**Afyon Kocatepe Üniversitesi, FEN BİLİMLERİ DERGİSİ 1(1) 1999**

# İNCE PLAKLARIN SONLU ELEMAN METODU VE SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ VE BU İKİ METODUN KARŞILAŞTIRILMASI

Ali ERGÜN
AKÜ, Teknik Eğitim Fakültesi, AFYON

## ÖZET

Elastik plak teorisi ise, özel olarak, plak problemlerini ve matematiksel çözüm yollarını yani şekli, sınır şartları ve üzerine etkiyen yükleri bilinen plağın $\Delta\Delta w=P(x,y)/D$ diferansiyel denklemin sınır şartlarını da sağlayan $w=w(x,y)$ elastik yüzey ifadesini araştırır. Bazen kısmi türevli plak diferansiyel denklemin kapalı çözümleri bulunamadığında yaklaşık çözüm yollarına başvurulduğu bilinmektedir. Sonlu eleman ve sonlu farklar metodu bu yaklaşık nümerik metodlardandır. Bu çalışmada, üniform yayılı yük ve farklı sınır şartlarına sahip dikdörtgen plakların sonlu eleman ve sonlu farklar metodu kullanılarak çözümü bilgisayar programı yardımı ile yapılmış ve bu iki metodun yakınsaklığı denklem sisteminde bilinmeyen sayısına göre incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Plak, Sonlu Elemanlar Metodu, Sonlu Farklar Metodu

## THE SOLUTION OF PLATE BENDING PROBLEMS WITH THE FINITE ELEMENT METHOD AND THE FINITE DIFFERENCES METHOD AND COMPARASION OF THESE METHODS

## ABSTRACT

Theory of elastic plate, in particular, researches plate bending problems and solution of the problems. The plate that is known geometri, boundary conditions and applied loads has differention equation such as $\Delta\Delta w=P(x,y)/D$. Theory of elastic plate researches elastic surface $w=w(x,y)$ which satisfies boundary conditions of differention equation too. It is known that approximate solution methods are used for partial differention equation of the plate if the closed solutions are not possible to obtain. Finite element method and finite difference method are these approximate numeric methods. In this study, using finite element method and finite difference method two computer programs were prepared for solution of rectangular plates having uniformly loaded and different boundary conditions and accurancy of these methods was researched according to the number of unknowns in the algebraic equations.

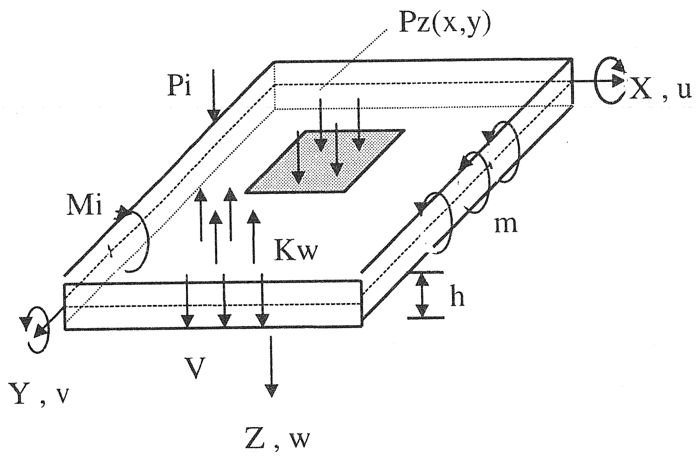
**Keywords:** Plate, Finite Element Method, Finite Differences Method

## 1. GİRİŞ

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte, çeşitli yapı problemlerinin bilgisayar analizi için gerekli olan nümerik metodların da gelişmesini sağlamıştır. Sonlu eleman ve sonlu farklar metodu bu yaklaşık nümerik çözüm yollarındandır. Bu çözüm metodlarında elle çözülemeyecek sayıda denklem takımı elde edildiğinden bilgisayar proramına ihtiyaç vardır. Plak problemlerinin analizi için kullanılan sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi nümerik metodların, analitik çözüm ile ne kadar derece de yakınsaklık göstereceği de önemli olmaktadır. Yakınsaklık derecesine bağlı olarak ve lineer denklem takımında daha az bilinmeyenle bu iki metodun hangisinin daha iyi sonuç vereceğinin araştırılması gerekmektedir. Üniform yayılı yük etkisindeki dikdörtgen plakların, dikdörtgen eleman kullanılarak oluşturulan sonlu eleman ve klasik sonlu fark operatörü kullanılarak oluşturulan sonlu farklar metodları ile çözümlerinde lineer denklem takımında farklı sayıda bilinmeyen içermektedir. Bilinmeyen sayısına ve mesnetlenme durumuna göre bu iki metod farklılık göstermektedir.

## 2. SONLU ELEMAN METODU

Sonlu elemanlar metodu, yapısal sürekliliğin analizinde matris-yerdeğiştirme metodunun geliştirilmiş şeklidir. Plağın elastik sürekliliği yerini, sadece düğüm noktalarında birbirileriyle bağlantılı farklı elemanları içeren temsili yapıya bırakır. Bu durumda plaktaki gerçek yerdeğiştirmeler ve gerilmeler yaklaşık olarak düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve gerilmeleri ile belirlenebilir. Yapısal sistemlerin analiz tekniğinde kullanılan matris yerdeğiştirme metodu kullanılan eleman tipinden etkilenmediğinden, yapısal sistemlerin analizi için nümerik ve bilgisayar teknikleri uygun rijitlik katsayıların elde edilmesiyle sonlu elemanlar metodu için de geçerlidir. [1] Plakların yapısal olarak idealleştirilmesi, orijinal sürekli plağı, arakesiti düz veya eğri hatlı olarak sınırlandırılan, bütün malzeme özellikleri orijinal plağın aynı olacak şekilde plak elemanlarına bölünerek oluşturulur. Plakların sonlu eleman metodu analizinde, plak elemanı olarak dikdörtgen elemanlar incelenmiştir. [1] Sonlu eleman metodunda, her bir sonlu elemanın bireysel yer değiştirmeleri esas alınarak, plağın bütün olarak yer değiştirme alanı, elemanların yer değiştirmesine uygun olarak ifade edilen elemanların düğüm noktalarındaki değerleri ile yaklaşık olarak bulunur.[1]

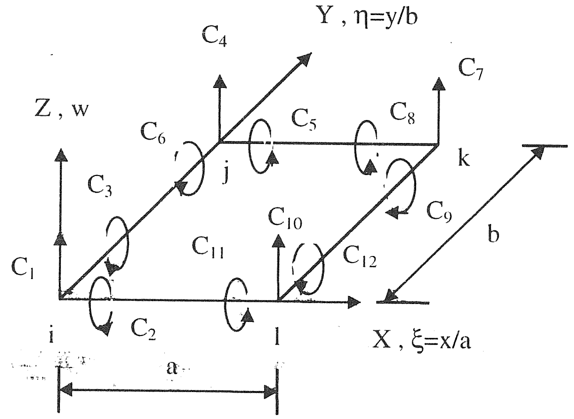



Şekil 2.1 Gerçek plak

Eğilmeli plağın sonlu elemanlar metodu ile analizinde eleman olarak iki boyutlu, dört düğüm noktalı dikdörtgen elemanlar kullanılmıştır. Şu halde, dikdörtgen bir plak elemanında düğüm nokta yer değiştirme bileşenleri olarak, Z doğrultusunda öteleme w, X ekseni etrafında dönme $\theta_x$, Y ekseni etrafında dönme $\theta_y$ alınması halinde eleman yer değiştirme bileşen sayısı 3*4=12 olacaktır. Şekil 2.1 de dikdörtgen plak elemanındaki yer değiştirme bileşenleri gösterilmiştir. Plak elemanlar için birim yer değiştirme yaklaşımının uygulanmasında uygun yer değiştirme bileşenleri şekilde gösterilmiştir. Bu bileşenlere göre uygun rijitlik matrisi [ 2 ] verilmiştir. Eleman rijitlik matrisi [ K ] belirtilen kaynaktan elde edildiğinde sonlu eleman metodu için denge denklemi

$$[K]*[d]-[P]=0$$

şeklini alır. Burada [ d ] yerdeğiştirme matrisi, [ P ] dış kuvvetler matrisidir.




Şekil 2.2 Dikdörtgen plak elemanında yer değiştirme bileşenleri

## 2.1. Plak Problemlerinin Sonlu Elemanlar Metodunda Kullanılan Programın Yapısı

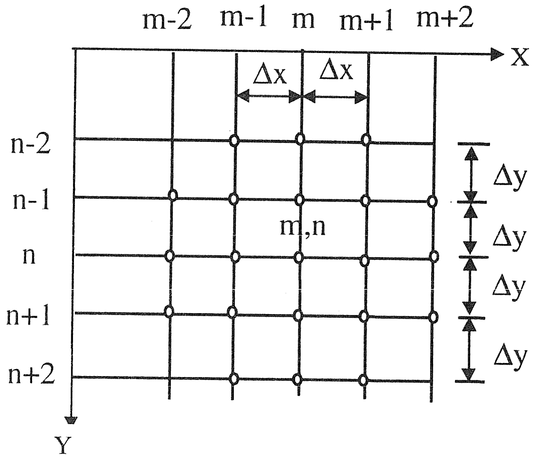
Program, çeşitli mesnet durumuna göre dikdörtgen plakların statik çözümünü sağlamak için sonlu elemanlar metodu kullanılarak BASIC dilinde düzenlenmiştir. Program yapı itibariyle herbir elemana ait rijitlik katsayılarını ayrı ayrı hesaplamakadır. Rijitlik katsayılarının değerleri, dikdörtgen elemanın boyutu a , b , poisson oranı ν değişken değerlerine bağlı olarak bulunmaktadır.[ 2 ] Herbir eleman rijitlik katsayıları hesaplandıktan sonra, sistemdeki ortak düğüm noktasında birleşen elemanların o düğüm noktasına karşılık gelen rijitlik katsayıları üst üste toplanarak sistemin rijitlik katsayıları elde edilmektedir. Benzer şekilde elemanın yükleme matrisi katsayıları da sadece üniform yayılı yük durumu için ayrı ayrı bulunmakta ve sistemin ortak düğüm noktasında birleşen elemanların o düğüm noktasına karşılık gelen değerleri üst üste toplanarak sistemin yükleme matrisinin katsayıları elde edilmektedir.[ 3 ] Sistemin rijitlik ve yükleme matrisleri bulunduktan sonra sınır şartlarına göre yer değiştirme bileşenleri $w_i$ , $\theta_{xi}$ , $\theta_{yi}$ lineer denklem takımının çözümünden bulunmaktadır. Lineer denklem sayısı sistem düğüm nokta sayısının üç katı kadardır. Sınır şartları her bir düğüm noktası için ayrı ayrı veri olarak girilmektedir. Herbir düğüm noktasının yer değiştirme bileşenleri bulunduktan sonra yine ayrı olarak elemanların iç kuvvetleri Mxi , Myi , Mxyi değerleri hesaplanmıştır. Düğüm noktalarında her bir eleman için bulunan iç kuvvetlerin ortalaması alınarak sistemin düğüm noktalarında iç kuvvetler bulunmuştur.

## 3. SONLU FARKLAR METODU

Sonlu farklar metodu, analitik çözümü güç olan birçok plak probleminde başvurulan, uygulama alanı çok geniş, daha çok pratik amaçlar için kabul edilebilir yaklaşık sonuçlar veren nümerik metottur. Sonlu farklar metodunun esası, plak diferansiyel denklemini , seçilen bazı noktalarda, sonlu farklardan oluşan yaklaşık bir cebirsel denkleme dönüştürmektir. Seçilen bu noktalar, dikdörtgen, üçgen veya diğer ağ sistemindeki düğüm noktaları üzerinde alınır. Bu ağ sistemine sonlu fark ağı adı verilir. Plak yer değiştirme alanı w(x,y) , ağ noktalarında bulunan yaklaşık çökme değerleri ile tanımlanır.

### 3.1 Plaklar İçin Sonlu Farklar

Plak denkleminde w=w(x,y) iki doğrultuda değişkenlilik söz konusudur. Fakat kısmi türev alınırken, diğer değişken sabit kabul edileceğinden, tek bir değişkene göre türevlerde bulunan ifadeler geçerli olur. [ 4 ] Plağı şekilde görüldüğü gibi, bir ağ biçiminde $\Delta x$ , $\Delta y$ genişliğinde dilimlere ayırdığımızı, ağın kesim noktalarındaki sehimleri sonlu farklar olarak gösterdiğimizi düşünelim. (m,n) noktasını merkez noktası kabul edelim.




Şekil 3.1 Plaklarda sonlu farklar ağı

Plak diferansiyel denklemi sonlu farklar cinsinden yazılırsa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \cong \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} = \frac{P}{D} \tag{3.1}$$

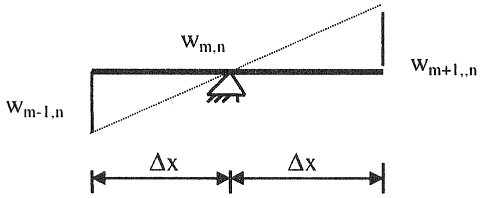
Diferansiyel denklemde tek boyutlu sonlu farklar bağıntıları yerlerine yazılırsa [ 4 ] Eğer $\Delta x = \Delta y$ olarak alınırsa kare ağ elemanları için plak denkleminin sonlu farklarla ifadesi aşağıdaki şekilde olur.

$$\begin{aligned} &20w_{m,n} - 8\left(w_{m-1,n} + w_{m+1,n} + w_{m,n-1} + w_{m,n+1}\right) + \\ &+ 2\left(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}\right) + \\ &+ \left(w_{m-2,n} + w_{m+2,n} + w_{m,n-2} + w_{m,n+2}\right) = \frac{P^{2}}{D} (\Delta y)^4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

## 3. 2 Sınır Şartları

Çözümün tam olabilmesi için, diferansiyel denklemin çözümü yetmez, sınır şartlarını da sağlaması gerekir. Bunun için merkez noktası m,n sınır üzerine taşınır ve plağın fiktif olarak devam ettiği kabul edilir. S-S bu sınırı belirten kenar olsun.

a) Sınır S-S kenarı boyunca basit mesnetlenmiş ise




Şekil 3.2 Basit Mesnet Durumu

1.) $w|_{S-S}=0 \quad w_{m,n}=w_{m,n+1}=w_{m,n-1}=w_{m,n+2}=w_{m,n-2}=0$

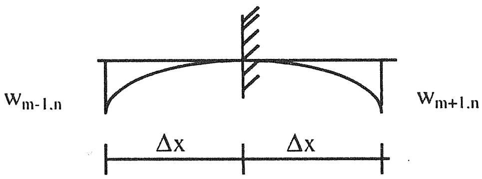
2.) $\Delta w|_{S-S}=0$

$$\Delta w_{m,n}=\frac{w_{m+1,n}-2w_{m,n}+w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}+\frac{w_{m,n+1}-2w_{m,n}+w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

Kenar basit mesnet durumunda denklemlerden

$w_{m+1,n}+w_{m-1,n}=0 \qquad w_{m+1,n}=-w_{m-1,n}$

b) Sınır S-S kenarı boyunca Ankastre mesnetlenmiş ise




Şekil 3.3 Ankastre Mesnet Durumu

1.) $w|_{S-S}=0 \qquad w_{m,n}=w_{m,n-1}=w_{m,n+2}=w_{m,n-2}=0$

2.) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{S-S}=0 \qquad \dfrac{w_{m+1,n}-w_{m-1,n}}{2\Delta x}=0 \qquad w_{m+1,n}=w_{m-1,n}$

## 3.3. Plak Probleminin Sonlu Farklar Metodunda Kullanılan Programın Yapısı

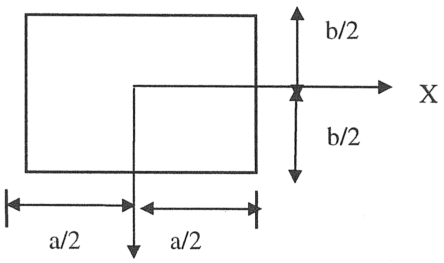
Sonlu farklar metodu ile dikdörtgen plakların statik çözümünü sağlamak için BASIC dilinde düzenlenen programın amacı belirli ağ noktaları üzerinde sehimi hesap ederek, bunlara bağlı olarak bu noktalarda iç kuvvetlerin(momentler) bulunmasını sağlamaktır. Bunun için programda, ağları oluşturmak için gerekli olan X ve Y doğrultularında bölüm sayısı ve açıklıklar başlangıçda veri olarak girilmektedir. Program, her bir ağ noktasının koordinatları ve ağ noktaları arasındaki mesafeyi hesaplamaktadır. Daha sonra her bir ağ noktasına sonlu farklar operatörü uygulayarak ağ noktası sayısı kadar lineer denklem takımı elde etmektedir. Lineer denklem takımı oluşturulurken sınır şartları gözönüne alınarak, gerekli düzenlemele yapılmıştır. Lineer denklem takımının çözümünden ağ noktalarındaki sehim bulunmaktadır. Program her bir ağ noktası için bulunan sehim değerlerini kullanarak iç kuvvetlerin değerlerini vermektedir. Tabii ki bu arada malzeme özelliklerinden elastisite modulü, poisson oranı ve ayrıca plak kalınlığı da başlangıçda veri olarak girilmektadir.

# 4.DİKDÖRTGEN PLAK PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMAN VE SONLU FARKLAR METODLARI İLE ÇÖZÜMÜ VE İKİ METODUN KARŞILAŞTIRILMASI

Eğilmeli plak problemlerinin sonlu eleman metodu ile çözümü için gerekli aşamalar bölüm 2 de anlatılmıştır. Sonlu eleman metodunda. sistem için kurulan lineer denklem takımında bilinmeyen, düğüm noktalarında w çökmesi, $\theta_x$, X ekseni etrafındaki dönmesi,$\theta_y$, Y ekseni etrafındaki dönmesidir. Sonuç olarak lineer denklem takımında bilinmeyen sayısı sistemin düğüm noktasının üç katıdır. Sonlu farklar metodu ile eğilmeli plak problemlerinin analizi için kurulan lineer denklem takımında bilinmeyen, oluşturulan ağ sisteminin düğüm nokta sayısı kadardır Bu bölümde her iki metodun bilinmeyen sayısı yönünden, çeşitli tipte plaklar için karşılaştırılması yapılmış ve yakınsaklık durumu incelenmiştir. Ayrıca SAP90 programı ile karşılaştırılmaları da yapılmıştır.

## 4.1 Dört Kenarı Ankastre Plaklar İçin Programların Karşılaştırılması

Plak boyutları a= b= $6^m$ , h=$0.15^m$ ,malzeme özellikleri ν=0.3 E=2850000 t/$m^2$




Analitik çözümü

b/a=1 a=$6^m$ , b=$6^m$ $(w)_{x=0,y=0}=1.394.10^{-3}$ m Y $_{x=0,\ y=3}$= -1.385 tm/m [ 5 ]

Tablo 4.1 Dört Kenarı Ankastre Plağın Sonlu Eleman metodu ile çözümü (B.S. Bilinmeyen Sayısı )

| EL. SAYISI | B.S.: | max(W) x=0 y=0 | HATA % | (Mx) x=0y=0 | (Mx) x=0y=3 | HATA % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x2 | 27 | $0.163.10^{-2}$ | 16.9 | 1.246 | -0.959 | -44.4 |
| 4x2 | 45 | $0.159.10^{-2}$ | 11.4 | 1.107 | -1.325 | -4.5 |
| 4x4 | 75 | $0.155.10^{-2}$ | 11.1 | 0.750 | -1.285 | -7.8 |
| 6x6 | 147 | $0.147.10^{-2}$ | 5.5 | 0.674 | -1.338 | -3.5 |
| 8x8 | 243 | $0.144.10^{-2}$ | 3.3 | 0.649 | -1.358 | -2.0 |
| 10x10 | 363 | $0.142.10^{-2}$ | 1.9 | 0.638 | -1.367 | -1.3 |

Tablo 4.2 Dört Kenarı Ankastre Plağın Sonlu Farklar Metodu ile Çözümü

| AĞ NO SAYISI | B.S | max(W) x=0 y=0 | HATA % | (Mx) x=0y=0 | (Mx) x=0y=3 | HATA % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4x4 | 9 | $0.199.10^{-2}$ | 42.8 | 0.666 | -1.043 | -32.8 |
| 6x6 | 25 | $0.169.10^{-2}$ | 21.2 | 0.643 | -1.208 | -14.6 |
| 8x8 | 49 | $0.157.10^{-2}$ | 12.6 | 0.633 | -1.279 | -9.0 |
| 10x10 | 81 | $0.151.10^{-2}$ | 8.3 | 0.628 | -1.315 | -6.8 |
| 12x12 | 121 | $0.148.10^{-2}$ | 6.2 | 0.625 | -1.336 | -4.3 |
| 14x14 | 169 | $0.146.10^{-2}$ | 4.7 | 0.623 | -1.349 | -3.3 |
| 16x16 | 225 | $0.144.10^{-2}$ | 3.3 | 0.622 | -1.358 | -2.7 |
| 18x18 | 289 | $0.143.10^{-2}$ | 2.6 | 0.621 | -1.363 | -1.6 |

Dört kenarı ankastre plaklar için hem sonlu eleman hem de sonlu farklar ile yapılan çözümler aynı bilinmeyen sayısı için yaklaşık aynı hatayı vermektedir. Aynı örneğin SAP90 ile 100 elemanla yapılan analizinde ise aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

$(w)_{x=0,y=0} = 1.1435.10^{-3}$ m $(Mx)_{x=0,\ y=0} = 0.643$ tm/m $(Mx)_{x=0,\ y=3} = -1.375$ tm/m

## 4.2. Dört Kenarı Sabit Mesnetli Plaklar İçin Programların Karşılaştırılması

Plak boyutları a= b= $8^m$ , h=$0.2^m$ ,malzeme özellikleri $\nu=0.3$ E=2850000 t/$m^2$

Analitik çözümü

b/a=1 a=$8^m$ , b=$8^m$ h=$0.2^m$ $(w)_{x=0,y=0}=0.597.10^{-3}$ m max$(Mx)_{x=0,\ y=0}$= 2.299 tm/m

Tablo 4.3. Dört Kenarı Sabit Mesnetli Plağın Sonlu Eleman metodu ile çözümü

| EL. SAYISI | B.S. | max(w) x=0 y=o | HATA % | max(Mx) x=0y=0 | HATA % |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x2 | 27 | $0.745.10^{-2}$ | 24.8 | 3.169 | 37.82 |
| 4x2 | 45 | $0.695.10^{-2}$ | 16.4 | 2.764 | 20.2 |
| 4x4 | 75 | $0.637.10^{-2}$ | 6.7 | 2.504 | 8.9 |
| 6x6 | 147 | $0.615.10^{-2}$ | 3.0 | 2.387 | 3.8 |
| 8x8 | 243 | $0.608.10^{-2}$ | 1.9 | 2.348 | 2.1 |
| 10x10 | 363 | $0.604.10^{-2}$ | 1.2 | 2.330 | 1.3 |

Tablo 4.4 Dört Kenarı Sabit Mesnetli Plağın Sonlu farklar metodu ile çözümü

| AĞ.NO. SAYISI | B.S. | max(w) x=0 y=o | HATA % | max(Mx) x=0 y=0 | HATA % |
|---|---|---|---|---|---|
| 4x4 | 9 | $0.593.10^{-2}$ | 0.7 | 2.194 | -4.8 |
| 6x6 | 25 | $0.596.10^{-2}$ | 0.1 | 2.250 | -2.2 |
| 8x8 | 49 | $0.597.10^{-2}$ | 0 | 2.271 | -1.2 |
| 10x10 | 81 | $0.597.10^{-2}$ | 0 | 2.281 | -0.8 |
| 12x12 | 121 | $0.597.10^{-2}$ | 0 | 2.286 | -0.6 |
| 14x14 | 169 | $0.597.10^{-2}$ | 0 | 2.289 | -0.4 |
| 16x16 | 225 | $0.597.10^{-2}$ | 0 | 2.291 | -0.3 |
| 18x18 | 289 | $0.597.10^{-2}$ | 0 | 2.293 | -0.2 |

Dört kenarı sabit mesnetli plakların sonlu farklar metodu ile çözümü sonlu eleman metodu ile çözümünden daha hızlı yakınsaklık göstermekte ve daha az bilinmeyenle tam çözüme ulaşılmaktadır.

Bir başka plağı mesnet, yükleme ve malzeme özelliği aynı kalmak üzere boyutlarını küçülttüğümüzde hata oranı, aynı bilinmeyen sayısına göre boyutları büyük olan plakta bulunan hata oranı ile aynı mertebededir. b/a=1 $a=4^m$ , $b=4^m$ $h=0.1^m$ için sonlu eleman metodu ile 363 bilinmeyenle $(w)_{x=0,y=0}=0.301.10^{-3}$ m %1 hata ile $\max(Mx)_{x=0,\ y=0} = 0.583$ tm/m %1.4 hata ile sonuç bulunmuştur. Sonlu farklar metodu ile 289 bilinmeyenle $(w)_{x=0,y=0}=0.299.10^{-3}$ m %0 hata ile $\max(Mx)_{x=0,\ y=0} = 0.573$ tm/m %-0.3 hata ile sonuç bulunmuştur. Buradan da anlaşılacağı gibi sonlu eleman metodunda, eleman boyutlarının küçültülmesi veya sonlu farklar metodunda ağ noktaları arasındaki mesafenin küçültülmesi sonuçların hata oranında değişikliğe neden olmamaktadır. Her iki metod için de hata oranı, sonlu eleman metodunda, eleman sayısının artırılması ile ve sonlu farklar metodunda ağ noktaları sayısının artırılması ile azaltılabilmekte ve daha iyi yakınsaklık sağlanabilmektedir.

### 4.3 Karşılıklı İki Kenarı Sabit Mesnetli Diğer İki Kenarı Ankastre Plaklar İçin Programların Karşılaştırılması

Plak boyutları $a= b= 5^m$ , $h=0.15^m$,malzeme özellikleri $\nu=0.3$ $E=2850000$ t/m$^2$
Analitik çözümü b/a=1 $a=5^m$ , $b=5^m$ $(w)_{x=0,y=0}=0.102.10^{-2}$ m
$\max(Mx)_{x=0,\ y=0}= 0.619$ tm/m $\max(My)_{x=0,\ y=0}= 0.450$ tm/m

Tablo 4.5. Karşılıklı İki Kenarı Sabit Mesnetli Diğer İki Kenarı Ankastre Plağın Sonlu Eleman metodu ile çözümü

| EL. SAYISI | B.S. | max(w) x=0 y=o | HATA % | Mx x=0y=0 | HATA % | My x=0y=0 | HATA % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2×2 | 27 | $0.136.10^{-2}$ | 33.5 | 1.256 | 103 | 0.699 | 48.7 |
| 4×2 | 45 | $0.136.10^{-2}$ | 33.5 | 0.881 | 42.3 | 0.648 | 44.0 |
| 4×4 | 75 | $0.112.10^{-2}$ | 10.0 | 0.744 | 20.2 | 0.514 | 14.2 |
| 6×6 | 147 | $0.106.10^{-2}$ | 4.1 | 0.674 | 8.9 | 0.481 | 6.9 |
| 8×8 | 243 | $0.105.10^{-2}$ | 3.1 | 0.651 | 5.2 | 0.471 | 4.7 |
| 10×10 | 363 | $0.104.10^{-2}$ | 2.1 | 0.641 | 3.6 | 0.466 | 3.6 |

Tablo 4.6. Karşılıklı İki Kenarı Sabit Mesnetli Diğer İki Kenarı Ankastre Plağın Sonlu Farklar Metodu İle Çözümü

| AĞ NO. SAYISI | B.S. | max(w) x=0 y=o | HATA % | Mx x=0 y=0 | HATA % | My x=0 y=0 | HATA % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4x4 | 9 | $0.131.10^{-2}$ | 28.6 | 0.624 | 0.8 | 0.539 | 19.8 |
| 6x6 | 25 | $0.117.10^{-2}$ | 14.9 | 0.624 | 0.8 | 0.501 | 11.3 |
| 8x8 | 49 | $0.111.10^{-2}$ | 9.0 | 0.624 | 0.8 | 0.484 | 7.6 |
| 10x10 | 81 | $0.108.10^{-2}$ | 6.0 | 0.624 | 0.8 | 0.475 | 5.6 |
| 12x12 | 121 | $0.106.10^{-2}$ | 4.1 | 0.624 | 0.8 | 0.470 | 4.4 |
| 14x14 | 169 | $0.105.10^{-2}$ | 3.1 | 0.624 | 0.8 | 0.466 | 3.6 |
| 16x16 | 225 | $0.104.10^{-2}$ | 2.1 | 0.624 | 0.8 | 0.464 | 3.1 |
| 18x18 | 289 | $0.104.10^{-2}$ | 2.1 | 0.624 | 0.8 | 0.463 | 2.9 |

Karşılıklı iki kenarı sabit mesnetli diğer iki kenarı ankastre plaklar için programların karşılaştırılmasından görülüyor ki, sonlu eleman metodu ile sonlu farklar metodunun, daha fazla bilinmeyenle yaklaşık olarak aynı hata oranı ile sonuç alınmaktadır. Fakat sonlu farklar metodu ile az bilinmeyenle %10 nun altında hata ile çözüm bulunmaktadır ve yakınsaklık hızı yüksektir.

## 4.4 Değişik Mesnetlenme Durumu İçin Programların Sonuçları

Bir kenarından ankastre, diğer üç kenarından sabit mesnetli, boyutları $a=6^m$ $b=4^m$ $h=0.15^m$ malzeme ve yükleme durumu diğer plaklar ile aynı olan plakta sehim ve iç kuvvetlerin bulunması. Analitik çözüm $b/a=1.5$ $a=6^m$ , $b=4^m$ $(w)_{x=0,y=0}=0.1397.10^{-2}$ m $(My)_{x=0,\ y=0}=$ 0.828 tm/m $(Mx)_{x=0,\ y=0}=$ 0.576 tm/m $(Mx)_{x=3,\ y=2}=$ -1.344 tm/m

Sonlu eleman metodu ile 105 bilinmeyenle $(w)_{x=0,y=0}=0.148.10^{-2}$ m %5.9 hata $(Mx)_{x=3,\ y=2}=$ -1.290 tm/m %-4.2 hata $(My)_{x=0,\ y=0}=$ 0.899 tm/m %9 hata $(Mx)_{x=0,\ y=0}=$ 0.610 tm/m %5.9 hata ile sonuçlar bulunmuştur.

Sonlu farklar metodu ile 81 bilinmeyenle

$(w)_{x=0,y=0}=0.143.10^{-2}$ m %2.6 hata $(Mx)_{x=3,\ y=2}=$ -1.217 tm/m %-10.4 hata $(My)_{x=0,\ y=0}=$ 0.835 tm/m %0.8 hata $(Mx)_{x=0,\ y=0}=$ 0.569 tm/m %-1.2 hata ile sonuçlar bulunmuştur.

Üç kenarından sabit mesnetli, dördüncü kenarı boşta boyutları $a=4^m$ $b=6^m$ $h=0.15^m$ malzeme ve yükleme durumu diğer plaklar ile aynı olan plakta sehim ve iç kuvvetlerin bulunması $b/a=1.5$ $a=4^m$, $b=6^m$ $(w)_{x=0,y=3}=0.3186.10^{-2}$ m $(Mx)_{x=0,\ y=3}=$ 1.536 tm/m $(My)_{x=0,\ y=0}=0.504$ tm/m $(Mx)_{x=0,\ y=0}=$ 1.212 tm/m . Sonlu eleman metodu ile 105 bilinmeyenle $(w)_{x=0,y=3}=0.310.10^{-2}$ m %-2.8 hata $(Mx)_{x=0,\ y=3}=$ 1.588 tm/m %3.4 hata $(My)_{x=0,\ y=0}=$ 0.535 tm/m %6.2 hata $(Mx)_{x=0,\ y=0}=$ 1.283 tm/m %5.9 hata ile sonuçlar bulunmuştur.

## 5. SONUÇLAR

Bölüm 4 de yapılan karşılaştırmalar sonucu klasik sonlu farklar metodu kullanılarak çözülen basit mesnetli plak problemlerinin daha az bilinmeyenle tam çözüme ulaşıldığı, ankastre mesnetli plak problemlerinde ise tam çözüme ulaşmak daha fazla bilinmeyenle gerçekleştiği tesbit edilmiştir. Bu sonuçlar gözönüne alındığında klasik sonlu farklar metodunda kabul edilen sınır şartlarından basit mesnetli durumda daha gerçekçi, ankastre mesnet durumunda ise kabulün daha kaba bir yaklaşım olduğu ortaya çıkmaktadır. Ankastre mesnet durumunda, daha gerçekçi sınır şartları, hata terimi çok küçük olacak şekilde seçilecek sonlu farklar cinsinden türev ifadeleri hesaba katılarak yaklaşımın daha iyi olabileceği ortaya çıkmaktadır. Bu durumda sonlu farklar metodu, sonlu elemanlar metoduna göre yakınsaklığı hızlı olmakta ve pratikte kabul edilebilir sonuçlar vermektedir. Plak diferansiyel denklemi için çıkartılan klasik sonlu farklar ifadeleri geliştirilerek daha az bilinmeyenle hatta elle çözüm yapılabilecek şekildeki yöntemlerle tam çözüme ulaşmak mümkündür.

Sonlu elemanlar metodunda ise sınır şartlarından etkileşim fazla olmamakta ve her türlü sınır şartlarına uygulanması kolaydır.