BAZI ASİMPTOTİK DENKLİK TİPLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arif ÖĞREDEN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül, 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ASİMPTOTİK DENKLİK TİPLERİ

Arif ÖĞREDEN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2017

TEZ ONAY SAYFASI

Arif ÖĞREDEN tarafından hazırlanan "Bazı Asimptotik Denklik Tipleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/09/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik **Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Başkan : Prof. Dr. Nesip AKTAN
Konya Necmettin Erbakan Üniv. Fen Fak.

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/09/2017

Arif ÖĞREDEN

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

BAZI ASİMPTOTİK DENKLİK TİPLERİ

Arif ÖĞREDEN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Bu tez çalışması altı ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak konunun tarihi gelişimi ve genel bir literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, reel sayı dizilerinin asimptotik lacunary istatistiksel denkliği konusu ile ilgili temel kavramlar tanıtılarak bunlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, bir I ideali kullanılarak, reel sayı dizilerinin I-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği konusu ile ilgili temel kavramlar verilip; bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır.

Beşinci bölümde, pozitif reel sayıların $p = (p_k)$ dizisini kullanarak, reel sayı dizilerinin I-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği konusu genelleştirilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2017, v + 28 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, I-yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, lacunary dizi, asimptotik denklik.

ABSTRACT
M.Sc Thesis

SOME ASYMPTOTIC EQUIVALENCE TYPES

Arif ÖĞREDEN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Matematics

Supervisor: Assit. Prof. Uğur ULUSU

This thesis consists of six main parts.

The first part is devoted to the introduction part that contains of the historical development of the subject and a general literature about it.

In the second part, the basic concepts necessary for our work are given.

In the third part, basic concepts related to the asymptotic lacunary statistical equivalence of real number sequences are introduced and the relations between them are shown with examples and theorems.

In the fourth part, basic concepts related to the I-asymptotic lacunary statistical equivalence of real number sequences are given by using an I ideal; their specific properties and the relations between these concepts are explained by examples and theorems.

In the fifth part, the I-asymptotic lacunary statistical equivalence of real number sequences is generalized using the $p = (p_k)$ sequence of positive real numbers.

In the sixth section, which is the last chapter, the sources in the literature that we use during our study are listed.

2017, v + 28 pages

Key Words: Statistical convergence, I-convergence, Cesàro summability, lacunary sequence, asymptotically equivalence.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya, yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Arif ÖĞREDEN
AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

3. ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER 8

4. I-ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER 13

5. I-ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLERİN BİR GENELLEŞTİRMESİ 19

6. KAYNAKLAR 26

ÖZGEÇMİŞ 28

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$x = (x_k)$	Reel sayı dizisi
l_∞	Sınırlı reel veya kompleks diziler kümesi
$\theta = \{k_r\}$	Lacunary dizi
$2^{\mathbb{N}}$	Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
I_f	Sonlu elemanlı kümelerden oluşan ideal
$x \sim y$	Asimptotik denk diziler
$x \overset{S^L}{\sim} y$	Asimptotik istatistiksel denk diziler
$x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$	Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
S_θ^L	Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler kümesi
$x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$	Kuvvetli Asimptotik lacunary denk diziler
$[N]_\theta^L$	Kuvvetli Asimptotik lacunary denk diziler kümesi
$inf_k x_k$	$x = (x_k)$ dizisinin alt sınırlarının en büyüğü
$sup_k x_k$	$x = (x_k)$ dizisinin üst sınırlarının en küçüğü
$x \overset{S^L(I)}{\sim} y$	I-asimptotik istatistiksel denk diziler
$x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$	I-asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
$S_\theta^L(I)$	I-asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler kümesi
$x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$	Kuvvetli I-asimptotik lacunary denk diziler
$[N]_\theta^L(I)$	Kuvvetli I-asimptotik lacunary denk diziler kümesi
$x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$	$p = (p_k)$ dizisi için kuvvetli I-asimptotik lacunary denk diziler
$[N]_\theta^{L(p)}(I)$	$p = (p_k)$ dizisi için kuvvetli I-asimptotik lacunary denk diziler kümesi
$x \overset{\sigma^{(p)}(I)}{\sim} y$	$p = (p_k)$ dizisi için Kuvvetli Cesaro I-asimptotik denk diziler

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, Analiz ve Fonksiyonel Analiz alanının temel kavramlarından biridir. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan İstatistiksel Yakınsaklık kavramı ise Toplanabilme Teorisinde büyük öneme sahiptir. Fast (1951)'in istatistiksel yakınsak kavramını tanıtmasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve bazı genelleştirmeleri başta Buck (1953), Schoenberg (1959), Salat (1980), Fridy (1985) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar verilmiştir.

Fridy ve Orhan (1993) lacunary dizi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla aralarında önemli ilişkiler bulunan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin altkümelerinden oluşan bir ideal kavramına dayanan ve istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan I-yakınsaklık kavramı ise Kostyrko vd. (2000) tarafından verilmiştir. Bu kavramın da uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi başta Dems (2004), Kostyrko (2005), Savaş ve Das (2011) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar çalışılmıştır.

Son zamanlarda Das vd. (2011) ideal kavramını kullanarak, I-istatistiksel yakınsaklık ve I-lacunary istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılan kavramları tanıtmışlardır.

Marouf (1993) asimptotik denk diziler ve asimptotik regüler matrisler için tanımlar vermiştir. Patterson (2003) bu tanımların asimptotik istatistiksel denk bir benzerini ve negatif olmayan toplanabilir matrisler için doğal regülerlik şartlarını vererek bu kavramları genişletmiştir.

Patterson ve Savaş (2006) asimptotik denklik, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary dizi kavramlarının doğal kombinasyonu olan asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını tanıtmışlardır.

Savaş (2013) ise, asimptotik denklik ve I-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarının doğal kombinasyonu olan I-asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını vermiştir.

Son zamanlarda, Savaş ve Gümüş (2013) pozitif reel sayıların $p = (p_k)$ dizisini kullanarak I-asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını genelleştirmişlerdir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, matematik alanında önemli olan ve çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gereken temel kavramlardan bahsedilmiştir.

İlerleyen bölümlerde, sırasıyla Patterson ve Savaş (2006), Savaş (2013) ve Savaş ve Gümüş (2013) tarafından yapılan çalışmalardaki temel tanım, örnek ve teoremler analiz edilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N} = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ (doğal sayılar) kümesi olan her fonksiyona *dizi* denir (Balcı 1999).

Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani reel terimli bir dizi

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Genel terimi x_n olan bir dizi $(x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2 (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir ve

$$lim\, x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1999).

Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye *yakınsak dizi* denir.

Tanım 2.3 Eğer her $n > 0$ sayısı için $|x_n| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabit sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Balcı 1999).

Tüm sınırlı reel veya kompleks dizilerin kümesi l_∞ ile gösterilir.

Tanım 2.4 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.5 $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x = L$ biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

Burada $|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ ifadesi $\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

Tanım 2.6 $\theta = \{k_r\}$ dizisi $(r = 1,2,3, \dots)$, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi ise, *lacunary dizi* olarak adlandırılır (Fridy and Orhan 1993).

Çalışma boyunca $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile belirtilip, ayrıca $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı ise q_r ile gösterilecektir.

Tanım 2.7 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye *kuvvetli lacunary yakınsaktır* denir (Fridy and Orhan 1993).

Tanım 2.8 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L ye *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S_\theta - \lim x = L$ biçiminde gösterilir (Fridy and Orhan 1993).

Tanım 2.9 Bir $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *ideal* olması için gerek ve yeter şart,

i. $\emptyset \in I$,

ii. Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$,

iii. Her $A \in I$ ve $B \subset$ A için $B \in I$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $\mathbb{N} \notin I$ ise, I ya bir *non-trivial ideal* denir. Ayrıca I bir non-trivial ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in I$ oluyorsa, I idealine *uygun ideal* denir.

Bu çalışmadaki bütün idealler uygun ideal olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.10 Boştan farklı bir $F \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *süzgeç* olması için gerek ve yeter şart,

i. $\emptyset \notin F$,

ii. Her $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$,

iii. Her $A \in F$ ve her $B \supset$ A için $B \in F$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

Önerme 2.1 Eğer I, $\mathbb{N}$ nin non-trivial ideali ise, bu durumda

$$F(I) = \{M \subset \mathbb{N}: \exists A \in I: M = \mathbb{N} \backslash A\}$$

ailesi $\mathbb{N}$ de bir süzgeçtir. Bu $F(I)$ ya I ile ilişkili süzgeç denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.11 $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L ye *I-yakınsaktır* denir ve $I - \lim x = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $I = I_f$ olarak alınırsa; I_f, $\mathbb{N}$ nin bir uygun idealidir ve bu durumda *I-yakınsaklık* ile Tanım 2.2 deki alışılmış yakınsaklık çakışır.

Tanım 2.12 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}|\{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L ye *I-istatistiksel yakınsaktır* denir ve $x_k \to L(S(I))$ biçiminde gösterilir (Savaş and Das 2011).

Tüm *I-istatistiksel yakınsak* dizilerin sınıfı $S(I)$ ile gösterilir.

Tanım 2.13 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}|x_k - L| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L ye *kuvvetli I-lacunary yakınsaktır* denir ve $x_k \to L(N_\theta(I))$ biçiminde gösterilir (Das *et al*. 2011).

Tüm *kuvvetli I-lacunary yakınsak* dizilerin sınıfı $N_\theta(I)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L ye *I-lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve $x_k \to L(S_\theta(I))$ biçiminde gösterilir (Das *et al*. 2011).

Tüm *I-lacunary istatistiksel yakınsak* dizilerin sınıfı $S_\theta(I)$ ile gösterilir.

Tanım 2.15 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_k}{y_k} = 1$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine *asimptotik denktir* denir ve $x \sim y$ şeklinde gösterilir (Marouf 1993).

Tanım 2.16 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *asimptotik istatistiksel denktir* denir ve $x \overset{S^L}{\sim} y$ ile gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *asimptotik istatistiksel denktir* denir (Patterson 2003).

Tanım 2.17 $p = (p_k)$ bir pozitif reel sayı dizisi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine p dizisi için L katlı *kuvvetli Cesàro asimptotik denktir* denir ve $x \overset{\sigma(p)}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *kuvvetli Cesàro asimptotik denktir* denir (Savaş and Patterson 2008).

Tanım 2.18 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $p = (p_k)$ bir pozitif reel sayı dizisi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\sum_{k\epsilon I_r} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine p dizisi için L katlı *kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir ve $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe p dizisi için *kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir (Savaş and Patterson 2008).

3. ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bu bölümde, Patterson ve Savaş (2006) tarafından yapılan “reel sayı dizilerinin asimptotik lacunary istatistiksel denkliği” kavramı ile ilgili çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir ve $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir.

$x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ şartını sağlayan tüm $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin kümesi S_θ^L ile gösterilir.

Tanım 3.2 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir ve $x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir.

$x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ şartını sağlayan tüm $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin kümesi $[N]_\theta^L$ ile gösterilir.

Teorem 3.1 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda,

i. *(a)* $x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ dir.

(b) $[N]_\theta^L$ kümesi S_θ^L nin öz alt kümesidir.

ii. Eğer $x, y \in l_\infty$ ve $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y \Rightarrow x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ dir.

iii. $S_\theta^L \cap l_\infty = [N]_\theta^L \cap l_\infty$ dir.

İspat. *i.(a)* $x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k\in I_r} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon \cdot \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılıp $r \to \infty$ için limite geçilir,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

ve $x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ olduğu göz önünde tutulursa $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ elde edilir.

i.(b) Bu şıkkın ispatı için $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$(x_k) = \left(1,2,\dots,[\![\sqrt{h_r}]\!],0,0,\dots\right)$$

$$(y_k) = (1,1,\dots)$$

Bu iki dizi için $x \overset{S_\theta^0}{\sim} y$ dir, fakat $x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ değildir.

ii. $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in l_\infty$ ve $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ olsun. $x, y \in l_\infty$ olduğundan, her k için,

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right| = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right| + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|$$

$$\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| + \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $r\to\infty$ için limiti alınır,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right| \leq \lim_{r\to\infty}\frac{M}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| + \varepsilon$$

ve $x\overset{S_\theta^L}{\sim}y$ olduğu göz önünde tutulursa $x\overset{[N]_\theta^L}{\sim}y$ elde edilir.

iii. Bu durum, ***(i)*** ve ***(ii)*** den doğrudan elde edilir.

Teorem 3.2 $\theta=\{k_r\}$, $\lim inf_r q_r > 1$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, bu durumda

$$x\overset{S^L}{\sim}y \Rightarrow x\overset{S_\theta^L}{\sim}y$$

dir.

İspat. $\lim inf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük r için $q_r\geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır, öyle ki

$$\frac{h_r}{k_r}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, her $\varepsilon>0$ ve yeterince büyük r için,

$$\frac{1}{k_r}\left|\left\{k\leq k_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \geq \frac{1}{k_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta}\cdot\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafının $r\to\infty$ için limiti alınır,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r}\left|\left\{k\leq k_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\delta}{1+\delta}\cdot\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

ve $x\overset{S^L}{\sim}y$ olduğu göz önünde tutulursa $x\overset{S_\theta^L}{\sim}y$ elde edilir.

Teorem 3.3 $\theta = \{k_r\}$, $\lim sup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, bu durumda

$$x \overset{S_\theta^L}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S^L}{\sim} y$$

dır.

İspat. $\lim sup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda, her $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $B > 0$ vardır. $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Böylece, her $j \geq R$ için

$$a_j = \frac{1}{h_j}\left|\left\{k \in I_j : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $R > 0$ vardır. Burada ayrıca, her $j = 1,2,\ldots$ için $a_j < K$ olacak şekilde $K > 0$ bulunabilir. Şimdi n sayısı, $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < n \leq k_r$ şartını sağlayan herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \leq k_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\} \\
&\quad + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\} \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\} \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}k_1}\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}(k_2 - k_1)}\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \cdots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}(k_R - k_{R-1})}\left|\left\{k \in I_R : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \cdots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}(k_r - k_{r-1})}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}}a_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}}a_2 + \cdots + \frac{(k_R - k_{R-1})}{k_{r-1}}a_R
\end{aligned}$$

$$+\frac{k_{R+1}-k_R}{k_{r-1}}a_{R+1}+\cdots+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}a_r$$

$$\leq \left\{\sup_{j\geq 1} a_j\right\}\frac{k_R}{k_{r-1}}+\left\{\sup_{j\geq R} a_j\right\}\frac{k_r-k_R}{k_{r-1}}$$

$$\leq K\frac{k_R}{k_{r-1}}+\varepsilon B$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafının $r \to \infty$ için (doğal olarak $n \to \infty$ için de) limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq K \cdot \lim_{r\to\infty}\frac{k_R}{k_{r-1}}+\varepsilon \cdot B$$

olup $x \overset{S^L}{\sim} y$ elde edilir.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 birlikte düşünülmesiyle aşağıdaki Teorem elde edilir.

Teorem 3.4 $\theta = \{k_r\}$, $1 < \lim inf_r q_r \leq \lim sup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, bu durumda

$$x \overset{S^L}{\sim} y = x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$$

dir.

4. *I*-ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bu bölümde, Savaş (2013) tarafından yapılan “reel sayı dizilerinin I-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği” kavramı ile ilgili çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.1 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *I-asimptotik istatistiksel denktir* denir ve $x \overset{S^L(I)}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *I-asimptotik istatistiksel denktir* denir.

$I = I_f$ olması halinde L katlı *I-asimptotik istatistiksel denklik* ile Patterson (2003) tarafından verilen L katlı *asimptotik istatistiksel denklik* çakışır.

Tanım 4.2 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *I-asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir ve $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *I-asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir.

$x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ şartını sağlayan tüm $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin kümesi $S_\theta^L(I)$ ile gösterilir.

$I = I_f$ olması halinde, L katlı *I-asimptotik lacunary istatistiksel denklik* ile Patterson ve Savaş (2006) tarafından verilen L katlı *asimptotik lacunary istatistiksel denklik* çakışır.

Tanım 4.3 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *kuvvetli I-asimptotik lacunary denktir* denir ve $x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *kuvvetli I-asimptotik lacunary denktir* denir.

$x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ şartını sağlayan tüm $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin kümesi $[N]_\theta^L(I)$ ile gösterilir.

Teorem 4.1 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda,

i. *(a)* $x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

(b) $[N]_\theta^L(I)$ kümesi $S_\theta^L(I)$ nin öz alt kümesidir.

ii. Eğer $x, y \in l_\infty$ ve $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

iii. $S_\theta^L(I) \cap l_\infty = [N]_\theta^L(I) \cap l_\infty$ dir.

İspat. *i.(a)* $x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \cdot \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\varepsilon \cdot h_r}$ ile çarpılıp,

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

ve $x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ olduğu göz önünde tutulursa, her $\delta > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon \cdot \delta\right\} \in I$$

elde edilir. Böylece $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

i.(b) Bu şıkkın ispatı için $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$(x_k) = \left(1,2, \dots, [\![\sqrt{h_r}]\!], 0,0, \dots\right),$$

$$(y_k) = (1,1, \dots).$$

Bu iki dizi için $x \overset{S_\theta^0(I)}{\sim} y$ dir, fakat $x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ değildir.

ii. $x = (x_k),\ y = (y_k) \in l_\infty$ ve $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ olsun. $x, y \in l_\infty$ olduğundan, her k için

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k \in I_r \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k \in I_r \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| < \varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|$$

$$\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ olduğu da göz önünde tutulursa,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \in I$$

elde edilir. Böylece $x \overset{[N]_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

iii. Bu durum, ***(i)*** ve ***(ii)*** den doğrudan elde edilir.

Teorem 4.2 $\theta=\{k_r\}$, $\lim inf_r q_r>1$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, bu durumda

$$x \overset{S^L(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$$

dir.

İspat. $\lim inf_r q_r>1$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük r için $q_r\geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır, öyle ki

$$\frac{h_r}{k_r}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, her $\varepsilon>0$ ve yeterince büyük r için

$$\frac{1}{k_r}\left|\left\{k\leq k_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{1}{k_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq\frac{\delta}{1+\delta}\cdot\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $x \overset{S^L(I)}{\sim} y$ olduğu da göz önünde tutulursa, her $\delta>0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

$$\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{k_r}\left|\left\{k\leq k_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{\delta.\alpha}{(1+\alpha)}\right\}\in I$$

elde edilir. Böylece $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

Bir sonraki sonuç için $\theta=\{k_r\}$ dizisinin

$$C\in F(I)\Rightarrow\bigcup\{n:k_{r-1}<n<k_r,r\in C\}\in F(I)$$

şartını sağlayan bir lacunary dizi olduğu kabul edilecektir.

Teorem 4.3 $\theta=\{k_r\}$, $\lim sup_r q_r<\infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, bu durumda

$$x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S^L(I)}{\sim} y$$

dır.

İspat. $\lim sup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda, genelliği bozmaksızın, her $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $0 < B < \infty$ sayısı vardır. $\varepsilon, \delta, \delta_1 > 0$ için

$$C = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \delta \right\}$$

ve

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \delta_1 \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ ise, $C \in F(I)$ olduğu açıktır. Ayrıca burada, her $j \in C$ için

$$a_j = \frac{1}{h_j} \left| \left\{ k \in I_j : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \delta$$

dır. Bazı $r \in C$ ler için $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \leq k_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \left| \left\{ k \in I_1 : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \right\} \\
&\quad + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \left| \left\{ k \in I_2 : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \right\} \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \right\} \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}} \frac{1}{h_1} \left| \left\{ k \in I_1 : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\quad + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} \frac{1}{h_2} \left| \left\{ k \in I_2 : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\quad + \cdots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\quad + \cdots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}} a_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} a_2 + \cdots + \frac{(k_r - k_{r-1})}{k_{r-1}} a_r
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{j \in C} a_j \frac{k_r}{k_{r-1}} < B \cdot \delta$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $\delta_1 = \frac{\delta}{B}$ seçilir ve $C \in F(I)$ olmak üzere

$$\bigcup \{n: k_{r-1} < n \leq k_r, r \in C\} \subset T$$

olduğu da göz önüne alınırsa, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi üzerindeki kabulümüzden dolayı T kümesinin aynı zamanda $F(I)$ ya ait olduğu anlaşılır ki, bu da ispatı tamamlar.

5. *I*-ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLERİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Bu bölümde, Savaş ve Gümüş (2013) tarafından yapılan "reel sayı dizilerinin I-asimptotik lacunary istatistiksel denkliği kavramının genelleştirmesi" konusu ile ilgili çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 5.1 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine p dizisi için L katlı *kuvvetli* I*-asimptotik lacunary denktir* denir ve $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ biçiminde gösterilir.

$x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ şartını sağlayan tüm $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin kümesi $[N]_\theta^{L(p)}(I)$ ile gösterilir.

Eğer, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ alınırsa, $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ yerine $x \overset{[N]_\theta^{Lp}(I)}{\sim} y$ yazılır.

Teorem 5.1 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda,

i. $x \overset{[N]_\theta^{Lp}(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

ii. Eğer $x, y \in l_\infty$ ve $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{[N]_\theta^{Lp}(I)}{\sim} y$ dir.

iii. $S_\theta^L(I) \cap l_\infty = [N]_\theta^{Lp}(I) \cap l_\infty$ dir.

İspat. *i.* $x \overset{[N]_\theta^{Lp}(I)}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^p \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^p \geq \varepsilon^p \cdot \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\varepsilon^p \cdot h_r}$ ile çarpılıp,

$$\frac{1}{\varepsilon^p \cdot h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^p \geq \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq \varepsilon\right\}\right|$$

ve $x \overset{[N]_\theta^{L_p}(I)}{\sim} y$ olduğu göz önünde tutulursa, her $\delta > 0$ için,

$$\left\{r\in\mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r\in\mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^p \geq \varepsilon^p\cdot\delta\right\}\in I$$

elde edilir. Böylece $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

ii. $x=(x_k), y=(y_k)\in l_\infty$ ve $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ olsun. $x, y\in l_\infty$ olduğundan, her k için,

$$\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\leq M$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^p &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^p + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^p\\ &\leq \frac{1}{h_r}M^p\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| + \frac{1}{h_r}\varepsilon^p\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\varepsilon\right\}\right|\\ &\leq \frac{M^p}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| + \varepsilon^p.\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ olduğu da göz önünde tutulursa, her $\delta > 0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^p \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{r\in\mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon^p}{M^p}\right\}\in I$$

elde edilir. Bu ise $x \overset{N_\theta^{L_p}(I)}{\sim} y$ olduğu sonucunu verir.

iii. Bu durum, ***(i)*** ve ***(ii)*** den doğrudan elde edilir.

Teorem 5.2 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi, $inf_k p_k = h$ ve $sup_k p_k = H$ olsun. Bu durumda,

$$x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$$

dir.

İspat. $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k} = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k} + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k}$$

$$\geq \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k}$$

$$\geq \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}(\varepsilon)^{p_k}$$

$$\geq \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}min\{(\varepsilon)^h,(\varepsilon)^H\}$$

$$\geq \frac{1}{h_r}min\{(\varepsilon)^h,(\varepsilon)^H\}\cdot\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ olduğu da göz önünde tutulursa, her $\delta > 0$ için

$$\left\{r\in\mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\epsilon I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \geq\delta\right\}$$

$$\subseteq \left\{r\in\mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k}\geq\delta\cdot min\{(\varepsilon)^h,(\varepsilon)^H\}\right\}\in I$$

elde edilir. Böylece $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ dir.

Teorem 5.3 $x=(x_k), y=(y_k)\in l_\infty$, $inf_k p_k = h$ ve $sup_k p_k = H$ olsun. Bu durumda,

$$x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y \Rightarrow x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$$

dir.

İspat. $x=(x_k), y=(y_k)\in l_\infty$ ve $\varepsilon>0$ olsun. $x,y\in l_\infty$ olduğundan, her k için,

$$\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\leq M$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Böylece, her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k} = \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k} + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\varepsilon}}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k}$$

$$\leq \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\epsilon I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\cdot max\{M^h,M^H\}$$

$$+\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\epsilon I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\cdot\frac{max(\varepsilon)^{p_k}}{2}$$

$$\leq max\{M^h,M^H\}\cdot\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\epsilon I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{max\{\varepsilon^h,\varepsilon^H\}}{2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $x \overset{S_\theta^L(I)}{\sim} y$ olduğu da göz önünde tutulursa,

$$\left\{r\in\mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|^{p_k}\geq\varepsilon\right\}$$

$$\subseteq \left\{r\in\mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\epsilon I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\frac{2\varepsilon-max\{\varepsilon^h,\varepsilon^H\}}{2\cdot max\{M^h,M^H\}}\right\}\in I$$

elde edilir. Böylece $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ dir.

Tanım 5.2 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine p dizisi için L katlı *kuvvetli Cesàro* I*-asimptotik denktir* denir ve $x \overset{\sigma^{(p)}(I)}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *kuvvetli Cesàro* I*-asimptotik denktir* denir.

Teorem 5.4 $\theta = \{k_r\}$, $\lim inf_r\, q_r > 1$ şartını sağlayan bir lacunary dizi olsun. Bu durumda,

$$x \overset{\sigma^{(p)}(I)}{\sim} y \;\; \Rightarrow \;\; x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$$

dir.

İspat. $\lim inf_r\, q_r > 1$ olsun. Bu durumda, tüm r ler için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \quad , \quad \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $\varepsilon > 0$ olsun ve

$$S = \left\{k_r \in \mathbb{N}: \frac{1}{k_r}\sum_{k=1}^{k_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} < \varepsilon\right\}$$

kümesi tanımlansın. Burada $x \overset{\sigma^{(p)}(I)}{\sim} y$ olduğu göz önünde tutulursa, $S \in F(I)$ olduğu açıktır. Her bir $k_r \in S$ için,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} = \frac{1}{h_r}\sum_{k=1}^{k_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} - \frac{1}{h_r}\sum_{k=1}^{k_{r-1}}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k}$$

$$= \frac{k_r}{h_r}\cdot\frac{1}{k_r}\sum_{k=1}^{k_r}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k} - \frac{k_{r-1}}{h_r}\cdot\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{k=1}^{k_{r-1}}\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^{p_k}$$

$$\leq \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right) \cdot \varepsilon - \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon'$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi

$$\eta = \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right) \cdot \varepsilon - \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon'$$

ile belirtilsin. Böylece,

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} < \eta \right\} \in F(I)$$

olup ispat tamamlanır.

Bir sonraki sonuç için $\theta = \{k_r\}$ dizisinin

$$C \in F(I) \Rightarrow \bigcup \{n: k_{r-1} < n < k_r, r \in C\} \in F(I)$$

şartını sağlayan bir lacunary dizi olduğu kabul edilecektir.

Teorem 5.5 $\theta = \{k_r\}$, $\lim sup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizi olsun. Bu durumda,

$$x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y \Longrightarrow x \overset{\sigma^{(p)}(I)}{\sim} y$$

dir.

İspat. $\lim sup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda, her $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı vardır. Şimdi $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için

$$T = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} < \varepsilon_1 \right\}$$

ve

$$R = \left\{ n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} < \varepsilon_2 \right\}$$

kümeleri tanımlansın.

Eğer $x \overset{[N]_\theta^{L(p)}(I)}{\sim} y$ ise, $T \in F(I)$ olduğu açıktır. Ayrıca, her $j \in T$ için

$$a_j = \frac{1}{h_j} \sum_{k \in I_j} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} < \varepsilon_1$$

dir. $r \in T$ olmak üzere için $k_{r-1} < n < k_r$ olacak şekilde $n \in N$ seçelim. Böylece,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} \leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k}$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sum_{k \in I_1} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} + \sum_{k \in I_2} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} + \cdots + \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} \right)$$

$$= \frac{k_1}{k_{r-1}} \left(\frac{1}{h_1} \sum_{k \in I_1} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} \right) + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} \left(\frac{1}{h_2} \sum_{k \in I_2} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} \right) + \cdots$$

$$+ \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right|^{p_k} \right)$$

$$= \frac{k_1}{k_{r-1}} a_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} a_2 + \cdots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} a_r$$

$$\leq \left(\sup_{j \in T} a_j \right) \frac{k_r}{k_{r-1}}$$

$$< \varepsilon_1 \cdot B$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{B}$ seçilir ve $T \in F(I)$ olmak üzere

$$\bigcup \{n : k_{r-1} < n \leq k_r, r \in T\} \subset R$$

olduğu da göz önüne alınırsa, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi üzerindeki kabulümüzden dolayı R kümesinin aynı zamanda $F(I)$ ya ait olduğu anlaşılır ki, bu da ispatı tamamlar.

6. KAYNAKLAR

Balcı, M. (1999). Analiz-I. Balcı Yayınları, Ankara.

Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, **75**: 335-346.

Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S.K. (2011). On generalizations of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters*, **24**(9): 1509-1514.

Dems, K. (2004-2005). On I-Cauchy sequences. *Real Analysis Exchange*, **30**: 123-128.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**: 241-244.

Freedman, A.R., Sember J.J. and Raphael, M. (1978). Some Cesaro type summability spaces. *Proceedings London Mathematical Society*, **37**: 508-520.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**: 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, **160**(1): 43-51.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T. and Sleziak, M. (2005). I-convergence and extremal I-limit points. *Mathematica Slovaca*, **55**: 443-464.

Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W. (2000). I-convergence. *Real Analysis Exchange*, **26**(2): 669-686.

Marouf, M. (1993). Asymptotic equivalence and summability. *International Journal of Mathematics and Mathematical Science*, **16**(4): 755-762.

Patterson, R.F. (2003). On asymptotically statistical equivalent sequences. *Demonstratio Mathematica*, **36**(1): 149-153.

Patterson, R.F. and Savaş, E. (2006). On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, **4**(2): 267-272.

Savaş, E. (2013). On I-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Advances in Difference Equations,* **2013**(111) 7 pages. doi:10.1186/1687-1847-2013-111

Savaş, E. and Das, P. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Applied Mathematics Letters,* **24**(6): 826-830.

Savaş E. and Gümüş H. (2013). A generalization on I-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(270): 9 pages.

Savaş E. and Patterson R.F. (2008). An extension asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, **27**(2): 109–113.

Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30**: 139-150.

Schoenberg, I.J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. The American Mathematical Monthly, **66**: 361-375.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Arif ÖĞREDEN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Göksun / 01.01.1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: arif.ogreden@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Adana Erkek Lisesi	(2002-2005)
Lisans	: Çukurova Üniversitesi	(2007-2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Adana Özel Zafer Dersanesi	(2009-2013)
Baddal Aygün Anadolu Lisesi	(2013- …)