delta,1-\delta]} x_0(t)$ olsun. Böylece (4.11) eşitsizliğinden $[\delta, 1-\delta]$ aralığındaki her t için

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \int_0^1 K(t,s) f(s,x_0(s))ds + \lambda_0 \\ &\ge \Lambda_1 q(t) \int_\delta^{1-\delta} M(s) x_0(s) ds + \lambda_0 \\ &\ge \Lambda_1 q(s) \int_\delta^{1-\delta} M(s) ds\, \overline{x_0} + \lambda_0 \\ &= \overline{x_0} + \lambda_0 \end{aligned}$$

dir.Böylece $\overline{x_0} \ge \overline{x_0} + \lambda_0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla operatör Φ Lemma 4..6'daki (C2) koşulunu sağlar.

Şimdi Φ operatörünün Lemma 4.6'daki (C1) koşulunun sağladığını gösterelim. $f^{\infty} < \frac{\Lambda_2}{2}$ kabulünden pozitif bir γ_1 sayısının vardır öyle ki $t \in [0,1]$ ve $x \geq \gamma_1$ için

$$f(t,x) \leq \frac{\Lambda_2}{2} x \tag{4.17}$$

dir. Şimdi $\gamma_2 = \max\{f(t,x): t \in [0,1],\ x \in [0,\gamma_1]\}$ olsun. Bu durumda (4.17) eşitsizliğinden $t \in [0,1]$ ve $x \geq 0$ için

$$f(t,x) \leq \frac{\Lambda_2}{2} x + \gamma_2 \tag{4.18}$$

elde edilir.

$r_2 = \max[2r_1, 2\gamma_2 \int_0^1 M(s)ds]$ ve $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_2}$ olsun. Lemma (4.5) ve (4.18) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|\Phi x\| &= max_{t\in[0,1]} \int_0^1 K(t,s) f\big(s,x(s)\big)ds \\
&\leq \int_0^1 M(s)\left(\frac{\Lambda_2}{2} x(s) + \gamma_2\right) ds \\
&\leq \frac{\Lambda_2}{2} \int_0^1 M(s)\, ds\|x\| + \gamma_2 \int_0^1 M(s)ds \\
&\leq \|x\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu sebeple Φ operatörü Lemma 4.6'daki (C1) koşulunu sağlar. Sonuç olarak, operatör Φ en az bir $x \in \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$ sabit noktasına sahiptir ve Lemma (4.9) dan x'in (4.1) sınır değer probleminin pozitif bir çözümüdür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 (H) hipotezinin geçerli olduğunu varsayılsın Eğer $f^0 < \Lambda_2$ ve $f_\infty > \Lambda_1$ ise (4.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

İspat İddia Lemma 4.6 ile gösterilecektir. Φ operatörünün tamamen sürekliliğin Lemma 4.8 tarafından garanti edilmektedir. Sadece Φ operatörünün Lemma 4.6'daki (C1) ve (C2) şartlarını yerine getirdiğini kanıtlanması yeterlidir.

$f^0 < \Lambda_2$ ve $f_\infty > \Lambda_1$ olduğundan iki pozitif sayı r_1 ve γ_1 vardır öyle ki

$$t \in [0,1] \text{ ve } 0 \leq x \leq r_1 \text{ için } f(t,u) \leq \Lambda_2 x \tag{4.19}$$

$$t \in [0,1] \text{ ve } x \geq \gamma_1 \text{için } f(t,x) \leq \Lambda_1 x \tag{4.20}$$

dir.

Lemma 4.5 ve (4.19) eşitsizliğinden $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_1}$ için

$$\|\Phi x\| = max_{t\in[0,1]} \int_0^1 K(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds \le \Lambda_2 \int_0^1 M(s)x(s)ds \le \|x\|$$

dir. Böylece Φ operatörü Lemma 4.6'daki $(C1)$ koşulunu sağlar.

Geriye Φ operatörünün Lemma 4.6'daki $(C2)$ koşulu da sağladığını göstermek kalır. Bu amaçla $r_2 = \max\{2r_1, \gamma, q^{-1}(\delta)\}$ olsun. Eğer $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_1}$ ise $t \in [\delta, 1-\delta]$ için

$$x(t) \ge q(t)\|x\| \ge q(\delta)r_2 \ge \gamma_1$$

dir.Dolayısıyla (4.20) eşitsizliğinden için $t \in [\delta, 1-\delta]$ için

$$f\big(t, x(t)\big) \ge \Lambda_1 x(t)$$

ve

$$x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_2}$$

dir.

$\Psi \equiv 1$ seçildiğinde açıkça bellidir ki Ψ fonksiyonu $\mathcal{P} \setminus \{0\}$'a aittir. Bu durumda iddia ediliyor ki $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_2}$ ve $\lambda > 0$ için

$$x \ne \Phi x + \lambda\Psi$$

dir.

Gerçekten önceki iddia doğru değilse $x_0 = \Phi x_0 + \lambda_0 \Psi$ olacak şekilde bir λ_0 pozitif sayısı vardır ve $x_0 \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_{r_2}$ dir.

$\overline{x_0} = min_{t\in[\delta,1-\delta]} x_0(t)$ olsun. (4.11) eşitsizliğinden her $t \in [\delta, 1-\delta]$ için

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \int_0^1 K(t,s)f(s,x_0(s))ds + \lambda_0 \\ &\ge \Lambda_1 q(t) \int_\delta^{1-\delta} M(s)\, x_0(s) ds + \lambda_0 \\ &\ge \Lambda_1 q(\delta) \int_\delta^{1-\delta} M(s)\, \overline{x_0} ds + \lambda_0 \\ &= \overline{x_0} + \Lambda_0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\overline{x_0} \ge \overline{x_0} + \lambda_0$ olur. Bu ise, Φ operatörünün Lemma 4.6'daki (C2) koşulunu sağlaması ile çelişir. Lemma 4.6 dan Φ operatörünün en az bir $x \in \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ sabit noktası olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla Lemma 4.9 dan sabit x noktası (4.1) sınır değer probleminin pozitif bir çözümüdür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1 Eğer $f_0 = \infty$ ve $f^\infty = 0$ yada $f^0 = 0$ ve $f_\infty = \infty$ ise o zaman (4.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

Örnek 4.1

$D = [0,1] \times [0,\infty)$, $f(t,x) = (t+1)(2+sinx)$ ve $\lambda \in [0,2)$ olsun. f fonksiyon negatif olmayan ve D'de sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca

$$f_0 = \lim_{x\to o} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to o} \left(\frac{2}{x} + \frac{sinx}{x}\right) = \infty$$

ve

$$f^\infty = \lim_{x\to o} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to o} \left(\frac{4}{x} + \frac{2sinx}{x}\right) = 0$$

dir.

Bundan dolayı, sonuç 4.1'deki ilgili koşullar, yukarıda belirtilen özel fonksiyonlar ve parametreler için sağlanır. Bu ise, (4.1) sınır değer probleminin $[0,1]$'de en az bir pozitif çözüme sahip olması demektir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada conformable kesirli diferensiyel denklemler için integral sınır değer problemi üzerinde, denklemin extrem çözümleri için mevcut sonuçlar incelenerek monoton tekrarlanan tekniğini kullanılmıştır. Aynı zamanda, üst ve alt çözümler kullanılarak iki dizi elde edilip bu iki dizi ile lineer olmayan diferensiyel denklemlerin extrem çözümlerine yaklaşılmıştır.

Dördüncü bölümümüzdeki çalışmada ise konide sabit nokta teoremini kullanarak, integral sınır koşullarına sahip conformable kesirli diferensiyel denklemlerin en az bir pozitif çözümünün varlığı için bazı kriterler elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Abdeljawad T, 2015, On Conformable Fractional Calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57–66.

Abdeljawad T, Alzabut J, Jarad F, 2017, A Generalized Lyapunov-Type Inequality in The Frame of Conformable Derivatives, Advances in Difference Equations, 321,

Abdeljawad T, Ravi P, Agarwal R P, Alzabut J, Jarad F, Zbekler A, 2018, Lyapunov-Type Inequalities for Mixed Non-linear Forced Differential Equations Within Conformable Derivatives, Journal of Inequalities and Applications, 143.

Abdeljawad T, 2017, Fractional operators with exponential kernels and a Lyapunov type inequality, Advances in Difference Equations, 313.

Abdeljawad T, 2017, A Lyapunov type inequality for fractional operators with nonsingular Mittag–Leffler kernel, Journal of Inequalities and Applications, 130.

Al-Rifae M, Abdeljawad T, 2017, Fundamental Results of Conformable Sturm–Liouville eigenvalue problems, Complexity, Article ID 3720471.

Asawasamrit S, Ntouyas S K, Thiramanus P, Tariboon J, 2016, Periodic boundary value problems for impulsive conformable fractional integrodifferential equations, Boundary Value Problems, Article ID 122 (2016).

Bayour B, Torres D F M, 2017, Existence of Solution To A Local Fractional Nonlinear Differential Equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312, 127–133.

Batarfi H, Losada J, Nieto J J, Shammakh, W, 2015, Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations, Journal of Function Spaces, Article ID 706383.

Cui Y, Zou Y, 2013, Monotone Iterative Method For Differential Systems With Coupled Integral Boundary Value Problems. Boundary Value Problems, 245.

Cui Y, Zou Y, 2014, Existence Results and The Monotone Iterative Technique For Nonlinear Fractional Differential Systems With Coupled Four-point Boundary Value Problems, Abstract and Applied Analysis, 242591.

Cui Y, Zou Y, 2015, Monotone Iterative Technique For (k, n - k) Conjugate Boundary Value Problems. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations , 69, 1–11.

Cui Y, Zou Y, 2016, Existence of Solutions For Second-order Integral Boundary Value Problems, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 6, 828–838.

Cui Y, Sun Q, Su X, 2017, Monotone Iterative Technique For Nonlinear Boundary Value Problems of Fractional Order $p \in 2\,(2, 3]$, Advances in Difference Equations, 248.

Cui Y, Ma W, Wang X, Su X, 2018, Uniqueness Theorem of Differential System With Coupled Integral Boundary Conditions Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 9, 1–10.

Dong X, Bai Z, Zhang W, 2016, Positive Solutions For Nonlinear Eigenvalue Problems With Conformable Fractional Differential Derivatives, J. Shandong Univ. Sci. Tech. Nat. Sci. (Chin. Ed.) 35, 85–90.

Dong X, Bai Z, 2017, Positive Solutions To Boundary Value Problems of *p*-Laplacian With Fractional Derivative, Boundary Value Problems, 5.

Deimling K, 1985, Nonlinear Functional Analysis. Springer, New York .

Eslami M, 2016, Exact traveling wave solutions to the fractional coupled nonlinear Schrodinger equation, Applied Mathematics and Computation 285, 141–148.

Guo L, Liu L, Wu Y, 2016, Existence of Positive Solutions for Singular Fractional Differential Equations With Infinite-point Boundary Conditions. Nonlinear Analysis Modelling Control, 21, 635–650.

Hao X, Wang H, Liu L, Cui Y, 2017, Positive Solutions For a System of Nonlinear Fractional Nonlocal Boundary Value Problems With Parameters and *p*-Laplacian Operator, Boundary Value Problems, 82.

He L, Dong X, Bai Z, Chen B, 2017, Solvability of some two-point fractional boundary value problems under barrier strip conditions. J. Funct. Spaces, Article ID 1465623

He J, Zhang X, Liu L, Wu Y, Cui Y, 2018, Existence and Asymptotic Analysis of

Positive Solutions for a Singular Fractional Differential Equation With Nonlocal Boundary Conditions. Boundary Value Problems. 189.

Jankowski T, 2014, Monotone Iterative Method For First-Differential Equations at Resonance. Applied Mathematics and Computation, 233, 20–28.

Jiang J, Liu W, Wang H, 2018, Positive Solutions to Singular Dirichlet-type Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations, Advances in Difference Equations, 169.

Jiang W, Kosmatov N, 2018, Existence Results for a Functional Boundary Value Problem of Fractional Differential Equations. Boundary Value Problems, 72.

Khalil R, Horani M A, Yousef A, Sababheh M, 2014, A New Definition of Fractional Derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65–70.

Lan K, Webb J R L, 1998, Positive solutions of semilinear differential equations with singularities, Journal of Differential Equations, 148, 407–421.

Liu S, Wang H, Li X, Li H, 2017, The Extremal Iteration Solution To A Coupled System of Nonlinear Conformable Fractional Differential Equations, Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 10, 5082–5089.

Meng S, Cui Y, 2019, The External Solution to Conformable Fractional Differential Equations Involving Integral Boundary Condition, Mathematics 2019, 7(2), 186

Nwaeze E R, 2016, A Mean Value Theorem For The Conformable Fractional Calculus on Arbitrary Time Scales. Progress in Fractional Differentiation and Applications, 4, 287–291

Souahi A, Ben Makhlouf A, Hammami M A, 2017, Stability Analysis of Conformable Ffractional-Order Nonlinear Systems, 28, 1265–1274.

Indag. Math. 28, 1265–1274 (2017)Tian Y, Bai Z, 2010, Existence Results For the Three-point Impulsive Boundary Value Problem Involving Fractional Differential Equations. Computers & Mathematics with Applications, 59, 2601–2609.

Yue Z, Zou Y, 2019, New Uniqueness Results for Fractional Differential Equation With Dependence on the First Order Derivative,. Advances in Difference Equations, 38.

Zhou Q, Sonmezoglu A, Ekici M, Mirzazadeh M, 2017, Optical Solitons of Some Fractional Differential Equations in Nonlinear Optics, Journal of Modern Optics, 64, 2345–2349.

Zuo M, Hao X, Liu, L, Cui Y, 2017, Existence Results For Impulsive Fractional Integro-differential Equation of Mixed Type With Constant Coefficient and Antiperiodic Boundary Conditions, Boundary Value Problems, 161.

Wang Y, Liu Y, Cui Y, 2018, Infinitely Many Solutions For Impulsive Fractional Boundary Value Problem With *p*-Laplacian. Boundary Value Problems, 94.

Wang L, Zhong W, 2018, Positive Solutions of Conformable Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions, 12.

.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Kefser KIZILTEN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa/Osmangazi 23.01.1995
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0542 424 16 95/Kevserkizilten@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Süleyman Çelebi Anadolu Lisesi, (2009-2013)
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, (20014-2018)
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2019-2021)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Bursa Küpkök Eğitim Kurumları (2019-2021)
Özel Bursa Bilim Koleji (2021-Devam Ediyor)