

# Fermiyon Benzeri İntanton Çözümlerinin Dalgacık Entropi Analizinin İncelenmesi

Beyrul CANBAZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> İstanbul Yeni Yüzyıl Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi, İş Sağlığı ve Güvenliği Bölümü, İstanbul.

e-posta: beyrul.canbaz@yeniyuzuil.edu.tr. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5633-2296>

Geliş Tarihi: 27.05.2022

Kabul Tarihi: 12.09.2022

## Öz

### Anahtar kelimeler

Dalgacık dönüşümü;  
Faz uzayı; Fermiyon benzeri instanton;  
Dalgacık entropisi

İntantonlar klasik topolojik çözümlerdir, parçacık fiziği ve kozmolojide önemli rol oynarlar. Bu çalışmada, Heisenberg anatzıyla elde edilen iki boyutlu Thirring modelde fermiyon benzeri instanton çözümlerinin yörüngelerinin periyodikliği incelenmiştir. Fermiyon benzeri instanton çözümlerinin yörüngeleri, Shannon dalgacık entropisi (WE) yöntemi kullanılarak incelenmektedir. Ayrıca, faz uzayında WE ve WE spektrumları, fermiyon benzeri instanton çözümlerinin yörüngelerinin karakteristiği hakkında bilgi sahibi olabilmek için analiz edilmektedir. Çalışma sonucunda, fermiyon benzeri instanton çözümlerinin kararlı nokta etrafında düzenli, diğer noktalarda ise düzensiz yörüngelere sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca bilinen diğer entropi yöntemleriyle (Renyi entropi ve Tsallis entropi) karşılaştırılmış ve benzer sonuçlar gözlemlenmiştir.

## Study of Wavelet Entropy Analysis of the Fermion-like Instanton Solutions

### Abstract

### Keywords

Wavelet transform;  
Phase space; Fermion-like instanton; Wavelet entropy

Instantons are classical topological solutions, playing an important role in particle physics and cosmology. In this study, the periodicity of the orbits of the fermion-like instanton solutions in the two-dimensional Thirring model obtained with the Heisenberg ansatz is investigated. The trajectories of fermion-like instanton solutions are investigated by the Shannon wavelet entropy (WE) method. In addition, WE and WE spectrum in phase space are analyzed in order to have information about the characteristics of the trajectories of fermion-like instanton solutions. As a result of the study, it was seen that the fermion-like instanton solutions have regular trajectories around the stable point and irregular trajectories at other points. It was also compared with other known entropy methods (Renyi entropy and Tsallis entropy) and similar results were observed.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi.

### 1. Giriş

İntantonlar sıfır enerjili, sonlu ve sıfırdan farklı eylemlerdeki klasik çözümlerdir ve vakumlar arasındaki tünelleme süreçleri olarak tanımlanır. Bu özellik kuarkların parçacıklar içinde hapsolmesi problemlerini anlamada önemli bir rol oynamaktadır (Shifman 1994). Thirring model, 2D konformal invaryant saf fermiyonik bir modeldir (Thirring 1958). Konformal invaryant saf spinör Thirring alan denkleminin spinör tipi instanton çözümleri, konformal invaryant simetrisinin kırılmasıyla bulundu (Akdeniz *et al.* 1979). Thirring

modelde, fermiyon benzeri instantonlara karşılık gelen çözümler Heisenberg anatzı (Canbaz *et al.* 2012) kullanılarak elde edilmiştir. Faz uzayında fermiyon benzeri instanton çözümlerinin evrimi ve kuplaj sabitinin rolü araştırılmıştır (Canbaz *et al.* 2012). Değişen kuplaj sabitine göre fermiyon benzeri instanton çözümlerinin kararlılığı Ölçek İndeks Metodu ile incelenmiştir (Yılmaz *et al.* 2018). Ayrıca, fermiyon benzeri instanton çözümlerinin de kaos Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) yöntemi ile araştırılmış (Canbaz 2022a, Ak 2022) ve Lyapunov üstelleri incelenmiştir (Canbaz 2022b).

Entropi bir sistemdeki düzensizliklerin ölçüsüdür. Sistem düzensizliği arttıkça, sistemdeki bileşenler arasındaki enerji alışverişi azalmakta ve entropi değeri artmaktadır (Anderson 2008). İlk olarak Clausius (Clausius 1850), bir sistemdeki enerjiyi hesaplamak için termodinamikte entropiyi kullandı ve sonrasında Boltzmann entropi kavramını geliştirdi (Boltzmann 1871). Shannon (Shannon 1948) bir bilgi kaynağı tarafından üretilen bilginin ne orada ve ne kadar olduğunu ölçen olarak tanımlamıştır. Entropi ise rastgele veri kaynakları tarafından üretilen bilginin ortalama hızı olarak tanımlanmaktadır (Nicolis *et al.* 2020). Shannon entropisi, bilgi kaynaklarının belirsizliğini temsil etmek amacıyla ortaya çıkmış olsa da, diğer farklı alanlarda belirsizliği veya düzensizliği ölçmek için de kullanıldı (Shannon 1948). Bu çalışmada Shannon entropisi tercih edilmesinin sebeplerinden biri de budur. Ayrıca, bilimsel araştırmalarda farklı yöntemler kullanılsa da Shannon entropisi çoğunlukla tercih edilen belirsizlik ölçüsüdür (Ubriaco 2009, Bouzebda and Elhattab 2014).

Dinamik sistemlerde davranış özelliklerinin doğru ve süratli olarak belirlenebilmesi, uzun süreden beri oldukça mühim bir araştırma mevzusudur (Brown 2018). Yüksek zaman-frekans çözünürlüğüne sahip bir sinyaldeki düzensizlik derecesini tahmin etmede kullanılan dalgacık entropisi; düzenli sinyaller için düşük, düzensiz sinyaller için ise yüksektir (Meyer 1993). Bu çalışmada, farklı başlangıç koşulları altında fermiyon benzeri instanton çözümlerinin davranışını incelemek için Shannon dalgacık entropi yöntemi kullanılmıştır. Yörüngeler hakkında bilgi elde etmek için, faz uzayındaki Shannon dalgacık entropisi (WE), değişen  $\beta$  değerlerinde farklı başlangıç koşulları altında analiz edilir. Çalışma sonucunda, fermiyon benzeri instanton çözümlerinin kararlı noktalar etrafında düzenli, diğer noktalarda ise düzensiz yörüngelere sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

Makale şu şekilde planlanmıştır: Sonuçlarımızın metodolojik olarak daha iyi anlaşılabilmesi için, Materyal ve Yöntem' de Heisenberg anzati aracılığıyla Thirring modelinde elde edilen fermiyon benzeri instanton çözümleri ve yörüngelerin düzenini belirlemek amacıyla kullanılan dalgacık

entropisi tanıtılacaktır. Bulgular ve Tartışma'da, fermiyon benzeri instanton çözümlerinin dalgacık entropisi değişen  $\beta$  değerlerine karşılık gelen farklı başlangıç koşullarına göre grafikleri, faz uzayındaki çözümlerin dalgacık entropisi grafikleri çizilmiş, diğer entropi yöntemleriyle (Renyi entropi ve Tsallis entropi) karşılaştırılmış ve ayrıca sonuçlar verilmiştir.

## 2. Materyal ve Metot

### 2.1 Thirring Model

1958'de, Thirring Model (Thirring 1958) 2 boyutlu konformal simetriye sahip saf bir fermiyon alan teorisi modeli olarak tanıtıldı. Bu model, farklı vakum durumları arasındaki kuantum etkilerini incelemek için iyi bilinen bir oyuncak kuantum alan modelidir (Akdeniz *et al.* 1979).

Modelin konformal değişmez Lagrange denklemi,

$$L = i\bar{\psi}\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (1)$$

ile verilir.  $g > 0$  kuplaj sabiti ve  $\psi(x)$  fermiyon alanıdır (Thirring 1958). Hareket denklemi,

$$i\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + g(\bar{\psi}\psi)\psi = 0 \quad (2)$$

ile verilir. Heisenberg anzatının (Heisenberg 1954) karmaşık Öklid konfigürasyonu

$$\psi = [ix_{\mu}\gamma_{\mu}\chi(s) + \varphi(s)]C \quad (3)$$

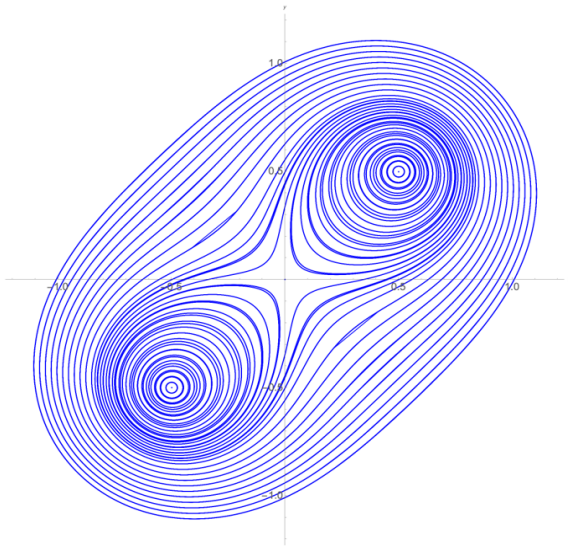
şeklinde verilir. Keyfi bir spinör sabiti  $C$  dir.  $s = x^2 + t^2$  ( $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv t$ ) olarak  $\chi(s)$  ve  $\varphi(s)$  reel fonksiyonlarıdır. (Canbaz *et al.* 2012)'de boyutsuzlaştırma işlemi sonrasında ikinci dereceden lineer olmayan adi diferansiyel denklem sisteminin (4a) ve (4b) boyutsuz formu,

$$2\frac{dF(t)}{dt} + \frac{1}{2}F(t) - \alpha AB(F(t)^2 + G(t)^2)G(t) = 0 \quad (4a)$$

$$2\frac{dG(t)}{dt} - \frac{1}{2}G(t) - \alpha AB(F(t)^2 + G(t)^2)F(t) = 0 \quad (4b)$$

Elde edilir. Burada F ve G fonksiyonları reel fonksiyonlardır ve A, B pozitif sabitlerdir (Canbaz et al. 2012). Bu denklem sisteminin  $\beta=\alpha(AB)=1$  için çözümü, (Canbaz et al. 2012)'de verilen Thirring instantonlarına karşılık gelmektedir.

Kuplaj sabitinin değişimine göre faz uzayında fermiyon benzeri instanton çözümlerinin evrimi incelenmiştir (Şekil 1) (Canbaz et al. 2012). Son zamanlarda farklı  $\beta=\alpha(AB)$  değerlerine sahip fermiyonik instanton çözümlerinin kararlılığı ölçek indeks yöntemi ile araştırılmış ve fermiyon benzeri instanton çözümlerinin  $\beta=1$  değeri için kararlı olduğu belirlenmiştir (Yılmaz et al. 2018). Ayrıca fermiyon benzeri instanton çözümlerindeki kaosu araştırılması GALI yöntemi ile çalışılmış ve Lyapunov üstelleri incelenmiştir (Canbaz 2022, Canbaz 2022).



Şekil 1. Thirring instanton çözümlerine karşılık gelen faz diyagramı (Canbaz et al. 2012).

## 2.2 Dalgacık Dönüşümleri

Dalgacık dönüşüm analizleri, sürekli ve ayrık dalgacık dönüşüm olarak 2 ayrı biçimde tanımlanmaktadır. (Burrus et al. 1998, Goswami and Chan 1999). Dalgacık dönüşüm fonksiyonu, sinyallerin zaman ve frekans gösterimi için kullanılan bir matematiksel yöntemdir. Bu dalgacık dönüşüm yöntemi birbirinden bağımsız farklı birçok bilim dalında kullanılmaktadır.

Dalgacık fonksiyonları, belirli matematiksel gereksinimler için veri veya bazı fonksiyonları temsil etmede kullanılan fonksiyonlardır. Bir dalgacık kümesi  $\psi_{a,b}$ , ana dalgacık  $\psi(t)$ 'nin açılımları ve ötelemeleri tarafından üretilen temel fonksiyonlar kümesidir ve

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (5)$$

ile verilir. Burada ölçek s, dönüşüm parametreleri u ve t zamandır. Dalgacık dönüşümleri

$$(W_{\psi}f)(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad (6)$$

şeklinde verilir. Ayrık parametre seti için  $s_j = 2^{-j}$  ve  $u_{j,k} = 2^{-j}k$  ile ana dalgacık fonksiyonunun özel seçimi için  $\psi(t)$ ,

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (7)$$

ile ifade edilir. Sonlu enerji sinyallerinden oluşan Hilbert uzayı,  $L^2(\mathcal{R})$ 'nin bir ortonormal temelidir. Ayrıca bilgi,  $L^2(\mathcal{R})$ 'de iç içe geçmiş alt uzayların hiyerarşik bir şemasında düzenlenebilir. Örnekleme süresi  $t_s$ 'nin, tekdüze bir zaman ızgarasına rağmen örneklenen  $S=\{s_0(n), n=1, \dots, M\}$  değerleri tarafından verildiği varsayılır.  $t_s = 1$  alınarak basitlik sağlanır. Ayrıştırma tüm çözünürlük seviyelerinde yapılırsa, dalgacık genişlemesi

$$S(t) = \sum_{j=-N}^{-1} \sum_k C_j(k) \psi_{j,k}(t) = \sum_{j=-N}^{-1} r_j(t) \quad (8)$$

şeklinde verilir. Burada dalgacık katsayıları  $C_j(k)$ , j ve j+1 ardışık sinyal yaklaşımları arasındaki yerel artık hatalardır ve  $r_j(t)$ , j ölçeğindeki artık sinyaldir.  $2^{j-1}\omega_s \leq |\omega| \leq 2^j\omega_s$  frekanslarına karşılık gelen S(t) sinyalinin bilgisini içerir.

$\{\psi_{j,k}(t)\}$ ,  $L^2(\mathcal{R})$  için ortonormal bir temel olduğundan, enerji kavramı Fourier teorisinden

türetilmiştir. Dalgacık katsayıları  $C_j(k) = \langle S, \psi_{j,k} \rangle$  ile verilir. Ayrıntı sinyalinin enerjisi ve her k örneklemeindeki enerji şu şekilde tanımlanır:

$$E(k) = \sum_{j=-N}^{-1} |C_j(k)|^2 \quad (9)$$

Sonuç olarak, toplam enerji

$$E_{tot} = \|S\|^2 = \sum_{j<0} \sum_k |C_j(k)|^2 = \sum_{j<0} E_j \quad (10)$$

şeklinde hesaplanır. Göreceli dalgacık enerjisine karşılık gelen normalize değerler,

$$\rho_j = \frac{E_j}{E_{tot}} \quad (11)$$

$j = -1, -2, \dots, -N$  için çözünürlük seviyesi enerjinin farklı ölçeklerde olasılık dağılımını ifade eder.

Olasılık dağılımını analiz etmek ve karşılaştırmak için etkili bir yöntem olan Shannon entropisi (Shannon 1948), herhangi bir dağılım bilgisi ölçüsünü hesaplayabilir. Toplam Shannon WE (Meyer 1993, Blanco *et al.* 1998, Rosso and Mairal 2002),

$$S_{WT}^S[P] = - \sum_{j<0} \rho_j \cdot \ln[\rho_j] \quad (12)$$

şeklinde ifade edilir. WE, sinyalin düzen veya düzensizlik ölçüsünü ve sinyalin temel dinamikleri hakkında bilgi sağlar. Düzenli bir sistemde, WE sıfıra yakın veya çok düşük bir değer alacaktır. Düzensiz bir sistemde ise, WE maksimum değerlerde olacaktır.

### 3. Bulgular

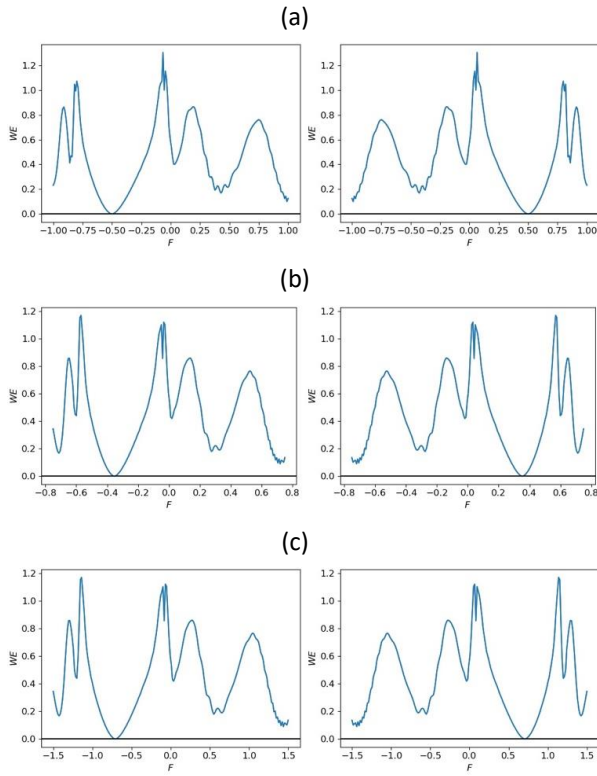
Fermiyon benzeri instanton çözümlerinin WE spektrumları ve faz uzayında WE renkli grafikleri çizilerek incelenmiştir. Ayrıca bilinen diğer entropi yöntemleriyle (Renyi entropi ve Tsallis entropi) karşılaştırılmıştır. Öncelikle  $F(t)$  ve  $G(t)$  için WE, denklem (4a) ve (4b)'de  $\beta=1, 2, 0.5$  parametreleri için değişen başlangıç koşulları altında, sırasıyla  $[-1, 1]$ ,  $[-0.75, 0.75]$ ,  $[-1.5, 1.5]$  aralıklarında 0.01 adım boyutuyla hesaplanır.  $t = 1$  adım boyutunda 0'dan

1000'e önceki bölümde verilen denklemler sırayla hesaplanarak, (4a) ve (4b) denklemlerinin çözümlerinden elde edilen  $F(t)$  ve  $G(t)$  zaman serileri olan  $f(n)$  ve  $g(n)$  sinyalleri elde edilir.

Fermiyon benzeri instanton çözümlerinin başlangıç koşullarına göre değişen  $\beta$  değerlerinde WE spektrumları çizilmiştir. Şekil 2 (a)'ya baktığımızda,  $\beta=1$  için  $(F, G) = (-0.5, -0.5) = (0.5, 0.5)$  kararlı noktalar,  $(F, G) = (0, 0)$  ise çatallanma noktası olduğu görülmektedir ve bu değerler fermiyon benzeri instanton çözümlerine karşılık gelmektedir (Canbaz *et al.* 2012). Fermiyon benzeri instanton çözümlerinin  $\beta$  değerlerine göre değişimini izleyebilmek için, Şekil 2 (b)'de  $\beta=2$  ve Şekil 2 (c)'de  $\beta=0.5$  parametreleri gelişigüzel seçilmektedir. (Canbaz *et al.* 2012) çalışmasına göre,  $\beta=2$  için  $(F, G) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  ve  $\beta=0.5$  için  $(F, G) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  kararlı noktalar ve  $(F, G) = (0, 0)$  çatallanma noktasıdır.

Şekil 2 (a)'yı incelediğimizde,  $G=-0.5$  sabit tutularak  $F=-0.5$ 'te ve  $G=0.5$  sabit tutularak  $F=0.5$ 'te WE'nin sıfır olduğu görülmektedir ve periyodik yörüngelere sahip olduğu şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca diğer noktalarda yörüngeler periyodik değildir ve WE sıfırdan farklı değerlerdedir. Yine Şekil 2 (b), Şekil 2 (c)'yi incelediğimizde  $\beta=2$  ve  $\beta=0.5$  değerleri için kararlı noktalar etrafında yörüngelerin periyodik, diğer noktalarda ise periyodik olmadığı şeklinde yorumlayabiliriz. Şekil 2 (a)'yı incelediğimizde  $F = \{-0.8, 0\}$  ve  $F = \{0, 0.8\}$  değerleri civarında, Şekil 2 (b)'yi incelediğimizde  $F = \{-0.6, 0\}$  ve  $F = \{0, 0.6\}$  değerleri civarında ve Şekil 2 (c)'yi incelediğimizde,  $F = \{-1.1, 0\}$  ve  $F = \{0, 1.1\}$  değerleri civarında WE en büyük değerlerdedir.

Şekil 2'ye baktığımızda  $\beta$  arttıkça kararlı noktaların değerinin azaldığı,  $\beta$  azaldıkça kararlı noktaların değerinin arttığı görülmektedir. Sonuç olarak,  $\beta$  değiştiğinde yörüngelerin özelliklerinin değişmediği, yörüngelerin benzer özellikler gösterdiği görülmüştür.



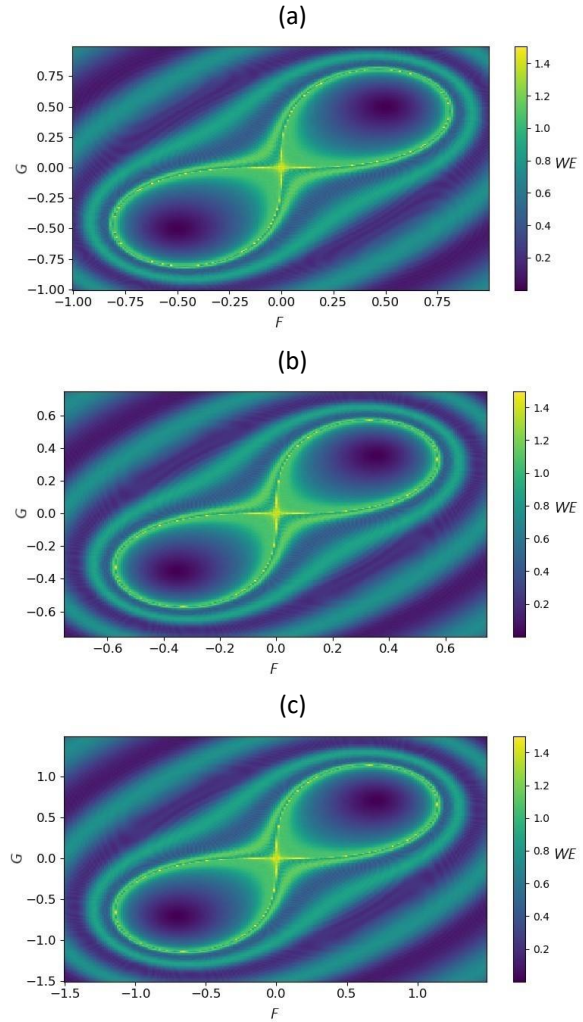
**Şekil 2.** (a)  $\beta=1$ , (b)  $\beta=1.2$  ve (c)  $\beta=0.5$  için değişen  $F$  değerlerine göre fermiyon benzeri instanton çözümlerinin WE spektrumu.

WE konturu, değişen başlangıç koşullarına göre değişen  $\beta$  değerleri için fermiyon benzeri instanton çözümlerinin değişimini net bir şekilde görebilmek için çizilmektedir. Değişen  $\beta$  değerleri için değişen  $F(t)$  ve  $G(t)$  değerlerine göre renkli grafikleri incelenmiştir.

Şekil 3 (a), (b) ve (c)'de çatallanma noktası  $(F, G) = (0, 0)$ , kararlı noktalar ise sırasıyla yaklaşık olarak  $(F, G) = (-0.5, -0.5) = (0.5, 0.5)$ ,  $(-0.35, -0.35) = (0.35, 0.35)$  ve  $(-0.7, -0.7) = (0.7, 0.7)$  periyodik yörüngeler koyu renktedir. Açık renkte görülenler ise periyodik olmayan yörüngelerdir. WE'nin en yüksek değerinde olduğu yer, çatallanma yörüngesidir. Ayrıca periyodik ve kararlı noktalar çevresinde dalgacık entropi değerinin 0 olduğu görülmektedir. Genel olarak Şekil-3'e bakıldığında, fermiyon benzeri instanton çözümlerinde değişen  $\beta$  parametreleri için başlangıç koşulları dikkate alındığında mühim bir değişiklik yoktur.

WE'nin fermiyon benzeri instanton çözümlerinin faz uzayında temsili Şekil 3 incelendiğinde, periyodik ve periyodik olmayan yörüngeler daha net bir şekilde

görülmektedir. Sonuç olarak, fermiyon benzeri instanton çözümlerinin kararlı noktalar çevresinde periyodik yörüngelere sahip olduğu söylenebilir. Periyodik ve çatallanma yörüngesi arasında WE değerleri artmaktadır. WE değerleri çatallanma yörüngesinde en yüksek düzensizlikte ve bu yörünge dışındaki yerlerde daha düşük değerlere sahiptir.



**Şekil 3.** (a)  $\beta=1$ , (b)  $\beta=2$  ve (c)  $\beta=0.5$  için fermiyon benzeri instanton çözümlerinin faz uzayında WE'si.

Modellerden kaynaklanan değişimleri analiz edebilmek için diğer iyi bilinen entropi modelleri olan Tsallis entropi (Tsallis 1988) ve Rényi entropi (Rényi 1970) yöntemleri de incelenmiştir. Rényi dalgacık entropisi (RWE) ve Tsallis dalgacık entropisi (TWE) de sırasıyla aynı yöntemle aşağıdaki gibi hesaplanır:

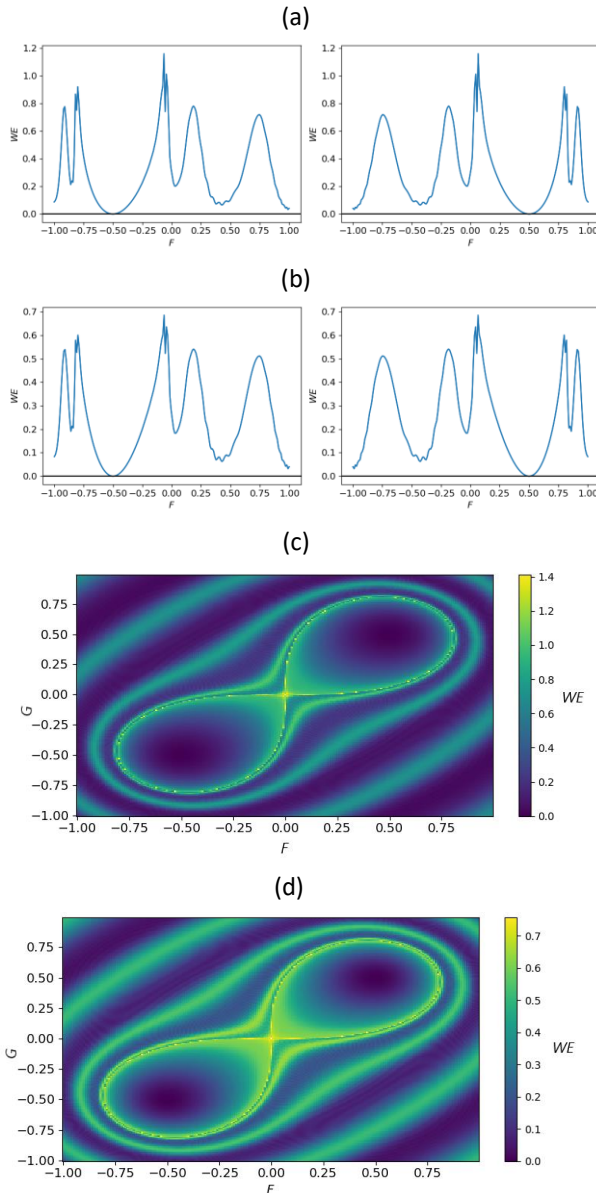
$$S_{WT}^R [P] = \frac{1}{1-q} \ln \left( \sum_{j=1}^N (\rho_j)^q \right) \quad (13)$$



$$S_{WT}^T[P] = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{j=1}^N \rho_j\right)^q \quad (14)$$

Çalışmada  $q=2$  olarak alınmıştır.

Şekil 4'te WE değerlerinin önceki WE değerlerine göre değiştiği, düzenli ve düzensiz olduğu durumların aynı kaldığı görülmektedir. Bu farklı yöntemlerle incelenen WE değerleri göz önüne alındığında, WE spektrumu ve faz uzayındaki WE doğrusal olmayan denklemlerin yörüngelerinin özelliklerini analiz etmek için kullanılabilir.



**Şekil 4.**  $\beta=1$  için değişen  $F$  değerlerine sahip fermiyon benzeri instanton çözümlerinin (a) RWE spektrumu ve (b) TWE spektrumu,  $\beta =1$  için fermiyon benzeri instanton çözümlerinin faz uzayında (c) RWE ve (d) TWE.

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Thirring modelde fermiyon benzeri instanton çözümlerinin yörüngelerinin düzen-düzensizlik durumları hakkında bilgi sahibi olabilmek için WE spektrumu ve WE'nin kontur grafiği incelenmiştir. WE yöntemiyle, (Canbaz *et al.* 2012) çalışmasında analitik olarak belirlenen fermiyon benzeri instanton çözümlerinin kararlı noktaları tespit edilebilir. Analizlere bakıldığında; kararlı nokta etrafında periyodik yörüngelere, kararlı nokta dışındaki yerlerde periyodik olmayan yörüngelere sahip olduğu görülmektedir. WE, çatalanma yörüngesinde en yüksek düzensizliğe eriştikten sonraki artış ve azalmalar dikkat çekmektedir. Neticede, faz uzayında WE yöntemiyle fermiyon benzeri instanton çözümlerinin yörüngelerinin düzen-düzensizliği hakkında fikir sahibi olabilmenin mümkün olduğunu söyleyebiliriz. WE'ler faz uzayında incelenerek, lineer olmayan dinamik sistemlerin yörüngelerinin periyodikliği hakkında hızlı ve doğru sonuçlar alınabileceği sonucuna varabiliriz.

#### Teşekkür

Bu makaleyi hazırlarken verdiği destekler için K. Gediz Akdeniz'e teşekkür ederim.

#### 5. Kaynaklar

- Anderson, D.R., 2008, *Information Theory and Entropy*, Springer, New York, 61-95.
- Ak, M., 2022. 4 Boyutlu Fermiyonik Modelde Kaosun Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi Yöntemiyle İncelenmesi. *Journal of the Institute of Science and Technology*, **12** (2), 726-734.
- Akdeniz, K.G., Smailagic, A., 1979. Classical solutions for fermionic models. *Il Nuovo Cimento A*, **51**, 345– 357.
- Blanco, S., Figliola, A., Quian-Quiroga, R., Rosso, O.A., Serrano, E., 1998. Time–frequency analysis of electroencephalogram series (III): wavelet packets and information cost function. *Physical Review E*, **57**, 932-940.
- Boltzmann, L., 1871. Einige allgemeine Satze über Warmegleichgewicht unter Gas-molekullen, Sitzungsber. *Akad Wiss Wien*, **63**, 679–711.
- Bouzebda, S., Elhattab, I., 2014. New Kernel-types

- Estimator of Shannon's Entropy. *Comptes Rendus Mathematique*, **352(1)**, 75–80.
- Brown, R., 2018, A Modern Introduction to Dynamical Systems, Oxford University Press, 1-12.
- Burrus, C.S., Gopinath, R.A., Guo, H., 1998, Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer. Prentice Hall, New Jersey, 15-37.
- Canbaz, B., Onem, C., Aydogmus, F., Akdeniz, K.G., 2012. From Heisenberg ansatz to attractor of Thirring Instanton. *Chaos, Solitons & Fractals*, **45(2)**, 188–191.
- Canbaz, B., 2022. Genel Hizalama İndeksi Yöntemiyle 2 Boyutlu Saf Fermiyonik Modelde Kaosun İncelenmesi. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, **33**, 161-166.
- Canbaz B., 2022. Lyapunov Exponents of Thirring Instantons, *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, **11(2)**, 529-536.
- Clausius, R., 1850. On the motive power of heat & on the laws which may be deduced from it for the theory of heat. *Annalen der Physik*, **79**, 368-500.
- Goswami, J.C., Chan, A.K., 1999, Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications, 2nd Edition, John Wiley & Sons, USA.
- Heisenberg, W., 1954. Zur quantentheorie nichtrenormierbarer wellengleichungen. *Zeitschrift für Naturforschung A*, **9**, 292–303.
- Meyer, Y., 1993. Wavelets: Algorithms and Applications, SIAM, Philadelphia, 1-11.
- Nicolis, O., Mateu, J., Contreras-Reyes, J.E., 2020. Wavelet-Based Entropy Measures to Characterize Two-Dimensional Fractional Brownian Fields. *Entropy*, **22(2)**, 196.
- Renyi, A., 1970, Probability theory, Amsterdam: North-Holland.
- Rosso, O.A., Mairal, M.L., 2002. Characterization of time dynamical evolution of electroencephalographic records. *Physica A*, **312**, 469–504.
- Shannon, C., 1948. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, **27**, 379–423.
- Shifman, M., 1994, Instantons In Gauge Theories, World Scientific Publishing Company.
- Thirring, W., 1958. A Soluble Relativistic Field Theory. *Annals of Physics*, **3(1)**, 91-112.
- Tsallis, C., 1988. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, **52**, 479–487.
- Ubricco, M.R., 2009. Entropies based on fractional calculus. *Physics Letters A*, **373(30)**, 2516–2519.
- Yılmaz, N., Canbaz, B., Akıllı, M., Onem, C., 2018. Study of the stability of the fermionic instanton solutions by the scale index method. *Physics Letters A*, **382**, 2118-2121.