Afyon Kocatepe Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

4 (1-2)
127-133

Afyon Kocatepe University
JOURNAL OF SCIENCE

RİESZ POTANSİYELLERİ ÜZERİNE

M. Zeki SARIKAYA, Hüseyin YILDIRIM

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, AFYON

ÖZET

Bu çalışmada, Lagrange teoremi yardımıyla L^p uzayında klasik Riesz potansiyelleri için bir kestirim yapılmıştır.

Anahtar Kelime: Riesz Potansiyelleri, Lagrange Teoremi

ON THE RIESZ POTANTIALS

ABSTRACT

In this study, the estimate was made for the classical Riesz potentials in L^p space by the Lagrange theorem.

Key Words: Riesz Potantials, Lagrange Theorem.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, $0<\alpha<n$ olmak üzere $f\in L^p$ için, klasik Riesz potansiyelleri

$$U_\alpha f(x)=\int_{R^n}|y-x|^{\alpha-n}dy$$

şeklinde alınmıştır [1] ve [2]. İlk olarak çalışmanın esasını oluşturan teorem için iki lemma verelim.

Lemma 1: $0<\alpha<n$ olsun. $x,y\in R^n$ için,

$$\sup_{r>0} r^{-n}\int_{|y|<r}|y-x|^{\alpha-n}dy\leq C|x|^{\alpha-n}$$

dır.

İspat: $|x-y|$ uzaklığı için küresel koordinatları gözönüne alırsak,

$$\int_{|y-x|<\frac{|x|}{2}} |y-x|^{\alpha-n} dy = S_{n-1} \int_0^{\frac{|x|}{2}} \rho^{\alpha-1} d\rho = C_1 |x|^{\alpha}$$

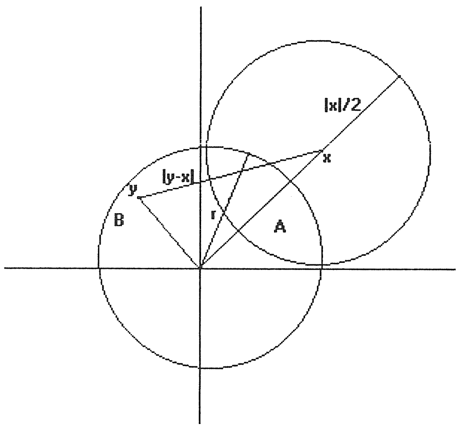
elde edilir. Burada, $\frac{|x|}{2} \geq r$ ve $\frac{|x|}{2} < r$ durumlarını ayrı ayrı dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$\frac{|x|}{2} \geq r$ olsun. Bu durumda

$$\int_{|y|<r} |y-x|^{\alpha-n} dy \leq \int_{|y|<r} (|x|-|y|)^{\alpha-n} dy \leq 2^{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} \frac{r^n}{n} S_{n-1} = C_2 r^n |x|^{\alpha-n}$$

elde edilir.

$\frac{|x|}{2} < r$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şekli göz önüne alarak,



$$\begin{aligned}\int\limits_{|y|<r}|y-x|^{\alpha-n}dy &= \int\limits_{B}\frac{dy}{|y-x|^{n-\alpha}}+\int\limits_{A}\frac{dy}{|y-x|^{n-\alpha}}\\ &\le \int\limits_{B}\frac{dy}{\left(\frac{|x|}{2}\right)^{n-\alpha}}+\int\limits_{A}\frac{dy}{|y-x|^{n-\alpha}}\\ &\le 2^{n-\alpha}|x|^{\alpha-n}\int\limits_{|y|<r}dy+\int\limits_{|y|<\frac{|x|}{2}}2^{n-\alpha}|x|^{\alpha-n}dy\\ &= C_2 r^n|x|^{\alpha-n}+C_1|x|^{\alpha}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\frac{|x|}{2}\ge r$ ve $\frac{|x|}{2}<r$ için

$$r^{-n}\int\limits_{|y|<r}|y-x|^{\alpha-n}dy=\begin{cases} C_2|x|^{\alpha-n} & , \quad \frac{|x|}{2}\ge r\\ C_3\left(|x|^{\alpha-n}+\frac{|x|^{\alpha}}{r^n}\right) & , \quad \frac{|x|}{2}<r\end{cases}$$

$$\le\begin{cases} C_2|x|^{\alpha-n} & , \quad \frac{|x|}{2}\ge r\\ C_4|x|^{\alpha-n} & , \quad \frac{|x|}{2}<r\end{cases}$$

dır. $C=\max\{C_2,C_4\}$ seçilirse,

$$\sup_{r>0} r^{-n}\int\limits_{|y|<r}|y-x|^{\alpha-n}dy\le C|x|^{\alpha-n}$$

elde edilir.

Lemma 2: $\tau = |x - z|$ olsun. $y \in R^n - B(x, 2\tau)$ olmak üzere

$$\left| |x - y|^{\alpha - n} - |z - y|^{\alpha - n} \right| < M\tau |x - y|^{\alpha - n - 1}$$

dır.

İspat: $x - y = t \Rightarrow |x - y| = |t| = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_n^2}$ ve $z - y = z - x + t = t + h$ ise $|z - y| = |t + h|$ olarak alalım. Çok değişkenliler için Lagrange teoremi $0 < \theta < 1$ olmak üzere,

$$|f(t_1 + h_1, \ldots, t_n + h_n) - f(t_1, \ldots, t_n)| \le \left| \frac{\partial f(t + \theta h)}{\partial t_1} h_1 \right| + \ldots + \left| \frac{\partial f(t + \theta h)}{\partial t_n} h_n \right|$$

dır. $f(t) = |t|^{\alpha - n}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\left| |t + h|^{\alpha - n} - |t|^{\alpha - n} \right| &\le \left| \frac{\partial f(t + \theta h)}{\partial t_1} h_1 \right| + \ldots + \left| \frac{\partial f(t + \theta h)}{\partial t_n} h_n \right| \\
&= |\alpha - n| \left(\sqrt{(t_1 + \theta h_1)^2 + \ldots + (t_n + \theta h_n)^2} \right)^{\alpha - n - 1} \\
&\quad x \left(\frac{(t_1 + \theta h_1)h_1 + \ldots + (t_{1n} + \theta h_n)h_n}{\left(\sqrt{(t_1 + \theta h_1)^2 + \ldots + (t_n + \theta h_n)^2} \right)} \right) \\
&= |\alpha - n| \left(\sqrt{\sum t_k^2 + \theta^2 \sum h_k^2 + 2\theta(t, h)} \right)^{\alpha - n - 1} \\
&\quad x \left(\frac{\sum (t_k + \theta h_k)h_k}{\left(\sqrt{(t_1 + \theta h_1)^2 + \ldots + (t_n + \theta h_n)^2} \right)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum t_k^2 = a^2, \sum h_k^2 = \tau^2$ ve Cauchy eşitsizliğinden

$$(t, h) = \sum t_k h_k \le \left(\sum t_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum h_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = a\tau$$

olduklarını gözönüne alırsak,

$$\left||t+h|^{\alpha-n}-|t|^{\alpha-n}\right| \leq |\alpha-n|\left(\sqrt{a^2+\theta^2\tau^2+2\theta(t,h)}\right)^{\alpha-n-1}$$

$$x\left(\frac{\sum(t_k+\theta h_k)h_k}{\left(\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2+\ldots+(t_n+\theta h_n)^2}\right)}\right)$$

yazılır. Cauchy eşitsizliğinden

$$\frac{\sum(t_k+\theta h_k)h_k}{\left(\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2+\ldots+(t_n+\theta h_n)^2}\right)} \leq \frac{\left(\sum(t_k+\theta h_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum h_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2+\ldots+(t_n+\theta h_n)^2}\right)}$$

$$=\left(\sum h_k{}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\tau$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$\left||t+h|^{\alpha-n}-|t|^{\alpha-n}\right| \leq |\alpha-n|\left(\sqrt{a^2+\theta^2\tau^2+2\theta(t,h)}\right)^{\alpha-n-1}\tau$$

olur. Burada $a^2+\theta^2h^2+2\theta(t,h)+2\theta a\tau-2\theta a\tau>0$ olup $a^2+\theta^2h^2-2\theta a\tau>0$ dır. O halde $f(\theta)=\theta^2h^2-2\theta a\tau+a^2$ polinomunu göz önüne alalım. $f'(\theta)=0$ dan bu polinom fonksiyonu $\theta=\dfrac{a}{\tau}$ noktasında minimum değerini alacaktır. Halbuki $a=|x-y|>2\tau$ olduğunda $\dfrac{a}{\tau}>2$ dır. Dolayısıyla $\theta=\dfrac{a}{\tau}$ noktası $0<\theta<1$ aralığının dışında kalacağından $f(\theta)$ fonksiyonu minimum değerini $\theta=1$ noktasında alacaktır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left||t+h|^{\alpha-n}-|t|^{\alpha-n}\right| &< |\alpha-n|\left(\sqrt{(a-\tau)^2}\right)^{\alpha-n-1}\tau \\
&= |\alpha-n|\tau|a-\tau|^{\alpha-n-1} \\
&< |\alpha-n|\tau|a|^{\alpha-n-1}\left|1-\frac{\tau}{a}\right|^{\alpha-n-1} \\
&= M\tau|x-y|^{\alpha-n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1: $0<\alpha-\dfrac{n}{p}<1$ olsun. $f\in L^p(R^n)$ fonksiyonu için

$$\int_{R^n}(1+|y|)^{\alpha-n}|f(y)|dy<\infty$$

şartı sağlanıyorsa,

$$\left(\sup_{r>0} r^{-np}\int_{|z|<r}|U_\alpha f(x)-U_\alpha f(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}}\le C|x|^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_p$$

dır.

İspat: $r=|x-z|$ için

$$\begin{aligned}U_\alpha f(z)&=\int_{B(x,2r)}|z-y|^{\alpha-n}f(y)dy+\int_{R^n-B(x,2r)}|z-y|^{\alpha-n}f(y)dy\\&=u_1(z)+u_2(z)\end{aligned}$$

yazılır. $(\alpha-n)p'+n>0$ için $u_1(z)$'e Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}|u_1(z)|&\le\left(\int_{B(x,2r)}|z-y|^{(\alpha-n)p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{B(x,2r)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\left(\int_{B(x,2r)}|z-y|^{(\alpha-n)p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_p\\&\le Cr^{[(\alpha-n)p'+n]/p'}\|f\|_p\end{aligned}$$

elde edilir. $u_2(x)$ için Lemma 2 yi gözönüne alırsak,

$$|u_2(x)-u_2(z)| \le Cr \int_{R^n - B(x,2r)} |x-y|^{\alpha-n-1} |f(y)| dy$$

yazılır. $(\alpha-n-1)p'+n<0$ için son eşitsizliğin sağ tarafına Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$|u_2(x)-u_2(z)| \le Cr \left(\int_{R^n - B(x,2r)} |x-y|^{(\alpha-n-1)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{R^n - B(x,2r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le Cr^{[(\alpha-n)p'+n]/p'} \|f\|_p$$

elde edilir. Böylece,

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \le C|x-z|^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p$$

olduğu görülür. Şimdi Lemma 1 den

$$\left(\sup_{r>0} r^{-np} \int_{|z|<r} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sup_{r>0} r^{-np} \int_{|z|<r} (C|x-z|^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p)^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= C\|f\|_p \left(\sup_{r>0} r^{-np} \int_{|z|<r} |x-z|^{\alpha-np} dz \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le C|x|^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise teoremin ispatıdır.

KAYNAKÇA

1. Mizuta Y., *Boundary Limits of Harmonic Functions in Sobolev-Orlicz Classes*, The Proceedings of ICPT 90 in Nagoya, 235-249, (1991).
2. Yıldırım H., Sarıkaya M. Z., *On The Generalized Riesz Potentials*, J. Inst. of Math. and Comp. Sci., 14 (3): 217-224, (2001).