Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **20** (2020) 051304 (824-831) AKU J. Sci. Eng. **20** (2020) 051304 (824-831)
DOI: 10.35414/akufemubid.677349

Araştırma Makalesi / Research Article

Tarım Sigortası Gerekliliğinin Oyun Teorisi Yardımıyla Gösterilmesi: Matris Norm Yaklaşımı

Burhaneddin İZGİ[1,*], Murat ÖZKAYA[2]
[*]İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul.

Sorumlu yazar e-posta[1]: bizgi@itu.edu.tr ORCID ID[1]https://orcid.org/0000-0002-8441-9137
e-posta[2]: ozkaya16@itu.edu.tr ORCID ID[2]: https://orcid.org/0000-0001-7241-4710

Geliş Tarihi: 21.01.2020 Kabul Tarihi: 30.10.2020

Anahtar kelimeler
Oyun teorisi; Matris normları; Karar teorisi; Sigorta; Tarım

Öz

Bu çalışmamızda, belirsizlikler altında çiftçilerin tarım sigortası yaptırıp yaptırmaması gerektiği problemini oyun teorisi ve karar teorisi açısından inceledik. Bunu yapmak için doğaya karşı bir sıfır toplamlı matris oyununu gerçek verileri kullanarak oluşturduk. Oluşturduğumuz bu oyunu ilk olarak karar teorisindeki Wald maksimin ve Savage pişmanlık kriterleri aracılığıyla ayrı ayrı çözdük. Ardından, bu oyunu karma stratejilere izin verildiği durumda yeniden ele alarak literatürdeki sıfır toplamlı matris oyunlarının çözümü için bilinen yöntemle çözdük. Aynı durum altında oyunu, getiri matrisinin sadece matris normlarını içeren ve matris normları yaklaşımı (MN yöntemi) olarak bilinen bu yeni yöntemi kullanarak farklı bir açıdan çözdük. Son olarak, MN yöntemi yardımıyla bulduğumuz sonuçların literatürdeki diğer yöntemlerle elde ettiğimiz sonuçlarla tutarlı olduğunu gösterdik.

The Demonstration of the Necessity of Agriculture Insurance by the Game Theory: Matrix Norm Approach

Keywords
Game theory; Matrix norms; Decision theory; Insurance; Agriculture

Abstract

In this paper, we investigate whether the farmers should get agriculture insurance or not under the uncertainty by the view of the game theory and decision theory. For this purpose, we create a zero-sum matrix game against nature using the real data. We solve the matrix game with Wald maximin criterion and Savage regret criterion, separately. Then, we resolve this game, while the mixed strategies are allowed, by using the well-known method in the literature for the solution of the zero-sum matrix games. Later, we demonstrate the game in the different aspect with the approach only consists of the matrix norms of the payoff matrix, called the matrix norm approach (MNA), under the same condition. Finally, we show the consistency of the results obtained by using MNA and the other methods.

1. Giriş

Oyun teorisi, birden fazla kişi içeren karar verme problemlerini çalışan bir matematik dalıdır. 20.yüzyılın başında von Neumann'ın (1928) minimaks teoremini ispatlamasıyla, oyun teorisi hızlı bir şekilde gelişerek ekonominin temel alanlarından biri oldu (Ziegler 2004). Geçen bu süreçte oyun teorisinin kapsamı sadece ekonomi ile sınırlı kalmayarak daha da gelişti. Bilim insanları oyun teorisini matematiğin ve rekabetin bulunduğu ekonomi, askeri problemler, sosyal bilimler ve biyoloji vb. gibi bilim dallarına başarıyla uyguladılar. Bu uygulamaların sonuçlarında bazı bilim adamlarının çeşitli şekillerde ödüllendirilmesi, oyun teorisinin önemini bir kez daha göstermiş oldu.

Yukarıda belirtilen konuların yanı sıra çalışmamızın temel konusunu oluşturacak olan sigortacılık ve tarım dalları da oyun teorisinin bir diğer uygulama alanlarındandır. Oyun teorisinin tarım ve sigortacılık uygulamalarını içeren bazı çalışmalar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Kennedy (1987) oyun teorisini, genç ve erişkin balıkları avlayan, bunları iki farklı pazarda satan iki ülke arasındaki rekabeti açıklamak için kullanmıştır. Modelini ise Avusturalya ve Japonya arasındaki rekabet üzerinde uygulamıştır ve ardından elde edilen iş birlikli ve iş birliksiz stratejilerin kıyaslamasını yapmıştır. Lemaire (1991) yaptığı çalışmasında oyun teorisinin sigortacılıktaki uygulamalarını bunu yaparken farklı örneklerin her biri için karakteristik fonksiyonlar, çekirdekler, Shapley değerleri gibi çeşitli kavramlar tanımlamış ve gerekli hesaplamaları yapıp, sunmuştur. Yeung (1996) çalışmasında değiştirilebilir market ürünleri ile ilgili bir diferansiyel oyun modeli geliştirmiştir. 2002 yılında Viaene ve ekibi makalelerinde risk karşıtı bir müşteri ve sigortacı arasındaki iki kişilik bir sigorta pazarlık oyununu incelmişlerdir. Yaptıkları çalışma sonucunda, müşterilerin ilk pazarlıktan sonra önerilen sigorta poliçesini daha sonraki pazarlıklar sonucu önerilen poliçelere tercih ettiğini ortaya koymuşlardır (Viane ve Veugelers 2002). Daha sonra, Okura (2007) rekabetin Japon sigorta şirketlerine yapılan yatırımları nasıl etkilediğini oyun teorisini kullanarak göstermiştir.

2010 yılında ise Madani, su kaynaklarının yönetimini ve çeşitli su kaynağı sorunlarını oyun teorisi yardımıyla incelemiştir (Madani 2010). Özer ve Özçelik (2010) aynı yılda pamuk satımı için en iyi zamanı bulmak amacıyla oluşturdukları problemi oyun teorisi yardımıyla modellemişlerdir. Oluşturdukları modeli çözdüklerinde, uygun depolama alanına sahip çiftçiler için en uygun satış tarihinin şubat ve mart ayları olduğu, depolama alanına sahip olmayan çiftçilerin ise hasat yapıldıktan hemen sonra satmaları gerektiği sonuçlarına ulaşmışlardır. Jensen ve ekibi de 2015 yılında Avrupa Birliği'nin de problemi olan Kuzeydoğu Atlantik'teki uskumru avcılığıyla ilgili durumu iş birlikli ve iş birliksiz oyunlar şeklinde ele almışlardır (Jensen vd. 2015). Boonen (2016)'da Nash pazarlık çözümleriyle optimal risk dağıtımları ile ilgili bir düzenlemeyi yaptığı çalışmada sunmuştur.

2017 yılında Albrecher ve Dalit oyun teorisi yardımıyla sigorta şirketleri arasında hayat dışı sigorta fiyatlarındaki rekabeti ve asimetrik bilgilerin denge primi üzerindeki etkilerini gösterdiler (Albrecher ve Dalit 2017). Asimit ve Boonen 2018 yılında Pareto optimal sigorta sözleşmeleri seti ile sigorta oyununun çekirdeğini oyun teorisi yaklaşımıyla incelemişlerdir (Asimit ve Boonen 2018). Gao ve Wang (2019)'daki çalışmalarında hükümet, sağlık sigortası fonu, yüksek kaliteli ve düşük kaliteli hastaneler ve hastalardan oluşan sağlık tedarik zincirinin koordinasyon problemine oyun teorisi modelini uygulamışlardır. Örneklerden de görüleceği üzere oyun teorisi hem tarım ve doğal kaynaklar ile ilgili çalışmalarda hem de sigortacılık alanında zaman içerisinde kendine yer bulmuş ve gelişmeye devam etmiştir.

Bizim bu çalışmamızda ele alacağımız örnek durum şu şekildedir: Bir kayısı tarlasına sahip bir çiftçinin tarlasına sigorta yaptırıp yaptırmaması gerektiği problemini iki kişilik sıfır toplamlı oyun şeklinde modelleyip, çözümünü inceleyeceğiz. Bu amaçla, öncelikle bir adet getiri matrisi oluşturacağız ve bu oyunu literatürde matris oyunlarının çözümü için bilinen bir yöntemle çözeceğiz. Buna ek olarak, karar teorisinden yararlanarak oyunun Savage pişmanlık matrisini de oluşturacağız. Savage pişmanlık matrisini de ötelenmiş ayrı bir oyun gibi kabul ederek, çözeceğiz. Ardından 2018 yılında İzgi ve Özkaya'nın iki kişilik sıfır toplamlı matris oyunlarının çözümünde ve kurulumunda kullanılan, getiri matrisinin matris normlarını içeren metodu (MN metodu) hem oyunun getiri matrisi için hem de Savage pişmanlık matrisini için kullanacağız (İzgi ve Özkaya 2019). Bu yöntem aynı yıl Özkaya tarafından yüksek lisans tezinde detaylı bir şekilde incelenmiş ve çeşitli örneklerle yöntemin uygulanabilirliği ve kullanışlılığı gösterilmiştir (Özkaya 2018). İzgi ve Özkaya 2019 yılında yaptıkları bir diğer çalışmada, MN metodu iki kişilik sıfır toplamlı olmayan bimatris oyunlar için geliştirilmiştir. Bimatris oyunlar için geliştirdikleri yöntemlerini gerek teorik gerekse uygulanabilirlik açısından ayrıntılı olarak inceleyerek yöntemin tutarlılığını örneklerle desteklemişlerdir (İzgi ve Özkaya 2019). Ayrıca, İzgi ve Özkaya 2019 yılında yaptıkları bir diğer çalışmada ise geliştirdikleri yönteme getiri matrisinin determinantını eklemeyi başarıp, bir matris oyununun adilliğinin gösterilmesinde bu yeni yöntemin nasıl kullanacağını kapsamlı bir şekilde açıklamışlardır (İzgi ve Özkaya 2019).

Çalışmanın devamı şu şekildedir: İkinci bölümde oyun teorisi ile ilgili genel tanımlar ve kullanılacak teoremler verilmiştir. Ayrıca makalemizdeki yaklaşımlarda kullanılmak üzere karar teorisinden alınan bazı tanımlar da sunulmuştur. Üçüncü bölümde ilk olarak problem tanıtılıp, daha sonra hem literatürdeki yöntem ile hem de İzgi ve Özkaya'nın literatüre kazandırmış olduğu MN yöntemi ile çözülmüştür. Son bölümde ise sonuçlara yer verilmiştir.

2. Oyun Teorisi ve Karar Teorisi ile İlgili Bazı Teorik Bilgiler

Bu bölümde çalışmamızda ele alacağımız problemi incelemek için gerekli olan teorik alt yapıyı sunacağız. Hem karar teorisiyle ilgili hem de MN yöntemiyle ilgili gerekli tanım, önerme ve teoremleri vereceğiz.

2.1 Oyun teorisi

Tanım 1 (Ferguson 2014): Sıfır toplamlı bir oyunun stratejik formu, diğer bir deyişle normal formu,

1. P boş olmayan ve I. oyuncunun stratejilerini içeren küme,
2. Q boş olmayan ve II. oyuncunun stratejilerini içeren küme,
3. A, $X \times Y$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

(X, Y, A) üçlüsü ile tanımlanır.

Tanım 2 (Leyton-Brown ve Shoham 2008): i oyuncusu için bir maksimin stratejisi tarafından garanti edilen minimum getiri tutarına oyunun güvenlik seviyesi ya da maksimin değer denir.

Tanım 3 (İzgi ve Özkaya 2019): $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bir matris ve $\|A\|_\infty$ $ise\, A$'nın h. satırının girdilerinin mutlak değer toplamı olsun. Bu durumda A matrisinin h. satırının silinmesiyle elde edilen $B \in \mathbb{R}^{(m-1)\times n}$ matrisine A matrisinin satırsal olarak indirgenmiş matrisi denir. Aynı şekilde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bir matris, $\|A\|_1$ ise A'nın s. sütununun girdilerinin mutlak değer toplamı olmak üzere A matrisinin s. sütununun silinmesiyle elde edilen $B \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ matrisine A matrisinin sütunsal olarak indirgenmiş matrisi denir.

Önerme 1 (İzgi ve Özkaya 2019): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ iki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun getiri matrisi, v oyun değeri olsun. Ayrıca, $x = |min(A)|$ ve $y = -|maks(A)|$ olmak üzere, $X\ (ya\ da\ Y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bütün girdileri $x(ya\ da\ y)$ bir matris olsun. Bu durumda, ötelenmiş oyununun pozitif girdili getiri matrisi $A + X$ (negatif girdili getiri matrisi $A + Y$) ve bu oyunun oyun değeri $v + x\ (ya\ da\ v + y)$ olur.

Teorem 1 (İzgi ve Özkaya 2019): $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ iki kişilik sıfır toplamlı oyunun getiri matrisi ve B, A matrisinin satırsal olarak indirgenmiş matrisi olmak üzere, v oyun değeri için

$$|v| \geq 1, ise\ \frac{\|B\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq |v| \leq \|A\|_1$$

$$|v| \leq 1\ ve\ v \neq 0, ise\ \frac{1}{\|A\|_1} \leq |v| \leq \frac{\|A\|_\infty}{\|B\|_\infty}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2 (İzgi ve Özkaya 2019): $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ iki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun pozitif girdili getiri matrisi olsun. Karma stratejiler kümesinin en büyük ve en küçük elemanları, sırasıyla p_{maks} ve p_{min}, için

$$L = \text{maks}\left\{\frac{1-\frac{|v|}{\|A\|_1}}{m-1}, \frac{|v|}{\|B\|_\infty}\right\} \text{için } p_{maks} \geq L$$

$$U = \text{min}\left\{\frac{1-\frac{|v|}{\|B\|_1}}{m-1}, \frac{|v|}{\|A\|_\infty}\right\} \text{için } p_{min} \leq U$$

eşitsizlikleri sağlanır.

2.1 Karar teorisi

2.2.1. Karar matrisi

Karar Matrisi,

$A_i = Alternatif\ i\ seçeneği; i = 1,2, \dots, m$

$\varphi_j = Doğanın\ j\ durumu; j = 1,2, \dots, n$

olmak üzere

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} v(A_1,\varphi_1) & v(A_1,\varphi_2) & \cdots & v(A_1,\varphi_n) \\ v(A_2,\varphi_1) & v(A_2,\varphi_2) & \cdots & v(A_2,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v(A_m,\varphi_1) & v(A_m,\varphi_2) & \cdots & v(A_m,\varphi_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.2. Minimaks (Wald maksimin) kriteri (Leyton-Brown ve Shoham 2008)

Minimaks stratejisi $\min_{A_i}\left[\underset{\varphi_j}{maks}\{v(A_i,\varphi_j)\}\right]$ olarak ve maksimin stratejisi $\underset{A_i}{maks}\left[\min_{\varphi_j}\{v(A_i,\varphi_j)\}\right]$ şeklinde tanımlanır. Burada ifade edilen maksimin stratejisi aynı zamanda Wald maksimin kriteri olarak bilinmektedir (Walker 1959).

2.2.3.Savage Pişmanlık Matrisi (Walker 1959)

Karar matrisinin girdileri $v(A_i,\varphi_j)$'ların $s(A_i,\varphi_j) = v(A_i,\varphi_j) - \underset{A_k}{maks}\{v(A_i,\varphi_j)\}$ ile sonucu elde edilen girdilerle değiştirilmesiyle oluşturulan matrise Savage pişmanlık matrisi denir.

3. Problem

Bu bölümde öncelikle tarımsal faaliyetlerde ürün sigortasının gerekli olup olmadığı sorusuna cevap bulmak için ilk olarak sigorta problemini belirleyip, genel hatlarıyla ele alacağız. Ardından sigorta problemine oyun teorisi gözüyle bakıp problemi temsil etmesi açısından oluşturacağımız matris oyununu öncelikle literatürde genel olarak kullanılan bir yöntem ile çözeceğiz. Daha sonra, aynı oyunu İzgi ve Özkaya'nın getiri matrisinin sadece 1 ve ∞ normlarını içeren yöntemlerini (MN yöntemi) kullanarak ele alacağız. Öyle ki, ilk olarak belirsizlik altında oyunu Wald Maksimin ve Savage pişmanlık kriterleri bakımından yeniden ifade edeceğiz. Bu noktada karma stratejilere izin verildiği durumda hem karar matrisini hem de Savage pişmanlık kriteri ile elde edilen pişmanlık matrisini MN yaklaşımı ile farklı bir açıdan inceleyip, sonuçları karşılaştıracağız.

Çalışmamızda örnek olarak ele alacağımız problemde üzerinde 200 ağaç bulunan ve 100 kg/ağaç verimlilikle ekilmiş kayısı tarlası olan bir çiftçinin tarlasını sigorta yaptırıp yaptırmaması gerektiğini oyun teorisi yardımıyla açıklamaya çalışacağız. Diğer bir deyişle, 1 kayısı ağacından 100 kg verimlilik elde edeceği düşüncesiyle yola çıkan ve toplamda 200 ağaçtan 20.000 kg verim elde etmeyi hedefleyen kayısı çiftçisinin olası bir doğal afet durumunda kaybını nasıl daha aza indirebileceği sorusuna oyun teorisi yardımıyla cevap bulmaya çalışacağız. Kaybını tolere edebileceği tek seçeneğin tarlasını veya ürününü sigortalatmak olduğunu varsayıp, bu varsayım altında çiftçimizin sigorta yaptırması ve yaptırmaması durumundaki kar ve zarar durumlarını irdeleyeceğiz. Güvenli ve tutarlı sonuçlara ulaşmak için hem literatürdeki yöntemleri hem de MN yöntemini kullanacağız. Böylece çiftçi için en iyi seçeneğin "tarlasını sigortalatması mı?" yoksa "sigortalatmadan risk alması mı?" gerektiği sorularına cevap bulmak noktasındaki karar mekanizmasında önem arz edecek sonuçları elde etmeye çalışacağız. Çalışmamız boyunca tarladaki mahsulün başına gelebilecek doğal afeti dolu olarak kabul edeceğiz. Bu çalışmada HDI sigortanın devlet destekli bitkisel ürünler için 2008 yılında hazırlamış olduğu örnek verileri kullandık [1]. Öyle ki, HDI sigorta verilerine göre dolunun %100'lük zarar verdiğini varsaydığımız tarlanın sigorta maliyeti 6.400 YTL'dir. Tarla mahsulünün tam verimlilikte toplandığı varsayılırsa çiftçinin kazanacağı toplam para ise 20.000 YTL olacağı hesaplanmıştır. Bu varsayımlar üzerine kurduğumuz doğaya karşı oyununun (Game Against Nature) karar matrisini

A_1: $Sigorta\ yapılmadığı\ durum$,

$A_2 = Sigorta\ yapıldığı\ \ durum$,

$\varphi_1 = Dolunun\ vurmadığı\ durum$,

$\varphi_2 = Dolunun\ vurduğu\ durum$

olmak üzere

$$G(A_i,\varphi_j) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi_1 & \varphi_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -20.000 \\ -6.400 & -6.400 \end{bmatrix} \end{array},$$

$i,j = 1,2.$

şeklinde oluşturabiliriz.

Oluşturduğumuz doğaya karşı oyununu ilk olarak Wald maksimin kriterini (WMK) kullanarak ele alacağız. Wald maksimin kriterinin temel amacı en yüksek güvenlik seviyesine sahip olan seçeneği seçmektir. Bu nedenle $\underset{A_i}{maks}\left[\underset{\varphi_j}{min}\{v(A_i,\varphi_j)\}\right]$ kullanıldığında elde edilen sonuç -6.400 olarak bulunur. Bu ise -6.400 değerinin bulunduğu seçeneğin kullanılması gerektiğini ifade etmektedir. Yani örnek oyundaki çiftçi tarlası için A_2 stratejisini seçmelidir sonucuna ulaşılır.

Ayrıca oyunu Savage pişmanlık kriterine göre inceleyeceğiz, bunun için öncelikle Savage pişmanlık matrisinin girdilerini aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$s(A_1,\varphi_1) = v(A_1,\varphi_1) - \underset{A_k}{maks}\{v(A_k,\varphi_1)\}$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$s(A_2,\varphi_1) = v(A_2,\varphi_1) - \underset{A_k}{maks}\{v(A_k,\varphi_1)\}$$

$$= -6.400 - 0 = -6.400$$

$$s(A_1,\varphi_2) = v(A_1,\varphi_2) - \underset{A_k}{maks}\{v(A_k,\varphi_2)\}$$

$$= -20.000 - (-6.400) = -13.600$$

$$s(A_2,\varphi_2) = v(A_2,\varphi_2) - \underset{A_k}{maks}\{v(A_k,\varphi_2)\}$$

$$= -6.400 - (-6.400) = 0.$$

Ardından Savage pişmanlık matrisi,

$$S(A_i,\varphi_j) = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & -13.600 \\ -6.400 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Son adım olarak Wald maksimin kriterini oluşturduğumuz Savage pişmanlık matrisine uyguladığımızda $\underset{A_i}{maks}\left[\underset{\varphi_j}{min}\{v(A_i,\varphi_j)\}\right] = -6.400$ olarak bulunur. Bir önceki kriterle elde ettiğimiz sonuçtaki gibi çiftçimizin A_2 stratejisini kullanması daha avantajlı olduğu sonucuna ulaşılır. Her iki sonuçtan da görüleceği üzere literatürde bilinen Wald kriteri olayın ve durumların doğası gereği alınacak doğal pozisyonu teyit etmektedir.

Savage pişmanlık kriteri oyunda karma stratejilere izin verildiğinde daha korumacı sonuçlar verdiği gerçeğinden hareket ederek (Walker 1959), $S(A_i,\varphi_j)$ matrisini sıfır toplamlı oyunlar için literatürde kullanılan temel yöntemle çözdüğümüzde oyun değerini $v_S = -4.352$, karma stratejiler kümesini ise $S_s = \{0{,}32, 0{,}68\}$ olarak buluruz. Yani stratejiler üzerindeki bütün ağırlık Wald maksimin kriterindeki ya da Savage pişmanlık matrisinde karma stratejilere izin verilmediği durumdaki gibi doğrudan en yüksek pişmanlık getiren girdiye yüklenmemektedir, daha az pişmanlık getiren girdi az da olsa değer kazanmaktadır. Diğer bir deyişle, riskler dağıtılarak daha optimal sonuç elde edilmiş olunmaktadır. Fakat karma stratejiler kümesinden de görülebileceği gibi girdiler üzerindeki ağırlığın büyük bir kısmı A_2 stratejisi üzerindedir. Diğer çözümlere göre daha korumacı olan bu yaklaşımla da çiftinin tarlasına sigorta yaptırmasının (%68 olasılık ile), yaptırmaması (%32 olasılık ile) durumundan daha avantajlı olduğu anlaşılmaktadır.

Son olarak problemi İzgi ve Özkaya'nın MN yaklaşımını hem $G(A_i,\varphi_j)$ karar matrisine hem de $S(A_i,\varphi_j)$ Savage pişmanlık matrisine uygulayıp, elde edeceğimiz sonuçları yukarıda verdiğimiz kriterleri kullanarak elde ettiğimiz sonuçlarla kıyaslayacağız.

Öncelikle $G(A_i,\varphi_j)$ karar matrisi için MN yöntemiyle daha rahat analizler yapabilmek adına, karar matrisini Önerme 1 yardımıyla öteleyerek negatif girdilerden kurtarıp, pozitif girdili bir matrise dönüştüreceğiz. Önerme 1'de belirtilen X matrisini örnek olarak şu şekilde seçiyoruz: $X \in \mathbb{R}^{2\times2}$ girdileri $x = 20.000$ olan bir matris olsun. $X \in \mathbb{R}^{2\times2}$ matrisini, karar matrisimiz olan $G(A_i,\varphi_j)$ ile aşağıdaki gibi topluyoruz. Bu durumda ötelenmiş oyunun getiri matrisi,

$$A = G(A_i,\varphi_j) + X = \begin{bmatrix} 20.000 & 0 \\ 13.600 & 13.600 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Daha sonra, Teorem 1'i kullanmak için yukarıda elde ettiğimiz A matrisinin ve A matrisinin indirgenmiş matrisi olan B matrisinin ∞ ve 1 norm değerlerini; $\|A\|_\infty = 27.200$ $\|B\|_\infty = 20.000$ ve $\|A\|_1 = 33.600$ olarak elde ettik. Böylece, Teorem 1'de oyun değeri için verilen ilgili eşitsizlik kullanılarak, ötelenmiş oyun değerine ait alt ve üst sınırlar $\frac{20.000}{27.200} \leq v_A \leq$ 33.600 şeklinde bulunur. Öte yandan, bu aralıktan herhangi bir geçici (dummy) oyun değerini, $v_{dummy} = 15.000$ olsun, örnek olarak seçerek Teorem 2 aracılığıyla karma stratejiler kümesinin p_{maks} ve p_{min} elemanları için alt ve üst sınırlar belirleyeceğiz. Gerekli hesaplamalar ötelenmiş A matrisi kullanılarak yapıldığında, $p_{maks} \geq maks\{0{,}75, 0{,}45\} = 0{,}75$ ve $p_{min} \leq min\{0{,}1, 0{,}55\} = 0{,}1$ olarak bulunur. Bulduğumuz alt ve üst sınırları kullanarak olasılık teorisinin temel prensipleriyle ve matris oyunlarındaki denklik stratejisi (equalizing strategy) ile çelişmeyecek şekilde kullandığımızda, örneğin $p_{maks} = 0{,}9$ ve $p_{min} = 0{,}1$ olarak toplamları 1 olacak şekilde seçebilir ve ardından oluşturduğumuz senaryonun karma stratejiler kümesini de $S_g = \{0{,}1, 0{,}9\}$ şeklinde belirleyebiliriz. Karma stratejiler kümesinden de görüldüğü gibi yani karma stratejiler kümesindeki ikinci elemanın daha büyük olması sebebiyle çiftçinin A_2 seçeneğini kullanması gerektiği beklenmektedir.

Benzer şekilde MN yöntemini Savage pişmanlık matrisine uyguladığımızda, yani öncelikle Önerme 1 ile öteleyip ardından Teorem 1'i uyguladığımızda ötelenmiş oyun değeri için $0{,}65 \leq v_{SA} \leq 20.8000$ sınırları elde edilir. Bulduğumuz bu aralıktan Teorem 2'yi kullanabilmek için keyfi olarak $v_{dummy} = 10.000$ olarak seçebiliriz. $S(A_i, \varphi_j)$ matrisini kullanarak, $p_{maks} \geq maks\{0{,}52, 0{,}74\} = 0{,}74$ ve $p_{min} \leq min\{0{,}26, 0{,}48\} = 0.26$ olarak bulunur. Bir önceki çözümde olduğu gibi oyun teorisi ve olasılık teorisi gerçeklerine bağlı kalacak şekilde örnek olarak $p_{maks} = 0{,}81$ ve $p_{min} = 0{,}19$ olarak seçebiliriz. Savage pişmanlık matrisi için belirleyeceğimiz senaryoda ise karma stratejiler kümesini $S_S = \{0{,}19, 0{,}81\}$ olarak oluşturabiliriz. Bu senaryodan da görüleceği üzere Savage pişmanlık matrisi kullanıldığında da A_2 stratejisine yani sigorta yaptırılması gerekliliği sonucuna MN yöntemi ile de ulaşılır. Yaptığımız çözümlerde olasılık ve oyun teorisindeki ilgili sınırlar dahilinde farklı seçimler de yapılabilir. Yapılacak bu seçimlerin kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar, bizim burada yaptığımız sonuçlarla hemen hemen aynı olacaktır.

4. Sonuçlar

Bu çalışmamızda örnek olarak ele aldığımız ve doğaya karşı oyunlar şeklinde modellediğimiz bir çiftçinin kayısı tarlasını sigortalatıp sigortalatmaması gerektiği problemini iki kişilik sıfır toplamlı bir matris oyunu olarak sunduk ve oyunun karar matrisini oluşturduk. İlk olarak belirsizlik durumu altında, oyunumuzu karar teorisindeki Wald maksimin kriteri altında getiri matrisi ve Savage pişmanlık matrisi yardımıyla ayrı ayrı ele aldık ve çözdük. Elde ettiğimiz sonuçlarda çiftinin tarlasını sigortalatması gerektiği sonucuna ulaştık. Ardından, oyunu Savage pişmanlık kriteri altında karma stratejilere izin verildiği durumda literatürdeki matris oyunlarının çözümünde kullanılan bir yöntem ile tekrar çözdük. Bu çözüm sonucunda da daha önceki çözümlerde elde ettiğimiz sonuçlarla tutarlı veriler elde ettik. Yani çiftçinin alternatifleri üzerindeki ağırlıklarının dağıtıldığı, başka bir deyişle riskin bölündüğü durumda dahi tarlanın sigortalatılması gerektiği seçeneğinin daha ağır basmakta olduğu sonucunu elde ettik. Son olarak, karma stratejilere izin verilmesi durumunda oluşturduğumuz karar matrisini ve Savage pişmanlık matrisini, İzgi ve Özkaya'nın MN yöntemi ile farklı bir açıdan yeniden çözerek, aynı doğrultuda fakat daha güçlü sonuçlar elde ettik. Sonuçları özetlemek ve daha rahat karşılaştırma yapabilmek adına elde ettiğimiz tüm sonuçları Çizelge 1'de sunduk.

Çizelge 1. Wald maksimin, Savage pişmanlık ve MN yöntemleri ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

Yöntem	Sonuç
Wald maksimin kriteri (Karar matrisine uygulanması)	A_2
Wald maksimin kriteri (Savage pişmanlık matrisine uygulanması)	A_2
Savage pişmanlık kriteri altındaki çözüm	A_2 (%68'lık oranla tercih etmeli)
MN yöntemi (Karar matrisine uygulanması)	A_2 (%90'lık oranla tercih etmeli)

MN yöntemi (Savage pişmanlık matrisine uygulanması)	A_2 (%81'lik oranla tercih etmeli)

A_2: Sigorta yapıldığı durum

Ulaştığımız sonuçlardan ilk olarak karar teorisindeki Wald maksimin kriterinin hem getiri matrisine hem de Savage pişmanlık matrisine uygulanmasından elde edilen sonuçları ele alırsak, bu sonuçlar örnek oyundaki çiftçinin tarlasını ya da diğer bir deyişle elde edeceği mahsulünü sigortalatması gerektiği yönündeki bir stratejiyi, A_2, doğrudan işaret etmektedir. Ek olarak, Savage pişmanlık kriteri altında karma stratejilere izin verilen durumlar altında oyun teorisindeki bilinen bir yöntem ile elde edilen sonuçlardan, tarlanın sigortalatması yönündeki A_2 stratejisinin %68 gibi çok güçlü olmayan bir oranla tercih edilmesi gerektiği öngörülmektedir. Buna karşın MN yönteminin karar ve Savage pişmanlık matrislerine uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar hem bir stratejiyi, A_2, işaret etmekte hem de bu stratejinin seçilmesinin gerekliliğini diğer metotlara kıyasla daha kuvvetli bir oranla, sırasıyla %90 ve %81, tavsiye etmektedir. Böylece karar verecek kişiye neden bu stratejiyi seçmesi gerektiğini, literatürdeki diğer metotlara kıyasla daha açık ve güçlü bir şekilde göstermektedir. Sonuç olarak, MN yaklaşımı ile elde ettiğimiz sonuçların Wald maksimin ve Savage pişmanlık kriterleri uygulanarak elde edilen sonuçlarla tutarlı olduğu açık bir şekilde gözlemlenmektedir. Ayrıca tüm yöntemlerin uygulanması ile elde edilen değerlerin, tarlanın sigorta yaptırılması gerektiği sonucuna işaret ettiği görülmektedir.

5. Kaynaklar

Albrecher, H. ve Dalit, D.A. 2017. On effects of asymmetric information on non-life insurance price under competition. *International Journal of Data Analysis Techniques and Strategies*. **9**,4, 287-299.

Asimit, V. ve Boonen, T.J. 2018. Insurance with multiple insurer: A game-theoretic approach. *European Journal of Operational Research*. **267**, 2, 778-790.

Boonen, T.J. 2016. Nash equilibria of Over-The-Counter bargaining for insurance risk redistributions: The role of a regulator. *European Journal of Operational Research*, **250**(3), 955-965.

Ferguson, T.S., 2014. Game Theory, Mathematics Department UCLA, 2nd Edition, 4.

Gao, L., Wang, X. 2019. Healthcare supply chain network coordination through medical insurance strategies with reference price effect. *International Journal of Environmental Research and Public Health* **16**(18), 3479.

İzgi, B. ve Özkaya, M. 2019. A New Perspective to the Solution and Creation of Zero Sum Matrix Game with Matrix Norms, *Applied Mathematics and Computation*, **341**, 148-159.

İzgi, B. ve Özkaya, M. 2020. Applications of Matrix Norm Approach to the Bimatrix Games, (Submitted for publication).

İzgi, B. ve Özkaya, M. 2019. Matris Normları ile Bir Matris Oyununun Adilliğinin Gösterilmesi, *International Journal of Advances in Engineering and Pure Sciences,* **31** (2), 126-132.

Jensen, F., Frost, H., Thøgersen, T., Andersen, P. ve Andersen, J. L. 2015. Game theory and fish wars: The case of the Northeast Atlantic mackerel fishery, *Fisheries Research*, **172**, 7-16.

Kennedy, J.O.S. 1987. A Computable Game Theoretic Approach to Modelling Competitive Fishing, *Marine Resource Economics 4*, **no. 1 (1987)**, 1-14.

Lemaire, J. 1991. Cooperative Game Theory and its Insurance Applications. *ASTIN Bulletin*, **21**(1), 17-40.

Leyton-Brown, K., Shoham, Y., 2008, Essentials of Game Theory, Morgan&Claypool Publishers, 15.

Madani, K. 2010. Game theory and water resources, *Journal of Hydrology*, **381**,3-4, 225-238.

Okura, M., (2007). Competitive Strategies of Approach. *International Studies of Management & Organization*, **27**(2), 53-69.

Özer, O.O. ve Özçelik, A. 2010. Pamuk ürünün en uygun satış zamanının oyun teorisi yöntemiyle saptanması. *Tarım Bilimleri Dergisi*, **16**(2010), 262-270.

Özkaya, M. 2018. The Roles of Matrix Norms in the Game Theory, , M.Sc. Thesis. Istanbul Technical University.

Graduate School of Science, Engineering and Technology, Istanbul, 47.

Viaene, S., Veugelers, R. ve Dedene,G. 2002. Insurance bargaining under risk aversion. *Economic Modelling*, **19**, 2, 245-259.

von Neumann, J. 1928. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295-320.

Walker, O. L., 1959, Game Theory Applications in Agricultural Decisions. *Retrospective Theses and Dissertations*. 2169.

Yeung, D.W.K. 1996. A differential game model of a market of substitutable products. *European Journal of Operational Research*, **90**, 3, 599-60.

Ziegler, A. 2004. A Game Theory Analysis of Options, Springer, 2nd Edition, Heidelberg, Germany, 1-2.

İnternet Kaynakları

1-https://www.hdisigorta.com.tr/urunler/tarim-sigortalari/devlet-destekli-bitkisel-urun-sigortasi (Son erişim tarihi: 14.01.2020)