Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **20** (2020) 061303 (983-990) AKU J. Sci. Eng. **20** (2020) 061303 (983-990)

DOI: 10.35414/akufemubid.746509

Araştırma Makalesi / Research Article

Skew Hurwitz Polinom Halkası Terslenebilir Olan Halkalar ve Genişlemeleri

Fatma KAYNARCA[1]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

e-posta: fkaynarca@aku.edu.tr. ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-5699-3369

Geliş Tarihi: 01.06.2020 Kabul Tarihi: 08.12.2020

Anahtar kelimeler
Terslenebilir halka; Skew Hurwitz polinom halkası; Zayıf SH-terslenebilir halka; α-katı halka

Öz

Bu çalışmada; bir halkanın terslenebilir olması kavramı, o halka üzerine kurulan skew Hurwitz polinomlar halkasına genişletilerek, zayıf skew Hurwitz terslenebilir (kısaca zayıf SH-terslenebilir) halka kavramı tanıtılmıştır. Bu halka sınıfının bazı özelikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri incelenmiştir. Zayıf SH-terslenebilir halkaların bazı genişlemelerinin de zayıf SH-terslenebilir olup olmadığı araştırılmıştır. Özel olarak, karakteristiği 0 olan bir R halkası ve R'nin bir α monomorfizması için R'nin zayıf SH-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $A(R,\alpha)$ Jordan genişlemesinin zayıf SH-terslenebilir olması gerektiği ispatlanmıştır.

Rings Over Which Skew Hurwitz Polynomial Rings Are Reversible and Their Extensions

Keywords
Reversible ring; Skew Hurwitz polynomial ring; Weak SH-reversible ring; α-rigid ring

Abstract

In this paper; the concept of the ability of a ring to be reversible is extended to the ring of skew Hurwitz polynomials established on that ring, and the concept of the weak skew Hurwitz reversible (briefly weak SH-reversible) ring is introduced. Some properties of this ring class and its relations with other ring classes are examined. It is also investigated whether some extension of weak SH-reversible rings are weak SH-reversible. In particular, it is proved that for a ring R with characteristic 0 and an α monomorphism of R the Jordan extension A (R, α) of R is weak SH-reversible if and only if R is weak SH-reversible.

1. Giriş

Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe R birimli, birleşmeli ve değişmeli bir halka ve α; R halkasının birimden ve sıfırdan farklı bir endomorfizması olacak.

Keigher (1975, 1997); birimli ve değişmeli bir R halkası üzerinde, diferansiyel cebirde ilginç uygulamaları bulunan, HR Hurwitz seriler halkasını inşa etmiştir. Daha sonra Hurwitz seri kavramı Hassanein (2007) tarafından skew Hurwitz seriler halkasına genişletilmiştir. R üzerindeki skew Hurwitz serilerinin (HR,α) halkası; $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere aşağıdaki işlemlerle birlikte tüm $f:\mathbb{N}\to R$ fonksiyonlarının oluşturduğu küme olarak tanımlanır. (HR,α) kümesinde toplama işlemi bileşensel ve çarpma işlemi her $f,g\in(HR,\alpha)$ için

$$(fg)(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)\alpha^k(g(n-k))$$

İle tanımlıdır. Burada $n\geq k$ olacak şekildeki her $n,k\in\mathbb{N}$ için $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ binom katsayılarıdır. Böylece; bir $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in R[[x;\alpha]]$ skew formal kuvvet serisi; $f(n)=a_n$ olacak şekilde bir $f\in(HR,\alpha)$ skew Hurwitz serisi ile özdeşleştirilebilir. Bu açıdan iki halkanın sahip olduğu çarpma işlemi (her bir terimin başında görülen binom katsayıları dışında) aynıdır. Aynı zamanda (HR, α) ve $R[[x; \alpha]]$ halkalarının izomorf olduğu Paykan (2017) tarafından ifade edilmiştir.

Her bir $r \in R$ ve her $x, n \in \mathbb{N}$ için (HR, α)'nın

$$h_r(x) = \begin{cases} r \ ; \ x = 0 \\ 0 \ ; \ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad h'_n(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ x = n \\ 0 \ ; \ x \neq n \end{cases}$$

ile tanımlı elemanları vardır. Kolayca görülebilir ki h_1; (HR, α)'nın birim elemanıdır ve $r \mapsto h_r$ dönüşümü yardımıyla R halkası (HR, α)'nın içine gömülebilir. Bundan dolayı R; (HR, α)'nın bir alt halkası olur.

$$supp(f) = \{i \in \mathbb{N} : 0 \neq \mathrm{f(i)} \in \mathrm{R}\}$$

kümesine f'nin *desteği* denir ve bu kümenin en büyük elemanı (varsa) $\Delta(f)$ ile gösterilir. $\Delta(f) < \infty$ özelliğini sağlayan tüm $f \in (HR, \alpha)$'ların kümesi (hR, α) ile gösterilir ve *skew Hurwitz polinomlar halkası* olarak adlandırılır. (hR, α) skew Hurwitz polinomlar halkasının (HR, α) skew Hurwitz seriler halkasının bir alt halkası olduğu açıktır.

Başka bir ifadeyle açıklamak gerekirse; birimli ve değişmeli bir R halkası üzerine kurulan (hR, α) skew Hurwitz polinomlar halkası; bileşensel toplama ve $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, g = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in (hR, \alpha)$ için

$$c_k = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} a_t \alpha^t(b_{k-t}), \quad (0 \leq t \leq m + n\,)$$

olmak üzere $fg = \sum_{k=0}^{t} c_kx^k$ ile tanımlı çarpma işlemi ile birlikte birimi 1 sabit polinomu olan birimli bir halkadır.

Sıfırdan farklı nilpotent eleman bulundurmayan (yani; $a \in R$ için $a^2 = 0$ iken $a = 0$ özelliğini sağlayan) bir R halkası *indirgenmiş* olarak adlandırılır. Cohn (1999) tarafından değişmeli halkaların bir genellemesi olan terslenebilir halkalar tanıtılmıştır: $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkası *terslenebilir* olarak adlandırılır.

Bir R halkası ve R'nin bir α endomorfizması için R'den katsayılı polinomlar kümesi üzerinde bilinen toplama ve her r$\in R$ için $xr = \alpha(r)x$ biçiminde tanımlanan çarpma işlemi ile oluşturulan ve $R[x; \alpha]$ ile gösterilen halkaya *skew polinomlar halkası* denir. Herhangi bir $R[x; \alpha]$ skew polinomlar halkasında $1x = x1 = \alpha(1)x$ olup $\alpha(1) = 1$ özelliği sağlanır. Krempa (1996); $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkasının bir α endomorfizmasını *katı* olarak adlandırmıştır. Bir katı α endomorfizması var olan halkaya *α-katı halka* denir (Hong et al. 2000).

İndirgenmiş halkaların bir genellemesi olarak Rege ve Chhawchharia (1997) tarafından Armendariz halka kavramı tanıtılmıştır. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekildeki $R[x]$'deki $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ polinomları için, her bir i, j için, $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

Ahmadi vd. (2014) tarafından, her $f = (a_i), g = (b_i) \in (HR, \alpha)$ skew Hurwitz serisi için "$fg = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her i, j için $a_ib_j = 0$ olmasıdır" özelliğini sağlayan R halkası *skew Hurwitz serieswise Armendariz* (kısaca *SHA-halka*) olarak adlandırılarak, polinom halkasının Armendarizlik özelliği skew Hurwitz seriler halkasına genişletilmiştir.

Diğer yandan Kim ve Lee (2003) tarafından terslenebilir halkalar üzerine kurulan polinom halkalarının terslenebilir olması gerekmediği gösterilmiştir. Bu özelliğe sahip, yani; polinom halkası terslenebilir olan halkalar, *güçlü terslenebilir* olarak adlandırılmıştır (Yang and Liu 2008). Jin vd. (2017) tarafından terslenebilir bir halkanın skew polinom halkasının terslenebilir olmadığı ifade edilerek, skew polinom halkası terslenebilir olan halkalara *güçlü α-skew terslenebilir* adı verilmiştir.

Bu bilgiler ışığı altında Kaynarca ve Yıldırım (2020) terslenebilir bir halka üzerindeki skew Hurwitz seriler halkasının terslenebilir olmadığını göstererek, skew Hurwitz seriler halkası terslenebilir olan halkalara *skew Hurwitz terslenebilir* (kısaca *SH-terslenebilir*) adını vererek, bazı özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada ise skew Hurwitz polinom halkası terslenebilir olan halka sınıfı tanıtılmış ve bazı özellikleri ile diğer halka sınıflarıyla ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca skew Hurwitz polinom halkası terslenebilir olan halkaların bazı genişlemelerinin de bu özelliğe sahip olup olmadığı araştırılmıştır.

2. Zayıf SH-terslenebilir Halkalar

Bu bölümde zayıf SH-terslenebilir halka kavramını tanıtacağız ve bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Aşağıdaki örnek, neden böyle bir halka sınıfının tanımlandığını göstermektedir.

2.1 Örnek $\mathbb{Z}_2$; tamsayıların $mod2$'ye göre kalan sınıflarının kümesi olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ve $\alpha\big((a,b)\big) = (b,a)$ ile tanımlı α; R'nin bir endomorfizması olsun. $f = (1,0), g = (0,1) + (0,1)x \in (hR,\alpha)$ için $fg = 0$ dır. Fakat $gf = (0,1)x(1,0) = (0,1)x \neq 0$ olduğundan (hR,α) terslenebilir değildir.

Böylece aşağıdaki tanımı verebiliriz.

2.2 Tanım R değişmeli bir halka ve α; R'nin bir endomorfizması olsun. (hR,α) skew Hurwitz polinomlar halkası terslenebilir ise, yani $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in (hR,\alpha)$ için $f(x)g(x) = 0$ iken $g(x)f(x) = 0$ oluyorsa R'ye *zayıf skew Hurwitz terslenebilir* (kısaca, *zayıf SH-terslenebilir*) denir.

SH-terslenebilir halkaların zayıf SH-terslenebilir olduğu açıktır. Ayrıca zayıf SH-terslenebilir bir R halkasının $\alpha(S) \subseteq S$ özelliğine sahip her S alt halkası da zayıf SH-terslenebilir olur. Zayıf SH-terslenebilir halkaların dik çarpımlarının da zayıf SH-terslenebilir olduğu kolay hesaplamalarla görülür.

Terslenebilir halkaların bir başka genellemesi olan α-terslenebilir halkalar Başer vd. (2009) tarafından şu şekilde tanıtılmıştır: R bir halka ve α; R'nin bir endomorfizması olmak üzere $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $b\alpha(a) = 0$ (ya da $\alpha(b)a = 0$) oluyorsa α endomorfizması *sağ* (ya da *sol*) *terslenebilir* olarak adlandırılır. R'nin bir sol (ya da sağ) terslenebilir α endomorfizması varsa R'ye *sol* (ya da *sağ*) *α-terslenebilir* denir. Hem sol hem de sağ α-terslenebilir olan bir halkaya kısaca *α-terslenebilir* denir.

Herstein (1975)'e göre $\mathrm{char}(R) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul pozitif bir n tamsayısı ve $x \in R$ için $nx = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektirir. Bu ifade aşağıda ifade edilen sonuçların ispatında kullanılacaktır.

2.3 Önerme R zayıf SH-terslenebilir bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) R terslenebilir ve α-terslenebilirdir.
(2) α bir monomorfizmadır.
(3) Herhangi $a, b \in R$ ve negatif olmayan m ve n tamsayıları için $a\alpha^m(b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0 \Leftrightarrow b\alpha^n(a) = 0$ dır.
(4) $\mathrm{char}(R) = 0$ ise, herhangi $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ dir.

İspat: (1) $ab = 0$ olsun. (hR,α)'da $f(x) = a$ ve $g(x) = b$ sabit skew Hurwitz polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $ba = 0$ bulunur. Böylece R terslenebilirdir. Diğer yandan $ab = 0$ olsun. (hR,α)'da $f(x) = a$ ve $g(x) = bx$ skew Hurwitz polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $b\alpha(a) = 0$ olup R sağ α-terslenebilirdir. Benzer olarak $ab = 0$ iken R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olup (hR,α)'daki $f(x) = b$ ve $g(x) = ax$ skew Hurwitz polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $a\alpha(b) = 0$ olur. R'nin terslenebilir olmasından ise $\alpha(b)a = 0$, yani R; α-terslenebilir elde edilir.

(2) Kabul edelim ki $\alpha(a) = 0$ olsun. Bu durumda (hR,α)'daki $f(x) = x$ ve $g(x) = a$ skew Hurwitz polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $a = 0$ bulunur. Böylece α bir monomorfizmadır.

(3) $a\alpha^m(b) = 0$ olsun. Bu durumda (hR, α)'daki $f(x) = ax^m$ ve $g(x) = b$ skew Hurwitz polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $ba = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $ab = 0$ elde edilir. (hR, α)'daki $f(x) = a$ ve $g(x) = bx^n$ için $f(x)g(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $b\alpha^n(a) = 0$ elde edilir.

(4) $e^2 = e \in R$ idempotentini alalım. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekildeki $f = (1-e) + \alpha(e-1)x$, $g = e + ex \in (hR, \alpha)$ için, R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ ve buradan $\text{char}(R) = 0$ olduğundan $e\alpha(e) = e$ olur. (hR, α)'daki $f'(x) = e + \alpha(e)x$ ve $g'(x) = (e-1) + (e-1)x$ skew Hurwitz polinomları için $f'(x)g'(x) = 0$ dır. R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g'(x)f'(x) = 0$ ve $\text{char}(R) = 0$ olduğundan $e\alpha(e) = \alpha(e)$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha(e) = e$ elde edilir.

Önerme 2.3'ten zayıf SH-terslenebilir halkaların terslenebilir ve α-terslenebilir olduğu açıktır. Bu ifadenin karşıtının, halkanın bir SHA-halka olması durumunda, doğru olduğu aşağıdaki önermede görülür.

2.4 Önerme R bir SHA-halka olsun. Bu durumda R'nin terslenebilir ve α-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R'nin zayıf SH-terslenebilir olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) Önerme 2.3 (1)'den açıktır.

($\Longrightarrow$) $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in (hR, \alpha)$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R; SHA-halka olduğundan her bir i, j için $a_i b_j = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $b_j a_i = 0$ ve buradan R α-terslenebilir olduğundan $b_j \alpha(a_i) = 0$ bulunur. Bu süreç devam ettirilerek her t için $b_j \alpha^t(a_i) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $g(x)f(x) = 0$ olup R zayıf SH-terslenebilir elde edilir.

2.4 Lemma (Hashemi and Moussavi 2005) R α-katı bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $a\alpha^n(a) = 0$ ise, a=0 dır.

(2) $ab = 0$ ise, $a\alpha(b) = 0$ dır.

Kaynarca ve Yıldırım (2020), α-katı halkaların SH-terslenebilir olduğunu ifade etmiş ve karşıtının doğru olmadığını bir örnekle göstermişlerdir. Buna dayanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.5 Teorem R halkası bir $\mathbb{Z}$-modül olarak burulmasız ve α; R'nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul R'nin zayıf SH-terslenebilir ve indirgenmiş olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) R zayıf SH-terslenebilir ve indirgenmiş olsun. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (hR, α)'daki $f(x) = ax$, $g(x) = a$ skew Hurwitz polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olur. R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g(x)f(x) = 0$ olup buradan $a^2 = 0$ ve R indirgenmiş olduğundan $a = 0$ bulunur.

($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki R α-katı olsun. R'nin indirgenmiş olduğu açıktır. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in (hR, \alpha)$ alalım. Bu durumda x^k'lı terimlerin katsayıları olan aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$a_0 b_0 = 0 \tag{1}$$

$$a_0 b_1 + a_1 \alpha(b_0) = 0 \tag{2}$$

$$a_0 b_2 + 2a_1 \alpha(b_1) + a_2 \alpha^2(b_0) = 0 \tag{3}$$

$$a_0 b_3 + 3a_1 \alpha(b_2) + 3a_2 \alpha^2(b_1) + a_3 \alpha^3(b_0) = 0 \tag{4}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 \alpha(b_{n-1}) + \cdots + \binom{n}{n} a_n \alpha^n(b_0) = 0 \tag{n}$$

α-katı halkaların indirgenmiş ve terslenebilir olduğu göz önünde bulundurularak, (1) eşitliğinden $b_0 a_0 = 0$ bulunur. (2) eşitliği soldan b_0, sağdan $\alpha(a_1)$ ile çarpılarak $b_0a_1\alpha(b_0a_1) = 0$ ve kabulden $b_0a_1 = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $a_1b_0 = 0$ olup Lemma 2.4 gereğince $a_1\alpha(b_0) = 0$ dır. Bu ifade (2) eşitliğinde yerine yazılarak $a_0b_1 = 0$ elde edilir. (3) eşitliği soldan b_0 sağdan $\alpha^2(a_2)$ ile çarpılırsa, $b_0a_2\alpha^2(b_0a_2) = 0$ olup kabulden $b_0a_2 = 0$ ve R terslenebilir olduğundan ve Lemma 2.4'den $a_2\alpha^2(b_0) = 0$ bulunur. Bu ifade (3)'te yerine yazılırsa

$$a_0b_2 + 2a_1\alpha(b_1) = 0 \qquad (5)$$

eşitliği elde edilir. (5) eşitliği soldan b_1 sağdan $\alpha(a_1)$ ile çarpılırsa $2b_1a_1\alpha(b_1a_1) = 0$ bulunur. R; $\mathbb{Z}$-modül olarak burulmasız ve α-katı olduğundan $b_1a_1 = 0$ olur. Lemma 2.4'ten $a_1\alpha(b_1) = 0$ olup (3) eşitliğinden $a_0b_2 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her bir i, j için $a_ib_j = 0$ bulunur. Lemma 2.4 gereğince $b_j\alpha(a_i) = 0$ olup buradan $g(x)f(x) = 0$, yani R zayıf SH-terslenebilir elde edilir.

Teorem 2.5 gereğince her α-katı halka zayıf SH-terslenebilirdir. Fakat bu ifadenin tersi Kaynarca ve Yıldırım (2020) Örnek 2.7'den doğru değildir.

3.Zayıf SH-Terslenebilir Halkaların Genişlemeleri

Bu bölümde zayıf SH-terslenebilir halkaların bazı genişlemelerinin zayıf SH-terslenebilir olup olmadığı incelenecektir.

R bir halka ve $u, r \in R$ olsun. $ur = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa u'ya *sağ düzenli* eleman denir. Sol düzenli eleman benzer şekilde tanımlanır. Hem sol düzenli hem de sağ düzenli (yani sıfır bölen olmayan) bir elemana kısaca *düzenli* denir. Δ; R'nin düzenli elemanlarının çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. $\Delta^{-1}R = \{u^{-1}a : u \in \Delta, a \in R\}$ kümesi bir halkadır. α; R'nin bir otomorfizması ve kabul edelim ki her $u \in \Delta$ için $\alpha(u) = u$ olsun. Bu durumda $\bar{\alpha}(u^{-1}a) = u^{-1}\alpha(a)$ ile tanımlı bir $\bar{\alpha}: \Delta^{-1}R \to \Delta^{-1}R$ otomorfizması vardır.

3.1 Önerme R bir halka ve $e^2 = e \in R$ bir idempotent olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R zayıf SH-terslenebilirdir.
(2) eR ve $(1-e)R$ zayıf SH-terslenebilirdir.
(3) $\Delta^{-1}R$ zayıf SH-terslenebilirdir.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Zayıf SH-terslenebilir halkaların sınıfı alt halkalar ve sonlu dik toplamlar altında kapalı olduğundan ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) R; $\Delta^{-1}R$'nin bir alt halkası olduğundan ispat açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (3) Kabul edelim ki R zayıf SH-terslenebilir olsun. $(h\Delta^{-1}R, \bar{\alpha})$'da $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m}(u^{-1}a_i)x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n}(v^{-1}b_j)x^j$ skew Hurwitz polinomlarını alalım. $f(x)g(x) = 0$ olduğundan (hR, α)'daki $f'(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g'(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ skew Hurwitz polinomları için $f'(x)g'(x) = 0$ elde edilir. R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $g'(x)f'(x) = 0$ olup bu eşitliğin her iki tarafı $(vu)^{-1}$ ile çarpılarak $g(x)f(x) = 0$ bulunur. Böylece $\Delta^{-1}R$ zayıf SH-terslenebilir olur.

Bir R halkası üzerindeki Laurent polinomlar halkası; $a_i \in R$ ve $k \leq n$ olacak şekilde k ve n (negatif olabilen) tamsayılar olmak üzere tüm $\sum_{i=k}^{n} a_ix^i$ formal toplamlarından oluşur ve $R[x; x^{-1}]$ ile gösterilir. R'nin bir α endomorfizması için $\bar{\alpha}\left(\sum_{i=k}^{n} a_ix^i\right) = \sum_{i=k}^{n} \alpha(a_i)x^i$ ile tanımlı bir $\bar{\alpha}: R[x; x^{-1}] \to R[x; x^{-1}]$ endomorfizması vardır.

3.2 Sonuç Bir R halkası için $R[x]$ zayıf SH-terslenebilirdir ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ zayıf SH-terslenebilirdir.

İspat: $\Delta = \{1, \mathrm{x}, x^2, \dots\}$ kümesi $R[x]$'in çarpımsal kapalı bir altkümesi olup $\Delta^{-1}R[x] = R[x; x^{-1}]$ olduğundan Önerme 3.1'in direkt bir sonucudur.

R bir halka ve α; R'nin bir endomorfizması olmak üzere $\alpha(I) \subseteq I$ özelliğini sağlayan R'nin bir I ideali α-ideal olarak adlandırılır. I; R'nin bir α-ideali iken, R'nin bir α endomorfizması; R/I bölüm halkasının bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına, her $a+I\in R/I$ için, $\bar{\alpha}(a+I)=\alpha(a)+I$ tanımıyla genişletilir. Ayrıca R'nin her sağ (sol) I idealine karşılık (hR,α)'da bir sağ (sol)

$$(hI,\alpha)=\left\{f=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\in(hR,\alpha): a_i\in I\right\}$$

ideali vardır (Hassanein, 2007).

3.3 Önerme R halkası bir $\mathbb{Z}$-modül olarak burulmasız, α; R'nin bir otomorfizması ve I; R'nin bir α-ideali olsun. R/I zayıf SH-terslenebilir halka ve I ideali α-katı ise, R halkası zayıf SH-terslenebilirdir.

İspat: (hR,α)'da $fg=0$ olacak şekildeki $f=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ ve $g=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ skew Hurwitz polinomlarını alalım. Bu durumda $(h(R\,/\,I),\alpha)$'daki $\bar{f}(x)=\sum_{i=0}^{m}(a_i+I)x^i$ ve $\bar{g}(x)=\sum_{j=0}^{n}(b_j+I)x^j$ skew Hurwitz polinomları için $\bar{f}(x)\bar{g}(x)=\bar{0}$ olur. R/I zayıf SH-terslenebilir olduğundan $\bar{g}(x)\bar{f}(x)=\bar{0}$ ve buradan $g(x)f(x)\in(hI,\alpha)$ elde edilir. I ; α-katı olduğundan (Hassanein, 2007) gereğince (hI,α) indirgenmiş halkadır Böylece (hI,α)'da $(g(x)f(x))^2=0$ olduğundan $g(x)f(x)=0$ bulunur. Sonuç olarak R zayıf SH-terslenebilirdir.

3.4 Önerme R ve S karakteristiği 0 olan iki halka olmak üzere α; R'nin bir endomorfizması ve $\sigma: R\to S$ bir halka izomorfizması olsun. R'nin zayıf SH-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul S'nin zayıf SH-terslenebilir olmasıdır.

İspat: (hR,α)'daki $p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ ve $q(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ skew Hurwitz polinomlarına karşılık, α bir izomorfizma olduğundan her i,j için $\sigma(a_i)={a'}_i$ ve $\sigma(b_j)={b'}_j$ olmak üzere $(hS,\sigma\alpha\sigma^{-1})$'deki $p'(x)=\sum_{i=0}^{m}{a'}_ix^i$ ve $q'(x)=\sum_{j=0}^{n}{b'}_jx^j$ skew Hurwitz polinomları yazılabilir. Bu durumda

(hR,α)'da

$$p(x)q(x)=0\Leftrightarrow\left(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}a_l\alpha^l(b_{k-l})\right)x^k=0$$

σ örten olduğundan

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\sigma\left(a_l\alpha^l(b_{k-l})\right)\right)x^k=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\sigma(a_l)\left(\sigma\alpha^l\sigma^{-1}\right)\sigma(b_{k-l})\right)x^k=0$$

Herhangi bir pozitif t tamsayısı için$(\sigma\alpha\sigma^{-1})^t=\sigma\alpha^t\sigma^{-1}$ olduğu gözönüne alınarak

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}{a'}_l(\sigma\alpha\sigma^{-1})^l({b'}_{k-l})\right)x^k=0$$

olup $(hS,\sigma\alpha\sigma^{-1})$'de

$$\Leftrightarrow p'(x)q'(x)=0$$

olduğundan ispat açıktır.

Bir R halkası ve bir M; R-R-bimodülü verildiğinde R'nin M ile (trivial) aşikar genişlemesi; bileşensel toplama ve

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2,r_1m_2+m_1r_2)$$

ile tanımlı çarpma işlemiyle $R\oplus M$ halkasıdır. Bu halka; bilinen matris toplamı ve çarpımı işlemleriyle birlikte, $r\in R$ ve $m\in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m\\ 0 & r\end{pmatrix}$ formundaki matrislerin halkasına izomorftur. R'nin bir α endomorfizması için, $T(R,R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}\big((a,b)\big)=(\alpha(a),\alpha(b))$ ile tanımlı bir $\bar{\alpha}$ endomorfizması vardır.

3.5 Önerme R; karakteristiği 0 olan bir halka ve α; R'nin bir endomorfizması olsun. R halkası α-katı ise, $T(R,R)$ zayıf SH-terslenebilirdir.

İspat: $(\mathrm{hT(R,R)},\bar{\alpha})$'daki $p(x)=\sum_{i=0}^{m}(a_i,b_i)x^i$ ve $q(x)=\sum_{j=0}^{n}(c_j,d_j)x^j$ polinomları için $\mathrm{p(x)q(x)}=0$ olsun. (hR,α)'daki $p_0(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$, $p_1(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$, $q_0(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jx^j$ ve $q_1(x)=\sum_{j=0}^{n}d_jx^j$

skew Hurwitz polinomları için $p(x) = (p_0(x), p_1(x))$ ve $q(x) = (q_0(x), q_1(x))$ biçiminde yazılabilir. $\mathrm{p(x)q(x)} = 0$ olduğundan (hR, α)'da

$$p_0(\mathrm{x})q_0(\mathrm{x}) = 0 \qquad (1)$$

$$p_0(\mathrm{x})q_1(\mathrm{x}) + p_1(x)q_0(x) = 0 \qquad (2)$$

eşitlikleri elde edilir. R α-katı iken (HR, α) indirgenmiş ve böylece (hR, α) indirgenmiş olur (Hassanein, 2012). Bu durumda (1) eşitliğinden $q_0(\mathrm{x})p_0(\mathrm{x}) = 0$ elde edilir. (2) eşitliği soldan $q_0(x)$ ile çarpılırsa $p_1(x)q_0(x) = 0$ olur. Bu ifade (2) eşitliğinde yerine yazılarak $p_0(x)q_1(x) = 0$ elde edilir. (hR, α) indirgenmiş iken terslenebilir olduğundan $q_0(x)p_1(x) = 0$ ve $q_1(x)p_0(x) = 0$ olup buradan $q(x)p(x) = 0$, yani $T(R, R)$ zayıf SH-terslenebilir bulunur.

R bir halka ve α; R'nin bir monomorfizması olmak üzere $R[x, x^{-1}; \alpha]$ skew Laurent polinom halkasının

$$A(R, \alpha) = \{x^{-i}rx^i : r \in R, i \geq 0\}$$

alt kümesini göz önüne alalım. $r \in R$ için $j > 0$ iken $x^j r = \alpha^j(r)x^j$ olması $rx^{-j} = x^j\alpha^j(r)$ olmasını gerektirdiğinden her bir $j \geq 0$ için

$$x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{i+j}$$

elde edilir. $r, s \in R$ ve $i, j \geq 0$ için

$$x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r) + \alpha^i(s))x^{i+j}$$

$$(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}\left(\alpha^j(r)\alpha^i(s)\right)x^{i+j}$$

ile tanımlanan işlemlerle birlikte R'nin bir üst halkası olan $A(R, \alpha)$'ya R'nin α ile *Jordan genişlemesi* denir. Herhangi (R, α) çifti için, x'in kuvvetlerinin kümesine göre $R[x; \alpha]$ skew polinom halkasının sol lokalizasyonu kullanılarak, $A(R, \alpha)$ Jordan genişlemesinin her zaman var olduğu Jordan (1982) tarafından ifade edilmiştir. α; aynı zamanda $\alpha(x^{-i}rx^i) = x^{-i}\alpha(r)x^i$ ile tanımlanan $A(R, \alpha)$'nın bir otomorfizması olur.

3.6 Teorem R karakteristiği 0 olan bir halka ve α; R'nin bir monomorfizması olsun. R'nin zayıf SH-terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $A(R, \alpha)$ Jordan genişlemesinin zayıf SH-terslenebilir olmasıdır.

İspat: Zayıf SH-terslenebilir halkalar alt halkalar altında kapalı olduğundan sadece gerek koşulu göstermek yeterlidir. Karışıklık olmaması adına $A(R, \alpha)$'daki x değişkeni yerine t kullanalım. Yani $A(R, \alpha) = \{t^{-i}rt^i : r \in R, i \geq 0\}$ biçiminde olsun. Kabul edelim ki R zayıf SH-terslenebilir olsun. $a'_i, b'_j \in R$ ve $v(i), u(j) \geq 0$ için $a_i = t^{-v(i)}a'_i t^{v(i)}$, $b_j = t^{-u(j)}b'_j t^{u(j)}$ olmak üzere $(hA(R, \alpha), \alpha)$'daki $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ skew Hurwitz polinomları için $\mathrm{p(x)q(x)} = 0$ olsun. Her bir $j \geq 0$ için $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{i+j}$ özelliğinden ve α'nın $A(R, \alpha)$'nın bir otomorfizması olmasından yararlanarak uygun $s \geq 0$ ve $a''_i, b''_j \in R$ için $a_i = t^{-s}a''_i t^s$ ve $b_j = t^{-s}b''_j t^s$ biçiminde yazabiliriz. Böylece aşağıdaki eşitlikler düzenlenerek

$$0 = p(x)q(x)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} a_l \alpha^l(b_{k-l})\right)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} t^{-s}a''_l t^s \alpha^l(t^{-s}b''_{k-l}t^s)\right)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} t^{-s}a''_l t^s t^{-s}\alpha^l(b''_{k-l})\, t^s\right)x^k$$

$$= t^{-s}\left(\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} a''_l \alpha^l(b''_{k-l})\right)x^k\right)t^s$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} a''_l \alpha^l(b''_{k-l})\right)x^k = 0$$

bulunur. Böylece (hR, α)'daki $p'(x) = \sum_{i=0}^m a''_i x^i$ ve $q'(x) = \sum_{j=0}^n b''_j x^j$ skew Hurwitz polinomları için $p'(x)q'(x) = 0$ olur. R zayıf SH-terslenebilir olduğundan $q'(x)p'(x) = 0$ olup buradan $t^{-s}p'(x)t^s = p(x)$ ve $t^{-s}q'(x)t^s = q(x)$ olduğu kullanılarak $q(x)p(x) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $A(R, \alpha)$ zayıf SH-terslenebilir olur.

4. Tartışma ve Sonuç

Halka teori alanında yeni tanımlanan bir halka sınıfı, daha önceden bilinen halka sınıflarıyla ilişkili olduğunda anlam ve önem kazanmaktadır. Yeni bir halka sınıfının tanımlandığı her makale göz önüne alındığında, ilk olarak neden böyle bir halka sınıfına ihtiyaç duyulduğu ifade edilerek tanımı yapılır ve diğer halka sınıflarıyla bağlantısı ortaya koyulur. Bundan başka, o halka üzerine kurulan polinom halkası, matris halkası, bölüm halkası, aşikar genişlemesi, Jordan genişlemesi, Dorroh genişlemesi, Ore genişlemesi gibi bir takım genişlemelerinde de bu özelliğin sağlanıp sağlanmadığı incelenir. Bu açıdan bakıldığında, bu çalışma yukarıda açıklanan hedefleri kapsamaktadır. 2. Bölümde belirtildiği gibi zayıf SH-terslenebilir halka sınıfı; terslenebilir, α-terslenebilir, α-katı halka sınıflarıyla ilişkili olan yeni bir halka sınıfı oluşturmaktadır. Halkanın zayıf SH-terslenebilir olma özelliğinin taşınabildiği bazı genişlemeleri de 3. bölümde incelenmiştir.

5. Kaynaklar

Ahmadi, M., Moussavi, A. and Nourozi, V., 2014. On skew Hurwitz serieswise Armendariz rings. *Asian-European Journal of Mathematics*, **7(3)**, 1450036.

Başer, M., Hong, C. Y. and Kwak, T. K., 2009. On extended reversible rings. *Algebra Colloquium*, **16(1)**, 37-48.

Cohn, P. M., 1999. Reversible rings. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **31**, 641-648.

Hashemi, E., Moussavi, A., 2005. Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Mathematica Hungarica*, **3**, 207-224.

Hassanein, A. M., 2007. Clean rings of skew Hurwitz series, *Le Mathematiche*, **62(1)**, 47-54.

Hassanein, A. M., 2012. On uniquely clean skew Hurwitz series, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 5-10.

Herstein, I. N., 1975. Topics in Algebra, Xerox College Publishing Lexington, Massachusetts Toronto, 1-388.

Hong, C. Y., Kim, N. Y., Kwak, T. K., 2000. Ore extensions of Baer and p.p-rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **151(3)**, 215-226.

Jin, H. L., Kaynarca, F. and Kwak, T. K., Lee, Y. 2017. On commutativity of skew polynomials at zero. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **54**, 51-69.

Jordan, D. A., 1982. Bijective extensions of injective rings endomorphism, *Journal of the London Mathematical Society*, **25(3)**, 435-448.

Kaynarca, F., Yıldırım, M. A., 2020. Reversibility of skew Hurwitz series rings, accepted by *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.*

Keigher, W. F., 1975. Adjunctions and comonads in differential algebra, *Pacific Journal of Mathematics*, **59**, 99-112.

Keigher, W. F., 1997. On the ring of Hurwitz series, *Communications in Algebra*, **25(6)**, 1845-1859.

Kim, N. K., Lee, Y., 2003. Extensions of reversible rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **185(1-3)**, 207-223.

Krempa, J., 1996. Some examples of reduced rings, *Algebra Colloquium*, **3(4)**, 289-300.

Paykan, K., 2017. Principally quasi-Baer skew Hurwitz series rings, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **10(4)**, 607-616.

Rege, M. B., Chhawchharia, S., 1997. Armendariz rings, *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences*, **73(1)**, 14-17.

Yang, G., Liu, Z. K., 2008. On weak reversible rings, *Taiwenese Journal of Mathematics*, **12(1)**, 129-136.