ÇEMBER KORUYAN DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ

Danışman
Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇEMBER KORUYAN DÖNÜŞÜMLERİN KARAKTERİZASYONU ÜZERİNE

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ

Danışman
Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2017

TEZ ONAY SAYFASI

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ tarafından hazırlanan "Çember Koruyan Dönüşümlerin Karakterizasyonu Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 24/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

		İmza
Başkan	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.	....
Üye	: Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.	....
Üye	: Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.	....

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/05/2017

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇEMBER KORUYAN DÖNÜŞÜMLERİN
KARAKTERİZASYONU ÜZERİNE

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Bu araştırmada altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, Möbius dönüşümlerin özelliklerinin incelenmiştir. Dördüncü bölümde, non-dejenere dönüşümler ve dejenere çember koruyan dönüşümler ele alınmıştır. Beşinci bölümde, küre koruyan dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir. Altıncı bölümde ise küre koruyan dönüşümlerin karakterizasyonu ve dejenere küre koruyan dönüşümler incelenmiştir.

2017, vi + 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Möbius Dönüşümleri, Non-dejenere Dönüşümler, Çember koruyan dönüşümler, Küre koruyan dönüşümler

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE CHARACTERIZATION OF CIRCLE-PRESERVING MAPS

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: : Assoc. Prof. Oğuzhan DEMİREL

In this research, consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions recalled. In the third chapter, Möbius tranformations properties were studied. In the fourth chapter, non-degenerate maps and degenerate circle preserving maps were studied. İn the fifth chapter, praperties of sphere-preserving maps are considered. In the final chapter, characterizations of sphere-preserving maps and degenerate sphere-preserving maps were examined.

20147, vi + 42 pages

Keywords: Möbius tranformations, Non-degenerate maps, Circle-preserving maps, Sphere-preserving maps.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında araştırmalarımı yönlendiren, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan tez danışmanım Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

İbrahim Halil ÜZÜMCÜ
AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\widehat{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\widehat{\mathbb{C}}$	Genişletilmiş Kompleks Sayılar
$\mathbb{D}$	Kompleks Birim Disk
$\mathbb{H}$	Hiperbolik Düzlem
$f\,\|_A$	f fonksiyonunun A ya kısıtlanması
$\bar{L}$	Genişletilmiş Doğru
$\|\ \|$	Norm
$\langle\ ,\ \rangle$	İç çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

İnsanoğlu yazının icadından hemen sonra tekerleği icat edince (M.Ö. 3000) ulaşım ve ticarette ulaşılan kolaylıkların sağladığı gelişmeler sayesinde π sayının varlığı ile karşılaşılmıştır. r yarıçaplı çember için, $çevre/2r$ bu oranın sabitliği anlaşıldıktan sonra sabit oran değerinin sayı olarak belirlenmesi gerekiyordu. Leonard Euler, 1737 yılında yayınladığı eserinde, daire çevresinin çapına oranı söz konusu olduğunda, π sembolü kullandı. Leonard Euler'den önce gelen bazı matematikçiler tarafından da, bu sembol kullanılmıştır. Ancak, Leonard Euler' den sonra gelen, tüm matematikçiler bu sembolü benimseyip kullanmışlardır. Çember, daire, küre gibi basit geometrik şekillerle ilgili olan bu harika sayı tamamen geometri orjinlidir. π üzerinde Mezopotamyalılar, Mısırlılar Çinliler, Hintliler, Helenler ve hatta 1600 lü yıllardan itibaren birçok büyük matematikçi uğraşmışlardır. İrrasyonelliği 1767 yılında J. F. Lambert tarafından transandant bir sayı olduğu ve çok sonraları 1882 yılında Alman matematikçi F. Lindemann tarafından ispatlanmıştır (İnt. Kyn. 1).

Öklid M.Ö. 300 lü yıllarda Elementler adlı eseri yazmıştır. Bu eser üzerine çok şey söylenebilir. Bugün bile ilköğretim ve liselerimizde okutulan bilgilerimizin hemen hemen tamamı bu eserlerde vardır. Tales, Pisagor ve Pisagoryanlarca ispat edilmiş geometrik ifadeler bu dönemde mükemmelleştirildi. 1143 yılında Elementlerin batı dillerine çevrildiği ve izleyen dönemlerde yavaş yavaş okullarda sistematik olarak okutuldu bilinmektedir. 1635 yılında Cavalieri, Geometri adlı eserini yayınlamış ve 1637 yılında Descartes Analitik Geometriyi keşfetmiştir (İnt. Kyn. 1).

Fen ve Mühendislik Bilimlerinin çoğunda çember ve küreden yararlanılır. Özellikle Matematikte; trigonometride, diferensiyel ve integral hesaplamalarda, uzaklık koruyan dönüşümlerde ve daha birçok farklı konuda çember ve küre karşımıza çıkar. Fizikte; optik, elektrostatik-elektrik, mekanik, manyetizma, dalgalar, dairesel hareketler gibi önemli konulardaki grafik çizimi, bazı formüllerin hesaplanması ve problem çözümünde çember ve küre kullanılır.

Matematikçiler XVII. yüzyıldan sonra Öklid geometrisinin birçok problemi çözmeye yeterli olmadığını düşünmeye başladılar. XVII. ve XVIII. yüzyıllarda bu konuda birçok çalışmalar yapılmıştır. Kazan Üniversitesinden Lobacevski'nin 1829 yılında yayınlanan çalışmaları ve bu konuda daha önce aynı sonuçlara ulaştığı anlaşılan Macar Bolyai'nin çalışmaları ile Çok Paralelli (hiperbolik) geometrilerin varlığı ortaya çıkmıştır. Böylece Hiperbolik Geometri, dolayısıyla Öklid dışı geometri kavramı ortaya çıkmıştır. Üstelik Bolyai-Lobacevski aksiyomlarını gerçekleştiren birçok reel model geliştirilmiştir. Bunlar; Beltrami-Klein modeli, Poincaré üst yarı düzlem modeli, Poincaré disk Modeli Weierstrass modeli ve Gans modelidir. Gauss ve Riemann'ın çalışmaları ile hiperbolik geometrideki gelişmeleri değerlendirerek “Farklı iki doğru bir tek noktada kesişir” aksiyomu ve bazı Öklid aksiyomları ele alınarak Projektif Geometri geliştirilmiştir. Üstelik sonsuz çoklukta projektif düzlem bulunmuştur. Bugüne kadar bu konuda birçok araştırma (makale), yüzlerce kitap yazıldı ve hala çözülmeyi bekleyen çok sayıda önemli problemler vardır (İnt. Kyn. 1).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramları hatırlatacağız. Bu bölüm için temel referanslarımız; Anderson (2005), Arıkan ve Halıcıoğlu (2012), Balcı (2010) Başkan (1996), Bayraktar (2006), Hacısalihoğlu (1976), Sabuncuoğlu (2010) olacaktır.

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olmak üzere, $\mathbb{C} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ sıralı ikililerin kümesi ele alınsın. Bu küme üzerinde toplama ve çarpma diye adlandırılacak işlemler,

(i). $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

(ii). $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

(iii). $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - \ y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$

biçiminde tanımlansın. Üzerindeki bu işlemlerle birlikte düşünüldüğünde, $\mathbb{C}$ ye karmaşık sayılar kümesi denir. $\mathbb{C}$ nin herhangi bir ögesi $z = (x, y)$ biçiminde gösterilir ve karmaşık sayı diye adlandırılır.

Tanım 2.2 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ için bu dört noktanın çapraz oranı

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_3)} . \frac{(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_4)}$$

biçimindedir.

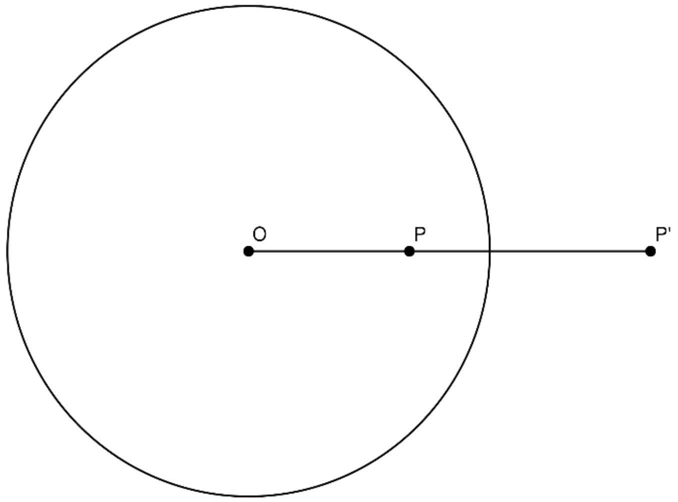
Tanım 2.3 $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısının $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunmasıdır.

Tanım 2.4 (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay olsun. $f: X \to Y$ dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyorsa f ye bir izometri denir.

Tanım 2.5 $r > 0$ olmak üzere r yarıçaplı bir çemberin O merkezi ile aynı doğrultuda bununan ve $\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$ koşulunu sağlayan P, P' noktalarına r yarıçaplı çemberin O merkezine göre invers noktaları denir. Burada O merkezine inversiyon merkezi, r yarıçapına inversiyon yarıçapı denir (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1 Çembere göre invers noktalar

Tanım 2.6 B ve C birer bölge olmak üzere $f: B \to C$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinde $f(z_0) = w_0$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımında α açısı yapıyorsa f dönüşümüne z_0 da konform dönüşüm denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f, B de konformdur denir.

Tanım 2.7 X bir iç çarpım uzayı ve $\| \ \|$ iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu X üstünde bir metrik olup (X, d) ikilisi bir metrik uzaydır. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X' e Hilbert uzayı denir. Yani X de alınan her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise X' e Hilbert uzayı denir.

Tanım 2.8 $A \subset X$, $f: X \to Y$ ve her $x \in A$ için $f|_A: (x) = f(x)$ ise $f|_A: A \to X$ fonksiyonuna f fonksiyonun A kümesine kısıtlanması denir.

Tanım 2.9 Sonlu bir $E \subseteq \mathcal{E}$ kümesi için $E \longrightarrow I_n$ birebir eşleme olacak şekildeki $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına E nin kardinalitesi denir ve $|E| = n$ şeklinde ifade edilir. Özel olarak $|\emptyset| = 0$ olarak tanımlanır. Ayrıca doğal sayılar kümesinin kardinalitesi $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ve reel sayılar kümesinin kardialitesi $|\mathbb{R}| = \aleph$ ile gösterilir.

Tanım 2.10 u ve v iki kardinal sayı olmak üzere eğer $u \leq v$ ve $u \neq v$ ise o zaman $u < v$, yani $u \leq v$ doğru fakat $u = v$ yanlıştır. Ayrıca $u < v$ ifadesi $u > v$ şeklinde de ifade edilir.

Tanım 2.11 H, V iç çarpım uzayının bir alt vektör uzayı olsun. V uzayının bir u vekörü H uzayının her vektörüne dik ise u vektörü H uzayına ortogonaldir denir.

Tanım 2.12 M yüzeyi içinde, α' ya kısıtlanmış Z birim dik vektör alanı ile α'' vektör alanı liner bağımlı olacak biçimde bir α eğrisi varsa bu eğriye geodezik eğri denir.

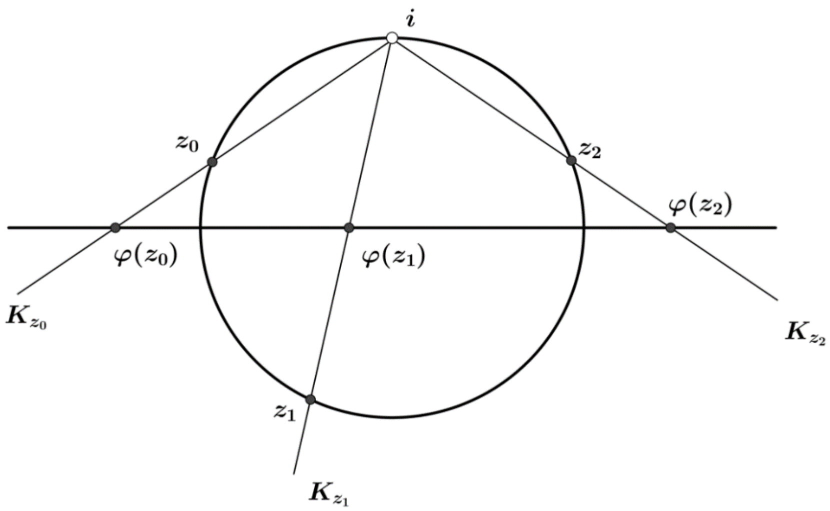
Tanım 2.13 Bir f karmasık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f, z_0 noktasında analitiktir denir. Bir f karmasık fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f, S kümesi üzerinde analitiktir denir.

Tanım 2.14 Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f, z_0 da bir ayrık aykırı (singular) noktaya sahiptir denir. Eğer $w = f(z)$ bir $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > r\}$ kümesi üzerinde analitik, fakat $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), z = 0$ ayrık aykırılığa sahipse f fonksiyonun $z = \infty$ da bir ayrık aykırılı vardır denir.

Tanım 2.15 Bir f dönüşümü B bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise f, B bölgesinde bir meromorf dönüşümdür denir.

Tanım 2.16 (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay olmak üzere $f: (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ birebir örten bir fonksiyon olsun. f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli ise f ye homeomorfizm denir. (X, τ_1) ile (Y, τ_2) uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara homeomorfik uzaylar denir

Tanım 2.17 $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesinde birim çember olmak üzere $\mathbb{S}^1$ üzerindeki her z noktası için z ve $i = (0,1)$ noktalarından geçen Öklidyen doğru K_z ile gösterilsin. $\varphi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$ kuralıyla verilen $\varphi: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna stereografik izdüşüm denir. φ fonksiyonu iyi tanımlıdır çünkü $\mathbb{R}$ ve K_z kesişimin de $Im(z) \neq 1$ dir (Şekil 2.1.2).



Şekil 2.1.2 Stereografik izdüşüm

K_z doğrusunun eğimi

$$m = \frac{Im(z) - 1}{Re(z)}$$

ve $y - e$ksenini $(0,1)$ noktasında kestiğinden K_z doğrusunun denklemi

$$y - 1 = \frac{Im(z) - 1}{Re(z)} x$$

dir. K_z doğrusu ile x −eksenini kesiştiği nokta

$$\varphi(z) = \frac{Re(z)}{1 - Im(z)}$$

dir.

$\varphi: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Gerçekten z ve w, $\mathbb{S}^1 - \{i\}$ kümesinde iki nokta olmak üzere $\varphi(z) = \varphi(w)$ ise K_z ve K_w Öklidyen doğruları her ikisi de i noktasından geçer ve i boyunca kesişirler. $\varphi(z) = \varphi(w)$ olduğundan $K_z = K_w$ olur ve böylece $z = w$ dir.

Tanım 2.16 ℂ' de bir doğru denklemi; $\beta \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\beta z + \overline{\beta}\,\bar{z} + \gamma = 0$$

formunda yazılır. Gerçekten $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ eşitliklerinden $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ve $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ elde edilir. Bunlar $Ax + By + C = 0$ doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + B\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + C = 0$$

$$\frac{Az}{2} + \frac{A\bar{z}}{2} + \frac{Bz}{2i} - \frac{B\bar{z}}{2i} + C = 0$$

$$\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right)z + \left(\frac{A}{z} - \frac{B}{2i}\right)\bar{z} + C = 0$$

elde edilir. $\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right) = \beta$ olmak üzere, $\left(\frac{A}{z} - \frac{B}{2i}\right) = \bar{\beta}$ olup $C = \gamma$ olsun. Böylece ℂ deki doğru denklemi

$$\beta z + \overline{\beta}\,\bar{z} + \gamma = 0$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.17 ℂ' de bir çember denklemi; $\beta \in \mathbb{C}$ ve $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ olmak üzere,

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta}\,\bar{z} + \gamma = 0$$

formunda yazılır. $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ve $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ eşitlikleri $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ çember denkleminde kullanılırsa

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + B\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + C = 0$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$z\bar{z} + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right)z + \left(\frac{A}{z} - \frac{B}{2i}\right)\bar{z} + C = 0$$

olup $\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right) = \beta$, $\left(\frac{A}{z} - \frac{B}{2i}\right) = \bar{\beta}$, $C = \gamma$ ve $z\bar{z}$ nin katsayısı α alınırsa ℂ deki çember denklemi

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta}\,\bar{z} + \gamma = 0$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 2.18

(1) En az bir noktası vardır.

(2) Her sıralı A, B noktalar çiftine $\overrightarrow{AB}$ olarak gösterilen sadece bir vektör karşılık gelir.

(3) Her A noktası ve her $\vec{x}$ vektörü sadece öyle bir B noktsı vardır ki $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ dir.

(4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ise $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ dir.

(5) Her $\vec{x}$ vektörü ve her α sayısı için $\alpha\vec{x}$ vektörü tanımlıdır.

(6) α, β sayılar olmak üzere $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$, $\alpha(\overrightarrow{\vec{x}, y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$, $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ ve $1.\vec{x} = \vec{x}$, dir.

(7) n tane doğrusal bağımsız vektör vardır fakat her $(n + 1)$ tane vektör doğrusal bağımlıdır.

Yukarıdaki aksiyomları sağlayan noktalar ve vektörler kümesine $n -$ boyutlu afin uzay denir.

Tanım 2.19 A_1 ve A_2 birer afin uzay olmak üzere

$$f: A_1 \to A_2$$

dönüşümüne karşılık gelen ψ_p dönüşümü herhangi bir $p \in A_2$ noktası için lineer ise f dönüşümüne afin dönüşüm denir.

Teorem 2.20 (Riemann Dönüşüm Teoremi)

B en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge olsun. B yi $D(0,1)$ üzerine birebir olarak resmeden bir f analitik fonksiyonu vardır.

Teorem 2.21 (Maksimum Modül Teoremi)

Kapalı sınırlı bir R bölgesinde sürekli bir f fonksiyonu R içinde analitik ve sabit olmayan bir fonksiyon ise $|f|$ maksimum değerini R bölgesinin sınırlarında alır.

3. MÖBİUS DÖNÜŞÜMLERİ ve ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçiminde tanımlanmış $T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fonksiyona Möbius Dönüşümü (kesirli lineer dönüşüm) denir. Burada $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dir.

Uyarı 3.2

(1) İki Möbius Dönüşümün eşit olması için gerek ve yeter koşul karşılıklı katsayılarının orantılı olmasıdır. Gerçekten,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

yazılırsa,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda, \quad \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \mu$$

bulunur. Bu nedenle tanım 3.1 den $ad - bc \neq 0$ koşulu $ad - bc = 1$ koşuluna denktir. Çünkü $ad - bc \neq 0$ olduğunda T nin payı ve paydası $\pm\sqrt{ad - bc}$ ile bölünerek $ad - bc = 1$ bulunur.

(2) $\Delta = ad - bc$ ye T nin (determinantı) denir.

(3) $ad - bc = 0$ olsa,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{adz + bd}{cdz + d^2} = \frac{bcz + bd}{cdz + d^2} = \frac{b(cz + d)}{d(cz + d)} = \frac{b}{d} = sabit$$

olur. Böylece T sabittir (Başkan 1996).

Teorem 3.3 $T(-d/c) = \infty$, $T(\infty) = a/c$ özelliğindeki $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümü $\hat{\mathbb{C}}$ dan $\hat{\mathbb{C}}$ a birebir, üzerine konform bir dönüşümdür (Olsen 2010).

Önerme 3.4 Her Möbius dönüşümünün tersi de bir Möbius dönüşümüdür (Zill *et al*. 2013).

İspat. $w = T(z) = (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$ Möbius dönüşümü seçilsin. $w = T(z) = (az+b)/(cz+d)$ eşitliğinden,

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, \qquad (-d).(-a) - b.c = ad - bc = 1$$

elde edilir. O halde

$$T^{-1}(w) = (-dw+b)/(cw-a)$$

dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür. ■

Teorem 3.6 Möbius dönüşümlerinin kümesi $PSL(2,\mathbb{C})$ ile gösterilir ve bu küme bileşke işlemine göre bir gruptur (Başkan 1996).

Teorem 3.7 Möbius dönüşümün üst yarı düzlemi kendi üzerine resmetmesi için gerekli ve yeterli koşul a, b, c, d katsayılarının gerçel sayı olmasıdır (Başkan 1996).

İspat. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ herhangi bir Möbiüs dönüşüm üst yarı düzlemi, üst yarı düzleme resmetsin. $c \neq 0$ olsun ve T ve T^{-1} sürekli olduğundan

$$T(0) = \frac{b}{d}, \qquad T(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$$

olur. Bu nedenle

$$T(z) = \frac{ac^{-1} + bc^{-1}}{z + dc^{-1}}$$

dönüşümü gerçel katsayılıdır ve

$$\Delta = (ad - bc)c^{-2} = c^{-2} \text{ ve } \dot{I}mT(z) = \Delta \dot{I}mz|z + dc^{-1}|^{-2}$$

dir. Varsayım gereği hem $\dot{I}mz$ hem de $\dot{I}mT(z)$ pozitif olduklarından

$$\Delta = c^{-2} > 0$$

yani $c \in \mathbb{R}$ olmak zorundadır. Böylece $a, b,\ d \in \mathbb{R}$ olur. Tersine $a, b, c,\ d \in \mathbb{R}$ ise her $z = x + iy, y > 0$ için $\dot{I}mT(z) > 0$ olduğu,

$$\dot{I}mT(z) = y|cz + d|^{-2} > 0$$

ifadesi görülür. ■

Sonuç 3.8 Her $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ için $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.9 $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ diskini kendi üzerine resmeden herhangi bir konform dönüşüm $z_0 \in \mathbb{D}, \theta \in [0,2\pi)$ olmak üzere,

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

biçiminde bir Möbius dönüşümüdür. Bu biçimdeki her Möbius dönüşümü $\mathbb{D}$ diskini kendi üzerine konform olarak resmeder (Başkan 1996).

İspat. $|z| = 1$ olduğuna $|T(z)| = 1$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}|T(z)| &= \left|e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}\right| \\ &= \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}\right| \\ &= \frac{|z - z_0|}{|z||z^{-1} - \overline{z_0}|} \\ &= \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} \\ &= 1\end{aligned}$$

olur. Çünkü $|z| = 1$ olduğunda $z^{-1} = \bar{z}$ ve $|z - z_0| = |\bar{z} - \overline{z_0}|$ dır. Dikkat edilirse T dönüşümünün aykırılığı sadece $z = \frac{1}{\overline{z_0}}$ noktasındadır. Ancak bu da $\mathbb{D}$ nın dışındadır. Böylece maksimum modül teoremi gereği T dönüşümü $\mathbb{D}$ yi $\mathbb{D}$ ye resmeder. Diğer yandan

$$T(w) = e^{i\theta}\left[\frac{w - (-e^{i\theta}z_0)}{1 - (-e^{-i\theta}z_0)w}\right]$$

olduğundan ve T ile aynı biçimde olduğundan T^{-1} dönüşümünde $\mathbb{D}$ diskini $\mathbb{D}$ diskine resmeder. O halde $T: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konformdur.

Şimdi $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bir konform dönüşüm olsun ve $z_0 = f^{-1}(0)$, $\theta = \arg f'(z_0)$ olsun. Bu durumda

$$T(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z - |z_0|^2}{(1 - \overline{z_0}z)^2}\right)$$

ve

$$T(z_0) = e^{i\theta}\frac{1}{1 - |z_0|^2}$$

olduğundan $T(z) = 0$ ve $\theta = \arg T'(z_0)$ dir. Böylece Riemann dönüşüm teoremine göre bu dönüşüm bir tek olduğundan $f = T$ bulunarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.10 $\overline{\mathbb{C}}$ düzlemini sonlu sayıda nokta dışında, kendi üzerine birebir ve konform olarak resmeden her $w = f(z)$ dönüşümü bir Möbius dönüşümüdür (Başkan 1996).

Tanım 3.11 Bir $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünde sabit noktası, $z = \frac{az+b}{cz+d}$ eşitliğini gerçekleyen z noktasına sabit nokta denir (Başkan 1996).

Önerme 3.12 Bir Möbius dönüşümünde en fazla iki sabit nokta vardır (Başkan 1996).
İspat.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \tag{1}$$

biçiminde T Möbius dönüşümü seçilsin. Buradan

$$cz^2 + (d-a)z + b = 0$$

elde edilir. Eğer $c \neq 0$ ise

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

olur. Burada z_1 ve z_2, T dönüşümünün sabit noktalarıdır. $(a+d)^2 - 4 = M$ olsun. (1) eşitliğinde görüşüyor ki ∞ noktası kendi üzerine resmediliyor. O halde iki sabit nokta vardır.

Eğer $M = 0$ yani $a + d = \pm 2$ ise iki sabit nokta çakışır. Yani tek bir sabit nokta vardır. Bu nokta $z = \frac{a-d}{2c}$ dir. Eğer $c = 0$ ise belirteç nedeniyle $a \neq 0, d \neq 0$ olacağından $z = \infty$, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Diğer sabit nokta ise $a \neq d$ koşulu altında $z = \frac{a}{d-a}$ olur.

Eğer $c = 0$ ve $a = d$ ise $T(z) = z + b'$ olur ki bunun tek sabit noktası ∞ dur. Görülüyor ki $c = 0$ halinde $M \neq 0$ ise iki sabit nokta, eğer $M = 0$ ise bir sabit nokta vardır. Böylece $c = 0,\ a = d,\ b = 0$ olmadıkça en fazla iki sabit nokta vardır. (1) nin özdeşleyen sıfır olması ise, $T(z) = z$ özdeşlik (birim) dönüşüm olması demektir. ■

Sonuç 3.13 İkiden fazla sabit noktası olan dönüşüm özdeşlik dönüşümüdür (Başkan 1996).

Önerme 3.14 Möbius dönüşümler

$$[z_1 z_2 : z_3 z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$$

çapraz oranını sabit bırakırlar (Zill *et al.* 2013).

İspat.

$$w_1 = T(z_1) = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \quad w_2 = T(z_2) = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

$$w_3 = T(z_3) = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}, \quad w_4 = T(z_4) = \frac{az_4 + b}{cz_4 + d}$$

olmak üzere

$$[\, w_1 w_2 : w_3 w_4] = \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}$$

eşitliğinde bu değerler yerine yazılırsa

$$[\, w_1 w_2 : w_3 w_4] = [z_1 z_2 : z_3 z_4]$$

bulunur. ■

Teorem 3.15 Verilen bir çemberi verilen bir başka çembere resmeden sonsuz çoklukta Möbius dönüşümü vardır (Anderson 2005).

Teorem 3.16 $PSL(2, \mathbb{R})$ nin öğeleri gerçel eksene dik olan çemberleri gerçel eksene dik olan çemberlere resmeder (Başkan 1996).

Teorem 3.18 P ve P_1, Q ya göre invers noktalar ise P ve P_1 den geçen her çember Q ya diktir (Başkan 1996).

Sonuç 3.19 P, P_1 ; Q çemberine göre invers noktalar olsun. P, P_1, K nın belirttiği karmaşık sayılar z, z_1, k olmak üzere,

$$(z_1 - k)(\overline{z} - \overline{k}) = r^2$$

olur (Başkan 1996).

Önerme 3.20 Herhangi bir Möbius dönüşümü Q çemberine göre invers noktaları, resim çemberine göre invers olan noktalara resmeder (Başkan 1996).

İspat. $T(z)=(az+b)/(cz+d)$ bir Möbius dönüşümü olmak üzere z ve z_1 $Q: Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$ çemberine göre invers noktalar olsun. Bu noktaların T dönüşümüne göre resimleri w ve w_1 denirse,

$$z_1=\frac{-dw_1+b}{cw_1-a},\quad \bar{z}=\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}$$

olur. Bu değerler Sonuç 3.19 da yerine yazılırsa

$$A\frac{(-dw_1+b)(-\bar{d}\bar{w}+\bar{b})}{(cw_1-a)(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})}+B\frac{-dw_1+b}{cw_1-a}+\bar{B}\frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}+C=0$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse

$$\left(A\bar{d}d-B\bar{c}d-\bar{B}c\bar{d}+Cc\bar{c}\right)w_1\bar{w}+\left(-A\bar{b}d+B\bar{a}d+\bar{B}\bar{b}c-C\bar{a}c\right)w_1$$
$$+\left(-Ab\bar{d}+Bb\bar{c}+\bar{B}a\bar{d}-Ca\bar{c}\right)w+\left(Ab\bar{b}-B\bar{a}b-\bar{B}ab-Ca\bar{a}\right)=0$$

olur. Bu Sonuç 3.19 deki denkleme benzerdir. Yani w ve w_1 noktaları $Q_1=T(Q)$ çemberine göre inverstir. ■

Tanım 3.21

(a) $T(z)=z+b, b\in\mathbb{C}\ ve\ b$ =sabit, biçimindeki Möbius dönüşümlerine öteleme (translation) dönüşümü denir.

(b) $T_\theta(z)=e^{i\theta}z$ biçimindeki dönüşümlere dönme (rolation) denir.

(c) $T_a(z)=az, a\in\mathbb{R}$ biçimindeki dönüşümlere uzama-kısalma (benzerlik) dönüşümleri denir. $|a|>1$ ise uzama, $|a|>1$ ise kısalma olur.

(d) $J(z)=\frac{1}{z}$ dönüşümüne tersinme (inversion) denir (Başkan 1996).

Tanım 3.22 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc=1$ olmak üzere;

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

bir T dönüşümü verilsin.

(a) Eğer $a+d\in\mathbb{R}$ ve $|a+d|>2$ ise, T ye hiperbolik dönüşüm denir,

(b) Eğer $a+d\in\mathbb{R}$ ve $|a+d|<2$ ise, T ye eliptik dönüşüm denir,

(c) Eğer $a+d=\pm2$ ise, T ye parabolik dönüşüm denir

(Başkan 1996).

Teorem 3.23 Möbius dönüşümleri dönme, benzerlik, tersinme ve öteleme dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir (Kaya 2006).

İspat. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ Möbius dönüşümü ele alınsın.

Gerçekten; $c \neq 0$ ise $T(z) = \frac{a}{c} - \frac{(ad-bc)/c}{cz+d}$ şeklinde yazarsak

$$T(z) = (T_b \, o \, J \, o \, T_a)(z)$$

olur.

$c = 0$ ise $T(z) = \frac{az+b}{d}$ olur ve $\frac{a}{d} = re^{i\theta}$, $\frac{b}{d} = s$ denilirse,

$$T(z) = re^{i\theta} z + s$$

$$T(z) = (T_s \, o \, T_r \, o \, T_\theta)(z)$$

olur. ■

Burada açık olarak görülmektedir ki benzerlik ve öteleme dönüşümleri çemberleri çemberlere dönüştürür. Şimdi de inversiyon dönüşümü için bu durumu incelenecektir. Eğer ki inversiyon dönüşümü de çemberleri çemberlere dönüştürür ise o halde bunların bileşkesi olan Möbius dönüşümü için de bu durum geçerlidir.

Teorem 3.24 İnversiyon dönüşümü çemberleri çemberlere dönüştürür (Olsen 2010).

İspat.

$$T(z) = \frac{1}{z} = w$$

inversiyonu verilsin. $w = a + ib$ ve $z = x + iy$ olmak üzere

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

dir .

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

denkleminde $x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ eşitlikleri yazılırsa bu denklem

$$D(a^2 + b^2) + Ba - Cb + A = 0$$

biçimine dönüşür $A = 0$ ise bu denklem bir doğru, $A \neq 0$ ise bu denklem bir çember gösterir. Böylece Möbius dönüşümleri çemberleri çemberlere dönüştürdüğü ispatlanmıştır. ■

4. DÖNÜŞÜMLER VE NON-DEJENERE DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ kümesi üzerindeki Möbius dönüşümleri ve $\widehat{\mathbb{R}^n}$deki çember koruyan dönüşümler arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Ayrıca $\mathbb{H}^n$ de izometriler ile geodezik koruyan dönüşümler arasındaki ilişki ve $\mathbb{R}^n$ de afin dönüşümlerle doğruları koruyan dönüşümler arasındaki ilişki ele alınacaktır. Bu konuda yapılan başlıca çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, bir çember koruyan dönüşüm olmak üzere, f'nin bir Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f' nin birebir, örten olmasıdır (Aczẻl *et al*. 1967).

Teorem 4.2 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ bir çember koruyan dönüşüm olmak üzere f'nin bir Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f nin sabit – olmayan meromorfik bir dönüşüm olmasıdır (Nehari 1952).

Teorem 4.3 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ fonksiyonu birebir – örten ve doğruları koruyan bir dönüşüm olsun. İki paralel doğrunun f altındaki görüntüsü paralel iki doğru ise f bir afin dönüşümdür (Artin 1957).

Teorem 4.4 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ bir Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter f' nin lokal küre – koruyan dönüşüm olması gerekir (Beardon *et al*. 2001).

Teorem 4.5 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n} (n \geq 2)$ fonksiyonu çemberleri koruyan birebir, örten bir dönüşüm olsun. Bu durumda f bir Möbius dönüşümdür (Jeffers 2000).

Teorem 4.6 $f: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n (n \geq 2)$ fonksiyonu geodezikleri koruyan birebir, örten bir dönüşüm olsun. Bu durumda f bir izometridir (Jeffers 2000).

Teorem 4.7 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ için f fonksiyonu doğruları koruyan birebir-örten bir dönüşüm olsun. Bu durumda f bir afin dönüşümdür (Jeffers 2000).

Burada f fonksiyonun çemberleri, geodezikleri ve doğruları koruması demek f altında çemberlerin, geodeziklerin ve doğruların görüntülerinin sırasıyla çemberler, geodezikler ve doğrular olması demektir.

Tanım 4.8 $a \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ olmak üzere a'nın bir N komşuluğu $S \subset N$ olacak biçimdeki her S küresi için f'nin S' ye kısıtlaması olan $f\ |_S$ fonksiyonu $(f\ |_S: S \to f(S))$ birebir ve örten ise yani S ile $f(S)$ küreleri arasında tanımlı fls fonksiyonu birebir – örten ise f' ye lokal küre koruyan dönüşüm denir (Li *et al.* 2005).

Tanım 4.9 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ $(n \geq 2)$ çember koruyan dönüşümü için $f(\widehat{\mathbb{R}^n})$ bir çember oluyorsa f' ye dejenere fonksiyon denir. Benzer biçimde
$f: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ $(n \geq 2)$ geodezik koruyan dönüşümü için $f(\mathbb{H}^n)$ için bir geodezik ise f' ye dejenere fonksiyon denir.
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ doğruları koruyan dönüşümü için $f(\mathbb{R}^n)$ için bir doğru ise f' ye dejenere fonksiyon denir. Aksi halde f non-dejeneredir (Li *et al.* 2005).

Teorem 4.10 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ çember koruyan dönüşüm aşağıdaki önermeler denktir.
1) f bir Möbius dönüşümdür.
2) f non-dejeneredir
(Li *et al.* 2005).

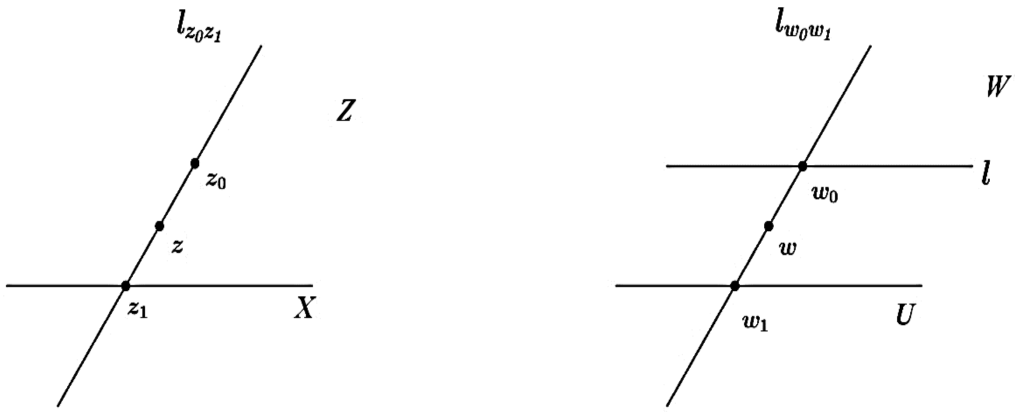
4.1 $\hat{\mathbb{C}}$ de Möbius Dönüşümleri

Bu bölümde $n = 2$ için Teorem 4.10 ispatlanacaktır. Uygunluk açısından $\widehat{\mathbb{R}^2}$ yerine $\hat{\mathbb{C}}$ üzerinde çalışacak olup z −düzleminin reel ekseni X ile ve w −düzleminin reel ekseni U ile gösterilecektir. $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ dir.

Teorem 4.1.1 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ çember koruyan dönüşümünün Möbius dönüşümü olması için gerek yeter koşul f nin non – dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2005).

Lemma 4.1.2 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ çember koruyan dönüşümü non-dejenere ise f örtendir (Li *et al.* 2005).

İspat. $f(\infty) = \infty$ ve $f(\bar{X}) = \bar{U}$ olsun. Aksi halde uygun bir g dönüşümü Möbius dönüşümü alınarak $g(f(\infty)) = \infty$ ve$g(f(\bar{X})) = \bar{U}$ yerine gf incelenir. f non-dejenere olduğundan $f(z_0) = w_0 \in W/U$ olacak biçimde $z_0 \in Z/X$ vardır.



Şekil 4.1.1 Çember koruyan non-dejenere dönüşüm örtenliği

l, w_0 noktasından geçen ve U ya paralel olan bir doğru olsun. $w \in W/l$ için w ve w_0 noktasından geçen doğru l_{w_0w} ile $l_{w_0w} \cup \{\infty\} = \overline{l_{w_0w}}$ ile gösterilsin. l_{w_0w} doğrusu U'yu bir w_1 noktasında kesmek zorundadır. Bu durumda $f(z_1) = w_1$olacak biçimde $z_1 \in X$ vardır. Açıkça $f\left(\overline{l_{z_0z_1}}\right) = \overline{l_{w_0w_1}}$ dır. Buradan $f(z) = w$ olacak biçimde $z \in l_{z_0z_1}$ vardır. $w \in l$ için elde edilen bu özellik $w' \in W/(l \cup U)$ olacak biçimde tüm w'noktaları için de elde edilebilir (Şekil 4.1.1). Yani, l doğrusu üstündeki tüm noktalarında ön resimleri vardır. Böylece f örtendir. ■

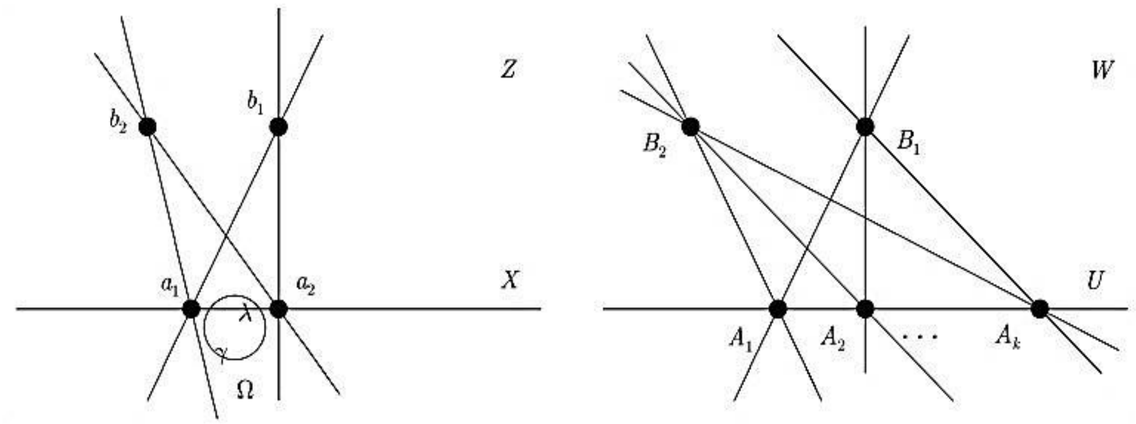
Lemma 4.1.3 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ çember koruyan dönüşümü non-dejenere ise çember üzerindeki λ yayı (ark) için $card\big(f(\lambda)\big) = \infty$ dur (Li *et al.* 2005).

İspat. Kabul edelim ki bir λ ark'ı için $f(\lambda) = \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ olsun $(k \in Z)$. $\lambda = [a_1, a_2] \subset X$ için $f(\bar{X}) = \bar{U}$ ve $f(\infty) = \infty$ olsun.

f non-dejenere olduğundan, Lemma 4.1.2 den f örtendir. $B_1, B_2 \in W/U$ noktaları için bu noktalar A_i noktalarıyla doğrudaş olmadığından ve f örten olduğundan $f(b_i) = B_i$ olacak biçimde $b_1, b_2 \in Z/X$ vardır. $J = 1{,}2$ için $K_j = \cup_i \, l_{A_iB_j} \cup \{\infty\}$ olsun.

$$K_1 = l_{A_1B_1} \cup l_{A_2B_1} \cup \ldots \cup l_{A_kB_1} \cup \{\infty\}$$

$$K_1 = l_{A_1B_2} \cup l_{A_2B_2} \cup \ldots \cup l_{A_kB_2} \cup \{\infty\}$$

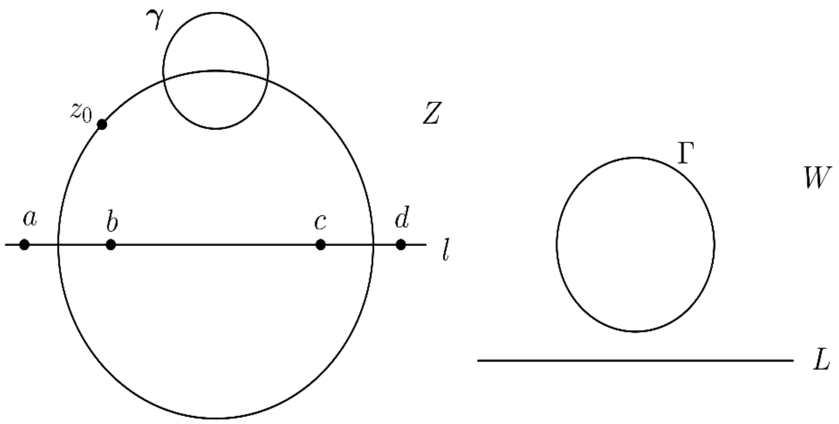


Şekil 4.1.2 Çember üzerindeki yayın kardinalitesi

Bu durumda, λ üzerindeki noktalarla b_1' den geçen tüm doğruların f altındaki görüntüsü K_1 dedir. Benzer şekilde, λ üzerindeki noktalarla b_2 den geçen tüm doğruların f altındaki görüntüsü K_2 dedir. $J = 1{,}2$ için φ_j ile $l_{a_1b_j}$, $l_{a_2b_j}$ doğruları tarafından sınırlanan ve $\lambda^0 = (a_1, a_2)$ açık aralığını içeren bölge gösterilsin. Bu durumda $J = 1{,}2$ için φ_j nin f altındaki örüntüsü K_j dedir. $\varphi = \varphi_1 \cap \varphi_2 \supset \lambda^0$ bölgesi boş küme değildir ve $\gamma \subset \varphi$ olacak biçimde γ çemberi vardır. Bu arada $f(\gamma) \subset K_1 \cap K_2$ bir sonlu küme olacağından bu durum $f(\gamma)$‘ nın çember olmasıyla çelişir. ∎

Lemma 4.1.4 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ çember koruyan dönüşümü non-dejenere ise f birebirdir (Li *et al.* 2005).

İspat. f' nin birebirliğini ispatlamak için $card(f^{-1}(\infty)) = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f(\infty) = \infty$ alınsın ve $f(z_0) = \infty$ olacak biçimde $z_0 \in Z$ noktasının var olduğunu kabul edilsin. z_0'dan geçmeyen sabit bir l doğrusu seçilsin ve $\bar{L} = f(\bar{l}) \subset \bar{W}$ olsun. $\Gamma \cap \bar{L} = \emptyset$ olacak biçimde $\Gamma \subset W$ çemberi alınsın. Γ üzerindeki üç tane noktanın ön resimlerinden geçen çember γ olsun. $f(\gamma) = \Gamma$ olduğu açık olup $\gamma \cap l = \emptyset$ dir. z_0 noktasından geçen ve γ çemberini ve l doğrusunu kesen tüm çemberlerin l' yi kestiği noktaları içeren $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralıkları vardır.



Şekil 4.1.3 Çember koruyan non-dejenere dönüşümlerin birebirliği

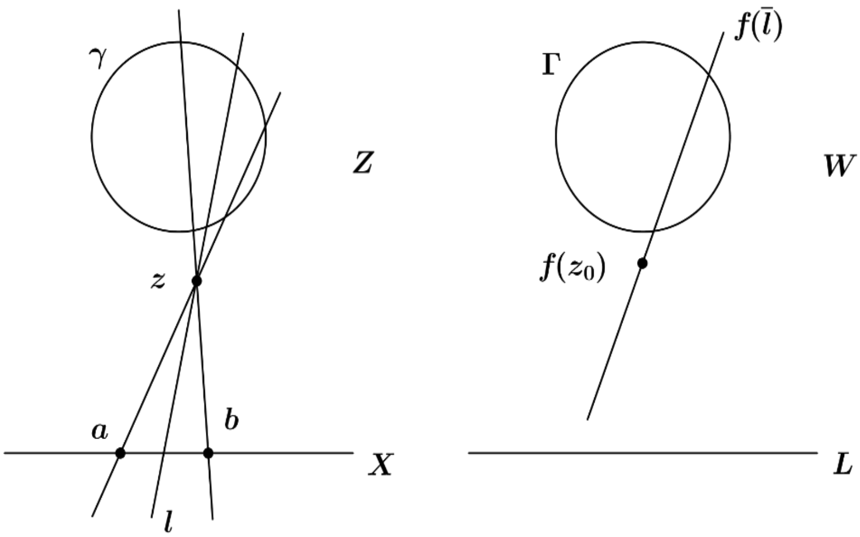
Lemma 4.1.3 den $f(x) \neq f(y) \in C$ olacak biçimde $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$ vardır. γ'; x, y ve z_0 dan geçen çember olsun (Şekil 4.1.3). Bu durumda $\bar{L} = f(\gamma')$ dır. γ' ve γ kesişmelerine rağmen $f(\gamma) = \Gamma$ ile $\bar{L} = f(\gamma')$ çemberleri kesişmez. Böylece çelişki elde edilir. ■

Teorem 4.1.1 ispat. Li vd. (2000), f non-dejenere ise f birebir-örten olup dolayı f bir Möbius dönüşümü olduğunu ifade etmiştir. Teoremin tersi açıktır. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

4.2 $\widehat{\mathbb{R}^n}$ de Möbius Dönüşümleri

Lemma 4.2.1 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ fonksiyonu çember koruyan bir dönüşüm olsun. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ deki $2-$boyutlu bir $\hat{P}$ küresi için $f\,|_{\hat{P}}$ dönüşümü non-dejenere ise $f(\hat{P})$ kümesi $2-$boyutlu bir küre olup $f\,|_{\hat{P}}$ birebir-örtendir (Li *et al.* 2005).

İspat. $f(\infty) = \infty$ olsun. $\hat{P} = P \cup \{\infty\}$ ile gösterilsin. $X; \hat{P}$ içinde bir doğru ve $f(\bar{X}) = \bar{L}$ olsun. $f\,|_{\hat{P}}$ fonksiyonu non dejenere olduğundan $f(x_0) \neq \bar{L}$ olacak biçimde $x_0 \in P$ vardır. $P' = Sp\{L, f(x_0)\}$ olsun. Lemma 4.1.2 den $\hat{P} = Sp\{X, x_0\}$ olduğundan $\widehat{P'} \subset f(\hat{P})$ dir.



Şekil 4.2.1 Kısıtlanan non-dejenere dönüşümün örtenliği

$f(z_0) \notin \widehat{P'}$ olacak biçimde $z_0 \in P$ noktasının var olduğu kabul edilsin. $f(z_0)$ dan geçen her doğru P' düzlemini en fazla bir noktada keser. $\Gamma \cap \bar{L} = \emptyset$ olacak biçimde $\Gamma \subset P'$ çemberini alalım. Bu durumda $f(\gamma) = \Gamma$ olacak biçimde P düzleminde bir γ çemberi vardır. Bu ise $X \cap \gamma = \emptyset$ olması gerekir. Açıkça $z_0 \notin \gamma$ dır. z_0 dan geçen ve γ çemberini kesen tüm doğruların X ile arakesitini içeren $[a,b] \subset X$ aralığı seçilsin. Bu arada $f(\bar{l} \cap \gamma) \subset \Gamma \subset \mathrm{P}'$ ve $f(\bar{l} \cap X) \subset \bar{L}$ dir. Böylece $f(\bar{l}) \cap \widehat{P'}$ kümesi en az iki noktaya sahip olup, bunlardan biri Γ üstünde, diğeri ise $\bar{L}$ üstündedir (Şekil 4.2.1). $f(z_0)$ geçen her doğru P' düzlemini en çok bir noktada keseceğinden $f(l \cap X) = \infty$ olup buradan $f(\overline{ab}) = \infty$ olur. Bu çelişki olup $\widehat{P'} = f(\hat{P})$ dir ve böylece $f(\hat{P})$ 2-boyutlu küredir.

Üstelik $g \mid_{a\hat{P}:\hat{P}\to\hat{R}^2}$, $h \mid_{\widehat{P'}:\widehat{P'}\to\hat{R}^2}$ biçiminde $\widehat{\mathbb{R}^n}$ de iki Möbius dönüşümü vardır. Bu durumda $hofog^{-1} \mid_{\hat{R}^2:\hat{R}^2\to\hat{R}^2}$ fonksiyonu non-dejenere çember koruyan bir dönüşümdür. Teorem 4.1.1 den non-dejenere çember koruyan bir dönüşüm Möbius dönüşümü olacağından $hofog^{-1}$ fonksiyonu Möbius dönüşümüdür. Möbius dönüşümleri birebir örten olduğundan $hofog^{-1}$ fonksiyonu da birebir örtendir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.2.2 $f\colon \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ fonksiyonu çember koruyan bir dönüşüm olsun. $f \mid_S$ dejenere olacak biçimde 2-boyutlu bir $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ küresi varsa f dejeneredir (Li *et al.* 2005).

İspat. Aksini kabul edelim, yani $f, \widehat{\mathbb{R}}^n$ de non dejenere ve $f\mid_S$ dejenere olsun. Bu durumda $f(S) = \Gamma$ ve $f(a) = a',\ a' \notin \Gamma$ olacak biçimde bir Γ çemberi ve $a \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ vardır. $f\mid_S$ dejenere olduğundan $f\mid_S$ birebir değildir. O halde $f(b) = f(c)$ olacak biçimde S küresi üzerinde farklı iki b, c noktaları vardır. $a, b\ ve\ c$ noktalarından geçen küre S' olsun. $f(S \cap S') = \Gamma$ ve $f(a) \notin \Gamma$ olduğundan $f\mid_{S'}$ non-dejeneredir. Böylece Lemma 4.2.1 den $f\mid_{S'}$ bir küredir ve $f\mid_{S'}$ birebir-örtendir. $b\ ve\ c$ noktaları S' küresinde fakat $f\mid_{S'}\ (b) = f\mid_S$ (c) olduğunda $f\mid_{S'}$ birebir değildir. Böylece çelişki elde edilir. ■

Tanım 4.2.3 $i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere i-boyutlu tüm kürelerin kümesi $\mathbb{S}(i)$ ile gösterilsin. $S \in \mathbb{S}(i)$ olacak biçimde S küreleri için $f\mid_S$ birebir, örten ve $f(S) \in \mathbb{S}(i)$ ise f dönüşümüne i −boyutlu küreleri koruyan dönüşüm denir (Li *et al.* 2005).

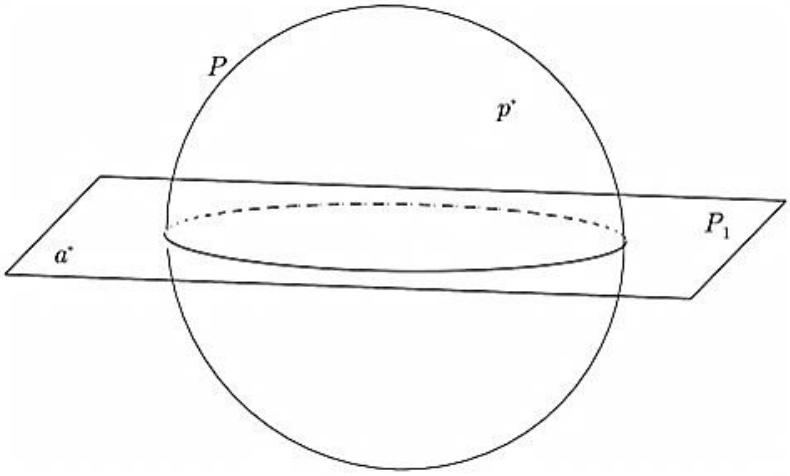
Önerme 4.2.4 $f: \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ non-dejenere, çember koruyan dönüşümdür ve 2 −küreleri korur (Li *et al.* 2005).

$P_1, P_2 \subset \hat{R}^n, P_1 \neq \emptyset \neq P_2$ olsun. $\Pi\{P_1, P_2\} = \cap\, \{\, T\colon\ T, \widehat{\mathbb{R}}^n$' de bir küre ve $\cup\, P\_i \subset T\}$ ile gösterilsin. Bu küme P_1 ve P_2 'yi kapsayan en düşük boyutlu küre olup bir ve yalnız bir tanedir.

Lemma 4.2.5 $f: \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ çember koruyan dönüşüm olmak üzere f, non-dejenere ise f, r −küreleri korur $(2 \leq r \leq n)$ (Li *et al.* 2005).

İspat. f non-dejenere ise 2-kureleri korur ve birebirdir. Tümevarım yöntemi kullanılarak f nin $2 \leq k \leq n - 1$ için k −kürelerini koruduğu kabul edilsin. $S \in \mathbb{S}(k+1)$ için $f(S) \in \mathbb{S}(k+1)$ olduğu gösterilmelidir. $f(\infty) = \infty$ $(\infty \in S)$ olsun. (Aksi halde uygun bir Möbius dönüşümüyle bileşke alınabilir.) Bu durumda $\infty \in P_1$ olacak biçimde k −boyutlu $P_1 \subset S$ küresi vardır. Bu durumda $f(P_1) \in S(k)$ dır. $x \in S \setminus P_1$ noktası seçilsin. Böylece $\Pi\{f(P_1), f(x)\} \in \mathbb{S}(k+1)$ dir. $S' = \Pi\{f(P_1), f(x)\}$ olsun. $f(S) = S'$ olduğu gösterilmelidir. İlk olarak x' i yukarıdaki biçimde seçilsin. $f(x)$ noktasından geçen $f(P_1) \setminus \{\infty\}$ kümesini kesen tüm doğruların ön resimleri S de birer doğrudur. Üstelik $\Pi\{f(P_1), f(x)\} = S' \subset f(S)$ dir.

İkinci olarak $p \in S$ noktası için $f(p) \in S'$ olduğu gösterilmelidir. p noktasından geçen ve $P \cap P_1$, $(k-1)$-boyutlu küre olacak biçimde k-boyutlu bir P küresi alınsın. $\Pi\{f(P_1), f(a)\}$, $(k+1)$ $-$boyutlu küredir.



Şekil 4.2.2 Non-dejenere ise r-boyutlu küreleri korunması

$a \in P_1 \setminus P$ noktası seçilsin. $\Pi\{f(P_1), f(a)\}$, $f(P_1) \cap f(P) \in \mathbb{S}(k+1)$' yi içerir ve $f(a) \in f(P_1) \setminus f(P_1) \cap f(P)$, $f(P_1) \subset \Pi\{f(P), f(a)\}$, $f(x) \in f(P)$ dir.
Böylece $\Pi\{f(P), f(a)\} = S'$ ve $f(p) \in S'$ dir. Buradan $S' \supset f(S)$ olup $f(S) = S'$ dür. f birebir örten olduğundan $f|_S$ de birebir örtendir. Böylece f dönüşümü $(k+1)$ $-$boyutlu küreleri korur. ■

4.3 Dejenere Çember Koruyan Dönüşümlerin Varlığı

$\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ için $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde Möbius dönüşümleri çemberleri korur. Bunun tersi birçok yazarın ilgisini çekmiştir. Yakın zamanlarda Li vd. (2005) çember koruyan dönüşümler için aşağıdaki araştırmalar yapılmıştır.

Teorem 4.3.1 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ çember koruyan dönüşüm olsun. $f$nin bir Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f' nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2005).

Teorem 4.3.2 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ doğruları koruyan dönüşüm olsun. f bir afin dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2005).

Teorem 3.3.3 $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ jeodezileri koruyan dönüşüm olsun. f nin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul f nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2005).

Bu üç teoremden dejenere çember koruyan (doğru koruyan-geodezik koruyan) doğrularının var olup olmadığı problemi ortaya çıkar. Li vd. (2005), dejenere doğru koruyan ve dejenere geodezik koruyan dönüşümlerin örneklerini elde ettiler.

4.3.1 Dejenere Dönüşümlerin İnşası

1. Adım $x = (x_1, x_2, \ldots \ , x_n) \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ olmak üzere

$$g_1 : \widehat{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$$

$$x \to g_1(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} |x_i| , & \in \mathbb{R}^n \\ 0 \quad , & x = \infty \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın.

2. Adım $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

biçiminde bir denklik bağıntısı tanımlansın. x' in denklik sınıfı $\tilde{x}$ ile gösterilsin. Tüm denklik sınıflarının kümesi $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ile gösterilsin, yani $R_{\mathbb{Q}} = \{\tilde{x} : \mathrm{x} \in R\}$ dir. $card(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$ nun $\aleph$ olmadığı $\aleph_0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sayılabilirdir. Her $\tilde{x}$ denklik sınıfından birer tane temsilci seçerek W kümesi oluşturulsun. Bu durumda W kümesi de sayılabilirdir. Diğer yandan $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}$ ile gösterilsin. Buradan

$$\mathbb{R}^1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (W + \{r_k\})$$

dir. Sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilirdir. Böylece $\mathbb{R}$ kümesi sayılabilirdir. Bu çelişki olup $card(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}) = \aleph$ dir. Bu durumda

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$$
$$x \to \tilde{x}$$

biçiminde bir g_2 bölüm fonksiyonu vardır. $\mathbb{R}$ kümesindeki bir L aralığı için iddia ediyoruz ki $g_2(L) = \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ dir. $\tilde{y} \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $g_2^{-1}(\tilde{y})$ kümesi $\mathbb{R}$ kümesinde yoğundur. Bu durumda $g_2(x) = \tilde{y}$ olacak biçimde $\exists\ x \in L$ vardır. $\tilde{y}$, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ kümesinde keyfi seçildiği için $g_2(L) = \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ dur.

3. Adım S , $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde çember olsun. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresindeki noktalar kümesinde olduğu gibi $card(S) = \aleph$ dir. $card(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}) = \aleph$ ve $card(S) = \aleph$ olduğu için

$$g_3 : \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \to S$$

olacak biçimde birebir ve örten bir dönüşüm vardır.

4. Adım g_1, g_2 ve g_3 dönüşümlerinin bileşkesi alınarak $f : \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$, $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ olacak biçimde bir dönüşüm tanımlansın. f dejenere çember koruyan dönüşüm olduğundan $\widehat{R^n}$ kümesindeki her çemberi, S çemberine örten olarak taşır. Gerçekten $\widehat{\mathbb{R}^n}$ kümesindeki bilinen bir T çemberi, $g_1(T)$ altındaki görüntüsü $\mathbb{R}$ kümesinde bir L aralığını kapsar. Böylece $g_2(L) = \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ olduğundan ve g_3 dönüşümünün tanımından $g_3 \circ g_2(L) = S$ olup, böylece $f(T) = S$ olur.

Uyarı : $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde verilen boş olmayan E kümesi için ve E $r-$boyutlu bir küre $(2 \le r \le n-1)$ olsun. S çemberinden E kümesine tanımlı örten bir g_4 dönüşümü vardır. $\tilde{f} = g_4 \circ f$ dönüşümü $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresindeki her çemberi E kümesine götürür. Üstelik $\tilde{f}$ çember üzerindeki yay parçalarını da E kümesine götürür. Burada $\tilde{f}$ dejenere dönüşüm olup $r-$boyutlu küreleri korur.

Son olarak dejenere geodezik koruyan ve dejenere doğru koruyan dönüşümlere ayrı ayrı reel analitik örnek vermek için basit bir lemmaya ihtiyaç duyulur.

Lemma 4.3.1.1 ϕ bir dönüşüm olmak üzere

$$\phi(x) = x.sinx\,, \quad x \in [0, \infty)$$

olup herhangi $c \ge 0$ için $\phi([c, \infty)) = \mathbb{R}^1$ dir (Yao 2007).

İspat. $y \in \mathbb{R}$ olsun. $x \in [0, \infty)$ için $\phi(x) = y$ olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten $k \in N$ öyleki $2k\pi - \frac{\pi}{2} > \text{maks}(c, |y|)$,

$$\phi\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \phi\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

ve $y \in \left(-\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right), 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ olduğu görülür. Buradan $\phi(x)$ dönüşümü sürekli olduğundan $x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ vardır. Böylece $\phi(x) = y$ dir. ■

Örnek 1 *(Reel-analitik dejenere doğru koruyan dönüşü)*

$x \in \mathbb{R}^n$ için $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^n$ olmak üzere

$$f(x) = |x|^2 . sin|x|^2$$

Burada $\varphi: x \to |x|^2$dönüşümü kolayca $\mathbb{R}^n$ kümesindeki her doğru $c \geq 0$ için $[c, \infty)$ aralığına taşır. Lemma 4.3.1.1 den görüleceği gibi f dönüşümü $\mathbb{R}^n$ kümesindeki her doğruyu $\mathbb{R}^1$ kümesine taşır. Burada f dejenere doğru koruyan dönüşümdür. f dönüşümü açıkça $\mathbb{R}^n$ kümesinde reel-analitiktir.

Örnek 2 *(Reel-analitik dejenere geodezik koruyan dönüşü)*

$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 < 1\}$ hiperbolik uzayda açık yuvar olsun. $\mathbb{D} = \{x \in C : |x|^2 < 1\}$ açık yuvarında 0 ile x arasındaki hiperbolik uzaklık $d(0, x)$ ile gösterilsin.

$$d(0, |x|^2) = \ln \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}$$

olmak üzere

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left[d(0, |x|^2). \sin\left(d(0, |x|^2)\right)\right], \; x \in \mathbb{D}^n$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\psi: x \to d(0, |x|^2)$ dönüşümü $\mathbb{D}^n$ yuvarındaki her geodezik $c \geq 0$ için $[c, \infty)$ aralığına örten olarak taşır. Lemma 4.3.1.1 den $g = \frac{2}{\pi} \arctan(\psi. \sin(\psi))$ dönüşümü $\mathbb{D}^n$ yuvarındaki tüm geodezikleri $(-1,1)$ aralığında örter. Bu da $\mathbb{D}^n$ yuvarında bir geodezik olur. Buradan g dönüşümü dejenere geodezik koruyan dönüşümdür. Dahası g dönüşümü $\mathbb{D}^n$ yuvarında reel-analitiktir.

5. KÜRE KORUYAN DÖNÜŞÜMLER ve ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde E bir Hilbert uzayını göstermek üzere x ile y arasındaki uzaklık $|x-y|$ ile ifade edilecektir. $\infty \notin E$ ise $\dot{E} = E \cup \{\infty\}$ biçiminde gösterilecektir.

Tanım 5.1 $f: \dot{E} \to \dot{E}$ dönüşümü örten ve çifte oranı koruyorsa f dönüşümü Möbius dönüşümdür (Yang 2014).

Teorem 5.2 Ω_1 ve Ω_2 , $\dot{E}$ kümesinde iki bölge olmak üzere bu iki bölge arasında birebir ve örten dönüşüm tanımlasın. Aşağıdakiler denktir.

(1) f, $\dot{E}$ kümesi üzerinde tanımlı Möbius dönüşümünün Ω_1 üzerindeki kısıtlamasıdır,

(2) f , lokal küre koruyan dönüşümdür

(Yang 2014).

Bundan sonraki kısımda x' ile $f(x)$, $[x,y]$ ile x ve y tarafından sınırlı doğru parçası ve AB ile A ve B noktalarından geçen doğru gösterilecektir.

Aşağıdaki lemmaların tümünde $f: \dot{E} \to \dot{E}$ küre koruyan birebir ve örten bir dönüşüm olup $f(\infty) = \infty$ olduğu kabul edilecektir.

Lemma 5.3 f dönüşümü kürelerin merkezlerini korur (Yang 2014).

İspat. S küresi verilsin. S küresinin çapı $[x,y]$ olsun. S küresine x ve y noktalarında teğet H_1 ve H_2 hiperdüzlemleri vardır. $H_1 \cap H_2 = \infty$ ve f birebir olduğundan $H_1' \cap {H_2}' = \{\infty\}$ olup $[x', y']$, S' küresinin çapıdır. o noktası S küresinin merkezi olmak üzere $[x,o]$, $[o,y]$ çaplı iki küre oluşturulsun. $[x,o]$, $[o,y]$ çaplı kürelerin f altındaki görüntüleri $[x', o']$ ve $[o', y']$ olup bu küreler o' noktasında teğettir. Bu durumda o' noktası $[x', y']$ doğru parçası üstündedir. $[x', y']$ keyfi olduğundan ve her çap için bu özellik sağlanacağından o' noktası S' küresinin merkezidir. ■

Lemma 5.4 $\boldsymbol{f}$ dönüşümü süreklidir (Yang 2014).

İspat. Keyfi bir a noktasında f dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. a merkezli r yarıçaplı küreyi $S(a,r)$ ile gösterilsin. Lemma 5.3 den $f\big(S(a,r)\big) = S(b,R)$ dir. Burada $f(a)$ =b dir.

$$F: [0,\infty) \quad \rightarrow \quad [0,\infty)$$
$$t = |x-a| \rightarrow |f(x)-b|$$

dönüşümü tanımlansın. $F(0) = 0$ olduğu açıktır. $r_1 < r_2$ olmak üzere $S(a,r_1)$ ve $S(a,r_2)$ küreleri seçilsin. $f\big(S(a,r_1)\big) = S(b,R_1)$ ve $f\big(S(a,r_2)\big) = S(b,R_2)$ olsun. $R_1 < R_2$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $R_1 > R_2$ olsa idi f dönüşümü a noktasından geçen $S(a,r_1)$ küresine teğet olan bir S çemberini noktasından geçen $S(b,R_1)$ küresine teğet olan bir başka küreye götürür. Buradan $f(S) \cap S(b,R_2) \neq \emptyset$ olduğundan bu durum ise $S \cap S(a,r_2) = \emptyset$ olmasıyla çelişir.

Diğer yandan $S(a,r_1)$ ve $S(a,r_2)$ kürelerinin ikisine de teğet olan tüm kürelerin f altındaki görüntüleri $S(b,R_1)$ ve $S(b,R_2)$ kürelerine teğettir. $S\left(a,\frac{r_1+r_2}{2}\right)$ küresi $S(a,r_1)$ ve $S(a,r_2)$ kürelerine teğet olan tüm kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olup;

$$f\left(S\left(a,\frac{r_1+r_2}{2}\right)\right) = S\left(b,\frac{R_1+R_2}{2}\right)$$

elde edilir. Buradan F monoton olup $F(x+y) = \frac{F(x)+F(y)}{2}$ dir. F sürekli olup böylece f dönüşümü a noktasında süreklidir. ■

Lemma 5.5 f dönüşümü doğruları ve k −boyutlu düzlemleri korur (Yang 2014).

İspat. Öncelikle f dönüşümünün doğru parçalarını koruduğunu göstermek yeterlidir. $x,y \in E$ için, $[x,y]$ çaplı S küresini oluşturalım. $a \in [x,y]$ için a merkezli S küresine x veya y noktalarının birinde teğet olan bir S_1 küresi vardır. f dönüşümü birebir olduğundan S' ve S_1' küreleri teğettir. İki küre bir z noktasında teğet ise bu iki kürenin merkezleri ve z noktası doğrusaldır. Lemma 5.3 den $a' \in [x',y']$ dir. Lemma 5.4 den dolayı $[x,y]$ görüntüsü $[x',y']$ dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 5.6 f dönüşümü açıortayları korur (Yang 2014).

İspat. E küresinde AB ve AC iki ışın alınsın. AB ve AC doğru parçalarına teğet olan ve merkezi $\angle BAC$ açısının açıortayı üzerinde bulunan bir S küresi oluşturalım. Bu kürenin merkezi O noktası olsun. Lemma 5.3 ve Lemma 5.4 'den A' noktası S' küresinin dışındadır. f dönüşümü birebir olduğundan S' küresi $A'B'$ ve $A'C'$ doğrularına teğettir. Lemma 5.3 ve Lemma 5.5 den dolayı f dönüşümü açıortayları korur. ■

Lemma 5.7 f dönüşümü açıların ölçüsünü korur (Yang 2014).

İspat. O merkezli bi Q çemberi alalım. Q çemberi üstünde saat yönüne göre sıralanmış $\angle A_i O A_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$, $(n \geq 4)$ olacak biçimde $A_1, A_2, \ldots\ , A_n$ noktaları seçilsin. Lemma 5.3 Lemma 5.4, Lemma 5.5 ve Lemma 5.6' dan dolayı Q çemberinin görüntüsü olan Q' kümesi de bir çember olup $\angle A_i' O' A_{i+1}' = \frac{2\pi}{n}$ dir. Fakat burada dikkat edilecek olursa yönlendirme değişebilir. Buradaki inşa $n = 3$ ve $n = 2$ içinde (açılar tam ikiye bölünerek) sağlanır. f dönüşümü $\frac{2\pi p}{q}$ değerli açları korur. $(p, q \in N, q \geq 2p)$. Böylece f rasyonel değerli açıları da korur. $\bar{Q} = \mathbb{R}$ ve f sürekli olduğundan f dönüşümü tüm açıları korur. ■

Teorem 5.8 $f : \dot{E} \to \dot{E}$ dönüşüm olsun. f nin Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter şart f nin küre koruyan birebir örten dönüşüm olmasıdır (Yang 2014).

İspat. $(\Rightarrow)$ f, Möbius dönüşüm olsun. a ve b noktaları S küresine göre invers noktalar olsun. $x \in S$ için $\frac{|x-a|}{|x-b|} = k$ olsun. Buradan $[x, a, \infty, b] = k$ olup Möbius dönüşüm altında çifte oran korunacağından $[x', a', \infty, b'] = k$ dir. Böylece f dönüşümü altında kürelere göre simetri korunur. Bu durumda S' küresi herhangi bir kümenin altkümesidir. f Möbius dönüşüm olduğundan birebir örten olup tersi vardır ve tersi de bir Möbius dönüşümdür. Buradan S' kümesinin küre olduğunu görmek kolaydır.

$(\Leftarrow)$ $f : \dot{E} \to \dot{E}$ dönüşümü $f(\infty) = \infty$ olacak biçimde küre koruyan dönüşüm olsun. Birbirinden farklı olacak biçimde $a, b\ , c, d$ noktaları seçilsin ve köşeleri a, b, c olan üçgen Δabc ile gösterilsin. Lemma 5.4 ve Lemma 5.6 dan dolayı Δabc ve $\Delta a'b'c'$ üçgenleri benzerdir.

Yani;

$$\frac{|a'-b'|}{|a-b|}=\frac{|b'-c'|}{|b-c|}=\frac{|c'-a'|}{|c-a|}$$

dir. Benzer biçimde

$$\frac{|a'-d'|}{|a-d|}=\frac{|d'-c'|}{|d-c|}=\frac{|c'-a'|}{|c-a|}$$

buradan

$$[a',b',c',d']=\frac{|a'-b'|}{|a'-d'|}.\frac{|c'-d'|}{|c'-b'|}=\frac{|a-b|}{|a-d|}.\frac{|c-d|}{|c-b|}=[a,b,c,d]$$

olur. f çifte oranı koruduğundan ve örten olduğundan Möbius dönüşümdür. Böylece ispat tamamlanır. ■

$f{:}\,\Omega\subset\dot{E}\to\dot{E}$ biçiminde bir dönüşüm olsun. Sonlu boyutta olduğu gibi, eğer $f|_{\Omega}$ bir Möbius dönüşümünün kısıtlanması ise f dönüşümüne bir tek sürekli özelliğe sahiptir denir ve $\forall\, a\in\Omega$ için $f|_{B_a}$ dönüşümü bir Möbius dönüşümünün kısıtlanmasıdır. B_a, a noktasını içeren bir yuvar olarak göstertilmiştir.

Lemma 5.9 ve Sonuç 5.10 den Hilbert uzaydaki Möbius dönüşümleri ile sonlu boyutlu uzaydaki Möbius dönüşümlerinin benzer formda olduğu görülür.

Lemma 5.9 $\{x\in E{:}\,|x|<1\}$ birim yuvarında alınan bir B noktası için $f(B)=B$ ve $f(0)=0$ olacak biçimde bir f Möbius dönüşümü verilsin. Bu durumda A bir ortogonal operatör olmak üzere $f(x)=xA$ dir (Yang 2014).

İspat. f, Möbius dönüşümü olduğundan çifte oranı korur. Bu durumda küreye veya hiperdüzleme göre simetrik noktaların görüntüsü küreye veya hiperdüzleme göre simetriktir. $f(B)=B$ ve $f(0)=0$ olduğu için O merkezli kürelerin görüntüleri O merkezli kürelerdir ve orijinden geçen doğruların görüntüleri orijinden geçen doğrulardır. Lemma 5.3 e benzer biçimde f dönüşümü doğru parçalarını, doğru parçaların götürür. x ve y tanımlanmış olduğu vektörler lineer bağımsız olacak biçimde iki nokta olsun. x ve y tarafından gerilen düzlemin f altındaki görüntüsü x' ve y' tarafından gerilen düzlemdir. Buradan f dönüşümü x ve y tarafından gerilen düzlem üzerinde lineer olup $f(x)=|x|$ dir. Çünkü Möbius dönüşümleri konform dönüşümlerdir. $f(x)=xA$ olacak biçimde bir A operatörü vardır. ■

Sonuç 5.10 $f: \dot{E} \to \dot{E}$ bir Möbius dönüşümü olsun.

(1) A bir ortagonal operatör ve σ , $s = \partial B$ küresine ortagonal olan bir küreye göre yansıma olmak üzere $f(B) = B$ ise $f(x) = A(\sigma x)$ biçimindedir,

(2) $r > 0,\ x_0 \in E$ ve A bir ortagonal operatör olmak üzere $f(\infty) = \infty$ ise $f(x) = rAx + x_0$ biçimindedir,

(3) $r \in R,\ x_0 \in E$ ve A bir ortagonal operatör olmak üzere σ bir yansıma olmak üzere $f(\infty) \neq \infty$ ise $f(x) = rA(\sigma x) + x_0$ biçimindedir,

(Yang 2014).

Sonlu boyutlu durumlarda bir Möbius dönüşümü kürelerdeki sonlu sayıdaki yansımanın bileşkesidir. Fakat bu durum sonsuz sayıdaki uzaylar için geçerli değildir.

Lemma 5.11 $\dot{E}$ sonsuz boyutlu Hilbert uzayı olmak üzere $\dot{E}$ kümesindeki kürelere göre sonlu sayıdaki yansımanın bileşkesi f olsun. Bu durumda $f(\dot{A}) = \dot{A}$ olacak biçimde sonlu boyutlu bir A alt uzayı vardır ve A kümesini içeren tüm alt uzayların kapanışı f altında inveryanttır. Burada $\dot{A} = A \cup \{\infty\}$ dır (Yang 2014).

İspat. f dönüşümü, $S(a_i,\ r_i)$ ve $P(b_j,\ t_j)$ kürelerine göre yansımaların bileşkesi olsun. $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m)$

1. Durum $\phi_i,\ S(a_i,\ r_i)$ küresine göre bir yansıma olsun ve M , a_i noktasını içeren bir alt uzay olsun. M uzayı, a_i noktasından geçen doğruların koleksiyonu olmak üzere $\phi_i(M) = M$ olduğu kolayca görülür.

2. Durum $\varphi_j,\ P(b_j,\ t_j)$ küresine göre yansıma ve l ise orjin ve b_j noktasından geçen doğru olsun. l doğrusunu kapsayan bir N lineer alt uzayı l doğrusuna paralel olan tüm doğruların bir kolleksiyonu olarak görülebilir. Bu doğruların hepsi $P(b_j,\ t_j)$ küresine dik olduğundan $\varphi_j(N) = N$ dır. b_j' noktası $P(b_j,\ t_j)$ küresi ile l doğrusunun kesiştiği nokta olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq m$ için b_j' ile a_i noktalarının gerdiği uzay A ile gösterilirse $f(\dot{A}) = \dot{A}$ elde edilir. ∎

6. KÜRE KORUYAN DEJENERE DÖNÜŞÜMLER

$\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ için $\mathbb{R}^n$ $n-$boyutlu Öklidyen uzay ve $\mathbb{H}^n$ $n-$boyutlu hiperbolik uzaydır. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde $r-$boyutlu kürelerin f altındaki görüntüsü $r-$boyutlu küreler ise f küre koruyan dönüşümdür. Benzer biçimde $\mathbb{H}^n\,(veya\,\mathbb{R}^n)$ de $r-$boyutlu hiperdüzlemlerin f altındaki görüntüsü $\mathbb{H}^n$ $(veya\,\mathbb{R}^n)$ de $r-$boyutlu hiperdüzlemler ise f dönüşümü $\mathbb{H}^n\,(veya\,\mathbb{R}^n)$ de hiperdüzlemleri koruyan dönüşümdür. Özel olarak $r = 1$ için $\widehat{\mathbb{R}^n}\,(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^n)$ de f dönüşümü çember (geodezik, doğru) koruyan dönüşümdür. $f, r-$boyutlu küre koruyan dönüşüm olmak üzere $f(\widehat{\mathbb{R}^n})$ $r-$boyutlu küre oluyorsa f dejenere dönüşümdür. Aksi halde f non-dejenere dönüşümdür.

Hiperbolik uzayda ve Öklid uzayında dejenere ve non-dejenere dönüşümler benzer biçimde tanımlanır. Burada $n \geq 2\; ve\;\; 1 \leq r < n$ alınacaktır. Bir Möbius dönüşümü $\widehat{\mathbb{R}^n}$ $r-$boyutlu küreleri korur ve izometri (afin) dönüşümdür. $\mathbb{H}^n$ (veya $\mathbb{R}^n$) $r-$boyutlu hiperdüzlemleri korur. Peki bunun tersi doğru mudur? Bu soru birçok yazar tarafından incelenmiştir. Örneğin; Nehari (1952), $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ sabit olmayan meromorfik dönüşümü çember korur, böylece f Möbius dönüşümüdür şeklinde ifade etmiştir. Aczėl (1967), $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ çember koruyan, birebir ve örten dönüşüm ise f Möbius dönüşümü olduğunu kanıtladılar.

Teorem 6.1 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ dönüşümü birebir ve örten olup $r-$boyutlu küreleri korur ise f Möbius dönüşümüdür (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.2 $f: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ dönüşümü birebir ve örten olup $r-$boyutlu hiperdüzlemleri korur ise f izometridir (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.3 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü birebir ve örten olup $r-$boyutlu hiperdüzlemleri korur ise f Afin dönüşümüdür (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.4 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ $(\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n,\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ çember koruyan (geodezik koruyan, doğru koruyan) dönüşüm olsun. f' nin Möbius (izometri, afin) dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f' nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.5 1≤ $r < n$ için $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ r −boyutlu küreleri koruyan dönüşüm olsun. f' nin Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f' nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.6 $1 \leq r < n$ için $f: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ r −boyutlu hiperdüzlemleri koruyan dönüşüm olsun. f' nin izometri olması için gerek ve yeter koşul f'nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.7 $1 \leq r < n$ için $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ r −boyutlu hiperdüzlemleri koruyan dönüşüm olsun. f' nin afin dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f' nin non-dejenere olmasıdır (Li *et al.* 2009).

6.1 Möbius dönüşümleri ve $\widehat{\mathbb{R}^n}$ de Non-dejenere Dönüşümler

Bu bölümde Teorem 6.5 ispat edilecektir. Teorem 6.5 gerekliliği açıktır. Teorem 6.4 den $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ non-dejenere r −boyutlu küreleri koruyan bir dönüşüm olmak üzere burada 1≤ $r < n$, $n \geq 3$ için f' nin bir Möbius dönüşümü olduğu gösterilecektir. Γ, r −boyutlu küre ve L , Γ küresinde $(r-1)$ −boyutlu küre olsun. Γ\L' nin bileşenlerinden birinin r −boyutlu disk olduğu söylenebilir. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde $A \geq 3$ elemanlı küme, t en küçük pozitif tamsayı olsun. $\prod A$, A kümesini içeren t −boyutlu küre şeklinde tanımlansın.

Lemma 6.1.1 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ fonksiyonu sabit bir r sayısı için aşağıdaki iki özellik sağlanır.

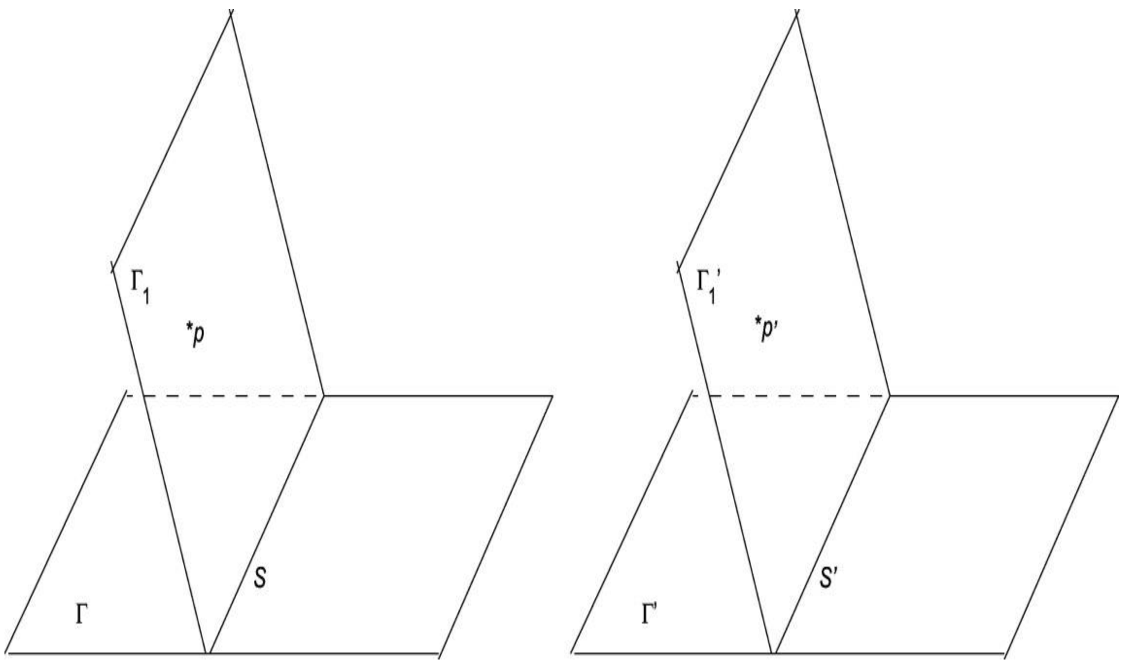
i. r −boyutlu küreleri, r −boyutlu kürlere götürsün.
ii. $f(\widehat{\mathbb{R}^n})$ kümesi r −boyutlu küre tarafından kapsanmasın.

Bu durumda $1 \leq \mathrm{k} \leq r-1$ olacak biçimde k −boyutlu S kürelerinin görüntüsü k −boyutlu kürelerdir. Özellikle çemberlerin görüntüleri çemberlerdir (Li *et al.* 2009).

Lemma 6.1.2 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ r −boyutlu küreleri koruyan non-dejenere fonksiyon olsun. f fonksiyonu $(r-1)$ −boyutlu küreleri, $(r-1)$ −boyutlu kürlere örten olarak taşır (Li *et al.* 2009).

Teorem 6.5 ispatı. f fonksiyonu $r-$boyutlu küreleri koruyan ve non-dejenere olduğundan Lemma 6.1.1 ve Lemma 6.1.2 gereği $(r-1)-$boyutlu küreleri korur. Tümevarım metodu tersten uygulanırsa f fonksiyonu altında çemberlerin $(1-$boyutlu küre$)$ korunduğu kolayca görülür. Bu ise Teorem 6.4 ün direkt bir uygulamasıdır. ■

Lemma 6.1.1 ispatı. $k=r-1$ olsun. S, $k-$küresinin Γ $r-$küresine gömülmesiyle hipotezden dolayı $f(\Gamma)=\Gamma'$ bir $r-$küredir. $\infty \in S, f(\infty)=\infty$ olsun. Üstelik hipotezden dolayı $f(\widehat{\mathbb{R}^n})$, $r-$boyutlu küre tarafından kapsanmadığından Γ küresi dışında $f(\mathrm{p})=\mathrm{p}' \notin \Gamma$ olacak biçimde bir p noktası vardır (Şekil 6.1.1).



Şekil 6.1.1 k-boyutlu kürelerin görüntüsü, k-boyutlu kürelerdir.

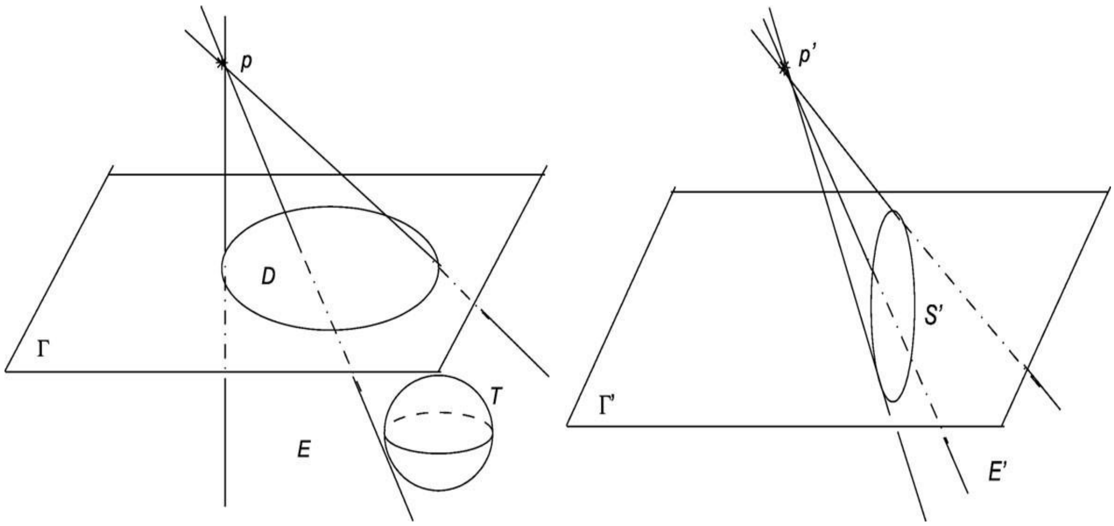
$\Gamma_1=\prod\{S,p\}$ olsun. Bu durumda Γ_1 $r-$küredir. $f(\Gamma_1)=\Gamma_1'$ olup

$$f(\mathrm{S})=f(\Gamma\cap\Gamma_1)\subset f(\Gamma)\cap f(\Gamma_1)=\Gamma'\cap\Gamma_1'$$

elde edilir. $\Gamma'\cap\Gamma_1'$, $(r-1)-$boyutlu küre tarafından kapsanır. Bu durumda $k=r-1$ için lemma sağlanır. $f(\widehat{\mathbb{R}^n})$, $r-$boyutlu küre tarafından kapsanmadığı açıktır. Tümevarım metodu tersten uygulanırsa lemmanın $1\le \mathrm{k}\le r-1$ olacak biçimde her k sayısı için ispat benzer yöntemle yapılır. ■

Lemma 6.1.3 f, $r-$boyutlu küre koruyan ve non-dejenere dönüşüm olsun. Γ $r-$boyutlu küre olmak üzere Γ içindeki $r-$boyutlu $\mathbb{D}$ diski için $f(\mathbb{D})$ $(r-1)-$boyutlu küre tarafından kapsanmaz (Li *et al.* 2009).

İspat. Aksi kabul edilsin. $f(\Gamma)=\Gamma'$ olsun. Bu durumda Γ' içinde $(r-1)-$boyutlu bir S' küresi $f(\mathbb{D})\subset S'$ olacak biçimde vardır. $f(\infty)=\infty\notin S'$, $\infty\in.\Gamma\setminus\mathbb{D}$ olsun. Aksi halde uygun bir Möbius dönüşümü ile bileşke işlemi uygulanır. Lemma 6.1.1 deki biçimde bir p noktası ($p'=f(p)\notin\Gamma'$) seçilsin (Şekil6.1.2).



Şekil 6.1.2 r-boyutlu $\mathbb{D}$ diskinin görüntüsü (r-1)-boyutlu disk tarafından kapsanmaz.

$\mathbb{D}$ diskinin her q noktasını p noktasıyla (p,q ve ∞ noktalarından geçen) bir çembere bağlansın. E ise bu doğruların $(1-küre)$ kümesini göstersin. Bu durumda E kümesinin $r-$boyutlu bir T altkümesinin var olduğunu görmek zor değildir. Diğer yandan S' küresinin her q' noktasını p' noktasıyla ∞ noktasından geçecek biçimde doğrularla birleştirerek E' doğru demeti oluşturulsun. Buradaki E' kümesine ∞ noktasından geçen $r-$boyutlu koni yüzeyi diyelim. Lemma 6.1.1den f fonksiyonu p,q ve ∞ noktalarından geçen doğruları $p',q'=f(q)$ ve ∞ noktalarından geçen doğrulara dönüştürür. Buradan $f(E)\subset E'$ olup böylece $f(T)=T'$ bir $r-$boyutlu küre olup E' tarafından kapsanır. Hâlbuki bu imkânsızdır. Şimdi bunun tersini kabul edelim. İki durum söz konusudur.

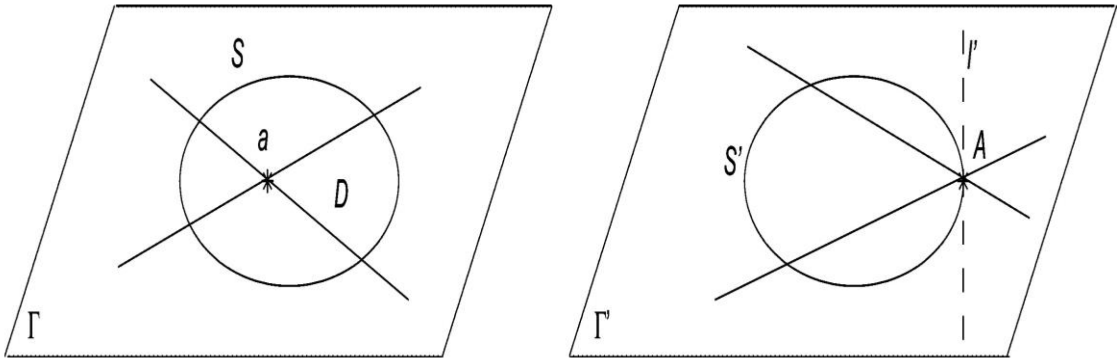
1. Durum T', ∞ noktasını kapsasın. Gerçekten $T' \cong \widehat{\mathbb{R}^r}$ dir. Dikkat edilecek olursa E' kümesindeki her doğru p' noktasından geçtiği için T' küresi de p' noktasından geçer bu imkânsızdır. (T' küresi üzerinde bir m noktası alınırsa m ve ∞ noktalarından geçen doğru T' küresi üzerinde olmalıdır. Bu doğru üzerinde p' noktası da olmalıdır.)

2. Durum T', ∞ noktasını kapsamasın. Öncelikle p' noktası T' küresi tarafından sınırlı $r-$boyutlu yuvar içinde değildir. Dolaysıyla Γ' noktasını T' küresinin içinde olmayacak şekilde düşünülebilir. E' koni yüzeyi (∞ noktası göz ardı edilerek) Γ' ve p' tarafından gerilen R^{r+1} uzayı olarak ele alınsın. o' noktası T' küresinin merkezi olsun. $|p'o'| < |p'o''|$ olacak biçimde $\overrightarrow{p'o'}$ üstünde ve T' küresinin içinde o'' noktası seçilsin. o' noktasından geçen ve Γ' küresine paralel olan $r-$boyutlu düzlem K' ile, o'' noktasından geçen ve Γ' küresine paralel olan $r-$boyutlu düzlem K'' ile gösterilsin. $K' \cap E'$, $K' \cap T'$, $K'' \cap E'$, $K'' \cap T'$ küreleri $(r-1)-$boyutludur. Çünkü bunlar S' ye paraleldir. Üstelik $K' \cap E' = K' \cap T'$ve $K' \cap E' = K'' \cap T'$ dir. $|p'o'| < |p'o''|$ olması $K' \cap E'$ küresinin yarıçapının, $K' \cap E'$ küresinin yarıçapından küçük olması gerekir. Fakat o' noktası T' küresinin merkezi olduğundan $K' \cap T'$ küresinin yarıçapı, $K'' \cap T'$ küresinin yarıçapından büyüktür. Bu ise bir çelişki olup ispat böylece tamamlanır. ■

Lemma 6.1.2 ispatı. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ de $(r-1)-$boyutlu S küresi verilsin. Lemma 6.1.1 den $f(S) \subset S'$ olacak biçimde $(r-1)-$boyutlu S' küresi vardır. Bu durumda

i. S küresi bir $r-$boyutlu Γ küresi tarafından kapsanır.
ii. $f(\infty) = \infty \in \Gamma$
iii. $S' \subset \Gamma' = f(\Gamma)$ ve $\infty \notin S'$

olsun. Aksi halde uygun bir Möbius dönüşümü alınarak bu özellikler sağlatılır. $r-$boyutlu $\Gamma \backslash \{\infty\}$ Öklid uzayında S küresi tarafından sınırlı disk D ile gösterilsin. Kabul edelim ki $f(S)$, $(r-1)-$boyutlu küre olmasın. Bu durumda $A \in S' \backslash f(S)$ olacak biçimde A noktası vardır. A noktasını f dönüşümü altındaki ters görüntüsü $a \in \Gamma \backslash \mathrm{S}$ olsun (Şekil 6.1.3).



Şekil 6.1.3 f, (r-1)-boyutlu küreleri, (r-1)-boyutlu kürlere örten olarak taşınması

1. Durum $a \in D$ olsun. Bu durum da a ve ∞ noktalarından geçen tüm doğrular kesinlikle Γ küresini örter ve hepsi S küresinden geçer. Buna ek olarak bu doğruların hepsinin f dönüşümü altındaki görüntüsü Γ' küresindeki A noktasından ve $S'\backslash\{A\}$ geçen doğrulardır. Fakat Γ' küresindeki S' küresine A noktasında teğet olan doğruların hiçbiri $f(\Gamma)$ tarafından kapsanmaz. Bu ise $f(\Gamma) = \Gamma'$ olmasıyla çelişir. Çünkü A noktasından geçen S$'$ küresine teğet doğru varken, a noktasından geçen S küresine teğet doğru yoktur.

2. Durum $a \notin D$ olsun. Lemma 6.1.4 ten $f(D) \subset S'$ dir. Bu durumda D yuvarının öyle bir b noktası vardır ki $f(\mathrm{b}) = \mathrm{B} \notin S'$ dür.

$$h_1(b) = \infty \ , \quad h_2(B) = \infty$$

olacak biçimde iki Möbius dönüşümü seçilsin. Buradan

$$F = h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$

dönüşümü için $F(\infty) = \infty$ olup

$$h_1 \in \widetilde{D} = h_1(D^c) \; ve \; F(h_1(a)) \in h_2(S')\backslash F(h_1(S'))$$

için $h_1(S)$ küresi $h_2(S')$ küresine dönüşür. Böylece 1.Durumdan dolayı ispat tamamlanmış olur. ∎

Teorem 6.5 den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1.4 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ $r-$boyutlu küreleri koruyan dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü $p \in R^n$ noktasında sürekli ise f Möbius dönüşümüdür (Li *et al.* 2009).

Sonuç 6.1.5 $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ $r-$boyutlu küreleri koruyan dönüşüm olsun. $f^{-1}(p') < \infty$ (sonlu sayıda elemana sahip) olacak biçimde bir $p' \in f(\widehat{R^n})$ varsa f bir Möbius dönüşümüdür (Li *et al.* 2009).

6.2 $\widehat{\mathbb{R}^n}$ Küre Koruyan Dejenere Dönüşüm İnşası

1. Adım $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ olmak üzere

$$g_1: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$$

$$x \to g_1(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} |x_i|, & \in \mathbb{R}^n \\ 0 \quad , & x = \infty \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın.

2. Adım $\mathbb{R}$üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

biçiminde bir denklik bağıntısı tanımlansın. x' in denklik sınıfı $\tilde{x}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $\tilde{x}$ sayılabilir. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan tüm denklik sınıflarının kümesi $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ile gösterilsin, yani $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = \{\tilde{x} : \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$ dir. $card(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$ nun $\aleph$ olmadığı $\aleph_0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sayılabilir bir küme olup $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ kümesinin elemanları sayılabilir olduğundan sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilirdir. Bu ise çelişki olup $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ sayılamazdır. $x \in \mathbb{R}$ için $g_2(x) = \tilde{x}$ kuralıyla verilen $g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ bölüm fonksiyonu vardır.

3. Adım S, $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde $r-$boyutlu bir küre olsun. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresindeki noktalar kümesinde olduğu gibi $card(S) = \aleph$ dir. $card(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}) = \aleph$ ve $card(S) = \aleph$ olduğu için

$$g_3: \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \to S$$

olacak biçimde birebir ve örten bir dönüşüm vardır.

4. Adım g_1, g_2, g_3 dönüşümlerinin bileşkesi alınarak $f: \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ bir dönüşüm tanımlayalım. İddia ediyoruz ki f dejenere $r-$küre koruyan dönüşümdür. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde verilen $r-$boyutlu bir T küresi için $g_1(T)$ kümesinin $\mathbb{R}$ deki L doğru parçasını kapsadığını görmek kolaydır.

Şimdi $g_2(L) = \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\tilde{y} \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ olsun. $\tilde{y}$ denklik sınıfının g_2 altındaki ters görüntülerinin tümü $g_2^{-1}(\tilde{y})$ olsun. $(g_2^{-1}(\tilde{y}) \subset R)$ g_2 dönüşümünün tanımında $g_2^{-1}(\tilde{y})$ kümesi $\mathbb{R}$ kümesinde yoğundur. Yani $\overline{g_2^{-1}(\tilde{y})} = \mathbb{R}$ dir. Böylece $g_2(x) = \tilde{y}$ olacak biçimde L doğru parçası üzerinde en az bir x noktası vardır. $\tilde{y}$, $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ kümesinde keyfi seçildiği için $g_2(L) = \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ dur.

Uyarı. $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresinde verilen boş olmayan E kümesi için S küresinden E kümesine tanımlı örten bir g_4 dönüşümü vardır. $\tilde{f} = g_4 \circ f$ dönüşümü $\widehat{\mathbb{R}^n}$ küresindeki her r −boyutlu küreleri E kümesine götürür. Üstelik $\tilde{f}$ çember üzerindeki yay parçalarını da E kümesine götürür. $T = \widehat{\mathbb{R}^n}$ alınırsa ispat tamamlanır.

7. KAYNAKLAR

Aczẻl, J. and McKiernan, M.A. (1967). On the characterization of plane projective and complex Möbius transformation. *Mathematische Nachrichten*, **33:** 315-337.

Anderson, J. (2005). Hyperbolic Geometry. Springer, 2. Edition, USA.

Arıkan, A. and Halıcıoğlu, S. (2012). Soyut Matematik. Palme Yayıncılık, 1. Baskı, Ankara.

Artin, E. (1957). Geometric Algebra. İnterscience Publishers, USA.

Balcı, M. (2010). Matematik Analiz 1. Balcı Yayınları, 8. Baskı, Ankara.

Başkan, T. (1996). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi, 2. Baskı, Bursa.

Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analizi. Gazi Kitabevi, 1. Baskı, Ankara.

Beardon, A.F. and Minda, D. (2001). Sphere-preserving maps in inversive geometry. *Proceedings of the American Mathematical Society,* **130:** 987-998

Chubarev, A. and Pinelis, I. (1999). Fundental theorems of geometry without the 1-to-1 assumption. *Proceedings of the American Mathematical Society,* **127:** 2735-2744.

Hacısalihoğlu, H. H. (1976). Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler. Ankara Üniversitesi, Ankara.

Jeffers, J. (2000). Lost theorems of geometry. *The American Mathematical Monthly*, **107:** 800-812.

Kaya, S. (2006). Möbius Transformasyonlarının Geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Li, B. and Wang, Y. (2005). Transformations and non-degenerate maps. *Science China Series A, Mathematics,* **48:** 195-205.

Li, B. and Yao, G. (2009). On characterizations of sphere-preserving maps. *MathematicalProceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **147:** 439.

Nehari, Z. (1952). Conformal Mapping. MvGraw – Hill Book Company, USA.

Olsen, J. (2010). The Geometry of Mobius Transformation. University Rochester, USA.

Sabuncuoğlu, A. (2010). Diferansiyel Geometri. Nobel Yayınları, 4. Baskı, Ankara

Shanahan, P. D. and Zill, D. G. (2013). A Firt Corse in Complex Analysis With Application. Jones-Bartlett Learning, 3. Editon, USA.

Yang, S. (2014). On the properties of sphere-preserving maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **419:** 748-755.

Yao, G. (2007). On existence of degenerate circle-preserving maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **334:** 950-953.

İnternet Kaynakları

1) http://matder.org.tr, 01.05.2016

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: İbrahim Halil ÜZÜMCÜ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Gaziantep
Yabancı Dili	: 01.08.1990
İletişim (Telefon/e-posta)	: halil.uzumcu@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	19 Mayıs Lisesi, (2006-2010)
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2010-2014)