

Yer Merkezli Dik Koordinatlardan Coğrafi Koordinatlara Dönüşüm

İbrahim Öztuğ Bildirici¹

¹ Selçuk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Harita Mühendisliği Bölümü, Selçuklu, Konya
e-posta: bildirici@selcuk.edu.tr

Geliş Tarihi:30.04.2017 ; Kabul Tarihi:08.04.2018

Özet

Anahtar kelimeler
Elipsoit yüzeyi, coğrafi koordinatlar, yer merkezli dik koordinatlar, enlem problemi, iterasyon

Elipsoit merkezine göre tanımlanan dik koordinat sisteminden enlem ve yüksekliğin elde edilmesi jeodezide enlem problemi olarak bilinir. Lineer olmayan denklem sistemi çözümü gerekli olduğundan iteratif yaklaşımların kullanılması gereklidir. Bu konuda çok sayıda çalışma yayınlanmıştır. Bu çalışmada sayısal analiz yöntemlerine dayalı çözüm yöntemlerinden bir kısmı ele alınmış bir test veri seti kullanılarak karşılaştırma yapılmıştır. Bazı kaynaklarda doğrudan çözüm olarak nitelenen Bowring yönteminin -10/10km yüksekliklerde iterasyonsuz olarak kullanılabilceği, yeryüzü dışı noktalarda ise düşük iterasyon sayıları ile Bowring ve Borkowski yöntemleri öne çıkmaktadır.

Transformation from Geocentric Coordinates to Geographic Coordinates

Abstract

Keywords
Ellipsoid surface, geographic coordinates, geocentric coordinates, latitude problem, iteration

The transformation from geocentric to geographical coordinates is known as latitude problem, which is one of the most handled problems in mathematical geodesy. There are a number of papers devoted to this problem. The problem requires solving nonlinear equations. In this paper a set of methods are focused on, and are tested by using a test data set. After tests it has been seen that Bowring method with no iteration is usable for terrestrial locations (heights between -10km and 10km). For satellite locations this method should be used with iterations. Among the methods tested Bowring and Borkowski methods are superior in terms of maximum iteration numbers and low residual errors.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Elipsoit merkezli dik koordinat sistemi (x, y, z) ile coğrafi koordinatlar (enlem, boylam ve yükseklik, φ, λ, h) arasındaki dönüşüm, ya da dik koordinatlardan enlem ve yüksekliğin elde edilmesi iteratif çözümler gerektirdiğinden jeodezide üzerinde pek çok çalışmanın yapıldığı bir alandır ve kaynaklarda enlem problemi olarak adlandırılır.

Bu çalışmada 6 çözüm yöntemi ele alınıp, birbirleri ile karşılaştırılacaktır. Çözüm yöntemlerinin hepsi iteratif olup, bunlardan Bowring yöntemi nokta yüksekliklerine bağlı olarak tek adımda da çözüm sağlayabilmektedir. Yapılan testlerde değişik yükseklik seçenekleri içeren test verileri kullanılarak Bowring yönteminin hangi yükseklik değerlerinde tek aşamada yeterli doğruluk verdiği de ortaya konmuştur. Yeryüzünde bulunan noktalar için en uygun yöntemin Bowring yöntemi olduğu

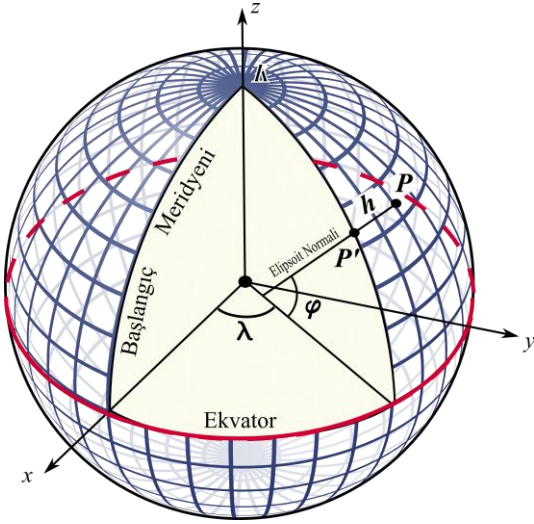
görülmüştür. Yeryüzü dışındaki noktalarda ele alınan tüm yöntemler iteratif olarak yeterli doğruluğa ulaşmaktadır.

2. Materyal ve Metot

2.1. Yer Merkezli Dik Koordinatlar İle Coğrafi Koordinatlar Arasındaki İlişki

Yer merkezli dik koordinat sisteminin z eksenini yerin dönme eksenine çakışık, x eksenini başlangıç meridyeni düzleminde, y eksenini ise bu iki eksene dik olarak tanımlanır (Şekil 1).

Elipsoit üzerinde ya da dışındaki noktalar için coğrafi koordinatlardan yer merkezli dik koordinatlara geçiş elipsoidin parametrik denklemlerinden yararlanılarak doğrudan yapılabilir.



Şekil 1. Yer merkezli koordinatlar ve coğrafi koordinatlar

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

Burada e elipsoidin birinci dış merkezliğini, N çapraz eğrilik yarıçapını ifade etmektedir.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2)$$

Elipsoit yüzeyinde bulunan noktalar için ($h=0$) enlemin (1) eşitliklerinden doğrudan elde edilmesi mümkündür.

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olmak üzere;

$$\tan \varphi = \frac{z}{p(1 - e^2)} \quad (3)$$

eşitliğinden enlem bulunur. Elipsoidal yüksekliğin sıfırdan farklı olması durumunda enlemin doğrudan elde edilmesi mümkün değildir. Elde edilen enlem eşitliği doğrusal olmayıp çözümü iteratif olarak yapılabilir. (1) eşitlikleri düzenlenirse doğrusal olmayan enlem eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir. Dönel elipsoit parametreleri Ek A'da yer almaktadır.

$$\tan \varphi = \frac{z + e^2 N \sin \varphi}{p} \quad (4)$$

(4) eşitliğinde elipsoidal yükseklik sadeleşmiş durumdadır. (1) eşitliklerinin ikinci dış merkezliliğe göre düzenlenmiş hali kullanılarak yüksekliğin de içinde geçtiği doğrusal olmayan enlem eşitliği elde edilebilir. Enlem bulunduktan sonra elipsoidal yükseklik (1) eşitliklerinin düzenlenmesiyle bulunur.

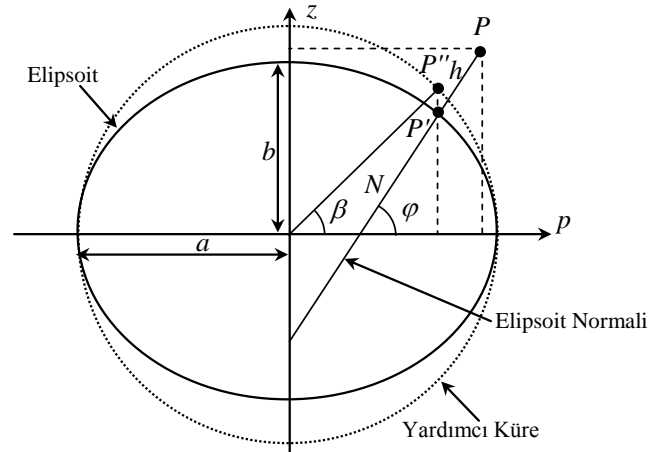
$$h = \frac{P}{\cos \varphi} - N \quad (5)$$

Boylam (1) eşitliklerinden kolayca bulunur.

$$\tan \lambda = \frac{y}{x} \quad (6)$$

(4) ve (6) eşitliklerinde tanjant fonksiyonunun tersi alınırken açıların değişim aralığının $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ve $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ olduğu dikkate alınmalıdır.

Boylamın doğrudan elde edilmesi mümkün olduğundan problem meridyen düzleminde de irdelenebilir. Bazı çözüm yöntemlerinde indirgenmiş enlem (β) kullanılmaktadır (Şekil 2).



Şekil 2. Meridyen düzleminde enlem problemi (β : indirgenmiş enlem)

2.2. Enlem Problemi

Yer merkezli koordinatlardan coğrafi koordinatların elde edilmesi problemi üzerine jeodezi kaynaklarında pek çok çalışmaya rastlanır. Önceki yayınları da özetleyen son çalışmalardan biri Ligas (2013) dir.

Bu çalışmada az sayıda (adım)da iterasyonla çözüm sağlayan 5 yöntem ele alınıp birbirleri ile karşılaştırılacaktır.

2.2.1. Enlemin basit iterasyonla bulunması

Enlemin ilk yaklaşık değeri (4) eşitliği basitleştirilerek bulunur.

$$\tan \varphi_0 = \frac{z}{p} \quad (7)$$

İterasyonun her aşamasında bir önceki enlem değeri ile son bulunan enlem değeri arasındaki farka bakılır. Aradaki fark yeterince küçük olunca iterasyon sona erer. Bu amaçla bilgisayar programlamada 8 byte reel sayı tanımlamasında (double duyarlılık) sıfırdan farklı anlamlı en küçük sayı olan 10^{-14} değeri ölçüt olarak kullanılabilir. Bu şekilde enlem 14 basamak doğrulukta elde edilebilir. Enlem belirlendikten sonra yükseklik (5) eşitliğinden bulunur. Enlemin derece biriminde 9 basamak doğrulukta elde edilmesi jeodezide coğrafi koordinatlarda istenen 0.0001" doğruluğu sağlar (Demirel ve Üstün 2013). Ancak bu doğruluk yüksekliğin (5) eşitliğinden bulunması için genellikle yeterli değildir. Bilgisayar teknolojisinin sağladığı maksimum doğruluk (radyan biriminde 14 basamak) kullanılmalıdır.

Basit iterasyon yöntemi en çok 10 adımda yeterli doğruluğu verir.

2.2.2. Enlemin ve yüksekliğin birlikte basit iterasyon yöntemi ile çözümü

Enlemin doğrudan iterasyonunda yüksekliğin doğruluğu enlemin doğruluğuna sıkı sıkıya bağlıdır. Yüksekliği iterasyona katarak enlem doğruluğunun etkisi azaltılabilir. Enlem eşitliği ikinci dış merkezliğe göre düzenlenirse,

$$\tan \varphi = \frac{z(1+e'^2)}{p} \left(1 + e'^2 \frac{h}{N+h} \right)^{-1} \quad (8)$$

elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonların doğruluğa etkisini de azaltan bir yöntem Demirel ve Üstün (2013) tarafından verilmiştir. Buna göre enlemin başlangıç değeri (8) ifadesindeki ikinci çarpan ihmal edilerek bulunur.

$$\tan \varphi_0 = \frac{z(1+e'^2)}{p} \quad (9)$$

Enlem değeri yerine iterasyonda enlemin tanjantı ve kosinüsü kullanılır. İterasyon adımları:

$$\cos^2 \varphi_i = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi_{i-1}} \quad (10)$$

$$N_i = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_i}} \quad (11)$$

$$h_i = \frac{p}{\cos \varphi_i} - N_i \quad (12)$$

İterasyonun ilk adımında $\tan \varphi$ değeri (9) eşitliğinden, diğer adımlarda (8) eşitliğinden elde edilir. (8),(10), (11) ve (12) eşitlikleri yükseklikteki değişim 4 basamağın altına ininceye kadar devam ettirilir. İterasyon bitince son $\tan \varphi$ değerinden enlem bulunur.

Bu yöntemde genellikle 4-5 adımda çözüm elde edilir.

2.2.3. Enlemin Newton-Raphson yöntemi ile iteratif çözümü

(4) eşitliğinin çözümü Newton-Raphson yöntemi ile de yapılabilir. Bu amaçla kapalı bir fonksiyon (sıfıra eşit) ve türevinin belirlenmesi gereklidir.

$$f(\varphi) = \arctan\left(\frac{z + e'^2 N \sin \varphi}{p}\right) - \varphi = 0 \quad (13)$$

$$f'(\varphi) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z + e'^2 N \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} \frac{ae^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{e'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - e'^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right) - 1$$

$$= \frac{e^2 p N \cos \varphi}{x^2 + y^2 + (z + e^2 N \sin \varphi)^2} \quad (14)$$

$$\left(1 + \frac{e^2 \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\right) - 1$$

İterasyon başlangıç değeri için (7) eşitliği kullanılabilir.

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} - \frac{f(\varphi_{i-1})}{f'(\varphi_{i-1})} \quad (15)$$

İterasyon $\frac{f(\varphi_i)}{f'(\varphi_i)}$ değeri yeteri kadar küçük oluncaya kadar devam ettirilir. Bu şekilde belirlenen enlem değerinden yararlanarak (5) eşitliğinden yükseklik (h) bulunur.

Bu yöntemde iterasyon 3-4 adımda 14 basamak hassasiyete ulaşarak sona erer. Noktanın ekvatora ya da kutuplara yakın olması iterasyonu etkilemez.

İterasyon için gerekli kapalı fonksiyon,

$$f(\varphi) = \frac{z + e^2 N \sin \varphi}{p} - \tan \varphi = 0 \quad (16)$$

şeklinde de oluşturulabilir. Bu durumda türevi:

$$f'(\varphi) = \frac{e^2 N \cos \varphi}{p} \left(1 + \frac{e^2 \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\right) - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad (17)$$

2.2.4. Enlem ve yüksekliğin Newton-Raphson iterasyonu

Enlem ve yükseklik birlikte Newton-Raphson iterasyonuna tabi tutulabilir. Bu durumda iki denklemden iki değişkeninin çözümü söz konusudur.

Meridyen elipsi düzleminde P noktasının Kartezyen koordinatları (Şekil 2):

$$p = (N + h) \cos \varphi$$

$$z = \left(\frac{N}{1 + e'^2} + h\right) \sin \varphi \quad (18)$$

Kapalı fonksiyonlar:

$$f_1(\varphi, h) = (N + h) \cos \varphi - p = 0$$

$$f_2(\varphi, h) = \left(\frac{N}{1 + e'^2} + h\right) \sin \varphi - z = 0 \quad (19)$$

Matris formunda yazılırsa;

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \varphi \\ h \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos \varphi - p \\ \left(\frac{N}{1 + e'^2} + h\right) \sin \varphi - z \end{bmatrix}$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (20)$$

olmak üzere, iterasyon:

$$\underline{X}_{i+1} = \underline{X}_i - \underline{J}_i^{-1} \underline{F}_i \quad (21)$$

şeklinde yapılır. \underline{X} matrisinde birim uyumu sağlanması için enlem radyan olarak alınmalıdır. İterasyonun durması için enlem ve yükseklik için gereken basamak doğruluğu farklı olduğundan iki farklı ölçüt kullanılmalıdır. İterasyon,

$$\underline{J}_i^{-1} \underline{F}_i \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

koşulu sağlanınca durdurulur. $\varepsilon_1 = 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ değerleri ölçüt olarak alınabilir.

Kısmi türevler:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -(N + h) \sin \varphi \quad \frac{\partial f_1}{\partial h} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = \left(\frac{N}{1 + e'^2} + h\right) \cos \varphi \quad \frac{\partial f_2}{\partial h} = \sin \varphi \quad (23)$$

İterasyon için gereken başlangıç değerleri:

$$\tan \varphi_0 = \frac{z(1 + e'^2)}{p}$$

$$h_0 = \frac{p}{\cos \varphi_0} - N_0 \quad (24)$$

2.2.5. Bowring Yöntemi

Bowring iterasyon yöntemi matematiksel jeodezide bilinen en kısa iteratif yöntemdir (Bowring 1976). İlk adımda yeryüzü üzerindeki noktalar için ($-10000m \leq h \leq 10000m$) yeterli doğrulukta çözüm sağladığı için Bowring tarafından iteratif olmayan bir yaklaşım olarak da kullanılabilceği ifade edilmiştir (Bowring 1976). Yöntem, enlem eşitliğinin Taylor serisine açılıp düzenlenmesiyle elde edilen indirgenmiş enlem eşitliğine dayanır.

$$\tan \beta = \frac{b(z + be'^2 \sin^3 \beta)}{a(p - ae^2 \cos^3 \beta)} \quad (25)$$

(25) eşitliğinden indirgenmiş enlem basit iterasyon ile bulunabilir. İndirgenmiş enlemin başlangıç değeri:

$$\tan \beta_0 = \frac{z}{p} \sqrt{1 + e'^2} \quad (26)$$

olarak alınır. İndirgenmiş enlem bulunduktan sonra coğrafi enlem,

$$\tan \varphi = \sqrt{1 + e'^2} \tan \beta \quad (27)$$

eşitliğinden bulunur. Yükseklik ise (5) eşitliğinden hesaplanır. Yöntem en çok 3 adımda enleminde 14 basamak doğrulukta çözüm sağlar.

İndirgenmiş enlemin başlangıç değeri (26) ile belirlenip, (25) eşitliği aşağıdaki gibi düzenlenip yeryüzü noktaları için yeteri doğrulukta enlem bir adımlık iterasyon ile (doğrudan) belirlenebilir.

$$\tan \varphi = \frac{z + be'^2 \sin^3 \beta}{p - ae^2 \cos^3 \beta} \quad (28)$$

Ancak bu şekilde uydu konumları gibi yeryüzünün dışında bulunan noktalar için yeterli doğrulukta çözüm elde edilemez. İterasyon yapılmalıdır.

2.2.6. Borkowski Yöntemi

Borkowski kapalı bir eşitlikten indirgenmiş enlemin iteratif olarak çözümünü önermiştir (Borkowski 1989).

$$f(\beta) = 2 \sin(\beta - c_1) - c_2 \sin 2\beta = 0$$

$$c_1 = \arctan \frac{bz}{ap} \quad (29)$$

$$c_2 = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(ap)^2 + (bz)^2}}$$

Burada c_1 ve c_2 sabit terimlerdir. Newton-Raphson yöntemi ile iterasyon aşağıdaki eşitlikler ile yapılır.

$$f'(\beta) = 2 \cos(\beta - c_1) - 2c_2 \cos 2\beta$$

$$\beta_i = \beta_{i-1} - \frac{f(\beta_{i-1})}{f'(\beta_{i-1})}$$

İndirgenmiş enlemin başlangıç değeri için (26) eşitliğinden yararlanılabilir.

3. ARAŞTIRMA

Bölüm 2'de verilen 5 yöntemin birbiri ile karşılaştırılması için enlemi 0-90° arasında 15° aralıklarla artan, değişik yükseklik değerlerine sahip 4 değişik test verisi oluşturulmuştur. Her bir veri seti 360 noktadan oluşmaktadır. (5) eşitliği enlemin 90° olması durumunda kullanılamayacağından (payda sıfır olacağından) veri setlerine 90° alınmamıştır. Tablo 1 veri setlerinin özelliklerini, tablo 2 ise test edilen yöntemleri özetlemektedir.

Benzer bir çalışma Laskowski (1991) tarafından da yapılmış, Bowring ve Borkowski yöntemleri karşılaştırılmıştır.

Tablo 1: Test veri setleri

Veri Seti	Enlem Aralığı	Yükseklik	Nokta Sayısı
1	0-90°	-1000 km	360
2	0-90°	-10 km	360
3	0-90°	10 km	360
4	0-90°	1000 km	360
5	0-90°	10 000 km	360
6	0-90°	100 000 km	360

Tablo 2: Test edilen yöntemler

Yöntem	Veri Seti	Açıklama
A	2	Enlemin basit iterasyonla bulunması
B	7	Enlemin ve yüksekliğin birlikte basit iterasyon yöntemi ile çözümü
C	3	Enlemin Newton-Raphson yöntemi ile iteratif çözümü
D	0	Enlem ve yüksekliğin Newton-Raphson iterasyonu
E	1	Bowring Yöntemi iterasyonlu
F	6	Bowring Yöntemi iterasyonsuz
G	4	Borkowski Yöntemi

Testler yazar tarafından C dilinde geliştirilen yazılım ile Linux İşletim Sistemi'nde gerçekleştirilmiştir. Enlem boylam ve elipsoidal yükseklik bilgileri içeren test verileri önce yer merkezli koordinatlara dönüştürülmüş, daha sonra Çizelge 2'de yer alan yöntemlerle enlem ve yükseklik geri hesaplanmıştır. Enlem ve yüksekliğin ilk değerleri ve hesaplanan değerler arasındaki farklar belirlenmiştir. Enlem için 14 basamak, yükseklik için ise 6 basamak duyarlığında iterasyon yapılmıştır. Programın her oturumunda 360 noktanın işlenmesi sırasında geçen CPU zamanları da hesaplanmış, en küçük CPU zamanına oranlanarak göreceli CPU zamanları bulunmuştur. İşlemci program çalışırken çok sayıda arka plan işlemleri yürüttüğünden elde edilen CPU zamanları değişebilmektedir. Bu bağlamda göreceli CPU zamanları algoritma hızı ile ilgili bir fikir vermekle birlikte kesin bir algoritma hızı ölçütü olarak görülmemelidir. Yöntemlerin karşılaştırmasında maksimum iterasyon sayısı ve enlem ve yükseklikteki mutlak değer olarak maksimum fark daha objektif ölçütler olarak kullanılabilir. Çizelge 3'de her veri seti için her yöntemin maksimum iterasyon sayısı, göreceli CPU zamanı, enlem ve yükseklikteki mutlak değer olarak maksimum fark değerleri yer almaktadır.

Tablo 3 incelendiğinde Bowring yönteminin iterasyonsuz olarak kullanımının ± 10 km aralığındaki yüksekliklerde kabul edilebilir sonuçlar verdiği görülmektedir. Bunun dışındaki yüksekliklerde enlem ve yükseklikte oluşan farklar jeodezik olarak kabul edilebilir (10^{-9} , 10^{-4} m den büyük) sınırları aşmaktadır. Bu bağlamda bu yöntem (yöntem F) uydu konumları söz konusu olduğunda kullanılamaz. Basit iterasyon yöntemleri beklendiği

gibi maksimum iterasyon sayısının fazlalığı ile dikkat çekmektedir. Matris işlemleri nedeniyle enlem ve yüksekliğin Newton-Raphson iterasyonu (Yöntem D) yüksek CPU zamanı ile dikkat çekmektedir. İterasyonlu Bowring ve Borkowski yöntemleri (Yöntem E ve G) düşük iterasyon adımı, enlem ve yükseklik farklarıyla dikkat çekmektedir. Bu yöntemlerin göreceli CPU zamanları da diğerlerine göre fazla değildir. Genel olarak bakıldığında iteratif yöntemlerin tümü kabul edilebilir farklar içinde problemin çözümünü sağlamaktadır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Matematiksel jeodezide enlem problemi olarak da ifade edilen yer merkezli dik koordinatlardan coğrafi koordinatlara (enlem, boylam, elipsoidal yükseklik) geçiş doğrusal olmayan denklemlerin çözümünü gerektirir. Bu nedenle sayısal çözümleme tekniklerinin kullanılması gerekir. Bu konuda jeodezi kaynaklarında pek çok çalışmaya rastlanır. Bu çalışmada temel sayısal çözümleme yaklaşımlarına dayalı çözüm yolları ve jeodezi kaynaklarında öne çıkan Bowring ve Borkowski yöntemleri ele alınmıştır. Yapılan karşılaştırmalarda Bowring yönteminin yeryüzü noktaları için iterasyonsuz uygulanabileceği, uydu konumları için en çok 3 iterasyonda sonuç verdiği, matris kullanılan yaklaşımların göreceli olarak CPU zamanlarının fazla olduğu, iterasyonlu olarak Bowring ve Borkowski yöntemlerinin en çok 3 iterasyonla sıfır kabul edilebilecek hatalarla sonuç verdiği görülmüştür. Test edilen tüm iterasyonlu yöntemler hem yeryüzü noktaları hem de uydu konumları için yeterli doğrulukta sonuç vermektedir.

TEŞEKKÜR

Katkılarından dolayı Kocaeli Üniversitesi öğretim üyesi Doç.Dr. Aydın ÜSTÜN'e teşekkür ederim.

5. KAYNAKLAR

Borkowski, K. M. (1989) Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates, Bulletin Geodesique, 63, 50-56.

Bowring, B. R. (1976) Transformation from spatial to Geographical Coordinates, Survey Review, XXIII, 181, 323-327.

Laskowski, P. (1991). Is Newton's iteration faster than simple iteration for transformation between geocentric and geodetic coordinates? Bulletin Geodesique, 65, 14-17.

Ligas, M. (2013). Various parameterizations of "latitude" equation – Cartesian to geodetic coordinates transformation. Journal of Geodetic Science, 3(2), 87-94.

Üstün, A., Demirel, H. (2013). Matematiksel Jeodezi, Taslak ders notları, URL: <http://atlas.selcuk.edu.tr/1205429/dokumanlar/jeodezi2013.pdf>

EK A: DÖNEL ELİPSOİT PARAMETRELERİ

Ekvator yarıçapı	a
Kutup yarıçapı	b
Basıklık	$f = \frac{a-b}{a}$
Birinci dış merkezlik	$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$
Meridyen eğrilik yarıçapı	$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$
Meridyene dik eğrilik yarıçapı	$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$

Tablo 3: Test sonuçları

Veri Seti	Yöntem	Maksimum İterasyon	Göreceli CPU Zamanı	Enlem farkı (°)	Yükseklik Farkı (m)
1 (h=-1000km)	A	7	3.3	1.27E-14	2.79E-09
	B	7	2.4	4.45E-14	4.66E-09
	C	4	3.3	1.27E-14	2.79E-09
	D	3	9.3	1.91E-14	3.03E-09
	E	3	2.7	1.27E-14	1.58E-08
	F	0	1.7	1.34E-07	1.49E-02
	G	3	1.3	1.27E-14	2.74E-07
2 (h=-10km)	A	7	2.2	1.27E-14	1.86E-09
	B	6	1.4	3.18E-14	3.73E-09
	C	4	2.2	1.27E-14	1.86E-09
	D	3	11.4	1.27E-14	2.56E-09
	E	3	2.5	1.27E-14	1.68E-08
	F	0	1.9	8.07E-12	1.06E-06
	G	3	2.4	1.27E-14	1.09E-07
3 (h=10km)	A	7	1.7	1.27E-14	1.86E-09
	B	6	1.6	3.18E-14	3.73E-09
	C	4	3.2	1.27E-14	1.86E-09
	D	3	9.8	1.27E-14	2.11E-09
	E	3	1.6	1.27E-14	1.77E-08
	F	0	1.0	8.00E-12	1.06E-06
	G	3	1.3	1.27E-14	3.63E-08
4 (h=1000km)	A	6	3.2	1.27E-14	2.79E-09
	B	7	1.7	2.54E-14	4.66E-09
	C	4	2.8	1.27E-14	1.86E-09
	D	3	10.1	1.27E-14	3.03E-09
	E	3	1.9	1.27E-14	2.05E-08
	F	0	1.5	5.18E-08	7.91E-03
	G	3	2.0	1.91E-14	9.31E-08
5 (h=10 000km)	A	6	1.5	1.27E-14	5.59E-09
	B	7	1.6	1.27E-14	7.45E-09
	C	4	2.3	1.27E-14	3.73E-09
	D	4	9.2	1.27E-14	3.73E-09
	E	3	1.7	1.91E-14	2.98E-08
	F	0	2.0	4.73E-07	1.60E-01
	G	3	1.4	1.27E-14	1.36E+05
6 (h=100 000km)	A	4	1.3	1.27E-14	4.47E-08
	B	6	1.2	1.27E-14	4.47E-08
	C	4	2.1	1.27E-14	4.47E-08
	D	4	10.8	1.27E-14	2.98E-08
	E	3	1.6	1.27E-14	2.09E-07
	F	0	2.2	1.72E-07	3.79E-01
	G	3	1.3	2.54E-14	1.36E-06