LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ÖZÇELİK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül, 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Özlem ÖZÇELİK

DANIŞMAN
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül, 2017

TEZ ONAY SAYFASI

Özlem ÖZÇELİK tarafından hazırlanan "Lacunary İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/09/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Prof. Dr. Nesip AKTAN
Konya Necmettin Erbakan Üniv. Fen Fak.

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/09/2017

Özlem ÖZÇELİK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Özlem ÖZÇELİK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalıştığımız tez konusu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, kavram, örnek ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, lacunary kuvvetli invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık ile ilgili tanım, kavram ve teoremler verilip, bazı kapsama ilişkileri incelendi. Dördüncü bölümde, invaryant istatistiksel yakınsaklık ve A-invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları ile bu kavramlar arasındaki kapsama bağıntıları verildi. Ayrıca, matris dönüşümleri incelendi. Beşinci bölümde, lacunary istatistiksel invaryant toplanabilme ve kuvvetli lacunary q-invaryant yakınsaklık tanımlarını verilip, bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi. Altıncı bölümde ise, çalışmamız süresince yararlandığımız literatürdeki kaynaklar verildi.

2017, v+46 sayfa

Anahtar Kelimeler : İstatistiksel yakınsaklık, lacunary dizi, invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık ve matris dönüşümü.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON LACUNARY INVARIANT
STATISTICAL CONVERGENCE

Özlem ÖZÇELİK
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, historical development of related notions of the thesis subject was mentioned. In the second chapter, some basic definitions, concepts, examples and theorems related to study were given. In the third chapter, giving definitions, concepts, and theorems related to lacunary strong invariant convergence, invariant statistical convergence and lacunary invariant statistical convergence and some inclusion relations were given. In the fourth chapter, concepts of invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence and inclusion relations between this concepts were given. Also, matrix transformations were investigated. In the fifth chapter, giving concepts of lacunary statistical invariant summability and strong lacunary q-invariant convergence relations between this concepts were investigated. In the sixth chapter, the sources in the literature that we use during our study are given.

2017, v+46 pages

Key Words : Statistical convergence, lacunary sequence, invariant convergence, invariant statistical convergence and matrix transformations.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Özlem ÖZÇELİK

AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
(X, ρ)	Metrik uzay
$\lvert K \rvert$	K kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_k)	Reel sayı dizisi
$\theta = \{k_r\}$	Lacunary dizisi
$S_\sigma - \lim x_k$	(x_k) dizisinin invaryant istatistiksel limiti
$S_{\sigma\theta} - \lim x_k$	(x_k) dizisinin lacunary invaryant istatistiksel limiti
c	Tüm yakınsak olan dizilerin uzayı
c_0	Tüm sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
ℓ_∞	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_1	Mutlak toplanabilen dizilerin uzayı
$st - \lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
N_θ	Kuvvetli lacunary dizilerin uzayı
$B_r(x_0)$	x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar
$[V_\sigma]$	Tüm kuvvetli invaryant yakınsak dizilerin kümesi
$[M_\theta]$	Tüm Lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
$[V_\sigma]_p$	p-kuvvetli invaryant yakınsak dizilerin kümesi
$w_0(A_\sigma)$	kuvvetli invaryant A-toplanabilir dizilerin kümesi
$w(A_\sigma, f)$	f modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli invaryant A-toplanabilir dizilerin kümesi

1 GİRİŞ

Uzaklık ve komşuluk kavramları yardımı ile tanımlanan limit, yakınsaklık ve süreklilik gibi kavramlar analiz ve fonksiyonel analiz alanının toplanabilme konusunun temelini oluşturan en önemli kavramlardır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahiptir. 1951' de Fast'in istatistiksel yakınsak kavramını tanımlanmasından bu yana istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları ile ilgili çalışmalar Connor (1989), Schoenberg (1959), Maddox (1970), Šalát (1980), Fridy (1985, 1993), Rath ve Tripathy (1994) ve daha birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır.

Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizisi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla arasında ilişkiler bulunan ve yine yakınsaklık alanında önemli yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Fridy ve Orhan (1993) bu çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

İnvaryant yakınsaklık kavramı son asırda bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Banach(1932) tarafından çalışmada bu konunun temelleri verilmiştir. İnvaryant yakınsaklık üzerine Raimi (1963), Bell (1929), Schafer (1972), Miller (1973), Savaş (1989), Savaş ve Nuray (1994), Mursaleen (1979, 1983), Ahmad vd. (1994), Boss ve Seydal (1999), Savaş ve Rhoades (2002), Mursaleen ve Edely (2009) ve daha birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık kavramını tanımlayan Savaş (1990), bu kavramın invaryant yakınsaklıkla arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Savaş ve Nuray (1993) invaryant istatistiksel yakınsaklık ile lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlayıp aralarındaki ilişkileri yaptıkları çalışmalarda göstermiştir.

Ayrıca, Karakaya ve Şimşek $(2003 - 2004)$, Karakaya (2004), Savaş ve Savaş (2003) ve daha birçok araştırmacı tarafından başka çalışmalar yapılmıştır.

Modülüs fonksiyonun tanımı Nakono (1953) tarafından verilmiştir. Daha sonra Ruckle (1973),

$$\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$$

birim vektörlerinin sınırlı cümlesini bulunduran en küçük FK uzayı var mıdır sorusuna cevap ararken

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) < \infty \right\}$$

dizi uzayını f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamıştır. Maddox (1986) kuvvetli Cesàro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan modülüs yardımıyla kuvvetli Cesàro toplanabilen dizilerin uzayını $w(f)$ olarak tanımlamıştır. Daha sonra bu kavramı Connor (1989), Maddox'un tanımındaki Cesàro matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matrisi alarak $w(A, f)$ toplanabilme tanımına genelleştirmiştir.

Modülüs fonksiyonunu kullanarak Nuray ve Savaş (1993,1994), Savaş $(1992, 1999)$, Pehlivan (1989), Pehlivan ve Fisher $(1994, 1995)$ ve bir çok kişi tarafından çeşitli dizi uzayları tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Bu bölümün ardından tez çalışmasının ikinci bölümünde, matematik alanında elzem olan ve bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere, örneklere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, öncelikle Savaş (1990) ve Savaş ve Nuray (1993) tarafından yapılan çalışmalardaki kuvvetli lacunary σ-yakınsaklık ile σ-istatistiksel yakınsaklık ve lacunary σ-istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Nuray ve Savaş (1994) tarafından yapılan çalışmadaki σ-istatistiksel yakınsaklık ve A-invaryant istatistiksel yakınsaklık ile ilgili özellikleri, kapsama ilişkilerini veren teoremleri ve ispatları verilecektir. Ayrıca, invaryant yakınsaklık kavramı yardımıyla matris dönüşümleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Pancaroğlu ve Nuray (2013) tarafından yapılan çalışmadaki lacunary istatistiksel invaryant toplanabilme ve $0 < q < \infty$ olmak üzere, lacunary q-invaryant yakınsaklık kavramlarını ve bu kavramlarla ilgili özellikleri ve kapsama ilişkilerini veren teoremler ispatları ile birlikte ele alınmıştır.

Son olarak, tez için temel kaynak olarak kullanılan kitap, makale ve tezler kaynaklar kısmında verilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu tez çalışmasında kullanılacak olan ve Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi alanında önemli yeri olan bazı temel kavramlar vardır. Ayrıca, bu bölümde tez çalışması boyunca temel teşkil edecek vektör uzayı, topolojik uzay ve altuzay gibi bazı temel kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik ve Metrik Uzay): X boştan farklı bir küme ve

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, x) = 0$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanırsa, d fonksiyonuna, X üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

(M1) $d(x, x) = 0$ şartı yerine

(M1)$'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

şartını alırsak d fonksiyonuna, *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Bir lineer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).

Bu çalışmada, $\mathbb{R}$ reel uzay üzerinde

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan *alışılmış mutlak değer metriğini* gözönüne alınacaktır. Burada $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2 (Dizi Uzayı):. Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞, c, c_0, ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary 1989).

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı Yuvar):. Bir (X, d) metrik uzayında, x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için;

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

ve

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

cümlelerine sırasıyla, x_0 merkezli, r yarıçaplı *açık yuvar* ve *kapalı yuvar* denir (Musayev ve Alp 2000).

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary Dizi

Bu kısımda, tek dizilerde yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary dizi tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Doğal Yoğunluk): $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ kümelerini alalım. $|K| = card\, K$ (K kümesinin eleman sayısı) olmak üzere,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla, K kümesinin *alt yoğunluğu* ve *üst yoğunluğu* denir. Eğer

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K kümesinin *doğal yoğunluğu* denir. $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven *et al.* 1991).

Aşağıda literatürde mevcut olan doğal yoğunluk ile ilgili bazı temel özellikler ve örnekler not edilmiştir:

1) $K \subseteq \mathbb{N}$ sonlu ise $\delta(K) = 0$ dır.

2) $K = \mathbb{N}$ ise $\delta(K) = \frac{n}{n} = 1$ dir.

Buradan 1) ve 2) yardımıyla, bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $0 \leq \delta(K) \leq 1$ olduğu açıktır.

3) $T = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda,

$$\delta(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

4) $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda,

$$\delta(C) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

5) $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

elde edilir.

6) Eğer $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ise bu durumda,

$$\delta(K_1 \cup K_2) - \delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$$

elde edilir.

7) Eğer $K_1 \subseteq K_2$ ise bu durumda, $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ olur.

8) Açık olarak $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2.2 (İstatistiksel Yakınsaklık) Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise, $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda,

$$st - \lim x = L$$

yazılır (Fast 1951).

Aşağıda istatistiksel yakınsaklık ile ilgili olan ve literatürde mevcut bulunan bir kaç örnek verilmiştir:

Örnek 2.2.3 Reel sayıların

$$x_k = \begin{cases} 2, & k = n^2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \{2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, \cdots\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \{k : |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k : k = n^2\}$$

ve buradan,

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olduğundan,

$$st - \lim x = 0$$

elde edilir.

Örnek 2.2.4 Reel sayıların

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^3 \\ \frac{1}{2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 8, \cdots\right\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \left\{k : \left|x_k - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right\} = \{k : k = n^3\}$$

ve buradan,

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olduğundan,

$$st - \lim x = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.5 Reel sayıların

$$x_k = \begin{cases} -2, & k \text{ tek ise} \\ 2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Önerme 2.2.6 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsakır.

Bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani, istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 2.2.7 Bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\delta(\{k : |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

ise x dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy 1985).

Teorem 2.2.8 Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir:

i. x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

ii. x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy 1985).

Tanım 2.2.9 $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak biçimde negatif olmayan tam sayıların artan bir dizisi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizi denir. Ayrıca, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olarak belirtilir (Savaş 1990).

Örnek 2.2.10 $\theta = \{k_r\} = 2^r - 1$ dizisi bir lacunary dizisidir. Çünkü bu dizi için; $k_0 = 2^0 - 1 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} = (2^r - 1) - (2^{r-1} - 1) = 2^{r-1} - 1 \to \infty$$

olur. Ayrıca, $k_0 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 7,\ k_4 = 15, \cdots$ olduğundan bu dizi negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisidir.

Tanım 2.2.11 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\theta - \lim x = L \text{ veya } x_k \to L(S_\theta)$$

ile gösterilir (Fridy and Orhan 1993).

Tanım 2.2.12 $x = (x_k)$ dizisi için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = x_k$ dizisi L sayısına lacunary toplanabilirdir denir (Musaleen and Alataibi 2011).

Tanım 2.2.13 θ bir lacunary dizi olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi için eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir (Freedman *et al.* 1978).
Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayı;

$$N_\theta = \{x = (x_k) : \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0, r \to 0\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.14 θ bir lacunary dizi ve $0 < p < \infty$ olmak üzere, $x = (x_k)$ dizisi için eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli $p-$lacunary toplanabilirdir denir (Mursaleenand Alotaibi 2011).

Tanım 2.2.15 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{n} x_{k+m} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Lorentz (x_k) dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart m ye göre düzgün olarak,

$$\frac{x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{m+k}}{k+1} \to L$$

ile göstermiştir.

Tanım 2.2.16 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+m} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Maddox 1978).

Tanım 2.2.17 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, $0 < p < \infty$ olmak üzere, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+m} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsaktır denir (Pancaroğlu 2014).

Tanım 2.2.18 $x = (x_k)$ dizisi için eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_{k+m} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir (Pancaroğlu 2014).

2.3 İnvaryant limit ve İnvaryant Yakısaklık

Bu bölümde invaryant limit ve invaryant yakınsaklık tanımları ve ilgili kavramlar ile örnekler verilecektir.

Tanım 2.3.1 L, ℓ_∞ sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı lineer bir fonksiyonel olsun. Eğer L lineer fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahip ise bir *Banach limiti* adını alır.

(B1) $n = 1, 2, ...$ için $(x_n) \geq 0 \Rightarrow L(x_n) \geq 0$,

(B2) $L(e) = 1$, $e = (1, 1, \cdots)$,

(B3) $L(S_{x_n}) = L(x_n)$.

Burada S operatörü $(S_{x_n}) = x_{n+1}$ şeklinde tanımlanmış olan kaydırma operatörüdür (Lorentz 1948).

Tanım 2.3.2 (İnvaryant Limit) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü her m, n pozitif tamsayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde birebir bir dönüşüm olsun. Sürekli bir

$$\phi : \ell_\infty \to \mathbb{R}$$

lineer fonksiyoneline aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde *invaryant limit* veya σ-limit denir.

(I1) $n = 1, 2, ...$ için $(x_n) \geq 0 \Rightarrow \phi(x) \geq 0$,

(I2) $\phi(e) = 1$, $e = (1, 1, \cdots)$,

(I3) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi(x_{\sigma(n)}) = \phi(x)$.

Özel olarak $\sigma(n) = n + 1$ olması halinde, ϕ bir Banach limiti olur (Schaefer 1972).

Tanım 2.3.3 İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı diziye invaryant yakınsak veya σ-yakınsak dizi denir. σ-yakınsak dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir (Schaefer 1972).

İnvaryant yakınsaklığın başka bir tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.3.4 $x = (x_k)$ dizisi için, m ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma^k(m)} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına invaryant yakınsaktır denir (Schaefer 1972).

Örnek 2.3.5 Reel sayıların

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1, & \text{k tek ise,} \\ 0, & \text{k çift ise,} \end{cases}$$

dizisini ele alalım. $x = (x_k)$ dizisi $\dfrac{1}{2}$ ye invaryant yakınsaktır fakat alışılmış anlamda yakınsak değildir.

Tanım 2.3.6 $x = (x_k)$ dizisi için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir (Mursaleen 1983).

Tanım 2.3.7 $x = (x_k)$ bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-invaryant yakınsaktır* denir (Mursaleen and Edely 2009).

3 LACUNARY KUVVETLİ σ-YAKINSAKLIK, σ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE LACUNARY σ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde ilk olarak Savaş (1990) tarafından sunulan *lacunary kuvvetli σ-yakınsaklık* çalışmasındaki temel tanım, lemma ve teoremler verilmiştir. Daha sonra Savaş ve Nuray (1993) tarafından yapılan *σ-istatistiksel yakınsaklık ve lacunary σ-istatistiksel yakınsaklık* isimli çalışmada verilen temel tanım, lemma ve teoremler incelenmiştir.

İlk olarak, bu iki çalışmada verilen $[V_\sigma]$, $[N_\theta]$ ve $[M_\theta]$ sembolleri ile gösterilen kavramlar not edilecektir.

Tüm kuvvetli σ-yakınsak dizilerin kümesi

$$[V_\sigma] = \left\{ x \in l_\infty : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x_{\sigma^k(i)} - s| = 0, \text{ i ye göre düzgün} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

θ bir lacunary dizi olsun. Lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin kümesi,

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0, \text{ bazı } L \text{ ler için} \right\}$$

ile tanımlanır.

θ bir lacunary dizi olsun. Lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi,

$$[M_\theta] = \left\{ x : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_{k+i} - s| = 0, \text{ i ye göre düzgün} \right\}$$

ile tanımlanır.

3.1 Lacunary Kuvvetli σ-Yakınsaklık

Bu kısımda Savaş (1990) tarafından yapılan çalışmada verilen tanım, lemma ve teoremleri ispatlarıyla verilecektir.

Tanım 3.1.1 θ bir lacunary dizi olsun. Reel veya karmaşık sayıların bir $x = (x_k)$ dizisi, i ye göre düzgün olarak, eğer $r \to \infty$ iken

$$T_{r,i}(x) = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x(\sigma^k(i)) - s| \to 0$$

şartını sağlıyorsa, bir s değerine lacunary kuvvetli σ-yakınsaktır denir. Bu durumda, "x in lacunary kuvvetli σ limiti s" dir denir.

L_θ ile tüm lacunary kuvvetli σ-yakınsak dizilerin kümesini gösteririz.

$\sigma(i) = i + 1$ için M_θ ile L_θ uzayı aynıdır. Eğer x, s değerine lacunary kuvvetli σ-yakınsak ise bu durumda,

$$L_\theta - \lim x = s$$

olarak yazılır. Ayrıca,

$$L_\theta \cap l_\infty = \left\{ x \in l_\infty : \overline{\lim_i} \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x(\sigma^k(i)) - s| = 0 \right\}$$

olduğunu görmek kolaydır.

Eğer

$$\{k_r\} \subset \{k'_r\}$$

ise $\theta' = \{k'_r\}$ lacunary dizisi $\theta = \{k_r\}$ nin bir lacunary inceltilmesi olarak adlandırılır.

Şimdi farklı θ lacunary dizileri için L_θ lar arasındaki kapsama ilişkiler kurulacaktır.

Teorem 3.1.2

(a) θ', θ nın bir inceltilmesi olsun. O halde

$$L_{\theta'} \subset L_\theta$$

dır.

(b) Ω, keyfi bir birleşim altında lacunary dizilerin kapalı bir kümesi olsun.

$$\beta = \bigcup_{\theta \in \Omega} \theta$$

yazılır ise, bu durumda

$$L_\beta = \bigcap_{\theta \in \Omega} L_\theta$$

dır.

(c) Ω kesişim altında kapalı ise, bu durumda

$$\gamma = \bigcap_{\theta \in \Omega} \theta$$

için,

$$L_\gamma = \bigcup_{\theta \in \Omega} L_\theta$$

dır.

(d) Ω hem birleşim hem de kesişim altında kapalı ise, bu durumda

$$L_\beta \subset L_\theta \subset L_\gamma; \quad \forall \theta \in \Omega$$

dır.

Teoremin ispatından önce (a) ve (d) sonuçlarının yalnızca ℓ_∞ a kısıtlanamayacağını belirtelim.

İspat: **(a)** $x \in L_\theta$ alalım ve $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ aralığında $\theta' = (k'_r)$ nün noktalarının sayısının sonlu sayıda olduğu verilsin. Basitlik açısından biz I_r aralığında θ' nün tam olarak bir k'_r noktası olduğunu farzedelim, yani

$$k_{r-1} = k'_{j-1} < k'_j < k'_{j+1}$$

olsun. Şimdi,

$$I'_r = (k_{r-1}, k_j], \quad I''_r = (k_j, k_r], \quad h'_r = k_j - k_{r-1}, \quad h''_r = k_r - k_j \tag{3.1}$$

olmak üzere,

$$T_{r,i}(x) = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x(\sigma^k(i)) - s| = \frac{h'_r}{h_r} T'_{r,i}(x) + \frac{h''_r}{h_r} T''_{r,i}(x) \tag{3.2}$$

dir. Böylece,

$$T'_{r,i}(x) = \frac{1}{h'_r} \sum_{k \in I'_r} |x(\sigma^k(i)) - s|$$

ve

$$T''_{r,i}(x) = \frac{1}{h''_r} \sum_{k \in I''_r} |x(\sigma^k(i)) - s|$$

olur.

Şimdi $x \in L'_\theta$ olduğundan dolayı, $r \to \infty$ iken $T'_{r,i}(x)$ ve $T''_{r,i}(x)$, i ye göre düzgün olarak sıfıra yakınsar.

$$0 < \frac{h'_r}{h_r} \leq 1 \quad ve \quad 0 < \frac{h''_r}{h_r} \leq 1$$

olduğundan, (3.2) gereğince $r \to \infty$ iken i ye göre düzgün olarak

$$T_{r,i}(x) \to 0$$

dır.

(b) β, her $\theta \in \Omega$ nın inceltilmesi olup

$$M_\beta \subset M_\theta$$

olduğundan **(b)** elde edilir.

(c) İspat **(b)** deki ispata benzerdir.

(d) İspat **(b)** ve **(c)** den elde edilir.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 3.1.3

$$\mathcal{L}_\theta(x) = \overline{\lim_r} \sup_i \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x(\sigma^k(i))|$$

ile tanımlanan $\mathcal{L}_\theta(x)$, ℓ_∞ üzerinde alt fonksiyonel olmak üzere;

(a) θ', θ nın inceltilmesi olsun. O halde, her $x \in l_\infty$ için

$$\mathcal{L}_\theta(x) \leq \mathcal{L}_{\theta'}(x)$$

elde edilir.

(b) Eğer Ω keyfi bir birleşim altında kapalı ise, bu durumda her $x \in l_\infty$ için

$$\sup_{\theta \in \Omega} \mathcal{L}_\theta(x) = \mathcal{L}_\beta(x)$$

elde edilir.

(c) Eğer Ω kesişim altında kapalı ise, bu durumda her $x \in l_\infty$ için

$$\inf_{\theta \in \Omega} \mathcal{L}_\theta(x) = \mathcal{L}_\gamma(x)$$

elde edilir.

(d) Eğer Ω birleşim ve kesişim altında kapalı ise, bu durumda her $x \in l_\infty$ için

$$\mathcal{L}_\gamma(x) \leq \mathcal{L}_\theta(x) \leq \mathcal{L}_\beta(x)$$

elde edilir.

Şimi daha sonra kullanacağımız aşağıdaki lemmaları ispatsız olarak verelim.

Lemma 3.1.4 Verilen $\varepsilon > 0$ için n_0, i_0 doğal sayıları vardır öyleki her $n \geq n_0$ ve $i \geq i_0$ için,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x(\sigma^k(i)) - s| < \varepsilon$$

olduğunu varsayalım. O halde,

$$(x_k) \in [V_\sigma]$$

olur.

Lemma 3.1.5 Verilen $\varepsilon > 0$ için n_0, i_0 doğal sayıları vardır öyleki her $n \geq n_0$ ve $i \geq i_0$ için,

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x(\sigma^k(i))) - s \right| < \varepsilon$$

olduğunu varsayalım. O halde,

$$(x_k) \in V_\sigma$$

olur.

Teorem 3.1.6 Her θ için $L_\theta \Leftrightarrow [V_\sigma]$.

İspat: $(x_k) \in L_\theta$ olsun. Bu durumda, verilen $\varepsilon > 0$ için r_0, s doğal sayıları vardır öyleki her $r \geq r_0$ ve $i = k_{r-1} + 1 + u$, $u \geq 0$ için,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k=0}^{h_r - 1} |x(\sigma^k(i)) - s| < \varepsilon \tag{3.3}$$

olur. $n \geq h_r$ olsun, $0 \leq \theta \leq h_r$ ve m bir tamsayı olmak üzere,

$$n = mh_r + \theta$$

yazalım. $n \geq h_r$ olduğundan $m \geq 1$ olur.

Şimdi $h_r/n \leq i$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |x(\sigma^k(i)) - s| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{(m+1)h_r-1} |x(\sigma^k(i)) - s| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=jh_r}^{(i+1)h_r-1} |x(\sigma^k(i)) - s| \\
&\leq \frac{m+1}{n} h_r\varepsilon \\
&\leq \frac{2mh_r\varepsilon}{n} \quad (m \geq 1)
\end{aligned}$$

olup,

$$mh_r/n \leq 1$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |x(\sigma^k(i)) - s| \leq 2\varepsilon$$

olur. Lemma 3.1.4 gereği,

$$L_\theta \Rightarrow [V_\sigma]$$

elde edilir.

Her θ için $[V_\sigma] \Rightarrow L_\theta$ olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 3.1.7 Her bir θ için, i' ye göre düzgün olarak

$$\overline{L_\theta} = \left\{ x = (x_k) : \text{ bir } s \text{ vardır öyleki, } \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} (x(\sigma^k(i)) - s) = 0 \right\}$$

ile tanımlanan $\overline{L_\theta}$ lacunary σ-yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere,

$$\overline{L_\theta} \cap l_\infty \Leftrightarrow V_\sigma$$

dır.

İspat: $(x_k) \in \overline{L_\theta} \cap l_\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ için r_0, i_0 vardır öyleki

$$r \geq r_0,\ i \geq i_0,\ i = k_{r-1} + 1 + u,\ u \geq 0$$

için,

$$\frac{1}{h_r} | \sum_{k=0}^{h_r - 1} x(\sigma^k(i)) - s| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

olur. Şimdi $n \geq h_r$ olsun. $m \geq 1$ şartını sağlayan bir tamsayıdır. O halde,

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(x(\sigma^k(i))) - s\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{m-1}\left|\sum_{k=ph_r}^{(p+1)h_{r-1}} x(\sigma^k(i)) - s\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=mh_r}^{n-1} |x(\sigma^k(i)) - s| \tag{3.5}$$

olur.

$(x_k) \in l_\infty$ olduğundan tüm i ler için,

$$|x(\sigma^k(i)) - s| \leq M$$

$(k = 1, 2, ...)$ alalım. Böylece $\frac{h_r}{n} \leq 1$ için (3.4) ve (3.5) den,

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} x(\sigma^k(i)) - s\right| \leq \frac{1}{n} m h_r \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M h_r}{n}$$

ve $\frac{mh_r}{n} \leq 1$ olduğundan, $\frac{Mh_r}{n}$, yeterince büyük n alarak, $\frac{\varepsilon}{2}$ den daha küçük yapılabilir. Böylece $r \geq r_0$, $i \geq i_0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} x(\sigma^k(i)) - s\right| < \varepsilon$$

dir. Dolayısıyla lemma 3.1.4 gereği,

$$\overline{L_\theta} \cap l_\infty \Rightarrow V_\beta$$

olur. Diğer taraftan

$$V_\sigma \Rightarrow L_\theta \bigcap l_\infty$$

olduğunu göstermek kolaydır. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 σ-İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary σ-İstatistiksel Yakınsaklık

Şimdi de Savaş ve Nuray (1993) tarafından yapılan çalışmada verilen tanım, lemma ve teoremler ispatlarıyla verilecektir.

Tanım 3.2.1 Bir E pozitif tamsayılar kümesinin düzgün invariant yoğunluğu sıfırdır ancak ve ancak $\{\sigma(m), \sigma^2(m), ..., \sigma^n(m)\}$ kümesinde bulunan E nin eleman sayısı $n \to \infty$ iken, m ye göre düzgün olarak $o(n)$ dir (Nuray ve Savaş, 1994).

Tanım 3.2.2 Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ için düzgün olarak,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{0 \leq k \leq n : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

ise bir $x = (x_k)$ kompleks sayı dizisi L sayısına σ-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda,

$$S_\sigma - \lim x = L \quad veya \quad x_k \to L(S_\sigma)$$

şeklinde yazılır ve

$$S_\sigma = \{x = (x_k) : \text{ bazı } L \text{ ler için, } S_\sigma - \lim x = L\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2.3 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |k \in I_r : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon| = 0, \text{ i=1,2,... için düzgün olarak,}$$

ise $x = (x_k)$ sayı dizisi L ye lacunary σ-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda,

$$S_{\sigma\theta} - \lim x = L \quad veya \quad x_k \to L(S_{\sigma\theta})$$

şeklinde yazılır ve

$$S_{\sigma\theta} = \{x = (x_k) : \text{bazı } \ L \ \text{ için}, S_{\sigma\theta} - \lim x = L\}$$

ile tanımlanır.

Şimdi L_θ-yakınsaklık ile $S_{\sigma\theta}$-yakınsaklık arasındaki bazı kapsama ilişkileri ve sınırlı diziler için bu iki yakınsaklığın eşitliği verilecektir. Ayrıca, S_θ-yakınsaklık ile $S_{\sigma\theta}$-yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 3.2.4 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda,

(i) $x_k \to L(L_\theta)$ ise $x_k \to L(S_{\sigma\theta})$ dır,

(ii) $x = (x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \to L(S_{\sigma\theta})$ ise $x_k \to L(L_\theta)$ dır,

(iii) $S_{\sigma\theta} \cap l_\infty = L_\theta$.

İspat: (i) Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L(L_\theta)$ ise,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} |x_{\sigma^k(m)} - L| &\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon}} |x_{\sigma^k(m)} - L| \\ &\geq \varepsilon |\{k \in I_r : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}|\end{aligned}$$

yazabiliriz ki buradan istenilen sonuç elde edilir.

(ii) $x_k \to L(S_{\sigma\theta})$ ve $x = (x_k) \in l_\infty$ olduğunu kabul edelim. Tüm k ve m için

$$|x_{\sigma^k(m)} - L| \leq M$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin, bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |x_{\sigma^k(m)} - L| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon}} |x_{\sigma^k(m)} - L| + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_{\sigma^k(m)}-L|<\varepsilon}} |x_{\sigma^k(m)} - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r}|\{k \in I_r : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da sonuçtur.

$\theta = \{k_r\}$ verilsin ve $\{x_k\}$ dizisini $k = \sigma^n(m)$, $n = k_{r-1}+1,\ k_{r-1}+2,\ \cdots, k_{r-1}+[\sqrt{h_r}]$; $m \geq 1$ için $1, 2, 3, ..., [\sqrt{h_r}]$ olarak, aksi halde $x_k = 0$ ile tanımlayalım ([ ] en büyük tam değer fonksiyonunu gösterir). $x = (x_k)$ dizisi sınırlı olmasın. Ayrıca, $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_{\sigma^k(m)} - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \to 0, \quad (r \to \infty \text{ iken})$$

yani

$$x_k \to 0(S_{\sigma\theta})$$

elde ederiz. Fakat,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_{\sigma^k(m)}-0| = \frac{1}{h_r}\left(\frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r}]+1)}{2}\right) \to \frac{1}{2} \neq 0, \quad (r\to\infty \text{ iken})$$

böylece

$$x_k \nrightarrow 0(L_\theta)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (i) içermesi uygundur ve bu örnek gösterir ki, sınırlılık şartı (ii) hipotezden çıkarılamaz.

(iii) Bu durum (i),(ii), Teorem 3.1.6 ve $[V_\sigma]\subset l_\infty$ un bir sonucudur.

Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.5 $\varepsilon_1>0$ verilsin. Her $\varepsilon>0$ için n_0 ve m_0 vardır öyle ki tüm $n\geq n_0$ ve $m\geq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon\}|<\varepsilon_1$$

olduğunu farzedelim. O halde, $x=(x_k)\in S_\sigma$ dır.

İspat: $\varepsilon_1>0$ verilsin. Her $\varepsilon>0$ için tüm $n\geq n_0'$ ve $m\geq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon\}|<\frac{\varepsilon_1}{2} \tag{3.6}$$

olacak şekilde $n_0',\ m_0$ seçelim. $n\geq n_0'',\ 0\leq m\leq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon\}|<\varepsilon_1 \tag{3.7}$$

olacak şekilde n_0'' nün var olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$n_0=\max(n_0',n_0'')$ alındığında $n\geq n_0$ ve tüm m ler için (3.7) elde edilir ki bu da sonucu verir.

$0\leq m\leq m_0$, m_0 sabit olacak şekilde bir m_0 seçelim. Böylece,

$$K=|\{0\leq k\leq m_0-1 : |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon\}|$$

elde edilir.

Şimdi $0 \leq m \leq m_0$ ve $n \geq m_0$ alarak, (3.6) dan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq m_0-1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&+ \frac{1}{n}|\{m_0 \leq k \leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{K}{n} + \frac{1}{n}|\{m_0 \leq k \leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2},
\end{aligned}$$

ve n yi yeterince büyük alarak,

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$$

yazılır. Bu (3.7) yi verir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6 Her θ lacunary dizisi için $S_{\sigma\theta} = S_\sigma$ dır.

İspat: $x \in S_{\sigma\theta}$ olsun. Bu durumda Tanım 3.2.3 den $\varepsilon_1 > 0$ verilsin. r_0 ve L vardır öyleki $r \geq r_0$ ve $m = k_{r-1} + 1 + u, u \geq 0$ için

$$\frac{1}{h_r}|\{0 \leq k \leq h_r - 1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

olur. $n \geq h_r$ olsun, $0 \leq t \leq h_r$ ve i bir tamsayı olmak üzere $n = ih_r + t$ yazalım. $n \geq h_r$ olduğundan $i \geq 1$ dir. Şimdi, $\frac{h_r}{n} \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq (i+1)h_r - 1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{i}|\{jh_r \leq k \leq (j+1)h_r - 1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{1}{n}(i+1)h_r\varepsilon_1 \leq \frac{2ih_r\varepsilon_1}{n} \qquad (i \geq 1)
\end{aligned}$$

ve $\frac{ih_r}{n} \leq 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}| \leq 2\varepsilon_1$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.2.5 den

$$S_{\sigma\theta} \subset S_\sigma$$

elde edilir. $S_\sigma \subset S_{\sigma\theta}$ olduğunu görmek kolaydır. Bu da ispatı tamamlar.

$\sigma(m) = m + 1$ alırsak, Tanım 3.2.2 ve Tanım 3.2.3 den hemen hemen istatistiksel yakınsaklık ve lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklık tanımlarını elde ederiz. Böylece, kuvvetli hemen hemen yakınsak ve hemen hemen istatistiksel yakınsak dizi arasında Teorem 3.2.4 ve 3.2.6 e benzer kapsamalar elde edilir ki bu zamana kadar literatürde karşılaşılmadı.

4 İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE A-İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu kısımda, Nuray ve Savaş (1994) tarafından yapılan *invaryant istatistiksel yakınsaklık ve A-invaryant istatistiksel yakınsaklık* isimli çalışmada verilen σ-istatistiksel yakınsaklık ve A-invaryant yakınsaklık kavramaları ve bu kavramlar arasındaki bazı kapsamaları incelenecektir.

p-kuvvetli σ-yakınsak dizilerin kümesi

$$[V_\sigma]_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p = 0, m \text{ ye göre düzgün} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $p = 1$ alınırsa bu durumda,

$$[V_\sigma]_p = [V_\sigma]$$

olur. ℓ_∞ tüm sınırlı dizilerin kümesi olmak üzere,

$$\ell_\infty \supset [V_\sigma]_p$$

olduğu açıktır. Ayrıca, kuvvetli invaryant A-toplanabilir diziler aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$w_0(A_\sigma) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \sum_k a_{nk} |x_{\sigma^k(m)}| = 0, m \text{ ye göre düzgün} \right\}.$$

Şimdi

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

fonksiyonunu alalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, f ye modülüs fonksiyonu denir.

1. $f(x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$,

2. Tüm $x \geq 0$, $y \geq 0$ ler için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,

3. f artandır,

4. f, 0 noktasında sağdan süreklidir.

Bir f modülüs fonksiyonunu ve negatif olmayan regüler $A = (a_{nk})$ matrisini kullanarak $w(A_\sigma, f)$ dizi uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w(A_\sigma, f) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \sum_k a_{nk} f\big(|x_{\sigma^k(m)} - L|\big) = 0, m \text{ ye göre düzgün} \right\}.$$

Eğer $L = 0$ ise bu durumda, $w_0(A_\sigma, f)$ yerine $w(A_\sigma, f)$ yazarız. Eğer $x \in w(A_\sigma, f)$ ise bu durumda, f modülüs fonksiyonuna göre, x dizisi L ye kuvvetli invaryant A-toplanabilirdir, denir. $A = (a_{nk})$ matrisini $(C, 1)$ Cesàro matrisi olarak alınırsa, $w(A_\sigma, f)$ uzayı,

$$[V_\sigma(f)] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(|x_{\sigma^k(m)} - L|\big) = 0, m \text{ ye göre düzgün} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, $[V_\sigma]_p$-yakınsaklık ile S_σ-yakınsaklık arasındaki bazı kapsama ilişkileri verilecek ve bunların sınırlı diziler için eşit olduğu gösterilecektir. Ayrıca, S_σ-yakınsaklık ile $[V_\sigma(f)]$-yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 4.1

(i) $0 < p < \infty$ iken $x_k \to L([V_\sigma]_p)$ olması $x_k \to L(S_\sigma)$ olmasını gerektirir.

(ii) $x = (x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \to L(S_\sigma)$ olması $x_k \to L([V_\sigma]_p)$ olmasını sağlar.

(iii) $S_\sigma \bigcap l_\infty = [V_\sigma]_p$.

İspat: Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L([V_\sigma]_p)$ ise, $0 < p < \infty$ olmak üzere her bir m için

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p \geq \big|\{k \leq n : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\}\big| \; \varepsilon^p$$

yazalabiliriz. Böylece $x_k \to L([V_\sigma]_p)$ olduğundan,

$$x_k \to L(S_\sigma)$$

elde edilir.

Şimdi varsayalım ki $x = (x_k)$ sınırlı ve L ye $\sigma-$istatistiksel yakınsak olsun. Herbir $m \geq 1$ için

$$G = \sup_k |x_{\sigma^k(m)}| + |L|$$

kümesini alalım. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun ve N_ε seçelim öyle ki her bir m ve $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2G^p}$$

ve

$$L_{nm} = \{k \leq n : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\}$$

kümesini alalım.

Şimdi tüm m ve $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in L_{nm}} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p + \sum_{\substack{k\notin L_{nm} \\ k\leq n}} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p\right) \\
&< \frac{1}{n}\left(n\frac{\varepsilon}{2G^p}\right) G^p + \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) n \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Böylece x, L ye p-kuvvetli invariant yakınsaktır.

Teorem 4.2 f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve x bir dizi olsun. Bu durumda,

(i) $x_k \to L([V_\sigma(f)])$ olması $x_k \to L(S_\sigma)$ olmasını gerektirir.

(ii) f sınırlı ve $x_k \to L(S_\sigma)$ ise $x_k \to L([V_\sigma(f)])$ dir.

(iii) Eğer f sınırlı ise $[V_\sigma(f)] = S_\sigma$ dir.

Bu teoremin ispatı Teorem 4.1 ile benzer olduğundan açıktır.

Eğer A negatif olmayan regular matris ise bir madülüse göre kuvvetli A-invaryant toplanabilirlik ile A-invariant istatistiksel yakınsaklık arasında bazı bağlantılar kurulabilinir. Aşağıdaki tanım $\sigma-$ istatistiksel yakınsaklık tanımının bir genişlemesidir.

$||x||_\infty = \sup_k |x_k|$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda,

$$S(x;\varepsilon) = \{k \in N : |x_k| \geq \varepsilon\}$$

dir.

$\mathbb{N} \supset S$ olmak üzere, S nin karakteristik fonksiyonunu χ_S ile gösterilir.

Tanım 4.3 A bir negatif olmayan regülar matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\chi_{S(x-Le;\varepsilon)} \in w_0(A_\sigma)$ ise, x dizisi L ye $A-$invariant istatistiksel yakınsaktır, denir.

Şimdi A-invaryant yakınsaklık ile $w(A_\sigma, f)$-yakınsaklık arasında bazı kapsama ilişkileri verilecektir. Bu kapsama ilişkilerini vermeden önce ileride teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan iki lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.4 f bir modülüs fonksiyonu ve $\alpha > 0$ bir sabit olsun. O zaman sabit bir $c > 0$ vardır öyle ki

$$f(x) > cx, \quad (0 < x < \alpha).$$

Lemma 4.5 A bir negatif olmayan regüler matris ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$w_0(A_\sigma, f) \supset w_0(A_\sigma)$$

kapsaması elde edilir.

Aşağıdaki teoremin ispatı Lemma 4.4 ve Lemma 4.5 dan kolayca elde edilir.

Teorem 4.6 $x = (x_k)$ bir sınırlı dizi, f bir modülüs fonksiyonu ve A negatif olmayan regular bir matris olsun. Bu durumda x, f modülüne göre 0 a kuvvetli invaryant $A-$toplanabilirdir ancak ve ancak x, 0 a kuvvetli invaryant A-toplanabilir yani,

$$w_0(A_\sigma) \bigcap \ell_\infty = w_0(A_\sigma, f) \bigcap \ell_\infty.$$

Teorem 4.7 A negatif olmayan bir regular matris ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $x = (x_k)$, f modülüs fonksiyonuna göre L ye kuvvetli invaryant A-toplanabilir ise o zaman x, L ye A-invaryant istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $x = (x_k)$ sınırlı ve L ye $A-$invaryant istatistiksel yakınsak ise o zaman x, f modülüs fonksiyonuna göre L ye kuvvetli invaryant A-toplanabilirdir.

İspat: **(i)** Eğer $x \in w_0(A_\sigma, f)$ ve $y \in l_\infty$ ise o zaman

$$xy \in w_0(A_\sigma, f)$$

dir. Şimdi varsayalım ki $x \in w_0(A_\sigma, f)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $y \in l_\infty$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k}, & |x_k| \geq \varepsilon \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Sonuç olarak,

$$xy = \chi_{S(x;\varepsilon)} \in w_0(A_\sigma, f) \bigcap \ell_\infty$$

ve Teorem 4.6 dan

$$\chi_{S(x;\varepsilon)} \in w_0(A_\sigma) \bigcap \ell_\infty$$

olduğundan x, 0 a A-invaryant istatistiksel yakınsaktır. İddianın kalan kısmı kolayca elde edilir.

(ii) Şimdi varsayalım ki $x \in \ell_\infty$ ve x, L ye A-invaryant istatistiksel yakınsak ise o halde tanımdan her $\varepsilon > 0$ için

$$\chi_{S(x-Le;\varepsilon)} \in w_0(A_\sigma) \bigcap \ell_\infty$$

elde edilir.

Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $\chi_{S(x-Le;\varepsilon)} \in w_0(A_\sigma) \bigcap \ell_\infty$ ise o zaman

$$||x - Le - (x - Le)\chi_{S(x-Le;\varepsilon)}||_\infty < \varepsilon$$

elde edilir.

Eğer tüm $\varepsilon > 0$ için

$$\chi_{S(x-Le;\varepsilon)} \in w_0(A_\sigma)\bigcap \ell_\infty$$

ise o zaman $x-Le$, $w_0(A_\sigma)\bigcap \ell_\infty$ un kapanışındadır. $w_0(A_\sigma)\bigcap \ell_\infty$ kapalı olduğu için

$$x - Le \in w_0(A_\sigma)\bigcap \ell_\infty$$

ve Teorem 4.6 dan,

$$x - Le \in w_0(A_\sigma, f)\bigcap \ell_\infty$$

yazılabilir yani,

$$x - Le \in w_0(A_\sigma, f)$$

elde edilir.

4.1 Matris Dönüşümleri

E ve F, w karmaşık diziler uzayının boş olmayan iki alt kümesi ve $A = ((a_{nk}),$ $(n, k = 1, 2, 3, ...)$ karmaşık sayıların sonsuz matrisi olsun. Her n için

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$$

yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazarız. Eğer $x = (x_k) \in E$ olması $Ax \in F$ olmasını sağlarsa, A nın E den F ye matris dönüşümü belirttiğini söyleriz ve

$$A : E \to F$$

şeklinde gösteririz. $A : E \to F$ şeklinde tanımlanan A matris sınıfını (E, F) ile ifade ederiz. Matrisin a_{nk} öğesini belirtmek için $a(n, k)$ notasyonuu kullanacağız.

Şimdi $(S_0\bigcap l_\infty, V_{\sigma 0})$ ve $(S\bigcap l_\infty, V_\sigma)$ sınıfındaki matrisleri karakterize edilmiştir.

$$a(n, k, m) = \sum_{k=0}^{m} a\frac{(\sigma^j(n), k)}{(m+1)}$$

olmak üzere

$$t_{mn}(Ax) = \sum_k a(n, k, m)x_k$$

yazılacaktır.

Tanım 4.1.1 $s_1 \geq 1$ olmak üzere $s = (s_j)$, kesinlikle artan bir tamsayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim(S_{2m})^{-1}\sum_{t=1}^{m}(s_{2t} - s_{2t-1}) = 0$$

ise $s \in S$ olduğu söylenir.

θ, 0 ın ve 1 in ıraksak bir dizisi ve s, doğal sayıların kesinlikle artan bir dizisi olsun. Belirli bir $s = (s_k)$ için $\theta^{(s)}$ yi

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & s_{2t-1} \leq k \leq s_{2t} \quad ise \\ 0, & s_{2t} \leq k \leq s_{2t+1} \quad veya \quad k < s_1 \quad ise \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$\theta = (\theta_k)$ verilsin, $s^{(\theta)}$ yı $t = 1, 2, ...$ için

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & s^{(\theta)_{2t-1}} \leq k < s^{(\theta)_{2t}} \quad ise \\ 0, & s^{(\theta)_{2t}} \leq k < s^{(\theta)_{2t+1}} \quad veya \quad k < s_1 \quad ise \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

Lemma 4.1.2 s kesinlikle artan bir doğal sayı dizisi olsun. O zaman $s^{(\theta)}$ istatistiksel sıfırdır ancak ve ancak $s \in S$.

Lemma 4.1.3 Eğer $x \in w$, L ye istatistiksel yakınsak ise bu durumda, yakınsak bir y dizisi ve istatistiksel boş bir z dizisi vardır öyleki y, L ye yakınsak,

$$x = y + z$$

ve

$$\lim \frac{1}{n}|\{k \leq n : z_k \neq 0\}|$$

dır. Diğer taraftan x sınırlı ise z de sınırlıdır ve

$$||z||_\infty \leq ||x||_\infty + |L|$$

dir.

Teorem 4.1.4 $A \in (S_0 \bigcap l_\infty, V_{\sigma 0})$ ancak ve ancak

(i) $A \in (c_0, V_{\sigma 0})$ ve

(ii) Her bir $s \in S$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_m \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=s_{2t-1}}^{s_{2t}} |a(n,k,m)| = 0.$$

İspat: (Gereklilik) Sıfır dizileri sınırlı ve istatistiksel sıfır olduğundan (i) nin gerekliliği açıktır. Şimdi bazı $s \in S$ için (ii) koşulunun geçerli olmadığını varsayalım, o zaman her bir $j \in N$ ve $\delta > 0$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=s_{2t-1}}^{s_{2t}} |a(n_j,k,m_j)| \geq 2\delta$$

olacak şekilde bir $\{n_i\}$ doğal sayı dizisi ve artan bir $\{m_j\}$ doğal sayı dizisi vardır. A nın c_0 dan $V_{\sigma 0}$ a bir dönüşüm olduğunu kullanarak, doğal sayıların iki (p_j) ve (q_j) dizisini bulmak mümkündür öyleki tüm $j \in N$ için $p_j < q_j < p_{j+1}$ ve

$$\sum_{t=1}^{p_j} \sum_{k=s_{2t-1}}^{s_{2t}} |a(n_j,k,m_j)| < \frac{\delta}{2},$$

$$\sum_{t=q_j+1}^{\infty} \sum_{k=s_{2t-1}}^{s_{2t}} |a(n_j,k,m_j)| < \frac{\delta}{2}$$

ve

$$\sum_{t=p_j}^{q_j} \sum_{k=s_{2t-1}}^{s_{2t}} |a(n_j,k,m_j)| > \delta$$

elde edilir.

z_k dizisini, $s_{2t} \leq k < s_{2t+1}$ ve $p_j < t < q_j$ ise

$$(z_k)(a(n_j,k,m_j)) = |(a(n_j,k,m_j)|$$

olarak aksi halde $z_k = 0$ olarak tanımlayalım. Tüm $j \in N$ için

$$|t_{m_j n_j}(Az)| > \delta$$

ve z, $\theta_k^{(s)} = 0$ gibi bir durumda inşa edildiğinden $z_k = 0$ ve dolayısıyla z istatistiksel sıfırdır. Bu A nın sınırlı istatistiksel sıfır bir diziyi $V_{\sigma 0}$ ın içine aldığı hipoteziyle çelişir.

(Yeterlilik) (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını ve $x \in S_0 \bigcap l_\infty$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.1.2 ü uygularsak $x = y + z$ yazabiliriz öyleki burada y sıfır bir dizidir ve

$$\lim \frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$$

dır. Genelliğini kaybetmeden

$$||x||_\infty \leq 1$$

ve bundan dolayı

$$||z||_\infty \leq 1$$

olduğunu varsayalım. Desteği z nin desteği tarafından içerilen herhangi bir dizinin ayrıca istatistiksel olarak boş olduğu bilinmektedir. Şimdi

$$Az \in V_{\sigma 0}$$

olduğunu iddia ediyoruz. İlk olarak her n ve m için $t_{mn}(Az)$ vardır. Bu (i) den ve z nin sınırlı oluşundan gelmektedir. Şimdi θ dizisini

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & z_k \neq 0 \;\; ise \\ 0, & aksi \;\; halde \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Yukarıda da belirttiği gibi, θ ayrıca istatistiksel sıfır ve her $k \in N$ için

$$|z_k| \leq \theta_k < 1$$

dir. Bunu takip ederek $s = s^{(\theta)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |t_{mn}(Az)| &= |\sum_n a(n,k,m) z_k| \\ &\leq \sum_k |a(n,k,m) z_k| \\ &\leq \sum_k |a(n,k,m)| \theta_k \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=s_{2t-1}}^{s_{2t}} |a(n,k,m)| \end{aligned}$$

elde ederiz. θ istatistiksel sıfır olduğundan $s^{(\theta)} \in S$ ve (ii) den n ye düzgün olarak

$$\lim_m t_{mn}(Az) = 0$$

ve böylece $Az \in V_{\sigma 0}$ elde ederiz ve sonuç olarak

$$Ax = Ay + Az \in V_{\sigma 0}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.1.2 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilinir.

Teorem 4.1.5 A bir $\sigma-$regular matris ve $A \in (S_0, V_{\sigma 0})$ olsun. Eğer bir $x = (x_k)$ sınırlı dizisi L ye istatistiksel yakınsak ise x, L ye invariant A-toplanabilirdir yani,

$$A \in (S \bigcap l_\infty, V_\sigma)$$

dır.

5 LACUNARY σ-İSTATİSTİKSEL TOPLANABİLİRLİK

Bu kısımda, Pancaroğlu ve Nuray (2013) tarafından yapılan çalışmada tanımlanan istatistiksel lacunary invaryant toplanabilir ve kuvvetli lacunary q-invaryant yakınsaklık $(0 < q < \infty)$ tanımları verilecektir. Ayrıca, istatistiksel lacunary invaryant yakınsaklık, istatistiksel lacunary invaryant toplanabilirlik ve kuvvetli lacunary q-invaryant yakınsaklık arasındaki ilişkileri veren teoremler incelenecektir.

Tanım 5.1 Bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$t_{rm}(x) = \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} x_{\sigma^j(m)}$$

olmak üzere, eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} t_{rm}(x) = L$$

ise bu durumda, $x = (x_k)$ dizisi L ye lacunary invaryant toplanabilirdir denir.

Bu toplanabilme

$$\sigma\theta - \lim_{r \to \infty} x_r = L$$

olarak belirtilir.

Tanım 5.2 $x = (x_k)$ dizisini alalım. Eğer tüm $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{r \leq n : |t_{rm}(x) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise bu durumda, $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel lacunary invaryant toplanabilirdir (veya istatistiksel lacunary σ-toplanabilir) denir.

Diğer bir deyişle, $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel invaryant toplanabilirdir ancak ve ancak $(t_{rm}(x))$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır. Bu durumda

$$S_{\theta\sigma} - \lim x = L$$

olarak yazılır.

Tüm istatistiksel lacunary invaryant toplanabilir diziler $S_{\theta\sigma}$ ile belirtilir.

Tanım 5.3 $x = (x_k)$ dizisi için eğer $m = 1, 2, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} |x_{\sigma^j(m)} - L|^q = 0, \quad (0 < q < \infty)$$

ise bu durumda, $x = (x_k)$ dizisinin L limitine kuvvetli lacunary $q-$invaryant yakınsak olduğu söylenir ve

$$x_k \to L([V_{\theta\sigma}]_q)$$

yazılır. Bu durumda L, x in $[V_{\theta\sigma}]_q$ limiti olarak adlandırılır.

$[V_{\theta\sigma}]_q$ ile tüm kuvvetli lacunary $q-$invaryant yakınsak dizilerin kümesi belirtir.

Teorem 5.4 Eğer $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve L ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsak ise bu durumda, $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel lacunary invaryant toplanabilirdir.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve L ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda, her bir $m \geq 1$ için

$$K_{\theta\sigma}(\varepsilon) = \{k_{r-1} \leq j \leq k_r : |x_{\sigma^j(m)} - L| \geq \varepsilon\}$$

olarak yazabiliriz. Buradan $r \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}
|t_{rm} - L| &= \left| \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} x_{\sigma^j(m)} - L \right| \\
&= \left| \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} (x_{\sigma^j(m)} - L) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{h_r} \sum_{j \in K_{\theta\sigma}(\varepsilon)} (x_{\sigma^j(m)} - L) \right| \\
&\leq \frac{1}{h_r} \left(\sup_{j,m} |x_{\sigma^j(m)} - L| \right) |K_{\theta\sigma}(\varepsilon)| \to 0
\end{aligned}$$

olur ki m ye göre düzgün olarak

$$t_{rm}(x) \to L$$

olmasını sağlar. Yani x, L ye lacunary invaryant yakınsaktır. Böylece x, L ye istatistiksel lacunary invaryant toplanabilirdir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 5.5

(i) Eğer $0 < q < \infty$ ve $x = (x_k)$ dizisinin kuvvetli lacunary $q-$invaryant yakınsaklık limiti L ise, o zaman L ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Eğer (x_k) sınırlı ve L ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsak ise o zaman $x_k \to L([V_{\theta\sigma}]_q)$ olur.

İspat: (i) Eğer $0 < q < \infty$ ve $x_k \to L([V_{\theta\sigma}]_q)$ ise $r \to \infty$ iken her bir $m \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \frac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q &\geq \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{j\in I_r \\ |x_{\sigma^j(m)}-L|\geq\varepsilon}}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q \\ &\geq \frac{\varepsilon^q}{h_r}|K_{\sigma\theta}(\varepsilon)|. \end{aligned}$$

Yani, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k_{r-1} \leq j \leq k_r : |x_{\sigma^j(m)} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur. Bu nedenle $x = (x_k)$, L ye invaryant istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Kabul edelim ki $x = (x_k)$ sınırlı ve L ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda, $\varepsilon \geq 0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{j \in I_r : |x_{\sigma^j(m)} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. $x \in l_\infty$ olduğundan, $M > 0$ vardır öyleki $|x_{\sigma^j(m)} - L| \leq M$, $(j = 1, 2, ..., m = 1, 2, ...)$ ve

$$S_1(r) = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{j\in I_r \\ j\notin K_{\sigma\theta}(\varepsilon)}}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q \quad \text{ve} \quad S_2(r) = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{j\in I_r \\ j\in K_{\sigma\theta}(\varepsilon)}}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{j\in I_r \\ j\notin K_{\sigma\theta}(\varepsilon)}}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{j\in I_r \\ j\in K_{\sigma\theta}(\varepsilon)}}|x_{\sigma^j(m)} - L|^q \\ &= S_1(r) + S_2(r) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi eğer $j \notin K_{\sigma\theta}(\varepsilon)$ ise $S_1(r) < \varepsilon^q$ dur. $j \in K_{\sigma\theta}(\varepsilon)$ için

$$S_2(r) \leq (\sup |x_{\sigma^j(m)} - L|)\frac{|K_{\sigma\theta}(\varepsilon)|}{h_r} \leq M\frac{K_{\sigma\theta}(\varepsilon)}{h_r} \to 0$$

elde edilir. Bu nedenle m ye göre düzgün olarak,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r} |x_{\sigma^j(m)} - L|^q = 0$$

olur. Böylece $x_k \to L([V_{\theta\sigma}]_q)$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 5.6 $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel lacunary invaryant toplanabilirdir ancak ve ancak $K = \{(r_i) : r_i < r_{i+1}\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki

$$\delta(K) = 1 \;\; ve \;\; \theta\sigma - \lim x_{r_n} = L$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $K = \{(r_i) : r_i < r_{i+1}\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi var öyleki

$$\delta(K) = 1 \;\; \text{ve} \;\; \theta\sigma - \lim x_{r_n} = L$$

olsun. Bu durumda, N pozitif bir tam sayı öyleki $n > N$ ve herbir $m \geq 1$ için

$$|t_{r_n m}(x) - L| < \varepsilon \tag{5.1}$$

dir. Şimdi

$$K_\varepsilon(\theta\sigma) = \{n \in N : |t_{r_n m}(x) - L| \geq \varepsilon\} \;\; \text{ve} \;\; K' = \{r_{N+1}, r_{N+2}, ...\}$$

alalım. Bu durumda,

$$\delta(K') = 1 \;\; \text{ve} \;\; K_\varepsilon(\theta\sigma) \subseteq \mathbb{N} - K'$$

olur ki bu m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{r \leq n : |t_{r_n m}(x) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olmasını sağlar.

Böylece $x = (x_k)$, L ye istaistiksel lacunary invaryant toplanabilirdir.

Tersine $x = (x_k)$, L ye istatistiksel lacunary invaryant toplanabilir olsun. $r = 1, 2, ...$ ve $m = 1, 2, ...$ için

$$K_p(\theta\sigma) = \left\{ j \in \mathbb{N} : |t_{r_j m(x)} - L| \geq \frac{1}{p} \right\}$$

ve

$$M_p(\theta\sigma) = \left\{ j \in \mathbb{N} : |t_{r_j m(x)} - L| < \frac{1}{p} \right\}$$

alalım. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : |t_{r_j m(x)} - L| \geq \frac{1}{p} \right\} \right| = 0$$

ve

$$M_1(\theta\sigma) \supset M_2(\theta\sigma) \supset M_3(\theta\sigma) \supset \cdots \supset M_i(\theta\sigma) \supset M_{i+1}(\theta\sigma) \supset \cdots \tag{5.2}$$

ve m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{ j \leq n : |t_{r_j m(x)} - L| < \frac{1}{p} \}| = 1 \tag{5.3}$$

elde edilir.

Şimdi $j \in M_p(\theta\sigma)$ için (x_k) nın L ye lacunary invaryant toplanabilir olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki (x_{k_j}), L ye lacunary invaryant toplanabilir olmasın. Dolayısıyla, $\varepsilon > 0$ vardır öyleki sonsuz çoklukta terim için

$$|t_{r_j m(x)} - L| \geq \varepsilon$$

dur.

$$M_\varepsilon(\theta\sigma) = \{ j \in \mathbb{N} : |t_{r_j m(x)} - L| < \varepsilon \} \ \text{ ve } \ \varepsilon > \frac{1}{p} \ \ (p = 1, 2, ...)$$

alalım. Bu durumda, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{ j \leq n : |t_{r_j m(x)} - L| < \varepsilon \}| = 0 \tag{5.4}$$

ve (5.2) den,

$$M_p(\theta\sigma) \subset M_\varepsilon(\theta\sigma)$$

elde ederiz. Böylece, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ j \leq n : |t_{r_j m(x)} - L| < \frac{1}{p} \right\} \right| = 0 \tag{5.5}$$

olur ki bu durum (5.2) ile çelişir ve böylece x_{k_j}, L ye lacunary invaryant toplanabilirdir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Benzer olarak, aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 5.7 $x = (x_k)$ dizisi L ye lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $K = \{(k_i) : k_i < k_{i+1}\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $S_{\theta\sigma}(K) = 1$ ve $\sigma - \lim x_{k_n} = L$ dir.

6 KAYNAKLAR

Ahmad, Z. U., Mursaleen, M. and Khan, Q. A. (1994). Invariant means and some matrix transformations. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25:** 353–359.

Bayraktar, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Bell, E. T. (1929). Certain invariant sequences of polinamials. *Transactions of the American Mathematical Society*, **31:** 405–421.

Boss, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press Inc., New York.

Boss, J. and Seydell D. (1999). Some remarks an invariant means and almost convergence. *Journal of Analysis*, **7:** 21–30.

Choudhary, B. and Nanda, S. (1989). Functional Analysis with Applications, John wiley-Sons, NewYork.

Connor, J. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canadian Mathematical Bulletin*, **32:** 194–198.

Connor, J. (1988). The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences, *Analysis*, **8:** 47–63.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique, *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Freedman, A., Sember, J., Rephael, M. (1978). Some Cesaro-type summability spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society,* **37**(3): 508–520.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis*, **5:** 301–313.

Fridy, J. A. (1993). Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118:** 1187–1192.

Fridy, J. A. and Orhan C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, **1:** 43–51

Fridy, J. A. and Orhan C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125:** 3625–3631.

Karakaya, V. (2004). On lacunary σ-statstical convergence. *Information Sciences*, **166:** 271–280.

Karakaya, V. and Şimşek, N. (2003). On lacunary invariant sequence spaces defined by a sequence of modulus functions. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica,* **48:** 43–47.

Karakaya V. and Şimşek N. (2004). On lacunary invariant sequence spaces defined by a sequence of modulus functions. *Applied Mathematics and Computation*, **156**(3): 597–603.

Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent seqences. *Acta Mathematica*, **80:** 167–190.

Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Maddox, I. J. (1978). A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83:** 61–65.

Maddox, I. J. (1988). Statitical convergence in a locally convex space, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **104:** 141–145.

Maddox, I. J. (1986). Sequence spaces defined by a modulus. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **100:** 161-166.

Mursaleen, M. (1979). On infinite matrices and invariant means. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **10:** 457-460.

Mursaleen, M. (1979). Invariant means and some matrix transformations. *Tamkang Journal of Mathematics*, **10:** 183–188.

Mursaleen, M. (1983). On some new invariant matrix methods of summability. *Quarterly Journal of Mathematics*, **34:** 77-86.

Mursaleen, M. (1983). Matrix transformations between some new sequence spaces. *Houston Journal of Mathematics*, **9:** 505–509.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H. (2009). On invariant mean and statisticaly convergence. *Applied Mathematics Letters*, **22:** 1700-1704.

Musayev, B., Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

Nakano, H. (1953). Concave modulars. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **1:** 29–49.

Niven, I., Zuckermann, H.S. and Montgomery, H.L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley and Sons Incorporated Company, New York.

Nuray, F. and Ruckle, W.H. (2000). Generalized statistical convergence and convergence free spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **245**(2): 513-527.

Nuray, F. and Savaş, E. (1994). Invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25**(3): 267–274.

Nuray, F. and Savaş, E. (1993). Some new sequence spaces defined by a modulus function. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **24:** 657-663.

Pancaroğlu N. and Nuray, F. (2013). Statistical lacunary invariant summability, *Theoretical Mathematics and Applications*, **3**(2): 71–78.

Pancaroğlu N. (2014). Küme Dizilerinin İnvaryant İstatistiksel ve Lacunary İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklığı, Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Pehlivan, S. (1989). Sequence space defined by a modulus function. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, **5:** 875–880.

Pehlivan, S. and Fisher, B. (1995). Some sequence spaces defined by a modulus. *Mathematica Slovaca*, **45:** 275–280.

Raimi, R.A. (1963). Invariant means and invariant matrix methods of summability. *Duke Mathematical Journal*, **30:** 81-94.

Rath, D. and Tripaty, B. C. (1994). On statistically convergence and statistically Cauchy sequences. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25**(4): 381–386.

Ruckle, W. (1973). FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. *Canadian Journal of Mathematics*, **25:** 973–978.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca* **30:** 139–150.

Savaş, E. (1989). Some sequence spaces involving invariant means. *Indian Journal of Mathematics*, **31**: 1–8.

Savaş, E. (1990). On lacunary strong σ-convergence. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **21**(4): 359–365.

Savaş, E. (1989). Strong σ-convergence sequences. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **81**: 295–300.

Savaş, E. (1989). Strongly σ-summable and strongly σ-convergence sequences. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **81**: 173–178.

Savaş, E. and Nuray, F. (1993). On σ-statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence. *Mathematica Slovaca*, **3**: 309–315.

Savaş, E. (1992). On strong almost A summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Journal of Pure and Applied Mathematics*, **23:** 217-222.

Savaş, E. (1999). On some generalized sequence spaces defined by a modulus. *Journal of Pure and Applied Mathematics*, **30:** 459-464.

Savaş, E. and Nuray, F. (1993). On σ statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence. *Mathematica Slovaca*, **43:** 309-315.

Savaş, E. and Patterson, R. (2006). σ asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Central European Journal of Mathematics*, **4:** 648-655.

Savaş, E. and Rhoades, B. E. (2002). On some new sequences space of invariant means defined by Orlicz functions. *Mathematical Inequalities and Applications*, **5:** 271-281.

Savaş, E. and Savaş, R. (2003). On some sequence spaces and lacunary σ-statistical convergence. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8:** 165-172.

Schaefer, P. (1972). Infinite matrices and invariant means. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36**: 104–110.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly,* **66:** 361–375.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Özlem ÖZÇELİK
Doğum Yeri ve Tarihi	: Erzurum, 22/07/1993
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: ozlem.ozclk@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Mehmet Seyfi Eraltay Lisesi, 2011.
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2015.