HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE η-PARALEL TENSÖR ALANLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail MISIRLI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kasım 2017

Bu tez çalışması 16.FEN.BİL.17 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE η-PARALEL TENSÖR ALANLARI

İsmail MISIRLI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kasım 2017

TEZ ONAY SAYFASI

İsmail MISIRLI tarafından hazırlanan "Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar Üzerinde η-Paralel Tensör Alanları" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 24/11/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT
Manisa Celal Bayar Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Afyon Meslek Yüksekokulu

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Afyon Meslek Yüksekokulu

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/11/2017

İsmail MISIRLI

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK
MANİFOLDLAR ÜZERİNDE
η-PARALEL TENSÖR ALANLARI

İsmail MISIRLI
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik manifold yapısı ele alınmış ve bu yapı için temel eğrilik özellikleri yardımıyla bazı belli paralel tensör alanları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bazı tensör şartlarını sağlayan hemen hemen α-kosimplektik manifoldu ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde, belli bazı flat koşulları sağlayan hemen hemen α-kosimplektik manifoldu ayrıntılı bir şekilde ele alınmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2017, v + 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen değme manifold, Hemen hemen α-kosimplektik manifold, Hemen hemen α-Kenmotsu manifold, η-paralellik, Konformal eğrilik tensör alanı, Projektif eğrilik tensör alanı, Konsirküler eğrilik tensör alanı, Flat Manifold.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

η-PARALLEL TENSOR FIELDS
ON ALMOST α-COSYMPLECTIC MANIFOLDS

İsmail MISIRLI

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Hakan ÖZTÜRK

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are introduced. In the third chapter, the structure of almost α-cosymplectic manifold is considered and some certain parallel tensor fields are examined for this structure with the help of basic curvature properties. In the fourth chapter, some general results related to almost α-cosymplectic manifold satisfying some tensor fields are given. In the fifth chapter, almost α-cosymplectic manifold satisfying some certain flatness conditions is addressed in detail and some results are obtained.

2017, v + 52 pages

Keywords: Almost contact manifold, Almost α-cosymplectic manifold, Almost α-Kenmotsu manifold, η-parallelity, Conformal curvature tensor field, Projective curvature tensor field, Concircular curvature tensor field, Flat manifold.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmam boyunca 16.FEN.BİL.17 numaralı proje ile desteğini esirgemeyen Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Son olarak, bu tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

İsmail MISIRLI
AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	
R	Riemann eğrilik tensör alanı
D	Değme dağılımı
S	Ricci eğrilik tensör alanı
Q	Ricci operatörü
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi-Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı
U(n)	Üniter grup
div	Divergens operatörü
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^{\perp}$	M üzerindeki tanjant demetinin ortogonal tümleyeni
O(s)	Ortogonal grup
R_{η} (M)	M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların bir alt halkası
J	Hemen hemen kompleks yapı
L	Lie türev operatörü
P	Projektif eğrilik tensör alanı
C	Weyl konformal eğrilik tensör alanı
$\bar{C}$	Konsirküler eğrilik tensör alanı
τ	Torsiyon tensör alanı
η	Eta paralel tensör alanı

1 GİRİŞ

Boş cümleden farklı keyfi M cümlesi üzerinde en önemli durumlardan biri $c = c(t)$ eğrisi boyunca kovaryant türev kavramıdır. Eğer Y, $c = c(t)$ eğrisi boyunca bir diferensiyellenebilir vektör alanı ise o zaman

$$Y^{'}(t) = DY\frac{\partial}{\partial t},$$

denklemi geçerlidir. Eğer burada $c^{'}(t) = 0$ olsa bile $Y^{'}(t)$ sıfırdan farklı olabilir. Örnek olarak, $c = c(t)$ eğrisi sabit bir eğri olduğunda $c(t) \equiv p$ ve Y, $c = c(t)$ eğrisi boyunca bir diferensiyellenebilir vektör alanıdır. Yani, Y vektör alanı T_pM üzerine bir düzgün dönüşümse o zaman $Y^{'}$ sabit T_pM uzayı üzerine bir dönüşüm anlamında Y vektör alanının alışılmış anlamda normal türevidir. Dolayısıyla bir vektör alanının bir dönüşüm boyunca paralelliğini şu şekilde tanımlayabiliriz:

Tanım 1.1 $f : N \longrightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Eğer N nin tüm X vektör alanları için $D_XY = 0$ şartı sağlanıyorsa Y vektör alanına $f : N \longrightarrow M$ boyunca paraleldir denir (Sharpe 1997).

Genel olarak, bir f dönüşümü boyunca hiçbir paralel vektör alanı yoktur. Fakat bir düzgün eğri için $Y^{'} = 0$ şartını sağlayan bu tür alanlar her zaman mevcuttur. Böylece şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 1.1 $c : I \longrightarrow M$ bir düzgün eğri olsun. $t_0 \in I$ ve $\upsilon \in T_{c_{(t_0)}}M$ olmak üzere, $Y(t_0) = \upsilon$ denklemiyle verilen $c = c(t)$ eğrisi boyunca sadece bir tek Y paralel vektör alanı mevcuttur (Sharpe 1997).

$c : I \longrightarrow M$ bir düzgün eğri, $t_0, t_1 \in I$ ve $p_0 = c(t_0)$ ile $P_1 = c(t_1)$ olsun. Buradaki $P : T_{p_0}M \longrightarrow T_{p_1}M$ dönüşümüne p_0 noktasından p_1 noktasına $c = c(t)$ eğrisi boyunca bir paralel dönüşüm denir, $Y(t_1) \in T_{p_1}M$, $c = c(t)$ eğrisi boyunca $Y(t_0) = \upsilon$ denklemiyle verilen bir tek Y paralel alanının değeridir. P dönüşümü bir lineer izomorfizmadır. Bu izomorfizma p_1 noktasından p_0 noktasına $c = c(t)$ eğrisi boyunca P nin ters dönüşümün bir paralel dönüşüm olduğu anlamında tektir. Bir başka ifadeyle, eğer $T_{p_0}M$ uzayının bir bazı $(\upsilon_1, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_m)$ ve E_i, $E_i(t_0) = \upsilon_i$, $1 \leq i \leq m$, denklemiyle verilen paralel vektör alanı ise o zaman $(E_1(t), \ldots, E_m(t))$ her $t \in I$ için $T_{c(t)}M$ uzayının bir bazıdır. Bu şekilde tanımlanan böyle bir çatı paralel bir çatı olarak adlandırılacaktır.

Örnek 1.1 $\mathbb{R}^m$ üzerinde bir Y vektör alanının bir düzgün $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eğrisi boyunca paralel olması için gerek ve yeter şart Y vektör alanının sabit olmasıdır. Burada D konneksiyonunun eğrilik tensörü R

$$\begin{gathered} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z \end{gathered},$$

biçiminde tanımlansın. Eğer R tensörü özdeş olarak sıfıra eşitse $(R = 0)$ D konneksiyonuna flat denir. $R = 0$ olması durumunda herhangi bir konneksiyon için de geçerlidir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz paralellik izahını manifold üzerinde ele elalım. Bir M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olan ∇ ile verilen bir T tensör alanı, M üzerinde eğriler boyunca paralel yer değiştirmeler altında değişmez kalır. Başka bir ifadeyle, her $p, q \in M$ için T_p değeri (p noktasındaki T tensör alanının değeri) p ve q noktalarıyla birleşen herhangi bir düzgün eğri boyunca q noktasına paralel yer değiştirmeler altında T_q tensör değerine dönüşür. Bir T tensör alanının paralel olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir keyfi X vektör alanı doğrultusunda onun kovaryant türevinin özdeş olarak sıfıra eşit olmasıdır. Yani, ∇ konneksiyonuna göre, $\nabla_X T = 0$ veya diğer bir değişle, T tensör alanının kovaryant diferensiyelinin sıfır olmasıdır (Sharpe 1997).

Levi-Civita konneksiyonu ile verilen bir Riemann manifoldu üzerinde diferensiyel formların paralel alanları özel bir ilgi alanı olmuştur. Her böyle ω formu Laplace-Beltrami operatörü olan Δ ile yer değiştirilen diferensiyel formların uzayındaki bir çok lineer operatörlerle ilişkilidir. Bu ilişkiler ω formuna göre tensör çarpımı yoluyla gerçekleşir. Örnek olarak, ω tarafından iç ve dış çarpımsal operatör veya diferensiyel formlar uzayının altuzaylarının üzerine dik izdüşümlerinin operatörü holonomi grubuna göre değişmez kalır (Blair 2002).

En önemli teori (Hodge Teoremi) Kaehler ve kuaterniyon Kaehler manifoldları için geliştirilmiştir. Burada bu manifoldlar için sırasıyla, 2-formlar ve 4-formlar her zaman paralel alanlardır. Bir Riemann uzayında herhangi paralel diferensiyel form harmoniktir. Fakat bir kompakt simetrik Riemann uzayında bu durumun tersi doğrudur. Yani, harmonik form paraleldir. Bu alanda yapılan çalışmalar genelde topolojik ve cebirsel anlamdadır. Çalışmalarda özellikle metriğin değiştirilmesi problemlere farklı anlamlar yüklemiştir. Örnek olarak, T paralel vektör alanı bir pseudo Riemann metriğine sahipse bu durumda Levi-Civita gibi herhangi bir konneksiyon daima mevcut ve tektir (Blair 2002).

Bu tez çalışmasında kullanacağımız hemen hemen değme metrik manifoldların bir altsınıfı olan manifoldumuzun yapısı ile ilgili literatür bilgisi vermeye çalışalım:

Geometride özellikle manifold teorisinde oldukça önemli bir yere sahip olan hemen hemen değme Riemann manifoldlarının biraz yakın tarihinden bahsedelim. Tek boyuta sahip manifoldlar üzerinde yapılan çalışmada $U(n) \times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapılar ilk olarak Gray tarafından tanımlanmıştır (Gray 1959). Bu arada $(2n+1)$-boyutlu bir (C^{∞}) sınıfından dif.bilir. bir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M nin hemen hemen bir değme manifold olarak adlandırıldığını hatırlatalım. Bu durumda, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1,$$

denklemleriyle verilmiş ve $(1,1)$-tipli bir tensör alanı ϕ, bir vektör alanı ξ ve bir 1-form olan η sayesinde elde edilen (ϕ, ξ, η)-üçlüsüyle gösterilmiştir. Bunu takiben, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \\ \eta(X) &= g(X, \xi), \end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla bir g metriği tanımlanarak hemen hemen değme metrik yapı tam olarak ifade edilmiştir (Sasaki 1960). Daha sonra aynı yazar hemen hemen değme manifoldlar üzerinde normallik şartı olarak da bilinen belli bir şartın J kompleks yapısının $(J^2 = -I)$ integrallenebilmesi olduğununu göstermiştir (Sasaki 1961).

O zamanlar yapılan en önemli çalışmalardan biri Tanno tarafından kaleme alınmıştır (Tanno 1969). Maksimum boyutlu otomorfizm gruplarına sahip hemen hemen değme

Riemann manifoldlarını sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmayı 3 sınıfta ele almıştır. Birinci sınıf manifoldlar; eğer ξ vektör alanını ihtiva eden 2-düzlemler için kesit eğriliği $K(X,\xi) > 0$ ise sabit ϕ-holomorfik kesit eğriliği ile verilen homojen normal değme Riemann manifoldlar olarak adlandırılmıştır. İkinci sınıf ise; $K(X,\xi) = 0$ olduğunda sabit holomorfik kesit eğriliği ile verilen bir Kaehler manifold ve bir çember veya bir doğrunun global Riemann çarpımları biçiminde verilen manifoldlardır. Üçüncü sınıf ise; $K(X,\xi) < 0$ için $L \times_f CE^n$ katlı (warped) çarpım uzayı ile ifade edilen manifoldlardır. Bilindiği üzere birinci sınıfta verieln manifoldlar bazı tensör denklemleri yardımıyla karakterize edilmiştir. Bu manifoldlar Sasakian yapıya sahiptir.

Ayrıca, bu çalışmaları takiben hemen hemen değme metrik yapı yardımıyla kosimplektik manifold olarak adlandırılan hemen hemen değme metrik yapıların bir altsınıfı tanımlanmıştır (Goldberg and Yano 1969). Bu tanımlamadan sonra özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde çok fazla çalışma yapmıştır (Olszak 1981).

Bizim çalıştığımız manifold yapısının esasını teşkil eden en temel referans çalışma ise 1972 yılında Kenmotsu tarafından yapılmıştır (Kenmotsu 1972). Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu yeni yapıyla kurulan manifold sonraları Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır (Kenmotsu 1972). Bundan başka, Vanhecke hemen hemen Kenmotsu yapıyı daha genel halde hemen hemen α-Kenmotsu manifoldları olarak literatüre eklemiştir (Vanhecke 1981).

Son zamanlarda yapılan yeni bir tanımlama hemen hemen α-Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılarını birlikte ele almaya neden olmuştur. Kim ve Pak hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir altsınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik manifold kavramını literatüre katmıştır öyle ki bir $(2n+1)$-boyutlu (M,ϕ,ξ,η,g) hemen hemen α-kosimplektik yapısı

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi,$$

denklemleriyle verilmiştir. Burada α, keyfi bir reel sayı ve Φ, temel 2-formdur (Kim and Pak 2005). Verilen bu denklemlerde özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa hemen hemen kosimplektik manifold, $\alpha \neq 0$ alındığında ise hemen hemen α-Kenmotsu manifold elde edilir. Nijenhuis tensör alanına göre normallik şartı altında ise α-kosimplektik manifold ya kosimplektik yada α-Kenmotsu manifoldudur.

Şimdi, bu tez çalışmasında ele alacağımız belli bazı tensör alanları ve paralellik şartlarıyla ilgili gerekli literatür bilgilerini verelim:

Genel olarak Riemann geometrisinde, R Riemann eğrilik tensöründen sonra en önemli eğrilik tensörlerinin Weyl konformal eğrilik tensörü C, projektif eğrilik tensörü P ve konsirküler eğrilik tensörü $\overline{C}$ olduğu ifade edilir (Yano and Kon 1984). Bu yüzden pek çok yazar bu tensörleri veya bunlar tarafından tanımlanan tensör çarpımlarını isimleri, sırasıyla, konformal yarı simetrik, projektif yarı simetrik, konsirküler yarı simetrik olan $R(X,Y) \cdot C = 0$, $R(X,Y) \cdot P = 0$ ve $R(X,Y) \cdot \overline{C} = 0$ tensörlerini ele almıştır (Bagewadi *et al.* 2007, Özgür 2007). Burada $R(X,Y)$ manifoldun her bir noktasındaki tensör cebirinin türevi olarak alınmıştır. Bu tanımlardaki yarı simetrik kavramının esası yarı simetrik manifold kavramından gelmektedir. Bu tür manifoldlar için önemli bir sınıflandırma Szabó tarafından yapılmıştır (Szabó 1982). Litertürdeki ilk tanımlama ise $R \cdot R = 0$ denklemiyle ilk kez Nomizu tarafından verilmiştir (Nomizu 1968). Eğer M^n R^{n+1} Öklid uzayının bir tam bağlantılı yarı simetrik hiperyüzeyi ($n > 3$) yani, $R \cdot R = 0$ ise M^n lokal simetriktir. Yani, $\nabla R = 0$ dır. Bundan sonraki çalışmalarda manifold sınıflandırmalarında lokal simetri ve yarı simetrik şartı önemli rol oynamıştır.

CR-yapı değme metrik uzaylarda önemli bir yere sahiptir. Bu yapının integrallenebilme şartı bu ϕ tensör yapısının η-paralel olmasına denktir. Yani, ξ vektör alanına dik olan tüm vektör alanları için

$$g((\nabla_X \phi)Y, Z) = 0,$$

dır. Başka bir bakış açısıyla, $\mathcal{D} = \xi^{\perp}$ değme dağılımına kısıtlanmış tensör alanları kompleks anlamda bazı kompleks tensörlerle ilişkilidir. O halde değme yapı üzerinde tanımlanan η-paralellik kompleks durumdaki paralellikle ilişkilidir (Boeckx 2000). Örnek olarak, ϕ tensör alanının η-paralelliği $\nabla J = 0$ özelliğiyle verilen Kaehler yapıyla ilişkilidir. Diğer bir örnek ise Takahashi tarafından Sasakian manifoldlar için verilen lokal

ϕ-simetrik kavramıdır. Eğer eğrilik tensörü η-paralel ise o zaman bir Sasakian manifold lokal ϕ-simetriktir. Yani, her ξ vektör alanına dik olan vektör alanları için

$$g((\nabla_X R)(Y, Z)U, V) = 0,$$

denklemi geçerlidir. Benzer yolla, $h = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \phi$ tensör alanıyla verilen bir değme metrik manifoldun η-paralel olması her ξ vektör alanına dik olan vektör alanları için

$$g((\nabla_X h)Y, Z) = 0,$$

şartının sağlamasıyla mümkündür (Boeckx 2000). Burada h tensör alanı diğer tensör alanlarına göre daha az önemdedir. Çünkü h nın tanımında kullanılan tensör alanları ξ ve ϕ temel tensör alanlarıdır. Bu yüzden h tensör alanının kompleks yapıyla bir benzerliği yoktur. Bu tensör alanının değme metrik manifold geometrisi üzerindeki sonuçları oldukça şaşırtıcıdır. Bir K-değme olmayan değme metrik manifold bir η-paralel h tensör alanıyla verildiğinde onu ilgilendiren CR-yapı integrallenebilirdir. Ayrıca aynı şartlar altında h tensör alanı η-paralel ise o zaman manifold bir (k, μ)-uzayıdır. Burada özel bir sonuç vermek gerekirse, 3-boyutlu bir değme metrik manifold üzerinde h tensör alanı η-paralel ise manifold bir (k, μ)-uzayıdır (Boeckx and Cho 2005).

Ayrıca, değme metrik manifoldlar üzerinde her X, Y vektör alanları için,

$$g(\tau X, Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y),$$

denklemiyle τ torsiyon tensör alanı tanımlanmıştır (Boeckx and Cho 2005). Bu çalışmada τ torsiyon tensör alanının η-paralelliği incelenmiştir. Özellikle kesit eğrilik ve τ torsiyon tensör alanının η-paralellik şartları altında bir (k, μ)-yapıda olmasının gerek ve yeter şartları bulunmuştur.

Dileo ve Pastore hemen hemen Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı tensör alanlarının η-paralellik şartlarını araştırmışlardır (Dileo and Pastore 2009). Özellikle $h' = h \circ \phi$ bileşke tensör alanının η-paralelliği üzerinde durulmuştur. Bu çalışmaları takiben hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerinde h ve $\phi \circ h$ tensör alanlarına göre η-paralellik çalışılmıştır (Öztürk 2009, Öztürk *vd.* 2014).

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerinde α yı $d\alpha\wedge\eta = 0$ şeklinde bir düzgün fonksiyon seçtiğimizde h tensör alanının η-paralelliği ve bazı ilave şartlarla birlikte ortaya çıkan geometri incelenmiştir. Ayrıca τ torsiyon tensör alanının bazı paralellik şartları araştırılmış ve bazı sonuçlar verilmiştir. Bundan başka, Weyl konformal flat, konsirküler flat ve projektif flat hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ele alınmıştır.

İkinci bölümde, temel manifold teori ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Bu bölümün birinci alt kısmında Riemann manifoldları ve bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci alt kısmında ise hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili literatürde yer alan temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Bu bölümün ilk kısmında; hemen hemen α-kosimplektik yapılar ele alınmıştır. İkinci kısmında, temel eğrilik özellikleri hemen hemen α-kosimplektik manifold üzerinde verilmiştir. Üçüncü kısmında ise bazı paralel tensör alanları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, h tensör alanının η-paralel olması durumunda bazı ilave şartlarda ortaya koyulduğunda karşımıza çıkan geometri çalışılmıştır. Ayrıca bazı belli tensör alanları ile de ilgilenilmiş olup, bazı sonuçlar verilmiştir. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha\wedge\eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir düzgün fonksiyondur. Birinci kısımda, hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerinde h tensör alanının η-paralelliği verilmiştir. İkinci kısımda, ϕh tensör alanının η-paralelliği incelenmiştir. Üçüncü kısımda, τ torsiyon tensör alanının bazı paralellik şartları araştırılmış ve bazı sonuçlar verilmiştir.

Son bölümde, belli bazı flat koşulları sağlayan hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ele alınmıştır. Özellikle bu flat durumlar için η-paralel tensör alanlarının manifold yapısı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Birinci kısımda, konformal flat hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar araştırılmıştır. İkinci kısımda, projektif flat hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar çalışılmıştır. Üçüncü kısımda ise konsirküler flat hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar incelenmiştir. Üçüncü kısım sonunda hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerinde genel bir örnek inşa edilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma konumuzla ilgili olan temel tamımlar ve kavramlar verilmiştir. Bu tanımlar ve kavramlar manifold teori alanından alınmıştır.

2.1 Manifoldlar

Bu kısımda, daha sonraki bölümlerde kullanılacak manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1.1 Riemann Manifoldları

Bu alt kısımda, Riemann manifoldların temel kavramları ele alınacak ve önemli özellikleriyle tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1.1 M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow C^\infty(M^n,\mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'neill 1983).

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.2 M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\overset{\text{2-lineer}}{\longrightarrow} \chi(M^n) \\ (X,Y) &\longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\ f, g \in C^\infty(M^n,\mathbb{R})$, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(2) $\nabla_{fX+gY} Z = f\ \nabla_X Z + g\ \nabla_Y Z$,

(3) $\nabla_X(f\ Y) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.3 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.4 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \chi(M^n) \\ R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &- \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1, 3)$-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(2) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,

(3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

(4) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$,

özelliklerini sağlar (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1.1 (M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ konneksiyonu M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu, E, (1.1)-tipli bir tensör alanı, F simetrik bir tensör alanı ve G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y),$$

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z),\ g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z),$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.5 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.6 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir.

Bundan başka, $(0,2)$-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

eşitliği ile verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.7 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skalar eğriliği denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.8 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel yani, $\nabla R = 0$ ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.9 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1 'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel (konformal flat) denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.10 (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} nin $(1,3)$-tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C, M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \tfrac{1}{2n-1}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y - g(X,Z)QY \\ &\quad + g(Y,Z)QX] + \tfrac{r}{2n(2n-1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere $(c = \operatorname{div} C)$,

$$c(X,Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \tfrac{1}{2(2n-1)}\left[(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X\right]$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.11 (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X, Y, Z vektör alanları için M^{2n+1} nin $(1,3)$-tipli konsirküler eğrilik tensör alanı $\overline{C}$ ve projektif eğrilik tensör alanı P,

$$\overline{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \tfrac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right], \tag{2.4}$$

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \tfrac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right], \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S Ricci tensörü ve $r = tr(S)$ skalar eğriliktir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.12 (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1}üzerinde tüm keyfi X, Y vektör alanları için, bir (M, g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y).R = 0, \tag{2.6}$$

şartını sağlıyorsa (M^{2n+1}, g) bir yarı simetrik uzaydır denir (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.1.1.1 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $c = 0$ olmasıdır (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.1.1.2 (M^n, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X,Y)Z = k\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \tag{2.7}$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.13 M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t,p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall\ t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t : P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall\ t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.14 M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup φ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için,

$$(\mathcal{L}_X K)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[K_p - (\varphi_t K)_p\right]$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_X K$ dönüşümüne X yönünde K nın Lie türevi denir ve $\mathcal{L}_X K$ ile gösterilir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.1.2 M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$, ($Y, Z$ herhangi tensör alanları)

(2) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)

(3) $\mathcal{L}_X V = [X, V]$, $V \in \chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.15 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $\mathcal{L}_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano and Kon 1984).

2.1.2 Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.2.1 $(2n+1)$-boyutlu bir manifold M, ϕ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. O halde, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1, \\ \phi^2 X &= -X + \eta(X)\xi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

eşitlikleri geçerli ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.2 M^{2n+1}manifoldu (ϕ, ξ, η) üçlüsüyle birlikte hemen hemen bir değme yapı olsun. O zaman M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.9}$$

biçiminde veriliyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.2.1 M^{2n+1}, (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \tag{2.10}$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.3 M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.4 (M^n, g) bir Riemann manifold ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $w = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise w ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M^n üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.1.2.5 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot *et al.* 2004).

Sonuç 2.1.2.1 Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.1.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.1.2.5 gereğince $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.1.2.6 M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.7 M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX, FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano and Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.1.2.7 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.8 (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.2.2 M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin geçerli olmasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.9 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \ (\Phi, \text{kapalıdır}), \ d\eta = 0 \ (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Teorem 2.1.2.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak 1981).

Tanım 2.1.2.10 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartları geçerli ise M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu denir. $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.1.2.3 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \ \xi' = \alpha\xi, \ \phi' = \phi, \ g' = \frac{1}{\alpha^2}g, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlı homotetik deformasyon yardımıyla M^{2n+1} üzerinde bir (ϕ', ξ', η', g') hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim and Pak 2005).

Teorem 2.1.2.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \ \nabla_X \xi = -\phi^2 X,$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Kenmotsu 1972).

3 HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldların bir altsınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

3.1 Hemen Hemen α-Kosimplektik Yapılar

Bu kısımda hemen hemen α-kosimplektik yapılar için temel literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 3.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Keyfi α reel sayısı ve M^{2n+1} üzerinde herhangi vektör alanları için

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

denklemleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen α-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ durumunda manifold hemen hemen kosimplektik ve $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α-Kenmotsu manifoldudur (Kim and Pak 2005).

Önerme 3.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0 \tag{3.1}$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X - \phi h X \tag{3.2}$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \phi = 0 \tag{3.3}$$

$$(\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \tag{3.4}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right] + g(\phi Y, hX) \tag{3.5}$$

$$\delta\eta = -2\alpha n, \quad \dot{I}z(h) = 0 \tag{3.6}$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = -\alpha\phi^2 \tag{3.7}$$

eşitlikleri geçerlidir (Öztürk 2009).

Yardımcı Teorem 3.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda her X vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

denklemi sağlanır (Blair 2002).

Yardımcı Teorem 3.1.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde $(1,1)$-tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla, $A = -\nabla\xi$ ve $h = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \phi$ biçiminde verilsin. O zaman M^{2n+1} üzerindeki keyfi vektör alanları için,

(a) A ve h simetriktir ve $A\phi + \phi A = -2\alpha\phi$,

(b) $\eta \circ A = 0$, $\eta \circ h = 0$ ve $h = A \circ \phi + \alpha\phi$,

(c) $hA + Ah = -2\alpha h$, $\dot{I}z(A) = -2\alpha n$ ve $\dot{I}z(\phi A) = 0$

ifadeleri sağlanır (Öztürk 2009).

İspat (a) M^{2n+1} de X ve Y vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(AX, Y) &= g(\alpha\phi^2 X + \phi h X, Y) \\ &= -\alpha g(\phi X, \phi Y) - g(X, h\phi Y)) \\ &= g(\alpha\phi^2 X, Y) + g(\phi h Y, X) \\ &= g(AY, X) \end{aligned}$$

dır. Buradan A simetrik bir tensör alanıdır. Özel olarak, $X = \xi$ seçildiğinde $A\xi = 0$ olarak bulunur. Ayrıca, h tensör alanının simetrik olduğu kolayca görülebilir. A tensör alanı için $A\phi = (\alpha\phi^2 + \phi h)\phi$ ve $\phi A = \phi(\alpha\phi^2 + \phi h)$ eşitlikleri yazılır ki bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $A\phi + \phi A = -2\alpha\phi$ eşitliği bulunur.

(b) A tensör alanının tanımı gereğince

$$\begin{aligned} (\eta \circ A)X &= g(-\nabla_X \xi, \xi), \\ 0 &= g(X, \nabla_\xi \xi), \end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde, $(\eta \circ h)$ bileşke ifadesinin sıfıra özdeş olduğu $\mathcal{L}$ Lie türev operatörünün tanımı kullanılarak kolayca bulunur. Bundan başka, (3.2) dekleminden $A\phi = -\alpha\phi + h$ dır. Buradan $h = A\phi + \alpha\phi$ elde edilir.

(c) hA ve Ah bileşke tensör alanları gözönüne alındığında

$$hA = \alpha h\phi^2 + h\phi h, \;\; Ah = \alpha\phi^2 h + \phi h^2$$

yazılır. Burada yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $hA + Ah = 2\alpha\phi^2 h$ olduğu görülür. A ve ϕA tensör alanlarının izleri alınarak (3.6) eşitliği kullanıldığında $\dot{I}z(A) = -2\alpha n$ ve $\dot{I}z(\phi A) = 0$ eşitlikleri elde edilir.

3.2 Temel Eğrilik Özellikleri

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla hemen hemen α-kosimplektik manifold üzerindeki bazı eğrilik özellikleri verilmiştir.

Önerme 3.2.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad +(\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \\ &= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y, \end{aligned} \tag{3.8}$$

denklemi geçerlidir (Öztürk 2009).

İspat R Riemann eğrilik tensörü tanımıdan ve (3.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= \nabla_X(-\alpha\phi^2 Y - \phi hY) - \nabla_Y(-\alpha\phi^2 X - \phi hX) \\ &\quad - (-\alpha\phi^2 [X,Y] - \phi h [X,Y]) \\ &= -\alpha\nabla_X \phi^2 Y - \nabla_X \phi hY + \alpha\nabla_Y \phi^2 X + \nabla_Y \phi hX \\ &\quad + \alpha\phi^2 [X,Y] + \phi h [X,Y] \\ &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 3.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman

$$R(X,\xi)\xi = \alpha^2 \phi^2 X + 2\alpha\phi hX - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X \tag{3.9}$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X,\xi)\xi - \alpha^2 \phi X - 2\alpha hX - \phi h^2 X \tag{3.10}$$

$$R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi = 2\left[\alpha^2\phi^2 X - h^2 X\right] \tag{3.11}$$

$$S(X,\xi) = -2n\alpha^2\eta(X) - (\mathrm{div}(\phi h))X \tag{3.12}$$

$$S(\xi,\xi) = \dot{I}z(l) = -\left[2n\alpha^2 + \dot{I}z(h^2)\right] \tag{3.13}$$

eşitlikleri geçerlidir (Öztürk 2009).

Önerme 3.2.3 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir lokal simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman $\nabla_\xi h = 0$ dır (Pastore and Dileo 2007).

Önerme 3.2.4 Sabit eğrilikli bir hemen hemen Kaehler manifoldun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul manifoldun lokal düzlemsel olmasıdır (Goldberg 1969).

Önerme 3.2.5 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman M^{2n+1} nin α-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır (Kim and Pak 2005).

Şimdi temel manifold tanımımızdaki α sabit reel fonksiyonu yerine M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan bir düzgün fonksiyon seçelim. Bu durumda hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel eğrilik özellikleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\nabla_Y\phi h)X - (\nabla_X\phi h)Y - \alpha\left[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX\right] \\ &\quad + \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\left[\eta(X)Y - \eta(Y)X\right], \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$R(X,\xi)\xi = \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\phi^2 X + 2\alpha\phi hX - h^2X + \phi(\nabla_\xi h)X, \tag{3.15}$$

$$R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi = 2\left[(\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X - h^2 X\right], \tag{3.16}$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X,\xi)\xi - \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\phi X - 2\alpha hX - \phi h^2 X, \tag{3.17}$$

$$S(X,\xi) = -2n\left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\eta(X) - (\mathrm{div}(\phi h))X, \tag{3.18}$$

$$S(\xi,\xi) = -\left[2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \dot{I}z(h^2)\right]. \tag{3.19}$$

Burada $\xi(\alpha)$ ifadesi α düzgün fonksiyonunun ξ vektör alanı yönündeki ∇ konneksiyonuna göre türevidir (Aktan *vd.* 2013).

Örnek 3.2.1 $IR^3(x,y,z)$ standart koordinat sistemi olmak üzere, 3-boyutlu $M \subset IR^3$ manifoldu

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \neq 0\right\}.$$

biçiminde tanımlansın ve M üzerindeki vektör alanları

$$e_1 = e^{z^3}\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^{z^3}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

ile verilsin. $\{e_1, e_2, e_3\}$ cümlesinin M nin her noktasında lineer bağımsız olduğu açıktır. Ayrıca, g Riemann metriği

$$g(e_1,e_1) = g(e_2,e_2) = g(e_3,e_3) = 1, \qquad g(e_1,e_2) = g(e_1,e_3) = g(e_2,e_3) = 0,$$

dır ve

$$g = \frac{1}{e^{2z^3}}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz,$$

tensör çarpımı yardımıyla tanımlansın.

Bundan başka, η 1-formu her keyfi X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, e_3)$ şeklinde ve ϕ $(1,1)$ tensör alanı $\phi(e_1) = e_2$, $\phi(e_2) = -e_1$, $\phi(e_3) = 0$ biçiminde tanımlansın. Bunun yanında, h $(1,1)$ tensör alanı $h(e_1) = -\lambda e_1$, $h(e_2) = \lambda e_2$ ve $h(e_3) = 0$ ile verilsin. O zaman g ve ϕ nin lineer özelliklerinden keyfi vektör alanları için

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)e_3, \qquad \eta(e_3) = 1, \qquad g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

yazılır.

∇, g metriği ile verilen Levi-Civita konneksiyonu olsun. O halde,

$$[e_1, e_3] = -3z^2 e_1, \qquad [e_2, e_3] = -3z^2 e_2, \qquad [e_1, e_2] = 0,$$

dır. Bu hesaplamaları takiben (ϕ, ξ, η, g) dörtlü yapısı kolayca elde edilmiş olur. Böylece bu yapının bir hemen hemen α-kosimplektik yapı olması için Φ 2 temel formunun sıfırdan farklı bileşenlerini kontrol etmek yeterli olacaktır. Bu durumda,

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{1}{e^{2z^3}},$$

ve buradan

$$\Phi = -\frac{1}{e^{2z^3}}(dx \wedge dy), \tag{3.20}$$

dır. Burada $\Phi(e_{1,}e_2) = -1$ ve aksi halde $i \leq j$ için $\Phi(e_{i,}e_j) = 0$ dır. Dolayısıyla Φnin dış türevi tanımı gereğince

$$d\Phi = 6z^2 e^{-2z^3}(dx \wedge dy \wedge dz), \tag{3.21}$$

yazılır ve $\eta = dz$ olduğundan (3.20) ve (3.21) eşitliklerinin yardımıyla

$$d\Phi = -6z^2 \left(\eta \wedge \Phi\right),$$

bulunur. Burada α düzgün fonksiyonu $\alpha(z) = -3z^2$ olarak karşımıza çıkmaktadır. Bundan başka, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensörü hesaplandığında $N_\phi = 0$ dır. Başka bir değişle, bu örnek bize 3-boyutta normal bir hemen hemen α-kosimplektik manifoldun varlığını göstermektedir. Yani, üzerinde çalıştığımız manifold α-kosimplektik manifoldudur.

3.3 Bazı Paralel Tensör Alanları

Bu kısımda, belli bazı özel paralel tensör alanları tanıtılmış ve hemen hemen α-kosimplektik manifold üzerinde bu tensör alanları ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 3.3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \ker\eta$ olmak üzere,

$$g((\nabla_X \eta)\, Y, Z) = 0 \tag{3.22}$$

şartını sağlanıyorsa M^{2n+1} ye η-paraleldir denir (Boeckx 2005).

Tanım 3.3.2 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X \tag{3.23}$$

ise T ye Kodazzi tensör alanı denir (Blair 2002).

Tanım 3.3.3 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X T)\, Y, Z) + g((\nabla_Y T)\, Z, X) + g((\nabla_Z T)\, X, Y) = 0 \tag{3.24}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli paralel tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Tanım 3.3.4 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \ker \eta$ olmak üzere M^{2n+1} üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli T tensör alanı

$$g((\nabla_X T)Y, Z) + g((\nabla_Y T)Z, X) + g((\nabla_Z T)X, Y) = 0 \tag{3.25}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli η-paralel tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Tanım 3.3.5 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir değme metrik manifold olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$g(\tau X, Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) \tag{3.26}$$

eşitliği ile verilen τ tensör alanına torsiyon tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Bu tanımlamaya göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman M^{2n+1} manifoldu için τ torsiyon tensör alanı

$$\tau X = 2\nabla_X \xi, \tag{3.27}$$

dır.

Önerme 3.3.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y &= -\eta(X)\left[\phi lY + \alpha^2\phi Y + 2\alpha hY + \phi h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[-\alpha\phi^2 hX + \phi h^2 X\right] + g((\nabla_X h)Y, \xi)\xi \\ &= \eta(X)(\nabla_\xi h)Y - \eta(Y)\left[-\alpha\phi^2 hX + \phi h^2 X\right] \\ &\quad + g(Y, \alpha hX + \phi h^2 X)\xi,\end{aligned} \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanır. Burada $l = R(., \xi)\xi$ dır (Öztürk 2009).

Önerme 3.3.3 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı η-paralel ve $\nabla_\xi h = 0$ ise o zaman, h tensör alanının karakteristik değerleri sabittir (Öztürk 2009).

Önerme 3.3.4 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X \phi h)Y &= \eta(X)\left[lY - \alpha^2\phi^2 Y - 2\alpha\phi hY + h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[\alpha\phi hX - h^2 X\right] - g(Y, \alpha\phi hX - h^2 X)\xi\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitliği geçerlidir (Öztürk 2009).

Önerme 3.3.5 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \tag{3.30}$$

dir (Öztürk 2009). Benzer olarak, bu iki önermeyi α nın düzgün fonksiyon olması durumunda da verebiliriz:

Önerme 3.3.6 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X \phi h)Y &= \eta(X)\left[lY - (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 Y - 2\alpha\phi hY + h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[\alpha\phi hX - h^2 X\right] - g(Y, \alpha\phi hX - h^2 X)\xi,\end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitliği geçerlidir (Aktan *vd.* 2013). Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir düzgün fonksiyondur.

Önerme 3.3.7 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY, \tag{3.32}$$

dir (Aktan *vd.* 2013). Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir düzgün fonksiyondur.

Ayrıca, α fonksiyonu için h tensör alanının η-paralel olması ile ilgili Önerme 3.3.2 yi aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Önerme 3.3.8 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y &= -\eta(X)\left[\phi lY + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi Y + 2\alpha hY + \phi h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[-\alpha\phi^2 hX + \phi h^2 X\right] + g(Y, \alpha hX + \phi h^2 X)\xi,\end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitliği sağlanır (Aktan *vd.* 2013). Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir düzgün fonksiyondur.

Teorem 3.3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün bir özvektörüdür (Öztürk 2009).

Önerme 3.3.9 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X \phi h)\, Y = \eta(X)\,(\nabla_\xi \phi h)\, Y - \eta(Y)\phi h \nabla_X \xi + g\left((\nabla_X \phi h)\,\xi, Y\right)\xi \tag{3.34}$$

denklemi geçerlidir (Öztürk 2009).

Teorem 3.3.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün bir özvektörüdür (Öztürk 2009).

4 BAZI TENSÖR ŞARTLARINI SAĞLAYAN HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, M^{2n+1} üzerinde α yı $d\alpha \wedge \eta = 0$ biçiminde tanımlanan bir düzgün fonksiyon seçeceğiz. Bu durumda h tensör alanının η-paralel olması durumunda bazı ilave şartlarda ortaya koyulduğunda karşımıza çıkan geometriyi çalışacağız. Ayrıca bazı belli tensör alanları ile de ilgilenilmiş olup, bazı sonuçlar verilmiştir.

4.1 h Tensör Alanının η-Paralelliği

Bu kısımda h tensör alanının η-paralelliği ile ilgileneceğiz. O halde öncelikle Önerme 3.3.8 de verilen (3.33) denkleminin kısaca nasıl elde edildiğini gösterelim. Kabul edelim ki h tensör alanı η-paralel olsun. Bu durumda keyfi bir Z vektörünü tanjant kısmı ile normal kısmının toplamı şeklinde düşünürsek, $Z^T = Z - \eta(Z)\xi$ denklemi ile yazabiliriz. Böylece h tensör alanının tanımında tanjant vektör alanlarını kullanırsak

$$
\begin{aligned}
& g((\nabla_{X^T} h)\, Y^T, Z^T) = 0, \\
& g(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi} h\right)(Y - \eta(Y)\xi), Z - \eta(Z)\xi) = 0, \\
& g((\nabla_X h)\, Y, Z) - \eta(X) g((\nabla_\xi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X h)\, \xi, Z) \\
& -\eta(Z) g((\nabla_X h)\, Y, \xi) + \eta(X)\eta(Y) g((\nabla_\xi h)\, \xi, Z) + \eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_X h)\, \xi, \xi) \\
& +\eta(Z)\eta(X) g((\nabla_\xi h)\, Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_\xi h)\, \xi, \xi) = 0
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Bu son denklem sadeleştirmelerden sonra düzenlenirse

$$
g((\nabla_X h)\, Y, -\phi^2 Z) - \eta(X) g((\nabla_\xi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X h)\, \xi, Z) = 0, \tag{4.1}
$$

denklemi elde edilir. (3.2), (3.4) ve (3.17) eşitlikleri birlikte ele alındığında Önerme 3.3.8 'in temel ifadesi olan

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X h) Y \;\; = \;\; & -\eta(X)\left[\phi l Y + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi Y + 2\alpha h Y + \phi h^2 Y\right] \\
& -\eta(Y)\left[-\alpha\phi^2 h X + \phi h^2 X\right] + g(Y, \alpha h X + \phi h^2 X)\xi,
\end{aligned}
$$

yazılır.

Bu son denklem ışığında, Öztürk tarafından elde edilmiş bazı önerme ve teoremleri α nın sabit fonksiyon olmadığı durumlarda incelemeye başlayalım (Öztürk 2009). M^{2n+1} bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer $\nabla_\xi h = 0$ ve h tensör alanı η-paralel ise o zaman h tensör alanının karakteristik değerleri sabittir. Bu sonuç α nın reel sabit olması durumunda geçerlidir. Fakat $\nabla_\xi h = 0$ özel seçiminden dolayı (Öztürk 2009) de verilen ispat gereğince (4.1) eşitliği gözönüne alındığında α nın $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olması sabit durumda bulunan sonucu değiştirmeyecektir. Yani, h tensörünün bir karakteristik birim vektör alanı $Z \in \mathcal{D}$ olmak üzere, $h(Z) = \lambda Z$ için

$$Z(\lambda) = \eta(Z)\xi(\lambda),$$

ve

$$d\lambda = \xi(\lambda) \otimes \eta,$$

bulunur ki, burada $\nabla_\xi h = 0$ hipotezinden dolayı $d\lambda = 0$ denklemi elde edilir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Önerme 4.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer $\nabla_\xi h = 0$ ve h tensör alanının η-paralel olması durumunda h tensör alanının karakteristik değerleri sabittir. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlı bir düzgün fonksiyondur.

Dağılım üzerinde $Z_i \in \mathcal{D}$ olacak şekilde $\{Z_i\}$, $1 \leq i \leq n$, h tensör alanının bir karakteristik vektör alanı olsun. O halde, $h(Z_i) = \lambda_i Z_i$ olacak şekilde $Z_i \in D(\lambda_i) \subset \mathcal{D}$ şartını sağlayan

$$D(\lambda_i) = \{Z_i : \; h(Z_i) = \lambda_i Z_i\},$$

cümlesinin var olduğunu söyleyebiliriz. ϕ ve h tensörleri ters simetrik şartını sağladığından $h(\phi Z_i) = -\lambda_i \phi Z_i$ dır. M^{2n+1} bağlantılı olduğundan λ_i karakteristik değerleri M^{2n+1} nin tamamında sabit olacaktır. Bir Z_i karakteristik vektör alanı için $h(Z_i) = 0$ olduğunu kabul edelim. (3.33) ve $\nabla_\xi h = 0$ hipotezlerinden

$$(\nabla_\xi h)Z_i = -\phi R(Z_i, \xi)\xi - \alpha^2 \phi Z_i - 2\alpha h Z_i - \phi h^2 Z_i$$
$$g(\phi R(Z_i, \xi)\xi, \phi Z_i) = -(\alpha^2 + \xi(\alpha)),$$

bulunur. Bu son eşitlikten kesit eğriliği fonksiyonu $K(\xi, Z_i) = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ elde edilir. Dolayısıyla $h(Z_i)$ kesinlikle sıfırdan farklı olmak zorundadır. Yani hipotezimizle çelişir.

Burada $\xi(\alpha) = 0$ yani, özel olarak α, ξ vektör alanı boyunca sabit seçilirse aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Teorem 4.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifoldu h tensör alanına göre η-paralel, $\nabla_\xi h = 0$ ve α, ξ vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer ξ vektör alanını ihtiva eden bütün düzlemlerin kesit eğrilikleri en az bir noktada $(-\alpha^2)$ değerinden farklı ise o zaman, h tensör alanı $\mathcal{D}$ dağılımı üzerinde sıfırdan farklı karakteristik değerlere sahiptir.

Hatırlatma 4.1.1 ξ vektör alanını ihtiva eden bütün düzlemlerin kesit eğrilikleri en az bir noktada $(-\alpha^2)$ değerine eşit olduğunu kabul edelim. O halde, bir birim vektör alanı $Z \in \mathcal{D}$ olmak üzere, (3.17) eşitliğinden dolayı

$$\left[-(\alpha^2 + \xi(\alpha)) - g(h^2X, X)\right] = -(\alpha^2 + \xi(\alpha)),$$

yazılır. Özel olarak $\xi(\alpha) = 0$ için $\dot{I}z(h^2) = 0$ eşitliğinden $h = 0$ bulunur. Demek ki hipotezdeki kabul ettiğimiz bu şart h tensör alanının sıfırdan farklı olmasını garanti etmek için koyulmuştur.

Aşağıda verilen lemma α dan bağımsız bir şekilde elde edilebilir:

Lemma 4.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bundan başka, $\mathcal{D}$ dağılımı üzerinde h tensör alanının karakteristik vektör uzayı tamamen $D(\lambda) \oplus D(-\lambda)$ direkt toplamından oluşsun. Bu durumda,

$$\lambda^2(I - \eta \otimes \xi) = h^2, \tag{4.2}$$

denklemi sağlanır.

İspat M^{2n+1} üzerinde h tensörünün $Z^T = Z - \eta(Z)\xi$ vektör alanına karşılık gelen karakteristik değeri λ olsun. Bu durumda,

$$h^2Z^T = \lambda^2 Z^T,$$

ve

$$\lambda^2(Z - \eta(Z)\xi) = h^2Z,$$

bulunur. Bu nedenle (4.2) denklemine ulaşırız. Bu da istenen sonuç olacaktır.

Gelecek teorem ispatında kullanacağımız yardımcı teorem aşağıda verilmiştir:

Lemma 4.1.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman

$$-(\nabla_X \phi h)Y = (\nabla_X h)\phi Y + h(\nabla_X \phi)Y, \tag{4.3}$$

eşitliği M^{2n+1} üzerinde keyfi vektör alanları için sağlanır (Blair 2002).

Ayrıca, Olszak ve Dacko bir hemen hemen kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıya sahip olma şartını araştırmışlar ve daha sonra Pastore ve Falcitelli ise bu şartı hemen hemen Kenmotsu manifoldlara genişletmiştir (Olszak and Dacko 1998, Pastore and Falcitelli 2007). Biz de bu şartı benzer olarak hemen α-kosimplektik manifold için de verebiliriz:

Önerme 4.1.2 Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi AX, \tag{4.4}$$

denkleminin sağlamasıdır. Burada $AX = \phi hX$ dır (Olszak and Dacko 1998).

Önerme 4.1.3 Bir hemen hemen α-kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi AX, \tag{4.5}$$

dır. Burada $AX = \alpha\phi^2 X + \phi hX$ dır (Pastore and Falcitelli 2007).

Önerme 4.1.4 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & g(R_{\xi X}Y, Z) - g(R_{\xi X}\phi Y, \phi Z) + g(R_{\xi\phi X}Y, \phi Z) + g(R_{\xi\phi X}\phi Y, Z) \\ = \; & 2(\nabla_{hX}\Phi)(Y, Z) + 2(\alpha^2 + \xi(\alpha))\left[\eta(Y)g(X, Z) - \eta(Z)g(X, Y)\right] \\ & -2\alpha\left[\eta(Y)g(\phi hX, Z) - \eta(Z)g(\phi hX, Y)\right], \end{aligned} \tag{4.6}$$

denklemi gerçeklenir (Öztürk 2009).

Yukarıdaki önermeler ışığında, α nın dif.bilir. bir fonksiyon olması durumunda Kaehler yapıyla ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold, $\nabla_\xi h = 0$ ve ξ vektör alanını ihtiva eden bütün düzlemlerin kesit eğrilikleri en az bir noktada $(-\alpha^2)$ değerinden farklı olsun. Eğer h tensör alanı η paralel ise o zaman, $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldları Kaehler yapıya sahiptir. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlı bir düzgün fonksiyondur.

İspat $\mathcal{D}$ dağılımından X^T, Y^T ve Z^T vektör alanlarını keyfi olarak seçelim. (3.14), (3.33) ve (4.5) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa

$$g(R(Y^T, Z^T)\xi, X^T) = g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T - (\nabla_{Z^T}\phi)Y^T, hX^T) = g(R(\xi, X^T)Y^T, Z^T),$$

ve

$$\begin{aligned} g(R(\xi, \phi X^T)Y^T, \phi Z^T) &= g((\nabla_{Y^T}\phi)\phi Z^T - (\nabla_{\phi Z^T}\phi)Y^T, h\phi X^T), \\ g(R(\xi, \phi X^T)\phi Y^T, Z^T) &= g((\nabla_{\phi Y^T}\phi)Z^T - (\nabla_{\phi Z^T}\phi)\phi Y^T, h\phi X^T), \\ -g(R(\xi, X^T)\phi Y^T, \phi Z^T) &= -g((\nabla_{\phi Y^T}\phi)\phi Z^T - (\nabla_{\phi Z^T}\phi)\phi Y^T, hX^T), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son üç denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & g(R(\xi, X^T)Y^T, Z^T) - g(R(\xi, X^T)\phi Y^T, \phi Z^T) + g(R(\xi, \phi X^T)Y^T, \phi Z^T) \\ & + g(R(\xi, \phi X^T)\phi Y^T, Z^T) = g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, hX^T) - g((\nabla_{Z^T}\phi)Y^T, hX^T) \\ & - g((\nabla_{\phi Y^T}\phi)\phi Z^T, hX^T) + g((\nabla_{\phi Z^T}\phi)\phi Y^T, hX^T) + g((\nabla_{Y^T}\phi)\phi Z^T, h\phi X^T) \\ & - g((\nabla_{\phi Z^T}\phi)Y^T, h\phi X^T) + g((\nabla_{\phi Y^T}\phi)Z^T, h\phi X^T) - g((\nabla_{\phi Z^T}\phi)\phi Y^T, h\phi X^T), \end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılır. Buna ilaveten her X ve Y vektör alanı için

$$(\nabla_{X^T}\phi)\phi Y^T = \nabla_{X^T}\phi^2 Y^T - \phi\nabla_{X^T}\phi Y^T, \tag{4.8}$$

dır. Burada $\nabla_{X^T}\phi^2 Y^T = -\nabla_{X^T} Y^T$ dır. Bu durumda (4.8) denkleminin her iki tarafı Z^T ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_{X^T}\phi)\phi Y^T, Z^T) &= -g(\nabla_{X^T}Y^T, Z^T) - g(\phi\nabla_{X^T}\phi Y^T, Z^T) \\ &= -g(\phi\nabla_{X^T}Y^T, \phi Z^T) + g(\nabla_{X^T}\phi Y^T, \phi Z^T) \\ &= g((\nabla_{X^T}\phi)Y^T, \phi Z^T) \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. O halde, (4.9) denklemi gözönüne alındığında

$$g((\nabla_{X^T}\phi)Y^T, Z^T) = -g((\nabla_{\phi X^T}\phi)\phi Y^T, Z^T), \tag{4.10}$$

yazılır. (4.9), (4.10), (4.7)ve (4.6) birlikte hesaplanırsa

$$g(Y^T, (\nabla_{hX^T}\phi)Z^T) = 2[g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, hX^T) - g((\nabla_{Z^T}\phi)Y^T, hX^T)], \tag{4.11}$$

elde edilir. h tensörü $\mathcal{D}$ dağılımı üzerinde dejenere olmadığından h tensörünün $\mathcal{D}$ üzerinde tersi mevcuttur. Bu durumda (4.11) denklemininde h tensörüne h^{-1} tensörünü uygularsak

$$g(Y^T, (\nabla_{X^T}\phi)Z^T) = 2[g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, X^T) - g((\nabla_{Z^T}\phi)Y^T, X^T)], \tag{4.12}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& g((\nabla_{X^T}\phi)Y^T, Z^T) + g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, X^T) + g((\nabla_{Z^T}\phi)X^T, Y^T) \\
= \; & -2[g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, X^T) - g((\nabla_{Z^T}\phi)Y^T, X^T) \\
& + g((\nabla_{Z^T}\phi)X^T, Y^T) - g((\nabla_{X^T}\phi)Z^T, Y^T) \\
& + g((\nabla_{Z^T}\phi)Y^T, X^T) - g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, X^T)] \\
= \; & 2[g((\nabla_{Z^T}\phi)X^T, Y^T) - g((\nabla_{X^T}\phi)Z^T, Y^T)],
\end{aligned} \tag{4.13}$$

denklemine ulaşır. Ayrıca,

$$d\Phi(X^T, Y^T, Z^T) = 2\alpha(\eta(X^T)\Phi(Y^T, Z^T) + \eta(Z^T)\Phi(X^T, Y^T) + \eta(Y^T)\Phi(Z^T, X^T)) = 0,$$

olduğundan

$$g((\nabla_{Z^T}\phi)X^T, Y^T) = g((\nabla_{X^T}\phi)Z^T, Y^T), \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) denklemi ve ϕ nin ters simetrik özelliğinden

$$g((\nabla_{Y^T}\phi)Z^T, X^T) = 0,$$

yazılır. Tanjant vektör alanları yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y\phi)Z &= [g(Z, hY) - \alpha g(\phi Z, Y)]\xi - \eta(Z)[\alpha\phi Y + hY] \\
&= -g(\phi AY, Z)\xi + \eta(Z)\phi AY,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.4) eşitliğinden dolayı ispat tamamlanır. Burada yapılam tüm hesaplamalarda α nın dif.bilir. fonksiyon olmasından kaynaklanan kalıntı ifadeleri sadeleşmiştir ve Öztürk tarafından daha önce elde edilen sonuç yeniden bu ek şartlarla bulunmuştur (Öztürk 2009).

4.2 ϕh Tensör Alanının η-Paralelliği

Bu kısımda temel manifold yapımızın üzerinde $(\phi \circ h)$ tensörünün η-paralel olması durumunu inceleyeceğiz.

Şimdi, literatür bilgisinde verdiğimiz Önerme 3.3.6 ve Önerme 3.3.7 önermelerine biraz yakından bakalım. Öncelikle ϕh tensörünün η-paralel olduğunu varsayalım. Buna göre, hesaplamaları h tensör alanına benzer şekilde yapalım. O halde, keyfi vektör alanlarının tanjant kısımları için

$$\begin{aligned}
0 &= g((\nabla_{X^T}\phi h)\, Y^T, Z^T) \\
&= g((\nabla_X \phi h)\, Y, Z) - \eta(X) g((\nabla_\xi \phi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X \phi h)\, \xi, Z) \\
&\quad -\eta(Z) g((\nabla_X \phi h)\, Y, \xi) + \eta(X)\eta(Y) g((\nabla_\xi \phi h)\, \xi, Z) + \eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_X \phi h)\, \xi, \xi) \\
&\quad +\eta(Z)\eta(X) g((\nabla_\xi \phi h)\, Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_\xi \phi h)\, \xi, \xi),
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son denklem düzenlenir ve tüm sadeleştirmeler yapılırsa

$$(\nabla_X \phi h) Y = \eta(X)\, (\nabla_\xi \phi h)\, Y - \eta(Y) \left[\alpha \phi h X - h^2 X\right] - g(Y, \alpha \phi h X - h^2 X)\xi,$$

bulunur. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlı bir diferensiyellenebilir fonksiyon olarak seçilmiştir. Dolayısıyla (3.31) denklemi elde edilir. Böylece $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold için (3.32) eşitliğinin nasıl elde edildiğine bakalım. (3.14) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= (\alpha^2 + \xi(\alpha)\, [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha\, [\eta(X)\phi h Y - \alpha\eta(Y)\phi h X] \\
&\quad -\eta(X)\, (\nabla_\xi \phi h)\, Y + \eta(Y)\, [\alpha \phi h X - h^2 X] + g(Y, \alpha \phi h X - h^2 X)\xi \\
&\quad +\eta(Y)\, (\nabla_\xi \phi h)\, X - \eta(X)\, [\alpha \phi h Y - h^2 Y] - g(X, \alpha \phi h Y - h^2 Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik sadeleştirilirse

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= -\eta(X)lY + \eta(Y)lX + \eta(X)(\alpha^2 + \xi(\alpha)\phi^2 Y \\ &\quad -\eta(Y)(\alpha^2 + \xi(\alpha)\phi^2 X + \eta(X)(\alpha^2 + \xi(\alpha)Y \\ &\quad -\eta(Y)(\alpha^2 + \xi(\alpha)X, \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse (3.32) eşitliği bulunur. Böylece Ricci operatörü ile ilgili aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 4.2.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün bir özvektörüdür.

İspat $\{E_1, \ldots, E_{2n}, \xi\}$, tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki bir ortonormal baz olmak üzere (3.32) denkleminin her iki tarafını keyfi W vektör alanı ile iç çarpalım. Bu durumda, $X = W = E_i, 1 \leq i \leq 2n+1$ için, (3.32) denklemine kontraksiyon yapıldığında

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(E_i,Y)\xi, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[\eta(Y)g(lE_i, E_i) - \eta(E_i)g(lY, E_i)\right],$$

ve

$$S(\xi,\xi) = -\left[2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \dot{I}z(h^2)\right] = \sum_{i=1}^{2n+1} g(lE_i, E_i),$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$Q\xi = \dot{I}z(l)\xi$$

elde edilir. Burada elde edilen sonuç α nın reel sabit seçiminde olduğu gibi bir düzgün fonksiyon olduğunda da geçerlidir. Yani elde edilen sonuç yine α dan bağımsızdır.

4.3 τ Tensör Alanının Paralellikleri

Bu kısımda, Tanım **3.3.5** de verilen (3.26) denklemi yardımıyla hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerinde belli bazı paralel tensör alanları incelenecektir. Öncelikle hesaplamalara geçmeden ispatlarda temel olarak kullanacağımız önermeleri ve teoremi verelim:

Önerme 4.3.1 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman

(i) $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,

(ii) $\alpha=0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu total geodezik veya $\alpha\neq 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter şart h tensör alanının özdeş olarak sıfır olmasıdır (Kim and Pak 2005).

Önerme 4.3.2 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, M^{2n+1} manifoldunun α-kosimplektik yapıya sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve h tensör alanının özdeş olarak sıfır olmasıdır (Kim and Pak 2005).

Önerme 4.3.3 Bir hemen hemen kosimplektik manifold bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımı olması için gerek ve yeter şart h tensör alanının özdeş olarak sıfır olmasıdır (Kim and Pak 2007).

İlk olarak, τ torsiyon tensörü olarak adlandırılan tensör alanının tanımını ve Lie türev tanımını birlikte gözönüne alalım. Bu durumda, keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) &= \mathcal{L}_\xi g(X,Y)+g(\mathcal{L}_\xi X,Y)-g(X,\mathcal{L}_\xi Y)\\ &= g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi)\\ &= 2g(-\alpha\phi^2X-\phi hX,Y),\\ &= 2\nabla_X\xi,\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, τ tensörünün paralelliğini araştıralım. Gerçekten, τ tensör alanının paralel olması keyfi X ve Y vektör alanları için $(\nabla_X\tau)Y=0$ denkleminin sağlaması anlamındadır. Bu denklem kovaryant türev tanımından

$$\begin{aligned}(\nabla_X\tau)Y &= -\alpha\left[\alpha\eta(Y)X-\alpha\eta(Y)\eta(X)\xi-\eta(Y)\phi hX+\alpha g(Y,X)\xi\right.\\ &\quad\left.-\alpha\eta(Y)\eta(X)\xi-g(Y,\phi hX)\xi\right]-\nabla_X\phi hY+\phi h(\nabla_XY)\\ &= 0,\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $Y=\xi$ seçildiğinde

$$0=(\alpha^2+\xi(\alpha))\phi^2X+2\alpha\phi hX-h^2X,$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafının izi alınırsa

$$0 = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n - \dot{I}z(h^2),$$

bulunur. Burada $\dot{I}z(\phi h) = 0$ olduğu açıktır. Özel olarak, $\xi(\alpha) = 0$ şartı altında yukarıdaki denklemin sağlaması için h ve α aynı anda sıfır olmalıdır. Bu nedenle, Önerme 4.3.3. den aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı paralel ve α, ξ vektör alanı boyunca paralel ise o zaman, M^{2n+1} bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımıdır.Bundan başka,

τ tensör alanının η-paralellik şartı üzerinde duralım. Keyfi bir vektör alanı veya onun tanjant kısımları için

$$g((\nabla_{X^T}\tau)\,Y^T, Z^T) = 0,$$

yazılır. Buradan

$$(\nabla_X\tau)Y = \eta(X)(\nabla_\xi\tau)Y + \eta(Y)(\nabla_X\tau)\xi + g\left((\nabla_X\tau)\,Y, \xi\right)\xi \tag{4.16}$$

$$(\nabla_X\tau)Y = -2\alpha\eta(Y)\nabla_X\xi - 2\alpha\eta(Y)g(\nabla_X\xi, Y)\xi - 2\left(\nabla_X\phi h\right)Y \tag{4.17}$$

$$(\nabla_X\tau)\xi = -2\alpha\nabla_X\xi + 2\phi h\nabla_X\xi \tag{4.18}$$

$$(\nabla_\xi\tau)Y = -2\left(\nabla_\xi\phi h\right)Y \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.16), (4.17), (4.18) ve (4.19) birlikte hesaba katılırsa aşağıdaki önermede verilen (4.20) elde edilir:

Önerme 4.3.4 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$\left(\nabla_X\phi h\right)Y = \eta(X)\left(\nabla_\xi\phi h\right)Y - \eta(Y)\phi h\nabla_X\xi + g\left(\left(\nabla_X\phi h\right)\xi, Y\right)\xi \tag{4.20}$$

denklemi geçerlidir.

Son elde ettiğimiz (4.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned}(\nabla_Y\phi h)X - (\nabla_X\phi h)Y &= \eta(Y)\left(\nabla_\xi\phi h\right)X - \eta(X)\phi h\nabla_Y\xi \\ &\quad -\eta(X)\left(\nabla_\xi\phi h\right)Y + \eta(Y)\phi h\nabla_X\xi\end{aligned} \tag{4.21}$$

yazılabilir. (3.14), (3.17) ve (4.21) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \eta(Y)\left[-\phi^2 lX - (\alpha^2+\xi(\alpha))\phi^2 X - 2\alpha\phi hX - \phi^2 h^2 X\right] \\
&\quad -\eta(X)\left[-\phi^2 lY - (\alpha^2+\xi(\alpha))\phi^2 Y - 2\alpha\phi hY - \phi^2 h^2 Y\right] \\
&\quad -\eta(X)\phi h(-\alpha\phi^2 Y - \phi hY) + \eta(Y)\phi h(-\alpha\phi^2 X - \phi hX) \\
&\quad +(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(X)Y - (\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(Y)X \\
&\quad -\alpha\eta(X)\phi hY + \alpha\eta(Y)\phi hX,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklem düzenlenir ve sadeleştirilirse

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY$$

sonucuna ulaşılır. Bu son eşitliğe Teorem 4.2.1 de olduğu gibi kontraksiyon yapıldığında aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.2 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün bir özvektörüdür. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha\wedge\eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir düzgün fonksiyondur.

Son olarak, M^{2n+1} üzerinde τ tensör alanının devirli paralel ve devirli η-paralel şartlarını araştıralım. Keyfi vektör alanları için τ tensörünün devirli paralel şartını sağladığını kabul edelim. Yani,

$$0 = g((\nabla_X\tau)Y,Z) + g((\nabla_Y\tau)Z,X) + g((\nabla_Z\tau)X,Y), \tag{4.22}$$

dır. (4.22) denkleminde yer alan ilk terim $g((\nabla_X\tau)Y,Z)$ ifadesini ve sırasıyla, diğer iki terimi gözönüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X\tau)Y,Z) &= -2\alpha g(((\nabla_X\phi^2)Y,Z) - 2g((\nabla_X\phi h)Y,Z) \\
&= -2\alpha\left[\eta(Y)g(\nabla_X\xi,Z) + \eta(Z)g(Y,\nabla_X\xi)\right] - 2g((\nabla_X\phi h)Y,Z),
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemin yardımıyla diğer iki terimi de benzer şekilde hesapladığımızda bu üç terimin toplamı

$$\begin{aligned}
0 &= -2\alpha\left[\eta(X)g(\nabla_Z\xi,Y) + \eta(Y)g(X,\nabla_Z\xi)\right] \\
&\quad -2g((\nabla_X\phi h)Y,Z) - 2g((\nabla_Y\phi h)Z,X) - 2g((\nabla_Z\phi h)X,Y),
\end{aligned}$$

denklemiyle gösterilir. Burada $Z=\xi$ seçilirse

$$(\nabla_\xi h)X = 4\alpha hX + 2(\alpha^2+\xi(\alpha))\phi X + 2\phi h^2 X,$$

yazılır. Bu son denklemde X keyfi vektör alanı yerine ϕX alır ve (3.17) denklemini kullanırsak

$$lX = 3(\alpha^2+\xi(\alpha))\phi^2 X + 6\alpha\phi hX - 3h^2X,$$

elde edilir. Burada (3.15) denkleminin kullanılması ve her iki tarafın izi alındıktan sonra

$$-2(\alpha^2+\xi(\alpha))n - \dot{I}z(h^2) = 0,$$

bulunur. Bu son denklemin sol tarafının özdeş olarak sıfır olması için gerek ve yeter koşul α ve h nın sıfır olmasıdır. Bunun için $\xi(\alpha)=0$ alarak α nın ξ boyunca paralel olduğunu kabul etmeliyiz. Bu nedenle Önerme 4.3.3 yardımıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.3 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı devirli paralel ve α, ξ vektör alanı boyunca paralel ise o zaman, M^{2n+1} bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımıdır.

Şimdi, M^{2n+1} üzerinde τ tensör alanının devirli η-paralel şartını inceleyelim. Keyfi vektör alanları için τ tensörünün devirli η-paralel şartını sağladığını kabul edelim. Yani,

$$0 = g((\nabla_{X^T}\tau)Y^T,Z^T) + g((\nabla_{Y^T}\tau)Z^T,X^T) + g((\nabla_{Z^T}\tau)X^T,Y^T),$$

dır. Yukarıdaki denklemde bulunan üç ifadeyi ayrı ayrı hesaplarsak,

$$\begin{aligned} g((\nabla_{X^T}\tau)Y^T,Z^T) &= g((\nabla_X\tau)Y,Z) - \eta(X)g((\nabla_\xi\tau)Y,Z) \\ &\quad -\eta(Y)g((\nabla_X\tau)\xi,Z) - \eta(Z)g((\nabla_X\tau)Y,\xi), \end{aligned} \tag{4.23}$$

yazılır. (4.23) denklemindeki terimler ayrı ayrı ele alınırsa,

$$\begin{aligned} &g((\nabla_\xi\tau)Y,\xi)=0,\ g((\nabla_X\tau)\xi,\xi)=0,\\ &g((\nabla_\xi\tau)\xi,\xi)=0,\ (\nabla_\xi\tau)Y = -2(\nabla_\xi\phi h)Y,\\ &(\nabla_X\tau)Y = \eta(X)(\nabla_\xi\tau)Y + \eta(Y)(\nabla_X\tau)\xi + g((\nabla_X\tau)Y,\xi)\xi,\\ &(\nabla_X\tau)Y = -2\alpha\eta(Y)\nabla_X\xi - 2\alpha\eta(Y)g(\nabla_X\xi,Y)\xi - 2(\nabla_X\phi h)Y,\\ &(\nabla_X\tau)\xi = -2\alpha\nabla_X\xi + 2\phi h\nabla_X\xi, \end{aligned}$$

elde edilir.Bu son elde ettiğimiz denklemler (4.23) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\underset{X,Y,Z}{\oplus} g((\nabla_X \tau)Y, Z) - \eta(X) \underset{Y,Z,\xi}{\oplus} g((\nabla_Y \tau)Z, \xi) \\ &-\eta(Y) \underset{Z,X,\xi}{\oplus} g((\nabla_Z \tau)X, \xi) - \eta(Z) \underset{X,Y,\xi}{\oplus} g((\nabla_X \tau)Y, \xi) = 0,\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X, Y, Z vektör alanları üzerindeki devirli toplamdır. Bu devirli toplama τ tensörünün tanımı uygulanır, daha sonra kontraksiyon yapılır ve düzenlenirse

$$2(\mathrm{div}(\phi h))X - \eta(X)\left[\dot{I}z(l) + 2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + 3\dot{I}z(h^2)\right] = 0,$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$Q\xi = \left[-\frac{1}{2}\dot{I}z(l) - \frac{3}{2}\dot{I}z(h^2) - 3n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\right]\xi,$$

yazılır. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.4 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı devirli η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün bir özvektörüdür.

5 BAZI FLAT HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde belli bazı flat koşulları sağlayan hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ele alınacaktır. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Özellikle, Weyl konformal, konsirküler ve projektif hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar çalışılmıştır. Belli bazı η-paralel tensör alanlarının manifold yapısı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Bölüm sonunda α ya bağlı genel bir örnek inşa edilmiştir.

5.1 Konformal Flat Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda araştırmamıza konformal flat durumla başlayalım. (2.3) denklemiyle verilen konformal eğrilik tensörü keyfi vektör alanları için özdeş olarak sıfır olduğunda konformal flat olarak adlandırılır. O halde, M^{2n+1} üzerinde $C(X,Y)Z = 0$ şartı sağlanıyorsa manifoldumuza konformal flat hemen hemen α-kosimplektik manifold denir.

Teorem 5.1.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir konformal flat hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} üzerinde ϕh tensör alanına göre η-paralellik özelliği sağlanıyor ve α fonksiyonu ξ vektör alanı boyunca paralel ise o zaman M^{2n+1} sıfır skalar eğriliğine sahiptir. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlı bir düzgün fonksiyondur.

İspat Öncelikle $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen α-kosimplektik manifoldunun konformal flat yani, $C(X,Y)Z = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde,(2.3) denklemi gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \tfrac{1}{2n-1}\left[g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + S(Y,Z)X\right. \\ &\quad \left. -S(X,Z)Y\right] + \tfrac{r}{2n(2n-1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right], \end{aligned} \tag{5.1}$$

yazılır. (5.1) eşitliğinin her iki tarafı keyfi W vektör alanına göre iç çarpıldığında

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= \tfrac{1}{2n-1}[g(Y,Z)g(QX,W) - g(X,Z)g(QY,W) \\ &\quad +S(Y,Z)g(X,W) - S(X,Z)g(Y,W)] \\ &\quad +\tfrac{r}{2n(2n-1)}\left[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right], \end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitliği elde edilir. Burada $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ dır. Bu hesaplamayı takiben (5.2) eşitliğinde W yerine ξ vektör alanını alırsak, (5.2) eşitliği

$$\begin{aligned} \eta(R(X,Y)Z) &= \tfrac{1}{2n-1}[g(Y,Z)S(X,\xi) - g(X,Z)S(Y,\xi) \\ &\quad +\eta(X)S(Y,Z) - \eta(Y)S(X,Z)] \\ &\quad +\tfrac{r}{2n(2n-1)}\left[\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)\right], \end{aligned} \tag{5.3}$$

formuna gelir. Benzer olarak, (5.3) eşitliğinde $X = \xi$ seçilirse

$$\begin{aligned} \eta(R(\xi,Y)Z) &= \tfrac{1}{2n-1}[g(Y,Z)S(\xi,\xi) - g(\xi,Z)S(Y,\xi) \\ &\quad +\eta(\xi)S(Y,Z) - \eta(Y)S(\xi,Z)] \\ &\quad +\tfrac{r}{2n(2n-1)}\left[\eta(\xi)g(Y,Z) - \eta(Y)g(\xi,Z)\right], \end{aligned} \tag{5.4}$$

bulunur. Şimdi, ek şartlar olarak ϕh tensör alanına göre η-paralellik ve α nın ξ ye göre paralel olma şartlarını gözönüne alalım. Yani, Önerme 3.3.7. ve $\nabla_\xi \alpha = 0$ birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} g(lY,Z) &= \left(\tfrac{tr(l)}{2n-1} + \tfrac{r}{2n(2n-1)}\right) g(Y,Z) + \frac{S(Y,Z)}{2n-1} \\ &\quad - \left(\tfrac{2tr(l)}{2n-1} + \tfrac{r}{2n(2n-1}\right) \eta(Y)\eta(Z). \end{aligned} \tag{5.5}$$

yazılır. Buradan $S(Y,Z)$ çekilirse

$$\begin{aligned} S(Y,Z) &= (2n-1)g(lY,Z) - \left(tr(l) + \frac{r}{2n}\right) g(Y,Z) \\ &\quad + \left(2tr(l) + \frac{r}{2n}\right) \eta(Y)\eta(Z), \end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir. Tanjant uzayın herhengi bir noktasındaki bir ortonormal taban $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, 2n+1$ olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq 2n+1$, $Y = Z = E_i$ için (5.6) eşitliğinin her iki tarafının Y ve Z ye göre kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n+1} S(E_i,E_i) &= (2n-1)\sum_{i=1}^{2n+1} g(lE_i,E_i) - \left(tr(l) + \frac{r}{2n}\right)\sum_{i=1}^{2n+1} g(E_i,E_i) \\ &\quad + \left(2tr(l) + \frac{r}{2n}\right)\sum_{i=1}^{2n+1} \eta(E_i)\eta(E_i), \end{aligned} \tag{5.7}$$

bulunur. (5.7) eşitliği düzenlendiğinde

$$r = (2n-1)S(\xi,\xi) - (2n+1)\left(tr(l) + \frac{r}{2n}\right) + \left(2tr(l) + \frac{r}{2n}\right),$$

yazılır. Bu son denklemden $r = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.2 Projektif Flat Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda ise çalıştığımız manifold yapısı üzerinde projektif eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olması anlamına gelen $P = 0$ durumunu gözönüne alalım. Gerçekten (2.5) denklemiyle verilen projektif eğrilik tensörü keyfi vektör alanları için özdeş olarak sıfır olduğunda projektif flat olarak adlandırılır ve böylece M^{2n+1} üzerinde $P(X,Y)Z = 0$ şartı sağlanıyorsa manifoldumuza projektif flat hemen hemen α-kosimplektik manifoldu denir.

Teorem 5.2.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} bir projektif flat manifold ve α fonksiyonu ξ vektör alanı boyunca paralel ise o zaman M^{2n+1} manifoldu

$$r = (2n+1)S(\xi,\xi) + 2n\dot{I}z(\phi(\nabla_\xi h)),$$

skalar eğriliğine sahiptir. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlı bir düzgün fonksiyondur.

İspat $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifoldu projektif flat yani, $P(X,Y)Z = 0$ olsun. Bu durumda (2.5) eşitliğinin yardımıyla

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right], \tag{5.8}$$

yazılır. (5.8) denkleminin her iki tarafı keyfi W vektör alanına göre iç çarpılırsa

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{2n}\left[g(X,W)S(Y,Z) - g(Y,W)S(X,Z)\right], \tag{5.9}$$

bulunur. Buradan (5.9) eşitliğinde $W = \xi$ alındığında

$$\eta(R(X,Y)Z) = \frac{1}{2n}\left[\eta(X)S(Y,Z) - \eta(Y)S(X,Z)\right], \tag{5.10}$$

elde edilir ki burada $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ dir. Aynı mantıkla tekrardan X vektör alanı yerine ξ seçildiğinde

$$g(R(\xi,Y)Z,\xi) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z) - \eta(Y)S(Z,\xi)\right],$$

yazılır. Riemann eğrilik tensörü tanımı düşünüldüğünde

$$g(R(Z,\xi)\xi,Y) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z) - \eta(Y)S(Z,\xi)\right],$$

olduğu görülür. Burada (3.15) ve (3.18) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= -2n\left[(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,Z)+2\alpha g(\phi Y,hZ)+g(hZ,hY)\right. \\ &\quad \left.+g((\nabla_\xi h)Z,\phi Y)+\tfrac{1}{2n}\eta(Y)(\mathrm{div}(\phi h))Z\right], \end{aligned} \tag{5.11}$$

denklemine ulaşılır. Tanjant uzayın herhengi bir noktasındaki bir ortonormal taban $\{E_i\}$, $i=1,\ldots,2n+1$ olsun. Bu durumda $1\leq i\leq 2n+1$, $Y=Z=E_i$ için (5.11) eşitliğinin her iki tarafının Y ve Z ye göre kontraksiyon yapıldığında $\sum\limits_{i=1}^{2n+1}S(E_i,E_i)=r$, $\dot{I}z(\phi h)=\dot{I}z(h)=0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} r &= -2n\left[\sum_{i=1}^{2n+1}(\alpha^2+\xi(\alpha))g(E_i,E_i)+2\alpha g(\phi E_i,hE_i)+g(hE_i,hE_i)\right. \\ &\quad \left.+g((\nabla_\xi h)E_i,\phi E_i)+\frac{1}{2n}\eta(E_i)(\mathrm{div}(\phi h))E_i\right], \end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}(\phi h))\xi &= \sum_{i=1}^{2n+1}g((\nabla_{E_i}\phi h)\xi,E_i), \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}g(-\phi h(\nabla_{E_i}\xi),E_i), \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}g(-\phi h(-\alpha\phi^2E_i-\phi hE_i),E_i), \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}g(\alpha\phi^3hE_i,E_i)-\sum_{i=1}^{2n+1}g(\phi^2h^2E_i,E_i), \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}-\alpha g(\phi hE_i,E_i)+\sum_{i=1}^{2n+1}g(h^2E_i,E_i), \\ &= \dot{I}z(h^2), \end{aligned}$$

dır. Böylece (5.12) eşitliği düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} r = &\ -2n\left[(\alpha^2+\xi(\alpha))(2n+1)-2\alpha\ \dot{I}z(\phi h)+\dot{I}z(h^2)\right. \\ &\ \left.-\dot{I}z(\phi(\nabla_\xi h))+\tfrac{1}{2n}(\mathrm{div}(\phi h))\xi\right], \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden dolayı $\xi(\alpha)=0$ alınıp, sadeleştirme yapıldığında

$$r=-(2n+1)\left[2n\alpha^2+\dot{I}z(h^2)\right]+2n\dot{I}z(\phi(\nabla_\xi h)),$$

sonucu elde edilir. Bu son denklemde (3.19) eşitliği gözönüne alınırsa istenen sonuca ulaşılır.

Teorem 5.2.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir projektif flat α-kosimplektik manifold olsun. Eğer α fonksiyonu ξ vektör alanı boyunca paralel ise o zaman M^{2n+1} manifoldu bir Einstein manifoldudur.

İspat (2.5) eşitliği gözönüne alınırsa

$$g(R(Z,\xi)\xi, Y) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z) - \eta(Y)S(Z,\xi)\right], \tag{5.13}$$

yazılır. Bundan başka, bir α-kosimplektik manifold keyfi Z vektör alanı için

$$R(Z,\xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\left[\eta(Z)\xi - Z\right],$$

ve

$$S(Z,\xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(Z),$$

eşitliklerini sağlar. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen bir düzgün fonksiyondur. (5.13) eşitliği ve bu son iki denklem birlikte hesaba katılırsa

$$g((\alpha^2 + \xi(\alpha))\left[\eta(Z)\xi - Z\right], Y) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z) + \eta(Y)2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(Z)\right],$$

bulunur. Buradan

$$S(Y,Z) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(Y,Z),$$

elde edilir. Özel olarak, $\xi(\alpha) = 0$ alındığında

$$S(Y,Z) = -2n\alpha^2 g(Y,Z),$$

denklemine ulaşılır. Einstein manifoldun tanımından istenen sonuca ulaşılır.

5.3 Konsirküler Flat Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda da benzer bir metodoloji ile manifold yapısı üzerinde konsirküler eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olması anlamına gelen $\overline{C} = 0$ şartını ele alalım. Gerçekten (2.4) denklemiyle verilen konsirküler eğrilik tensörü keyfi vektör alanları için özdeş olarak sıfır olduğunda konsirküler flat denir ve bu durumda manifoldumuzun üzerinde $\overline{C}(X,Y)Z = 0$ şartı sağlanıyorsa manifoldumuza konsirküler flat hemen hemen α-kosimplektik manifold adı verilir.

Teorem 5.3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir konsirküler hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} üzerinde ϕh tensör alanına göre η-paralellik özelliği sağlanıyorsa o zaman M^{2n+1} manifoldu

$$r = (2n+1)\dot{I}z(l),$$

skalar eğriliğine sahiptir. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlı bir düzgün fonksiyondur.

İspat Öncelikle $\overline{C} = 0$ olduğunu varsayalım. O halde (2.4) eşitliği kullanılırsa

$$R(X,Y)Z = \frac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right], \tag{5.14}$$

bulunur. (5.14) denkleminden

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\right], \tag{5.15}$$

yazılır. Burada $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ dır. (5.15) denkleminde $W = \xi$ alınırsa

$$\eta(R(X,Y)Z) = \frac{r}{2n(2n+1)}\left[\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)\right],$$

ve tekrardan bu son denklemde $X = \xi$ seçildiğinde

$$\eta(R(\xi,Y)Z) = \frac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right]. \tag{5.16}$$

elde edilir. Burada ϕh tensör alanına göre η-paralellik şartı gözönüne alındığında yani, Önerme 3.3.7 yardımıyla

$$S(X,\xi) = \eta(X)\dot{I}z(l), \tag{5.17}$$

bulunur. (5.17) eşitliği (5.16) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\eta(R(\xi,Y)Z) = \frac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right], \tag{5.18}$$

denklemine ulaşılır. Tanjant uzayın herhengi bir noktasındaki bir ortonormal taban $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, 2n+1$ olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq 2n+1$, $Y = Z = E_i$ için (5.18) eşitliğinin her iki tarafının Y ve Z ye göre kontraksiyon yapıldığında

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(\xi,E_i)E_i,\xi) = \tfrac{r}{2n(2n+1)}\left[\sum_{i=1}^{2n+1} g(E_i,E_i) - \sum_{i=1}^{2n+1}\eta(E_i)\eta(E_i)\right],$$

yazılır. Bu son denklem sadeleştirilirse

$$S(\xi,\xi)=\frac{r}{(2n+1)},$$

dır. Burada $S(\xi,\xi)=\dot{I}z(l)$ olduğundan istenen sonuca kolayca ulaşılır.

Şimdi, genel bir hemen hemen α-kosimplektik manifold örneği inşa edelim:

Örnek 5.3.1 $\mathbb{R}^{2n+1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z)$ standart koordinat sistemi ve $M\subset\mathbb{R}^{2n+1}$,

$$M=\left\{(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z)\in\mathbb{R}^{2n+1}:\quad z\neq 0\right\}.$$

biçiminde tanımlı $(2n+1)$-boyutlu bir manifold olsun. Ayrıca, M nin global bazlarını

$$X_i=2z\frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y_i=-\frac{2}{z^3}\frac{\partial}{\partial y_i},\quad \xi=\frac{\partial}{\partial z},\quad i=1,2,\ldots,n$$

şeklinde alalım. Herhangi $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ için bu vektör alanlarının Lie braketleri

$$[X_i,Y_j]=[X_i,X_j]=[Y_i,Y_j]=0,$$

ve

$$[\xi,X_i]=\frac{1}{z}X_i,\qquad [\xi,Y_i]=-\frac{3}{z}Y_i,$$

ile verilsin. Bundan başka, g metriği

$$g=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z^2}dx_i^2+z^6dy_i^2\right)+dz^2,\quad \eta=dz,$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre,

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=-\frac{1}{z^4}\frac{\partial}{\partial y_i},\quad \phi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=z^4\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \phi(\xi)=0,$$

olmak üzere, (ϕ,ξ,η,g) yapısı M bir hemen hemen değme yapısıdır. Öyleyse bu yapının bir hemen hemen α-kosimplektik yapı olup olmadığını araştırmalıyız. Bu durumu kontrol etmek için $d\Phi=2\alpha\left(\eta\wedge\Phi\right)$ eşitliğinin varlığını sorgulamalıyız. Burada seçilen tüm Φ_{ij} ler $\Phi_{ii}=g\left(\phi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right),\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\dfrac{z^2}{4}$ hariç hepsi özdeş olarak sıfırdır. Buna ilaveten,

$$\Phi=\frac{z^2}{4}\sum_{i=1}^{n}(dx_i\wedge dy_i),$$

olduğundan $d\Phi$ dış türevi

$$d\Phi = \frac{1}{2}z(dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{1}{8z}\left(\eta \wedge \Phi\right),$$

ile verilebilir. Sonuç olarak, M manifoldu üzerinde $\alpha(z) = \dfrac{1}{16z}$ olacak şekilde bir $\alpha(z)$ düzgün fonksiyonu mevcuttur. Burada ϕ ye göre Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfırdan farklı olduğu açıktır. Böylece manifold yapısı bir hemen hemen yapıdadır.

6 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yapılan çalışma sonunda görülmüştür ki hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar için özellikle η-paralel ve diğer paralel tensör alanları göz önüne alındığında genel bir sınıflandırma problemi hala açıktır. Genel bir karakterizasyon bazı özel şartlar veya ek ilave durumlar dışında mevcut değildir. Daha sonraki çalışmalarımızda özellikle konformal, projektif ve konsirküler eğrilik tensörlerinin yarı simetriklik şartı ile diğer paralellikler arasındaki ilişkiler araştırılacaktır. Ayrıca, lokal simetrik ve yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar için paralellik şartları yeniden incelenebilir. Bu durumda daha genel sonuçların ortaya çıkması büyük bir olasılıktır. Diğer yandan, Ricci simetrik, Ricci yarı simetrik, D-Konformal tensör, Pseudo simetrik ve Pseudo yarı simetrik gibi özel tensör şartları altında hemen hemen α-kosimplektik yapılar ele alınabilir. Gelecek çalışmalarda temel amacımız ve motivasyonumuz, bu planladığımız tensör alanları ile ilgili çalışmaları hemen hemen α-kosimplektik (k, μ, ν) uzaylarında null şartına bağlı olarak incelemek olacaktır.

7 KAYNAKLAR

Aktan N., Yıldırım M. and Murathan C. (2013). Almost f-Cosymplectic Manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **11:** 775-787.

Bagewadi, S.C. and Venkatesha K.T. (2007). Some Curvature Tensors on a Trans-Sasakian Manifold. *Turkish Journal of Mathematics*, **31:** 111-121.

Bagewadi S.C. and Kumar G.E. (2005). On Irrotational D-Conformal Curvature Tensor. *Novi Sad Journal of Mathematics*, **35:** 85-92.

Bagewadi S. C. ve Venkatesha K.T. (2006). On Pseudo Projective -Recurrent Kenmotsu Manifolds. *Soochow Journal of Mathematics,* **32:** 433-439.

Bang-Yen C. (1973). Geometry of submanifolds. New York, M. Dekker.

Blair D. E. (1970). Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$. *Journal of Differential Geometry*, **4:** 155-167.

Blair D. E. (1976). Contact manifolds in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, New York.

Blair D. E. (1977). Two remarks on contact metric structures. *Tôhoku Mathematical Journal,* **29:** 319-324.

Blair D. E. (2002). Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, 203. Birkhâuser, Boston.

Boeckx E. (2000). A full classification of contact metric (κ, μ)-spaces. *Illinois Journal of Mathematics,* **44:** 212-219.

Boeckx E. and Cho J.T. (2005). η-parallel contact metric spaces. *Differential Geometry and its Applications,* **22:** 275-285.

Boeckx E. and Cho J.T. (2006). Locally symmetric contact metric manifolds. *Monatsh Mathematics,* **148:** 269-281.

Calvaruso G. and Perrone D. (2001). Semi-Symmetric Contact Metric Three-Manifolds. *Yokohama Mathematical Journal,* **49:** 149-161.

Chinea D. and Gonzalez C. (1990). A classification of almost contact metric manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **156:** 15-36.

Dacko P. and Olszak Z. (1998). On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves. *Rend. Matem. Univ. Politec. di Torino,* **56:** 89-103.

Dileo G. and Pastore M. (2007). Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **14:** 343-354.

Dileo G. and Pastore M. (2009). Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions. *Journal of Geometry,* **93:** 46-61.

Dileo G. and Pastore M. (2009). Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η-parallelism. *Differential Geometry and its Applications*, **27:** 671-679.

Goldberg S. I. and Yano K. (1969). Integrability of almost cosymplectic structure, *Pacific J. Math.,* **31:** 373-382.

Goldberg S. I. (1969). Integrability of almost Kaehler manifolds, *Proceedings of the American Math. Soc.,* **21(1)**: 96-100.

Hacısalihoğlu H. H. (1993). Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu H. H. (2000). Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu H. H. ve Ekmekçi N. (2003). Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Janssens D. and Vanhecke L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal,* **4:** 1-27.

Jun J., Chand U. and Pathak G. (2005). On Kenmotsu Manifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society,* **42:** 435-445.

Kenmotsu K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tôhoku Mathematical Journal,* **24:** 93-103.

Kim, T.W. and Pak H.K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica,* **21:** 841-846.

Kim, T.W. and Pak H.K. (2007). Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society,* **44:** 05-613.

Nomizu K. (1968). On Hypersurfaces Satisfying a Certain Condition on the Curvature Tensor. *Tôhoku Mathematical Journal,* **20:** 46-69.

Ogawa Y. (1977). A Condition for a Compact Kaehlerian Space to be Locally Symmetric. *Natural Science Report. Ochanomizu University*, **28:** 21-23.

O'neill B. (1983). Semi Riemannian Geometry, Academic Press, London.

Olszak Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal,* **4:** 239-250.

Olszak Z. (1987). Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves. Journal *Tensor,***46:** 117-124.

Olszak Z. (1989). Locally conformal almost cosymplectic manifolds. *College Mathematical Journal,* **57:** 73-87.

Öztürk, H. (2009). Hemen Hemen α-Kosimplektik (κ, μ, ν)-Uzayları, Doktora Tezi, AKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Öztürk H., Aktan N. and Murathan C. (2010). On α-Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Conditions. *Applied Sciences,* **12:** 115-126.

Öztürk H., Aktan N., Murathan C. and Vanlı A.T. (2014). Almost α-Cosymplectic f-Manifolds. *The Journal of Alexandru Ioan Cuza University*, **60:** 211-226.

Öztürk, H. (2015). On α-Kenmotsu manifolds satisfying flatness conditions. *Journal of Advances in Mathematics,* **11(8):** 5598-5608.

Öztürk, H. (2016). On invariant submanifolds of almost α-Kenmotsu manifolds. *Comptes rendus de l'Acad emie bulgare des Sciences,* **69(3):** 247-258.

Öztürk, H. (2016). Some notes on almost α-cosymplectic manifolds. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra,* **25(1):** 1-12.

Öztürk, H. (2016). On almost α-Kenmotsu manifolds with some tensor fields. *AKU J. Sci. Eng.* **16:** 256-264.

Öztürk, H. (2017). On α-Kenmotsu Manifolds Satisfying Semi-Symmetric Conditions. *Konuralp Journal of Mathematics,* **5(2):** 192-206.

Sabuncuoğlu A. (2006). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.

Sharpe R.W. (1997). Differential Geometry, Graduate Texts in Math., Springer.

Szabó Z. I. (1982). Structure Theorem on Riemannian Spaces Satisfying $R.R = 0$. *Journal of Differential Geometry,* **17:** 531-582.

Tanno S. (1969). The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds. *Tôhoku Mathematical Journal,* **21:** 21-38.

Tanno S. (1969). Isometric Immersion of Sasakian Manifolds in Spheres. *Kodai Mathematical Journal,* **21:** 448-458.

Vaisman I. (1980). Conformal changes of almost contact metric manifolds. *Lecture Notes in Mathematics,* **792:** 435-443.

Yano K. and Kon M. (1984). Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corporation, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	İsmail MISIRLI
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Serik / 05.01.1991
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	0538-4275371/misirli_07@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Serik Lisesi, (2005-2009)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2010-2015)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Cenap Düzgün Başarı Temel Lisesi, 2015-...

Yayınları (SCI ve Diğer):

1. "Almost α-Cosymplectic Manifolds with η-Parallel Tensor Fields" başlıklı çalışma International Journal of Arts and Sciences dergisinde yayına sunulmuştur.

16.FEN.BİL.17 numaralı Proje Kapsamındaki Etkinlikler**:**

1. "Almost α-Cosymplectic Manifolds with η-Parallel Tensor Fields" başlıklı çalışma IJAS Venedik Teknoloji ve Mühendislik Konferansın'da bildiri olarak sunulmuştur (20-23 Haziran 2017).
2. "On Almost α-Cosymplectic Manifolds with Some Tensor Fields" başlıklı çalışma Amasya' da düzenlenen Uluslararası 15. Geometri Sempozyumun'da poster bildiri olarak sunulmuştur (3-6 Temmuz 2017).
3. "On Almost α-Cosymplectic Manifolds with η-Parallel Tensor Fields" başlıklı çalışma İstanbul'da düzenlenen Uluslararası ICAAMM 2017 Konferansın'da poster bildiri olarak sunulmuştur (3-7 Temmuz 2017).