KÜME DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe İĞDE

DANIŞMAN

Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2016

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜME DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ayşe İĞDE

DANIŞMAN
Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kasım, 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Ayşe İĞDE tarafından hazırlanan "Küme dizilerinin Yakınsaklığı Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 04/11/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yurdal SEVER

Başkan : Doç. Dr. Özer TALO
Manisa Celal Bayar Üniv. Fen Edeb. Fak.

Öz Talo

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

YSever

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2016 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

04/11/2016

Ayşe İĞDE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜME DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ayşe İĞDE
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Yurdal SEVER

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde matematik alanında önemli ve bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde küme dizilerine ait tanım, teorem ve bunlarla ilgili örnekler incelenmiştir. Dördüncü bölümde Kuratowski yakınsaklık üzerinde durulmuştur. Bu bölümde, iç limit kümesi ve dış limit kümesi ile küme yakınsaklığının temel özellikleri verilmiş, monoton küme dizilerinden bahsedilmiştir. Ayrıca uzaklık fonksiyon tanımı verilip, teorem ve örneklerle ayrıntılı olarak incelenmiştir. Beşinci bölümde Hausdorff yakınsaklık ve son bölüm olan altıncı bölümde ise Wijsman yakınsaklık ve Fisher yakınsaklık incelenmiştir.

2016, v+52 sayfa

Anahtar Kelimeler : Küme dizileri, Kuratowski yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık, Hausdorff yakınsaklık, Fisher yakınsaklık.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON CONVERGENCE OF SEQUENCES OF SET

Ayşe İĞDE
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Yurdal SEVER

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, some important theorems in mathematics and concepts that are necessary for our study are investigated and properties with examples related to those are included. In the third chapter, definitions, theorems and examples about sequences of set are mentioned. In the fourth chapter, Kuratowski convergence is introduced. Basic properties of inner and outer limits of sequences of sets are given and monotone sequences of sets are mentioned. Moreover, the distance function is defined and it is studied with theorems and examples. The fifth chapter is dedicated to Hausdorff convergence. In the sixth chapter, Wijsman convergence and Fisher convergence are examined.

2016, v+52 pages

Key Words : Sequence of set, Kuratowski convergence, Wijsman convergence, Hausdorff convergence, Fisher convergence.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, yüksek lisans eğitimim boyunca sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam

Doç. Dr. Yurdal SEVER'e,

tez çalışmamın düzenlenmesinde katkılarından dolayı Doç. Dr. Özer TALO ve Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU, ayrıca çalışmam boyunca samimi desteğini esirgemeyen kıymetli hocam Arş. Grv. Şükrü TORTOP'a sonsuz teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği geçen ve bu branşı seçmemde katkısı olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe İĞDE

AFYONKARAHİSAR, 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
(X, ρ)	Metrik uzay
$x = (x_n)$	Reel sayı dizisi
sup	En küçük üst sınır
inf	En büyük alt sınır
$B(x_0, \delta)$	x_0 merkezli δ yarıçaplı açık yuvar
$\mathbb{B}(A, \varepsilon)$	A kümesinin ε genişlemesi
$\{A_n\}$	Küme dizisi
$\mathcal{N}$	Doğal sayıların tümleyeni sonlu olan alt kümeleri
$\mathcal{N}^\#$	Doğal sayıların bütün alt kümeleri
$cl(A)$ veya $\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$d(x, A)$	x elemanının bir A kümesine olan uzaklığı
$d(A, B)$	A ve B kümeleri arasındaki metrik uzaklığı
$h(A, B)$	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$P(X)$	X in tüm altkümelerinin kümesi
$CL(X)$	X in tüm kapalı altkümelerinin kümesi
$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin iç limit kümesi
$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin dış limit kümesi
$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ veya $K - \lim\limits_{n\to\infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin Kuratowski yakınsaklığı
$W - \lim$	Wijsman yakınsaklık
$H - \lim$	Haussdorff yakınsaklık
$F - \lim$	Fisher yakınsaklık

1 GİRİŞ

Limit ve yakınsaklık gibi kavramlar analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturan en önemli kavramlardır.

1970 lerin ortalarına kadar küme yakınsaklığı üzerinde yapılan çalışmalar, neredeyse sadece topoloji üzerinde çalışan matematikçiler tarafından yapıldı. Michael (1951) tarafından yazılan bir makale ve Nadler (1978) tarafından yazılan bir kitap, topolojinin tanımının ve analizinin küme yakınsaklığı ile uyumlu olup olmadığı yönündeki sorulara ışık tutar nitelikteydi. Bugünlerde optimizasyon problemleri, ekonomi ve diğer konular üzerindeki uygulamalar bu konu üzerindeki ilgiyi artırdı. Beer (1993) tarafından yazılan bir kitapta, Sonnteg ve Zălinescu (1993) ve Lucchetti ve Torre (1994) tarafından yazılan makalelerde bu ilgi gözlemlenebilir.
Küme dizileri üzerindeki iç limit ve dış limit kümesi tanımları, matematikçi ve aynı zamanda politikacı olan Painlevé tarafından 1902 yılında ortaya atıldı. Bir kümenin yakınsaklığı, bu iç limit ve dış limit kümelerinin eşitliği olarak tanımlandı. Hausdorff (1927) ve Kuratowski (1933), kitaplarında bahsederek bu yakınsaklığa popülerlik kazandırdı. Bu sebeple bu yakınsaklık Painlevé-Kuratowski yakınsaklığı olarak bilinir. Şimdilerde birbirlerinin yerine kullanılsa da, daha önceleri iç ve dış (inner and outer) limit kümesi kavramları ile alt ve üst (lower and upper) limit kümesi kavramları birbirinden ayrılıyordu. İç ve dış limit kümesi kavramları küme dizileri için kullanılırken, alt ve üst limit kümesi kavramları ise diğer yakınsaklık çeşitleri için kullanılıyordu. Bunun nedeni, iç ve dış limit kümesi kavramlarının geometrik anlamları çağrıştırmasındandır.
Wijsman (1966) ve Holmes (1966), küme dizi yakınsaklığının bir karakterizasyonunu oluşturarak, bu yakınsaklığı uzaklık fonksiyonunun noktasal yakınsaklığı üzerinden tanımladılar. Beer ve Lucchetti (1993) ise yine bu yakınsaklığı

$$gap(C, D) = \inf\{|x - y| \ : \ x \in C, \ y \in D\}$$

fonksiyonu yardımıyla tanımladılar.
Sonntag (1976), konveks kümelerin yakınsaklığını bu kümelerin izdüşüm dönüşümleri (projection mapping) üzerinden tanımladı. Kümelerin ε-genişlemesi ile ilgili sonuçlar da Salinetti ve Wets (1981) tarafından formülleştirildi. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan diğer

yakınsaklık kavramları, Painlevé-Kuratowski yakınsaklığına eşit olmasına rağmen, bu kavramların da belli özel uygulama alanları mevcuttur. Örnek olarak bu yakınsaklıklara Pompeiu-Hausdorff ve Vietoris yakınsaklıkları verilebilir. Bu yakınsaklıklar Painlevé-Kuratowski ile kıyaslanabilir fakat bunların dışındaki yakınsaklıklar, örneğin rough yakınsaklık, Painlevé-Kuratowski ile kıyaslanamaz.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek tanım, notasyon ve teoremler verilecektir. Bu bölümde genellikle (Balcı 2010) künyeli kaynaktan yararlanıldı.

Tanım 2.1 Bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin bir *alt kümesi* denir ve $A \subset B$ şekline gösterilir, yani

$$A \subset B \Leftrightarrow \{a \in A \Rightarrow a \in B\}.$$

Tanım 2.2 A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f ye A dan B ye bir *fonksiyon* denir.

(i) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır,

(ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$ dir.

Tanım 2.3 $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde *artan*, $f(x_1) \leq f(x_2)$ olursa *azalmayandır* denir. Benzer olarak, E kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu azalan, $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise *artmayandır* denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona kesin olarak monotondur, artmayan veya azalmayansa monotondur denir. Eğer bir fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, fonksiyonun monoton olduğu, sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona *parçalı monoton fonksiyon* adı verilir.

Tanım 2.4 Tanım kümesi doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ olan her fonksiyona *dizi* denir. Fonksiyonun değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye *reel sayı dizisi* adı verilir. Yani, reel sayı dizisi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur. f fonksiyonunun görüntü kümesi, $\{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots\}$ biçimindedir.

Tanım 2.5 Tüm terimleri birbirine eşit olan diziye *sabit dizi* denir.

Tanım 2.6 Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ ise $(a_n), (b_n)$ *dizileri eşittir* denir ve $(a_n) = (b_n)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.7 $A_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\} \subset \mathbb{N}$ olmak üzere, tanım kümesi A_n kümesi olan her fonksiyona bir n terimli *sonlu dizi* denir.

Tanım 2.8 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad k(n) = k_n$$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere,

$$(aok) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna a dizisinin bir *alt dizisi* adı verilir ve,

$$(aok)(n) = a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$$

şeklinde gösterilir. Bu durum $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ biçiminde ifade edilebilir. Her dizi yine kendisinin bir alt dizisidir, yani $(a_n) \subset (a_n)$ dir.

Tanım 2.9 Herhangi bir (a_n) reel sayı dizisinde, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow (a_n)$ dizisi monoton azalandır.

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow (a_n)$ dizisi monoton artandır.

$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow (a_n)$ dizisi monoton artmayandır.

$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow (a_n)$ dizisi monoton azalmayandır.

Artan veya azalan dizilere kısaca *monoton dizi* denir.

Tanım 2.10 Herhangi bir (a_n) reel sayı dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa, (a_n) dizisi *üstten sınırlıdır* denir. M sayısı bu dizinin bir üst sınırıdır. M sayısından büyük olan her gerçel sayı da dizinin bir üst sınırıdır.
Her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq a_n$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa, (a_n) dizisi *alttan sınırlıdır* denir. m sayısı bu dizinin bir alt sınırıdır. m sayısından küçük olan her gerçel sayı da dizinin bir alt sınırıdır.
Bu durumda (a_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $|a_n| \leq k$ olacak şekilde bir k pozitif reel sayısının var olmasıdır.

Tanım 2.11 Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin en küçük üst sınırı (eküs) veya *supremumu* denir. Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırların en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı (ebas) veya *infimumu* denir.

Tanım 2.12 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $A = \{x \ : \ |x - a| < \varepsilon, \ x \in \mathbb{R}\}$ kümesine a nın ε *komşuluğu* denir.

Tanım 2.13 $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a nın her δ-komşuluğunda A kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına A kümesinin bir *yığılma noktası* denir.

Tanım 2.14 A kümesine ait olup yığılma noktası olmayan elemanlara A nın *izole noktaları* denir. Yani, A kümesine ait bir a noktasının, kendisinden başka A nın hiç bir noktasını içermeyen komşulukları varsa bu nokta A nın bir izole noktası adını alır.

Tanım 2.15 (a_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a nın her bir komşuluğu (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimi hariç geriye kalan tüm terimlerini içeriyorsa (a_n) dizisi a ya yakınsıyor veya (a_n) dizisinin *limiti* a dır denir. Bu durum $\lim a_n = a$ veya $a_n \to a$ şeklinde gösterilir. Yani, her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa (a_n) dizisi a ya *yakınsaktır* denir.
Limiti olan diziye *yakınsak dizi*, aksi halde *ıraksak dizi* denir.

Tanım 2.16 (a_{n_k}), (a_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (a_{n_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (a_n) dizisinin bir *limit noktası* denir.

Tanım 2.17 (a_n) bir reel terimli dizi ve C de (a_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C kümesi, genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $\sup C$ ve $\inf C$ genişletilmiş reel sayılarına, sırasıyla, (a_n) dizisinin *üst limiti* ve *alt limiti* denir. Üst limit, $\limsup a_n$ veya $\overline{\lim}\, a_n$, alt limit, $\liminf a_n$ veya $\underline{\lim}\, a_n$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma denk olan şu tanımı verebiliriz.

Tanım 2.18 (a_n) bir reel terimli dizi olsun.

$$\liminf a_n = \inf_{m \geq 1} \big(\sup_{n \geq m} a_n \big), \qquad \limsup a_n = \sup_{m \geq 1} \big(\inf_{n \geq m} a_n \big)$$

sayılarına sırasıyla (a_n) dizisinin *alt limiti* ve *üst limiti* denir.

Tanımdan, $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ olacağı açıktır.

Teorem 2.19 (a_n) bir reel terimli dizi ve a da bir genişletilmiş reel sayı olsun.

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n = a.$$

Teorem 2.20 Yeteri kadar büyük n ler için $a_n \leq b_n$ ise

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \qquad \text{ve} \qquad \limsup a_n \leq \limsup b_n$$

olur.

Tanım 2.21 (a_n) bir reel terimli dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $|a_m - a_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (a_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 2.22 (a_n) bir reel terimli dizi olsun. (a_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Tanım 2.23 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer a noktası A kümesinin yığılma noktası ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ya da a noktası A kümesinin izole noktası ise f fonksiyonu a noktasında *süreklidir* denir. Yani, f fonksiyonu a noktasında sürekli ise, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

dır. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde *süreklidir* denir.

Tanım 2.24 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$|x - a| < \delta \text{ şartını sağlayan her } x, y \in A \text{ için } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir sayısı $\delta > 0$ varsa $f,\ A$ da *düzgün süreklidir* denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.25 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa $f,\ A$ da *Lipschitz şartını* sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.26 $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa, K ya *konveks küme* adı verilir. Yani,

$$K \text{ konvekstir } \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in K \text{ ve } \forall\, \lambda \in [0,1] \text{ için } \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K.$$

Tanım 2.27 Her $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde *konvekstir* denir.
Her $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde *konkavdır* denir.

Tanım 2.28 $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir *fonksiyon dizisi* denir.

Tanım 2.29 $f_n : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere (f_n) dizisi verilmiş olsun. $x_0 \in A$ için $(f_n(x_0))$ reel dizisi yakınsak ise (f_n) dizisi x_0 noktasında yakınsaktır denir. Her bir $x \in A$ için $(f_n(x))$ dizisi yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir. Şu halde $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_0$ ve her bir $x \in A$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

Tanım 2.30 Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $n > n_0$ olduğunda

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde *düzgün yakınsaktır* denir.

Şimdi reel sayılar üzerinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonunun özelliklerine benzer özellikleri sağlayan, herhangi bir küme üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık olarak yorumlayabileceğimiz metrik adı verilen negatif olmayan reel değerli fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 2.31 X boş olmayan bir küme ve $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

(M1) Her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) \geq 0$,

(M2) Her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M3) Her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(M4) Her $x, y, z \in X$ için $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

şartları sağlanıyorsa, ρ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve ρ ile birlikte X e bir *metrik uzay* denir ve (X, ρ) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.31 deki M1, M3, M4 koşulları sağlanıyor, fakat M2 koşulu sağlamıyorsa metrik *pseudometrik* olarak adlandırılır. Benzer şekilde M3 koşulu hariç diğerleri sağlanıyorsa metriğe *quasi-metrik* denir.

Örnek 2.32 $X = \mathbb{R}$ üzerinde,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq y \text{ ise,} \\ \min\{|x - y|, 1\} & , \quad x > y \text{ ise.} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa, bir pseudo quasi metriktir.

Bir lineer (X, ρ) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).
Metrik yardımıyla reel sayılarda tanımlanan birçok kavram yeniden tanımlanabilir. Bunlardan bazılarını burada verelim.

Tanım 2.33 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\mathbb{R}^n$ de sabit bir nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli ε-yarıçaplı *açık yuvar* denir.

Tanım 2.34 (X, ρ) bir metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun.

(i) $B(x_0, r) = \{x \in X \ : \ \rho(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* denir.

(ii) $B[x_0, r] = \{x \in X \ : \ \rho(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı *kapalı yuvar* denir.

Tanım 2.35 (X, ρ) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\overline{A} = X$ oluyorsa A alt kümesine X de *yoğundur* denir.

Tanım 2.36 (X, ρ) metrik uzay $x \in X$ ve $V \subset X$ alt kümesi için $x \in G \subset V$ koşulunu sağlayan bir $G \subset X$ açık kümesi varsa V ye x in bir komşuluğu denir.

Tanım 2.37 X bir metrik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer,

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *örtüsü* denir. Eğer her $i \in I$ için, A_i kümeleri X kümesinin açık alt kümeleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *açık örtüsü* denir. Eğer $J \subset I$ sonlu ise, X kümesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne X kümesinin *sonlu örtüsü* denir. Eğer $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X kümesini örterse, bu alt aileye X kümesinin bir *alt örtüsü* denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.38 (X, ρ) metrik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, ρ) metrik uzayına *kompakt metrik uzay* denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.39 (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.
X deki her (x_n) Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise yani

$$x_n \to x \in X$$

ise (X, ρ) metrik uzayına *tam metrik uzay* veya kısaca tam denir.

Tanım 2.40 X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|\theta\| = 0$,

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ikilisine *yarı normlu uzay* denir.
Burada (N2) şartı yerine

$$(N2)^{'} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

şartı sağlanırsa, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir *norm* ve $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ikilisine de *normlu uzay* denir. Bir $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir (Maddox 1970).

3 KÜME DİZİLERİ

Bu bölümde, öncelikle küme dizileri ile ilgili temel kavramlar verilip, daha sonra metrik uzaylarda bir noktanın bir kümeye uzaklığı ve herhangi iki küme arasındaki uzaklık kavramı tanımlanacaktır.

3.1 Küme Dizileri

Tanım 3.1.1 X boş olmayan herhangi bir küme olsun. $P(X)$, X in kuvvet kümesi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere,

$$f : \mathbb{N} \to P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon her $n \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(n) = A_n \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, \cdots$ kümelerinin oluşturduğu diziye *küme dizisi* denir.

Metrik uzayda, iki nokta arasındaki uzaklık tanımı kullanılarak, bir noktanın bir kümeye uzaklığının tanımını verebiliriz.

Tanım 3.1.2 (X, ρ) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan herhangi bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A nın tüm noktasına uzaklıklarının infimumudur:

$$d(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \ : \ a \in A\}. \tag{3.1}$$

Eğer $A = \emptyset$ ise $d(x, \emptyset) = \infty$ olarak tanımlanır. $x \in A$ ise $d(x, A) = 0$ olduğu açıktır. $x \notin A$ olsa bile $d(x, A) = 0$ olabilir.

X in her bir kapalı A alt kümesi için $x \to d(., A)$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir. Yani, her bir $x, y \in X$ için

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \tag{3.2}$$

dır.

Herhangi A ve B gibi iki küme arasındaki metrik uzaklık

$$d(A,B) := \inf \big\{\rho(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\big\}$$

biçiminde tanımlanır.

X metrik uzayında x merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvar

$$B(x,\varepsilon) = \big\{y \in X \ \mid\ \rho(x,y) < \varepsilon\big\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, herhangi bir A kümesi ve $\varepsilon > 0$ için A kümesinin ε genişlemesi

$$\mathbb{B}(A,\varepsilon) = \big\{x \in X \ \mid\ d(x,A) < \varepsilon\big\}$$

biçiminde tanımlanır ve

$$\mathbb{B}(A,\varepsilon) = \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$$

şeklinde ifade edilebilir. A kümesi konveks ise $\mathbb{B}(A,\varepsilon)$ konvekstir. Ayrıca

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbb{B}(A,\varepsilon) \qquad \text{ve} \qquad \overline{\mathbb{B}(A,\varepsilon)} = \big\{x \in X \ \mid\ d(x,A) \leq \varepsilon\big\}$$

dır.

Herhangi bir X metrik uzayında $x \in X$ in komşuluklarının ailesi $\Omega(x)$ ile göstereceğiz.

Şimdi herhangi bir X uzayında küme dizisinin yakınsaklığı tanımında kullanılan üst limit ve alt limit tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.3 X bir küme $\{A_n\}$ de X in alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big)$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\Big)$$

kümelerine, sırası ile $\{A_n\}$ küme dizisinin *üst limiti* ve *alt limiti* denir. Eğer

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$$

ise $\{A_n\}$ küme dizisi yakınsaktır ve limiti A dır denir (Balcı 2000).

$\{A_n\}$, X in alt kümelerinin bir dizisi olsun. Üst limit ve alt limit tanımları göz önüne alındığında

$$\emptyset \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset X$$

olacağı açıktır.

Şimdi bu kavramlar ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 3.1.4 $\{A_n\}$ küme dizisi, $A_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ şeklinde tanımlansın.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \Big) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \Big) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \cdots, m\} = \mathbb{N}$$

olduğundan $\{A_n\}$ dizisi yakınsak ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}$ olur.

Örnek 3.1.5 $\{A_n\}$ küme dizisi, $A_n = \{n, n+1, \cdots\}$ şeklinde tanımlansın.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \Big) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{m, m+1, \cdots\} = \emptyset$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \Big) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset$$

bulunur. O halde, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ olur.

Şimdi artan, azalan ve ayrık küme dizilerinin tanımını verelim.

Tanım 3.1.6 X herhangi bir küme, $\{A_n\}$ de X in alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine *artan*,

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $A_n \supset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine *azalan* denir.

Eğer $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine *ayrık küme dizisi* adı verilir (Balcı 2000).

Şimdi de artan ve azalan küme dizi limitlerinin daima mevcut olduğunu ve neye eşit olacağını gösteren teoremi verelim.

Teorem 3.1.7 (a) $\{A_n\}$ artan bir küme dizisi olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

(b) $\{B_n\}$ azalan bir küme dizisi olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

olur (Balcı 2000).

Teorem 3.1.8 $\{E_n\}$ herhangi bir küme dizisi ve F herhangi bir küme olsun.

$$F \setminus \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty}(F \setminus E_n)$$

ve

$$F \setminus \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty}(F \setminus E_n)$$

olur (Balcı 2000).

4 KURATOWSKİ YAKINSAKLIK

Varyasyonel analizde noktasal limitin yetersiz olduğu durumlar vardır. Bunu aşabilmek için farklı yöntemler izlenir. Bunlardan biri küme dizilerini kullanmaktır.
Küme dizilerinde birden fazla yakınsaklık çeşidi mevcuttur. En çok bilinen ise Painlavé-Kuratowski yakınsaklıktır. Bu bölümde bu yakınsaklık çeşidi incelenecektir.
Bir dizinin limitinin mevcut olup olmaması sorusuna en iyi yaklaşım, daima mevcut olan "yarı limitleri" incelemektir. Küme dizilerinde bu yarı limitler iç(alt) limit ve dış(üst) limit olarak karşımıza çıkmaktadır.

4.1 İç Limit ve Dış Limit Kümesi

Küme dizilerinin alt limit ve üst limit kümeleri ilk olarak 1909 da Painlavé tarafından tanımlanmış fakat bu kavramlar Kuratowski nin Topologie kitabında yayınlandıktan sonra üne kavuşmuştur.
İlk olarak doğal sayıların alt kümesi olan aşağıdaki koleksiyonları tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus N \text{ sonlu}\} \\
&:= \{\mathbb{N} \text{ nin tümleyeni sonlu olan tüm alt kümeleri}\} \\
\mathcal{N}^{\#} &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid N \text{ sonsuz}\} \\
&:= \{\mathbb{N} \text{ nin tüm sonsuz elamanlı alt kümeleri}\}.
\end{aligned}$$

Bu koleksiyonlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{\#} &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \forall N' \in \mathcal{N},\ N \cap N' \neq \emptyset\}, \\
\mathcal{N} &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \forall N' \in \mathcal{N}^{\#},\ N \cap N' \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Bu çalışma boyunca, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde $n \to \infty$ iken limit işlemi

$$\lim_{n}, \lim_{n\to\infty} \quad \text{veya} \quad \lim_{n\in\mathbb{N}}$$

şeklinde gösterilecek ancak $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^{\#}$ kümelerinden alınan bir N kümesi üzerinden limit alırken

$$\lim_{n\in N} \quad \text{veya} \quad \lim_{n \overset{N}{\to} \infty}$$

biçiminde gösterilecektir.

Bir $x = (x_n)$ reel sayı sınırlı dizisinin üst limiti veya "$\limsup$" ve alt limiti veya "$\liminf$" değerleri daima mevcuttur ve

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k$$

biçiminde tanımlanırlar. $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{N}^{\#}$ notasyonları kullanılarak bir $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin alt ve üst limitleri alternatif olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf_{N\in\mathcal{N}^{\#}} \sup_{n\in N} x_n = \sup_{N\in\mathcal{N}} \inf_{n\in N} x_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup_{N\in\mathcal{N}^{\#}} \inf_{n\in N} x_n = \inf_{N\in\mathcal{N}} \sup_{n\in N} x_n$$

Bir reel sayı dizisinin limiti mevcuttur gerek ve yeter şart alt ve üst limitleri birbirine eşittir.

Küme dizileriyle çalışırken de benzer bir yaklaşım kullanılır. Bir küme dizisinin daima var olan iç ve dış limit kümeleri tanımlanır ve bunların eşitliği halinde limitinin mevcut olduğu söylenir. Şimdi bir küme dizisinin Kuratowski yakınsaklığı kavramını verelim.

Tanım 4.1.1 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. $\{A_n\}$ dizisinin dış limit kümesi

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \;:=\; \left\{x \in X \mid \forall\, V \in \Omega(x),\ \exists N \in \mathcal{N}^{\#},\ \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset\right\} \quad (4.1)$$

ve iç limit kümesi de,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \;:=\; \left\{x \in X \mid \forall\, V \in \Omega(x),\ \exists N \in \mathcal{N},\ \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset\right\} \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanır (Rockafellar and Wets 1998).
Bu durumda bir $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin limitinin var olabilmesi için, iç limit kümesinin dış limit kümesine eşit olması gerekir. Yani

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Bir küme dizisinin iç limit veya dış limit kümeleri boş kümeye eşit olsa bile, daima mevcuttur ancak limiti mevcut olmayabilir.

Açık olarak $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^{\#}$ kapsaması geçerli olduğundan, daima

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

kapsaması doğru olur. Böylece, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$$

kapsamasının sağlamasıdır.

Ayrıca, küme dizileri üzerinde $\liminf$ ve $\limsup$ dönüşümleri izoton (sıralamayı koruyan) dönüşümlerdir; yani, $n > n_0$ için $A_n \subset B_n$ ise

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} B_n \qquad \text{ve} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} B_n$$

kapsamaları geçerlidir.

$\{A_{n_k}\}$ dizisi, $\{A_n\}$ küme dizisinin bir alt dizisi olsun. Bu durumda,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{k\to\infty} A_{n_k} \qquad \text{ve} \qquad \limsup_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

kapsamaları geçerlidir.

Ayrıca, $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Kuratowski yakınsak ise $\{A_{n_k}\}$ alt küme dizisi de A kümesine Kuratowski yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \qquad \text{ise} \qquad \lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A$$

olur. Fakat bu durumun karşıtı doğru olmayabilir.

Şimdi bir küme dizisinin iç limit kümesi ve dış limit kümesi kavramlarını daha iyi algılamak için örnekler verelim.

Örnek 4.1.2 $\{A_n\} \subseteq \mathbb{R}$ dizisi

$$A_n = \begin{cases} [-1,0] & , \quad n \text{ tek ise,} \\ [0,1] & , \quad n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{0\} \qquad \text{ve} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = [-1,1]$$

olur. Bu durumda, $\{A_n\}$ küme dizisi Kuratowski yakınsak değildir.

Örnek 4.1.3 $\{A_n\}$ aralık dizisi $A_n = \big[n, \infty\big)$ şeklinde tanımlansın.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$$

olmasına rağmen $\{B_n\} = \big[\frac{1}{n}, \infty\big)$ şeklinde tanımlanan aralık dizisinin limiti

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \big[0, \infty\big)$$

dir.

Örnek 4.1.4 B, $\mathbb{R}^2$ de koordinatları rasyonel sayı olan vektörlerin kümesi olsun. $\{A_n\} = \{B\}$ sabit küme dizisini göz önüne alalım. B kümesi kapalı olmadığından dolayı, $\{A_n\}$ sabit dizi olmasına rağmen B kümesine yakınsamaz. Ancak,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = cl(B) = \mathbb{R}^2$$

elde edilir.

Daha genel olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = A$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = cl(A)$ olur.

(x_n), X de herhangi bir dizi olsun. Eğer $\{A_n\}$ küme dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = x_n$ şeklinde tanımlanırsa, $\{A_n\}$ küme dizisinin dış limit kümesi; (x_n) dizisinin tüm yığılma noktalarının kümesi olurken, iç limit kümesi de; (x_n) dizisinin limit (boş küme olma durumu da dahil olmak üzere) noktalarının kümesi olur. Eğer

$$A_n = \{x_k \ : \ k \geq n\}$$

ise, $\{A_n\}$ küme dizisi (x_n) dizisinin X deki tüm yığılma noktalarının kümesine Kuratowski yakınsaktır.

Örnek 4.1.5 $\mathbb{R}^2$ uzayında $\{A_n\} = \Big\{(\frac{1}{n}, y) \ : \ 0 < y < 1\Big\}$ küme dizisi verilsin. $\{A_n\}$ dizisi $A = \big\{(0, y) \ : \ 0 \leq y \leq 1\big\}$ kümesine Kuratowski yakınsaktır.

Ayrıca, $\{B_n\} = \Big\{(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}) \ : \ k = 1, 2, \cdots, n\Big\}$ küme dizisi de yine aynı A kümesine Kuratowski yakınsaktır.

Örnek 4.1.6 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $A_n = [0, \frac{1}{n}] \cup [n, \infty)$ olmak üzere, $\{A_n\}$ küme dizisi $\{0\}$ kümesine Kuratowski yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$$

dır.

Örnek 4.1.7 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $A_n = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sin(nx) = 0\}$ olmak üzere, $\{A_n\}$ küme dizisi $\mathbb{R}$ ye Kuratowski yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \mathbb{R}$$

dır.

Genelliği bozmadan Tanım 4.1.1 deki V komşuluklarını $B(x,\varepsilon)$ alırsak, dış limit kümesini

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{N}^{\#},\ \forall n \in N : A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \right\} \tag{4.3}$$

ve iç limit kümesini

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{N},\ \forall n \in N : A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \right\} \tag{4.4}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Uyarı 4.1.8 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

a) Her $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n \geq n_0$ olduğunda $A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$;

b) Her $x \in X \setminus A$, en az bir $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ için her $n \geq n_0$ olduğunda $A_n \cap B(x,\varepsilon) = \emptyset$ dır.

Uzaklık fonksiyonu kullanılarak bir küme dizisinin iç limit ve dış limit kümeleri alternatif olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 4.1.9 $\{A_n\}$, (X,ρ) metrik uzayında bir küme dizisi olsun.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0 \right\} \tag{4.5}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0 \right\} \tag{4.6}$$

dır.

İspat. (4.5) eşitliğini elde edebilmek için, eşitlikte bulunan kümelerin birbirini kapsadığını göstermeliyiz. Öncelikle eşitliğin sağındaki kümenin, solundaki kümeyi kapsadığını daha sonra da tersini elde edelim.

$x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olsun. Bu durumda, (4.3) göz önüne alındığında, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathcal{N}^\#$ vardır, öyleki her $n \in N$ için $A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$, yani $d(x, A_n) \leq \varepsilon$ dır. Böylece

$$\sup_{n\in N} d(x, A_n) \leq \varepsilon$$

olur ve

$$\liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = \inf_{N\in\mathcal{N}^\#} \sup_{n\in N} d(x, A_n) \leq \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$ olur.

Tersini elde etmek için; x, (4.5) nın sağında bulunan kümeye ait olsun. Bu durumda,

$$\liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = \inf_{N\in\mathcal{N}^\#} \sup_{n\in N} d(x, A_n) = 0$$

olur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathcal{N}^\#$ vardır, öyleki her $n \in N$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$ yani $B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$. Şu durumda, dış limit kümesi tanımıdan dolayı $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olur.

Şimdi de (4.6) eşitliğini elde edelim. Bunun için x, (4.6) nın sağında bulunan kümeye ait olmasın. Yani $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) \neq 0$ olsun. O zaman, en az bir $\varepsilon > 0$ ve $N \in \mathcal{N}^\#$ vardır, öyleki her $k \in N$ için $d(x, A_k) > \varepsilon$ dır. Bu durumda, her $k \in N$ için $x \notin A_k \cap B(x,\varepsilon)$ dir. Böylece (4.4) göz önüne alındığında x, $\liminf_{n\to\infty} A_n$ kümesine ait değildir. Bu ise (4.6) eşitliğinin doğrulunu gösterir. $\square$

Önerme 4.1.10 $\{A_n\}$, (X,ρ) metrik uzayında herhangi bir küme dizisi olsun. Bu durumda $\limsup_{n\to\infty} A_n$ ve $\liminf_{n\to\infty} A_n$ kümeleri X de kapalıdır (Geletu 2006).

İspat. $\overline{x} \in cl\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big)$ alınırsa, $\lim_k x_k = \overline{x}$ olacak şekilde en az bir

$$\{x_k\}_{k\in N} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

dizisi vardır. Böylece, her bir k için

$$d(\overline{x}, A_n) \leq \rho(\overline{x}, x_k) + d(x_k, A_n)$$

dır. Bu nedenle

$$\liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, A_n) \leq \rho(\overline{x}, x_k) + \liminf_{n\to\infty} d(x_k, A_n)$$

ve her k için

$$\liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, A_n) \leq \rho(\overline{x}, x_k)$$

olur. Bu ise

$$\liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, A_n) \leq \inf_k \rho(\overline{x}, x_k) = 0$$

olduğunu gösterir. Böylece,

$$\liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, A_n) = 0 \quad \text{ise} \quad \overline{x} \in \limsup_{n\to\infty} A_n$$

olur. O halde,

$$cl(\limsup_{n\to\infty} A_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ kümesi kapalı bir kümedir.
$\liminf_{n\to\infty} A_n$ kümesinin de kapalı olduğu benzer şekilde elde edilebilir. □

Şimdi iç limit ve dış limit küme tanımlarını karakterize eden teoremleri verelim.

Teorem 4.1.11 (X, ρ) metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda iç limit ve dış limit kümeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{N\in\mathcal{N}^{\#}} \text{cl} \bigcup_{n\in N} A_n \qquad \text{ve} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} \text{cl} \bigcup_{n\in N} A_n.$$

İspat. Burada ilk ifadeyi ispatlayacağız. İkinci ifade de benzer şekilde ispatlanabilir. $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ alalım. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $N' \in \mathcal{N}$ vardır öyleki, her $n \in N'$ için $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ olur. Her $N \in \mathcal{N}^{\#}$ için $N \cap N' \neq \emptyset$ olduğundan bir $n_0 \in N \cap N'$ vardır öyleki $A_{n_0} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ olur. Bu sebeple

$$\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$$

olur. Bu ise $x \in \text{cl} \bigcup_{n\in N} A_n$ olması demektir. Bu her $N \in \mathcal{N}^{\#}$ için sağlandığından

$$x \in \bigcap_{N\in\mathcal{N}^{\#}} \text{cl} \bigcup_{n\in N} A_n$$

elde edilir. Ters kapsama bağıntısını göstermek için $x \notin \liminf_{n\to\infty} A_n$ kabul edelim. Bu durumda verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N \in \mathcal{N}^{\#}$ vardır öyleki her $n \in N$ için $A_n \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$ olur. Böylece

$$\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$$

bulunur. Bu ise $x \notin \mathrm{cl} \bigcup_{n \in N} A_n$ olması demektir. Dolayısıyla

$$x \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}^{\#}} \mathrm{cl} \bigcup_{n \in N} A_n$$

bulunur bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 4.1.12 $\{A_n\}$, (X, ρ) metrik uzayında bir küme dizisi olsun.

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \left\{ x \in X \mid x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \to x \right\} \tag{4.7}$$

ve

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \left\{ x \in X \mid x_n \in A_n : x_n \to x \right\} \tag{4.8}$$

dır.

Yani, $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n$ iç limit kümesi, $x_n \in A_n$ biçiminde oluşturulan (x_n) dizi limitlerinin kolleksiyonundan oluşmaktadır. Bununla birlikte, $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ dış limit kümesi, $x_n \in A_n$ biçiminde oluşturulan (x_n) dizilerin yığılma noktaların kolleksiyonundan oluşmaktadır (Geletu 2006).

İspat. (4.7) eşitliğini elde edebilmek için, eşitlikte bulunan kümelerin birbirini kapsadığını göstermek yeterlidir.

Açık olarak,

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \supset \left\{ x \in X \mid x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \to x \right\} \tag{4.9}$$

dir. Çünkü

$$x \in \left\{ x \in X \mid x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \to x \right\}$$

olsun. Yani $x_{n_k} \in A_{n_k}$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi var ve $x_{n_k} \to x$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir k_0 vardır öyleki her $k \geq k_0$ için $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ olur. Yani $x_{n_k} \in B(x, \varepsilon)$ olur, bu ise $A_{n_k} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ olması demektir. Daha açık bir ifadeyle x noktasının her komşuluğu sonsuz tane A_{n_k} kümesiyle kesişir ki bu $\overline{x} \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ olması demektir.

Diğer taraftan $\overline{x} \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ alınırsa, $\liminf\limits_{n \to \infty} d(\overline{x}, A_n) = 0$ olur ve bu da

$$\sup_n \inf_{i \geq n} d(\overline{x}, A_i) = 0$$

olması demektir. Keyfi $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\sup_{n} \inf_{i \geq n} d(\overline{x}, A_i) \leq \frac{1}{k}$$

olur. Böylece,

$$\exists n_k \in \mathbb{N} \ : \ \inf_{i \geq n_k} d(\overline{x}, A_i) \leq \frac{1}{k}$$

dır. Buradan da

$$\exists i_k \geq n_k, \ \exists x_{i_k} \in A_{i_k} \ : \rho(\overline{x}, x_{i_k}) \leq \frac{1}{k}$$

olur. Fakat bu herbir $k \in \mathbb{N}$ için doğrudur. Böylece,

$$x_{i_k} \in A_{i_k} \qquad \text{ve} \qquad x_{i_k} \to \overline{x}$$

olacak şekilde (x_{i_k}) dizisi mevcuttur. Bu nedenle,

$$\overline{x} \in \{x \in X \mid x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \to x\}$$

dır. Böylece,

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \subset \left\{ x \in X \mid x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \to x \right\} \tag{4.10}$$

olur. Sonuç olarak, (4.9) ve (4.10) birlikte göz önüne alındığında istenen elde edilir.

(4.8) eşitliği de benzer şekilde elde edilebilir. □

$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{N}^{\#}$ notasyonları kullanılarak (4.7) ve (4.8) eşitlikleri sırasıyla

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \left\{ x \in X \mid \exists N \in \mathcal{N}^{\#}, \ \forall n \in N, \ \exists x_n \in A_n : \lim_{n \in N} x_n = x \right\},$$

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \left\{ x \in X \mid \exists N \in \mathcal{N}, \ \forall n \in N, \ \exists x_n \in A_n : \lim_{n \in N} x_n = x \right\}.$$

biçiminde ifade edilebilir.

Bir kümenin kapalı olup olmamasının, herhangi bir noktanın bu kümeye olan uzaklığını etkilemediğini biliyoruz. O halde yakınsaklık bağlamında, küme dizisinin kapalı olması ile olmaması arasında fark yoktur. Ancak limit kümesi daima kapalıdır.

Şimdi, sonlu boyutlu uzaylarda geçerli olan, küme dizilerinin Kuratowski yakınsaklığını karakterize eden teoremi verelim.

Teorem 4.1.13 $\mathbb{R}^n$ deki kümelerin herhangi bir dizisi $\{A_n\}$ ve A da $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri söyleyebiliriz.

(a) $A \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart $A \cap O \neq \emptyset$ olan her açık $O \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için en az bir $N \in \mathcal{N}$ vardır, öyleki her $n \in N$ için $A_n \cap O \neq \emptyset$ dir.

(b) $A \supset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart $A \cap B = \emptyset$ olan her kompakt $B \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için en az bir $N \in \mathcal{N}$ vardır, öyleki her $n \in N$ için $A_n \cap B = \emptyset$ dir.

(c) $A \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart her $\delta > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $\big(A \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$ kapsamasını sağlayan en az bir $N \in \mathcal{N}$ indis kümesi vardır, öyleki her $n \in N$ için $\big(A \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$ dır.

(d) $A \supset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart her $\delta > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathcal{N}$ indis kümesi vardır, öyleki her $n \in N$ için $\big(A_n \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon)$ dır.

(e) $A \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart her x için $\limsup\limits_{n\to\infty} d(x, A_n) \leq d(x, A)$ olmasıdır.

(f) $A \supset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart her x için $d(x, A) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} d(x, A_n)$ olmasdır.

Burada, (c) ve (d) birlikte göz önüne alındığında $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart her $\delta > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathcal{N}$ indis kümesi vardır, öyleki her $n \in N$ için $\big(A_n \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon)$ ve $\big(A \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$ olmasıdır.
Ayrıca, (e) ve (f) den $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, A_n) = d(x, A)$ olmasıdır.

İspat. (a) Gereklilik: (4.4) dan elde edilir. Yeterliliği göstermek için; en az bir $x \in A \setminus \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ olsun. Fakat diğer taraftan (4.1) göz önüne alındığında, x in en az bir açık V komşuluğu vardır, öyleki her $N \in \mathcal{N}$ ve en az bir $n \in N$ için $V \cap A_n = \emptyset$ ve $V \cap A \neq \emptyset$ dir. Bu ise eşitliğin sağındaki ifadeyle çelişir.

(b) $A \supset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde kompakt bir B kümesi olsun. Böylece herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ ve bazı $n \in N$ ler için $A_n \cap B \neq \emptyset$ olur. Diğer taraftan en az bir $N \in \mathcal{N}^{\#}$ ve $n \in N$ için, limiti A kümesinde olmayan yakınsak bir $x_k \in A_k$

dizisi mevcuttur. Bu durumda çelişki elde edilir. Aksine, en az bir $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olsun fakat bu eleman A kümesine ait olmasın. O zaman (4.3) den, yeteri kadar küçük ε yarıçaplı $\mathbb{B}(x,\varepsilon)$ yuvarı vardır, öyleki A kümesi ile ayrık ancak sonsuz çoklukta n için A_n ile kesişir. Bu ise eşitliğin sağı ile çelişir.

(c) Yeterlilik: $|x| = |(x_1, x_2, ..., x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ Öklid normu olmak üzere, herhangi bir $x \in A$ ve herhangi bir $\delta > |x|$ olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için kabulümüzden dolayı, en az bir $N \in \mathcal{N}$ indis kümesi vardır, öyleki her $n \in N$ için

$$A \cap \mathbb{B}(0,\delta) \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$$

dır. O zaman her $n \in N$ için $x \in \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$ olur. Burada (4.3) göz önüne alındığında, $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ bulunur. Böylece $A \supset \liminf_{n\to\infty} A_n$ elde edilir.

Gereklilik: Hipotezin sağlanmadığı kabul edilirse, $\liminf_{n\to\infty} A_n$ kümesine ait olmayan ve A kümesine ait olan bir $\overline{x}$ noktasının bulunduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki hipotez sağlamasın. O halde en az bir $\delta > 0$ ve $\varepsilon > 0$ vardır, öyleki her bir $N \in \mathcal{N}$ ve en az bir $n \in N$ için

$$A \cap \mathbb{B}(0,\delta) \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$$

kapsaması sağlanmaz. Şu halde bir $N_0 \in \mathcal{N}^{\#}$ indis kümesi vardır, öyleki bu kapsama her $n \in N_0$ için sağlanmaz, yani her $n \in N_0$ için

$$\big(A \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \setminus \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$$

kümesinde x_n noktaları vardır. Böyle noktalar; kapalı A kümesine ait sınırlı bir dizi oluşturan ve $d(x_n, A_n) \geq \varepsilon$ özelliğine sahip olan noktalardır. N_0 ın içinde $N_1 \in \mathcal{N}^{\#}$ indis kümesi için, bir $(x_n)_{n \in N_1}$ alt dizisi A kümesinde bulunan bir $\overline{x}$ noktasına yakınsar.

$$d(x_n, A_n) \leq d(\overline{x}, A_n) + |\overline{x} - x_n|$$

eşitsizliğinden, N_1 de bulunan yeteri kadar büyük her n için $d(\overline{x}, A_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Bu durumda, $d(\overline{x}, A_n)$ sıfıra yakınsayamayacağından dolayı $\overline{x}$ noktası $\liminf_{n\to\infty} A_n$ kümesine ait olamaz.

(d) Yeterlilik: $\overline{x} \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olsun. O zaman bazı $N_0 \in \mathcal{N}^{\#}$ indis kümesi için $\lim_{n \in N_0} x_n = \overline{x}$ olan $x_n \in A_n$ noktaları vardır. Herhangi bir sabit $\delta > |\overline{x}|$ alındığında yeteri kadar büyük $n \in N_0$ için $x_n \in \mathbb{B}(0,\delta)$ olur. Hipotezden, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $N \in \mathcal{N}$ indis kümesi vardır, öyleki $n \in N$ için

$$A \cap \mathbb{B}(0,\delta) \subset A + \mathbb{B}(0,\varepsilon)$$

dır. Bu durumda yeteri kadar büyük $n \in N_0 \cap N$ için $x_n \in A + \mathbb{B}(0,\varepsilon)$ olur. Böylece, $d(x_n, A) \leq \varepsilon$ elde ederiz.

$$d(\overline{x}, A) \leq d(x_n, A) + |x_n - \overline{x}| \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n \in N_0} x_n = \overline{x}$$

olduğundan, ε keyfi seçiminden $d(\overline{x}, A) = 0$ olur ki bu ise $\overline{x} \in A$ demektir.

Gereklilik: Aksine varsayarsak $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ ve $N \in \mathcal{N}^{\#}$ bulabiliriz öyleki her $n \in N$ için

$$\big(A_n \cap \mathbb{B}(0,\delta)\big) \setminus \big(A + \mathbb{B}(0,\varepsilon)\big)$$

kümesine ait en az bir x_n noktası vardır. $(x_n)_{n \in N}$ dizisi sınırlı olduğundan, $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ kümesine ait olan bir yığılma noktası vardır. Diğer taraftan, x_n noktası $A + \mathbb{B}(0,\varepsilon)$ kümesinin dışında yer aldığından $d(x_n, A) \geq \varepsilon$ ve limit alındığında $d(\overline{x}, A) \geq \varepsilon$ dır. Bu durumda $\overline{x} \notin A$ ve böylece $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ kümesi A kümesinin bir alt kümesi değildir.

(e) Yeterlilik, (4.6) eşitliğinde $x \in A$ alınarak elde edilir. Gerekliliği göstermek için, alınan keyfi x elemanı ve $d(x, A) = |x - y|$ gösterimine sahip $y \in A$ için alt limit tanımından,

$$\lim_{n \in N} y_n = y$$

olacak şekilde $N \in \mathcal{N}$ ve $n \in N$ için $y_n \in A_n$ vardır. Böyle y_n için $n \in N$ olduğunda $d(x, A_n) \leq |y_n - x|$ olur ve $n \to \infty$ için limite geçersek, eşitliğin sağ tarafı elde edilir.

(f) Yeterlilik, (4.5) eşitliğinde $x \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ alarak elde edilir. Aksine, herhangi bir x alalım. Eğer $x \in A$ ise hiçbir şey ispatlamaya gerek yoktur. Değilse, negatif olmayan α için $d(x, A) > \alpha$ şartı, $A \cap \mathbb{B}(x, \alpha) = \emptyset$ ifadesine denktir. (b) den $n \in N$ için $A_k \cap \mathbb{B}(x, \alpha) = \emptyset$ olacak şekilde $N \in \mathcal{N}$ vardır ki bu $n \in N$ için $d(x, A_n) > \alpha$ ifadesiyle aynıdır. Bu da eşitliğin sağ tarafını gösterir. $\square$

Teorem 4.1.14 $\{A_n\}$, (X, ρ) metrik uzayında bir küme dizisi olsun.

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \quad := \quad \Big\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 : B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset \Big\}$$

ve

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \quad := \quad \Big\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : B(x,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset,\ \forall n \geq\ n_0 \Big\}$$

dir.

İspat. $\overline{x} \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olsun ve $\exists \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A_n = \emptyset,\ \forall n \geq n_0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $d(\overline{x}, A_n) \geq \varepsilon$ olur. Bu ise

$$\liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, A_n) = \sup_n \inf_{k\geq n} d(\overline{x}, A_n) \neq 0.$$

olmasını gerektirir. Bu da $\overline{x} \notin \limsup_{n\to\infty} A_n$ olması demektir ki bu bir çelişkidir. Böylece,

$$\overline{x} \in \Big\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N : B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset \Big\}$$

olur. Yani,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \Big\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N : B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset \Big\}.$$

dir. Ters kapsamayı göstermek için; hipotezden

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n_k \geq k : B\big(x, \frac{1}{k}\big) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$$

olur ve buradan

$$\exists x_{n_k} \in A_{n_k} : d(\overline{x}, x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\{A_{n_k}\}$ kümesinin elemanlarından oluşan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\overline{x}$ noktasına yakınsar. Böylece, $\overline{x} \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ dır. Yani,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \Big\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N : B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset \Big\}$$

olduğu görülür. □

Önerme 4.1.15 $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, X metrik uzayında iki küme dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$,

(ii) $\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n$,

(iii) $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$,

(iv) $\liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) \supseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \cup \liminf_{n\to\infty} B_n$,

(v) $\limsup_{n\to\infty}(A_n \times B_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \times \limsup_{n\to\infty} B_n$,

(vi) $\liminf_{n\to\infty}(A_n \times B_n) = \liminf_{n\to\infty} A_n \times \liminf_{n\to\infty} B_n$.

Önerme 4.1.16 X ve Y metrik uzay, $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, sırasıyla X ve Y de küme dizisi olsun. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $f\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(A_n)$,

(ii) $f\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \subseteq \liminf_{n\to\infty} f(A_n)$,

(iii) $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(B_n) \subseteq f^{-1}\Big(\limsup_{n\to\infty} B_n\Big)$,

(iv) $\liminf_{n\to\infty} f^{-1}(B_n) \subseteq f^{-1}\Big(\liminf_{n\to\infty} B_n\Big)$.

İspat. Burada, ispatların benzerliğinden dolayı sadece (i) ispatlanacaktır.
$y \in f\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big)$ olsun. O zaman bazı $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ için $y = f(x)$ dır. Bu ise,

$$\exists\{x_{n_k}\},\ x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \to x$$

olduğunu gösterir. f sürekli olduğundan

$$f(x_{n_k}) \to f(x) = y$$

olur ve bu durumda $f(x_{n_k}) \in f(A_{n_k})$ vardır. Böylece,

$$y = f(x) \in \limsup_{k\to\infty} f(A_{n_k})$$

ve buradan

$$f\big(\limsup_{k\to\infty} A_{n_k}\big) \subseteq \limsup_{k\to\infty} f(A_{n_k})$$

elde edilir. □

4.2 Monoton Küme Dizileri

Bu kısımda monoton küme dizilerinin Kuratowski yakınsaklığı incelenecektir. Burada (Mosco 1969) künyeli kaynaktan yararlanılmıştır.

Teorem 4.2.1 $\{A_n\}$, (X, ρ) metrik uzayında kapalı kümelerin artan bir dizisi olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} A_n$ mevcuttur ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n = cl\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$$

dir.

İspat. $A = cl\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$ olsun. Açık olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A$ dır. Böylece, A kümesi boş küme ise her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \emptyset$ olur ve eşitlik sağlanır.

Şimdi de; A boştan farklı ve x, A kümesinin bir elemanı olsun. Bu durumda bir $(x_m)_{m\in\mathcal{N}^\#}$ dizisi vardır, öyleki her $m \in \mathbb{N}$ için

$$x_m \in \bigcup_n A_n \qquad \text{ve} \qquad \lim_{m\to\infty} \rho(x, x_m) = 0$$

dır. $x_m \in \bigcup_n A_n$ olduğundan $x_m \in A_{n_m}$ olan $n_m \in \mathbb{N}$ vardır. $\{A_n\}$ artan bir dizi olduğundan her $n > n_m$ için $x_m \in A_n$ dır. Her $n > n_m$ için

$$d(x, A_{n_m}) \leq \rho(x, x_m)$$

olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} d(x, A_{n_m}) = 0$$

olur. Diğer taraftan $\{A_n\}$ artan bir dizi olduğundan

$$d(x, A_n) \leq d(x, A_{n_m})$$

dir. Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$ bulunur. Şu halde Teorem 4.1.9 den dolayı $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$. $x \in A$ keyfi olduğundan $A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$ elde edilir.

Şimdi sadece $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$ olduğunu göstermek kaldı. $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olsun. $m \in \mathcal{N}^\#$ için $x_m \in A_m$ olan ve x e yakınsayan bir $(x_m)_{m\in\mathcal{N}^\#}$ dizisi vardır. Buradan da

$$(x_m)_{m\in\mathcal{N}^\#} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

olur ve böylece

$$x = \lim_{m\to\infty} x_m \in cl\left(\bigcup_n A_n\right) = A$$

elde edilir. Bu ise, $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$ olduğunu gösterip ispatı tamamlar. □

Teorem 4.2.2 $\{A_n\}$, (X, ρ) metrik uzayında kapalı kümelerin azalan bir dizisi olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} A_n$ mevcuttur ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

dir.

İspat. $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olsun. $A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ olduğunda $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$ dır. O halde $\limsup_{n\to\infty} A_n$ in boş küme olmadığı durumda

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$$

kapsamasını göstermek yeterlidir. $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ olsun. Tanımdan, $x = \lim x_m$ olacak şekilde en az bir

$$\{x_m,\ m \in \mathcal{N}^{\#}\ :\ x_m \in A_m\}$$

dizisi vardır. $\{A_n\}$ azalan bir dizi olduğundan, $x_m \in A_m$ olması her $n \leq m$ için $x_m \in A_n$ oluğunu gösterir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_m,\ m \in \mathcal{N}^{\#},\ m \geq n\}$ kümesi A_n kümeleri tarafından kapsanır ve A_n kümelerinin kapalı olmasından $x \in A_n$ olur. Bu ise $x \in A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olmasını gösterdiğinden ispat tamamlanır. (Mosco 1969) □

4.3 Uzaklık Fonksiyonu

Bu kısımda Beer (1985) tarafından yapılan bir çalışmaya konu olan, metrik uzaylarda kapalı kümelerin Kuratowski yakınsaklığı ve uzaklık fonksiyonu arasındaki ilişki incelenecektir.

(X, ρ) bir metrik uzay ve $CL(X)$, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümelerini göstersin. Herbir $A \in CL(X)$ için uzaklık fonksiyonu

$$d(x, A) = \inf\{\rho(x, z)\ :\ z \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

(X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\big(d(\cdot, A_n)\big)$ dizisi $\big(d(\cdot, A)\big)$ noktasına noktasal yakınsak olsun. A kümesinin herbir x elemanı için, $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$ şartını sağlaması $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ olduğunu gösterir. Böylece, $A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$ kapsaması sağlanır.

Diğer taraftan, $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ alalım. Bu durumda, her bir k için $x_k \in A_{n_k}$ olan, x noktasına yakınsayan bir x_k dizisi ve tam sayıların bir artan n_k dizisi vardır. O halde,

$$d(x, A_{n_k}) \leq \rho(x, x_k)$$

olduğundan $\lim_{k\to\infty} d(x, A_{n_k}) = 0$ dır ve buradan

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A) = \lim_{k\to\infty} d(x, A_{n_k}) = 0$$

olduğundan $x \in A$, yani $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$ kapsaması elde edilir. Sonuç olarak, $\big(d(\cdot, A_n)\big)$ dizisi $\big(d(\cdot, A)\big)$ noktasına noktasal yakınsak ise $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Kuratowski yakınsaktır. Fakat bu ifadenin karşıtı doğru değildir.

Örnek 4.3.1 $X = (0, 2)$, reel sayıların bir alt uzayı olsun. $\{A_n\}$ küme dizisi

$$A_n := (0, 1] \cup \big\{2 - (\frac{1}{n})\big\}$$

şeklinde tanımlansın. Açık olarak, $\lim_{n\to\infty} A_n = (0, 1]$ olmasına karşın

$$\lim_{n\to\infty} d\big(\frac{7}{4}, A_n\big) = \frac{1}{4} < \frac{3}{4} = d\big(\frac{7}{4}, (0, 1]\big)$$

olduğundan, uzaklık fonksiyonu noktasal yakınsak değildir (Beer,1985).

Burada aklımıza şu şekilde bir soru gelmesi doğaldır. Hangi şartlar altında bu iki çeşit yakınsaklık denk olur. Şimdi bu sorunun cevabını veren teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 4.3.2 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $\{A_k\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. $\{A_k\}$, boştan farklı A kümesine Kuratowski yakınsadığında, $\big(d(\cdot, A_n)\big)$ dizisi $d(\cdot, A)$ ya noktasal yakınsar.

(2) (x_n), X de yığılma noktası olmayan bir dizi olsun. Her bir $p \in X$ ve her bir $x \in X$ için $\rho(p, x) \leq \liminf \rho(p, x_n)$ dir.

5 HAUSDORFF YAKINSAKLIK

Bu bölümde öncelikle Hausdorff uzaklık ve yarı-hausdoff uzaklığın tanımı verildi. Küme dizilerinin Hausdorff yakınsaklığı tanımlanarak, karakterizasyonları verildi. Daha sonra Hausdorff yakınsaklık ile Kuratowski yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir.

5.1 Hausdorff Yakınsaklık

Hausdorff uzaklığı ilk olarak Hausdorff (1927) tarafından tanıtıldı. Hausdorff uzaklığı ile ilgili gösterimler ve bu uzaklığın bir çok özelliği Aubin ve Frankowska (1990) ve Kuratowski (1966) tarafından da çalışılmıştır.

Şimdi metrik uzayda uzaklık ile ilgili tanımları ve bu uzaklık fonksiyonunun sağladığı bazı özellikleri hatırlayalım. (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve $A \subset X,\ A \neq \emptyset$ ve $y \in X$ olsun. O zaman b noktasının A kümesine olan uzaklığı ρ metriğine göre

$$d(b, A) := \inf\{\rho(b, a) \mid a \in A\}$$

biçiminde tanımlanır.

Önerme 5.1.1 X bir metrik uzay, $b \in X$ ve $A \subset X$ olsun. O zaman, aşağıdakiler sağlanır.

(i) $d(b, A) \geq 0$,

(ii) Eğer $b \in A$ ise, o zaman $d(b, A) = 0$,

(iii) Eğer $d(b, A) = 0$ ise, o zaman $b \in \overline{A}$.

Herhangi bir $b \in X$ için $d(b, \emptyset) = \infty$ olarak tanımlanır.

Herhangi A ve B gibi iki küme arasındaki metrik uzaklık

$$d(A, B) := \inf\left\{\rho(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi iki küme arasındaki Hausdorff uzaklık tanımını verelim.

Tanım 5.1.2 A ve B, X metrik uzayının herhangi iki alt kümesi olsun. O zaman A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$h(A,B) = \max\left(\sup_{a\in A} d(a,B),\ \sup_{b\in B} d(b,A)\right) \tag{5.1}$$

biçiminde tanımlanır ve $h(A,B)$ şeklinde gösterilir.
A ve B kümeleri aynı zamanda boş küme olursa, $h(A,B) = 0$, eğer bu kümelerden sadece bir tanesi boş küme ise, $h(A,B) = \infty$ kabul edilir.

X metrik uzayında boş kümeden farklı olan A ve B kümeleri için, Hausdorff uzaklık

$$h(A,B) = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)| \tag{5.2}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

A kümesinden B kümesine olan yarı-Hausdorff uzaklık

$$h^*(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece, $h^*(A,B) \neq h^*(B,A)$ dır. Buradan

$$h(A,B) = \max\{h^*(A,B), h^*(B,A)\}$$

sonucu elde edilir.
Şimdi Hausdorff uzaklık ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 5.1.3 Reel sayılar kümesi üzerinde mutlak değer metriği göz önüne alınırsa, $A = [0,5]$ ve $B = [5,6]$ kümeleri için $h^*(A,B) = 5$ ve $h^*(B,A) = 1$ dir. Şu halde, h^* fonksiyonu simetrik değildir.

Örnek 5.1.4 Reel sayılar kümesi üzerinde mutlak değer metriği göz önüne alınırsa, $A = (0,1)$ ve $B = [0,1)$ kümeleri için A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık, $h(A,B) = 0$ olur.
Ancak, $C = \{0\}$ ve $D = [0,\infty)$ kümeleri için C ve D kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık, $h(C,D) = \infty$ olur.

Lemma 5.1.5 Herhangi A, B ve C kümeleri için

$$h^*(A,B) \leq h^*(A,C) + h^*(C,B)$$

dir.

Teorem 5.1.6 X metrik uzayında, Hausdorff uzaklığı h için aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) Her $A, B \in P(X)$ için $h(A, B) \geq 0$,

(ii) her $A \in P(X)$ için $h(A, A) = 0$,

(iii) her $A, B \in P(X)$ için $h(A, B) = h(B, A)$,

(iv) her $A, B, C \in P(X)$ için $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$.

$(i)-(iv)$ özelliklerinden, Hausdorff uzaklığı h, $P(X)$ üzerinde bir pseudometrik tanımlar. Genel olarak $A, B \in X$ için $h(A, B) = 0$ olması $A = B$ olmasını gerektirmez, dolayısıyla h, $P(X)$ üzerinde bir metrik değildir.

Lemma 5.1.7 A ve B, herhangi bir metrik uzaydaki alt kümeler olsun. Eğer $h^*(A, B) = 0$ ise o zaman $A \subset \overline{B}$ dir.

İspat. Herhangi bir a noktası ve B kümesi için $d(a, B) \geq 0$ olduğundan

$$h^*(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = 0 \Rightarrow \forall\, a \in A : d(a, B) = 0$$

olur. Dolayısıyla keyfi bir $a \in A$ için $a \in \overline{B}$ ve dolayısıyla $A \subset \overline{B}$ elde edilir. □

Teorem 5.1.8 X bir metrik uzay ve $CL(X)$, X in tüm kapalı alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman Hausdorff uzaklığı h, $CL(X)$ üzerinde bir metrik tanımlar; $(CL(X), h)$ bir metrik uzaydır.

İspat. Teorem 5.1.6 yı göz önüne aldığımızda, ispat için sadece $A, B \in CL(X)$ ise $h(A, B) = 0$ ın $A = B$ olması gerektiğini göstermek yeterlidir.
A ve B kümelerinin her ikisi de kapalı olduğundan $A \subset \overline{B}$ ve $B \subset \overline{A}$ ise $\overline{A} = \overline{B}$ ve dolayısıyla $A = B$ olur. □

Şimdi de, $A \subset X$ kümesi için $b \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Böylece,

$$\mathbb{B}(A, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}, \qquad \mathcal{B}(b, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, b) < \varepsilon\}$$

ve

$$\overline{\mathbb{B}}(A, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}, \qquad \overline{\mathcal{B}}(b, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, b) \leq \varepsilon\}$$

elde ederiz.

Lemma 5.1.9 X metrik uzayının herhangi iki A ve B alt kümesi için

$$h^*(A,B) = \inf\big\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathbb{B}(B,\varepsilon)\big\}$$

ve

$$h^*(B,A) = \inf\big\{\varepsilon > 0 \mid B \subset \mathbb{B}(A,\varepsilon)\big\}$$

dır.

Lemma 5.1.10 X bir metrik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. O zaman

$$h(A,B) = \inf\big\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathbb{B}(B,\varepsilon) \text{ ve } B \subset \mathbb{B}(A,\varepsilon)\big\}$$

dır.

Tanım 5.1.11 Verilen bir X normlu lineer uzayında $A, B \subset X$ kümeleri için $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere, iki kümenin toplamı;

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

ve skalarla çarpımı;

$$\gamma A = \{\gamma a \mid a \in A\}$$

biçiminde tanımlanır. $A+B$ kümelerinin toplamı genellikle Kuratowski toplamı olarak bilinir. Bu nedenle, $B = b$ için,

$$B + A = b + A = \{b + a \mid a \in A\}$$

olur. Sonuç olarak, bir $A \subset X$ kümesi ve $\varepsilon > 0$ için $\mathbb{B}(A,\varepsilon) = A + \varepsilon B$ yazabiliriz. Bu nedenle, bir normlu lineer uzaydaki Hausdorff metriği

$$h(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B + \varepsilon\mathbf{B} \text{ ve } B \subset A + \varepsilon\mathbf{B}\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 5.1.12 (X,ρ) bir metrik uzay, A kümesi X in kapalı bir alt kümesi ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} h(A_n, A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |d(x,A_n) - d(x,A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_n\}$ dizisi A kümesine *Hausdorff yakınsaktır* denir ve

$$A_n \xrightarrow{H} A \quad \text{veya} \quad H - \lim A_n = A$$

ile gösterilir (Baronti and Papini 1986).

Önerme 5.1.13 $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi ve A, X in kapalı bir alt kümesi olsun. $H - \lim A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart ya A nın ve her $n > n_0$ için A_n kümelerinin boş küme olması ya da her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_ε vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için

$$A \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon) \qquad \text{ve} \qquad A_n \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon) \tag{5.3}$$

olmasıdır.

İspat. Dikkat edecek olursak, $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart ya A nın ve her $n > n_0$ için A_n kümelerinin boş küme olması ya da her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_ε vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için $h(A_n, A) \leq \varepsilon$ olmasıdır. Yani,

$$\sup\left\{d(x, A) \mid x \in A_n\right\} \leq \varepsilon \qquad \text{ve} \qquad \sup\left\{d(x, A_n) \mid x \in A\right\} \leq \varepsilon$$

olması demektir. Bu ise, (5.3) kapsamalarına denktir. □

Uyarı 5.1.14 Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ ise, o zaman

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ A_n \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon) = \left\{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\right\}, \ \forall n > n_0$$

olduğu açıktır.

Teorem 5.1.15 A ve A_n, X metrik uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. O zaman

$$H - \lim A_n = A \Rightarrow K - \lim A_n = A$$

dır. Yani, Hausdorff yakınsak bir küme dizisi aynı kümeye Kuratowski yakınsaktır.

İspat. $\{A_n\}$, X in kapalı kümelerinin bir dizisi ve $H - \lim A_n = A$ olsun. İspat için,

$$A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \quad \text{ve} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$$

olduğunu göstermeliyiz.

Hipotezden $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} h^*(A, A_n) = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} d(x, A_n) = 0$ dır. Yani, $\forall x \in A \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$ dır. Buradan da

$$A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$$

elde edilir.

$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset A$ kapsamasını göstermek için, $\overline{x} \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ fakat $\overline{x} \notin A$ olsun. Böylece, $d(\overline{x}, A) = \gamma > 0$ olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Şimdi

$$B := \left\{x \in X \mid d(x, A) \leq \frac{\gamma}{2}\right\} = \overline{\mathbb{B}}(A, \frac{\gamma}{2})$$

kümesini tanımlayalım. Böylece, $\overline{x} \notin B$ ve Önerme 5.1.13 göz önüne alındığında

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ A_n \subset B, \ \forall n \geq n_0$$

elde ederiz. Buradan da

$$d(\overline{x}, A_n) \geq d(\overline{x}, B) \geq \frac{\gamma}{2} > 0, \ \forall n \geq n_0$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, A_n) \geq \liminf_{n\to\infty} d(\overline{x}, B) \geq \frac{\gamma}{2} > 0$$

olur ki $\overline{x} \notin \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$$

bulunur. □

Ancak Teorem 5.1.15 in karşıtı doğru değildir. Bunu bir örnek ile görelim.

Örnek 5.1.16

$$A_n := \begin{cases} \{0, \frac{1}{n}\} & , \ n \text{ çift ise,} \\ \{0, n\} & , \ n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım.

$x_n = \frac{1}{n} \in A_{2n}$ alınırsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğundan $0 \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ olur. Herhangi $x \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, A_n) = \inf_{z\in A_n} d(z, x) = \inf_{z\in A_n} |x - z| = \begin{cases} \inf\limits_{z\in\{0,\frac{1}{n}\}} |x - z| & , \ n \text{ çift ise,} \\ \inf\limits_{z\in\{0,n\}} |x - z| & , \ n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

ve

$$d(x, A_n) = \begin{cases} \min\left\{|x|, |x - \frac{1}{n}|\right\} & , \ n \text{ çift ise,} \\ \min\left\{|x|, |x - n|\right\} & , \ n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

olur. Böylece,

$$\liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \liminf\limits_{n\to\infty} \min\big\{|x|, |x - \frac{1}{n}|\big\} & , \ n \text{ çift ise,} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} \min\big\{|x|, |x - n|\big\} & , \ n \text{ tek ise,} \end{array} \right\} = 0$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{array}{ll} n \text{ çift için} & , \ \liminf\limits_{n\to\infty} \min\big\{|x|, |x - \frac{1}{n}|\big\} = 0, \\ n \text{ tek için} & , \ \liminf\limits_{n\to\infty} \min\big\{|x|, |x - n|\big\} = 0 \end{array}$$

olur. Ancak bu iki limitin sıfır olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır. Yani, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{0\}$. Benzer şekilde, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ bulunur. Sonuç olarak,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$$

elde edilir.

Diğer taraftan,

$$h^*\big(\{0\}, A_n\big) = \sup_{x\in\{0\}} d(x, A_n) = d(0, A_n) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} h^*\big(A_n, \{0\}\big) &= \sup_{x\in A_n} d(x, \{0\}) = d(0, A_n) = \sup_{x\in A_n} |x - 0| \\ &= \sup_{x\in A_n} |x| = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n} & , \ n \text{ çift ise,} \\ n & , \ n \text{ tek ise,} \end{array} \right. \end{aligned}$$

için $\lim\limits_{n\to\infty} h^*\big(A_n, \{0\}\big) \neq 0$ olur. Sonuç olarak

$$h\big(\{0\}, A_n\big) = \max\big\{h^*(\{0\}, A_n),\ h^*(A_n, \{0\})\big\}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} h\big(\{0\}, A_n\big) \neq 0$$

dir. Yani, $H - \lim A_n \neq \{0\}$ elde edilir.

Burada aklımıza Kuratowski ve Hausdorff yakınsaklıkların hangi şartlar altında birbirini gerektireceği gelebilir. Bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 5.1.17 X bir metrik uzay, $\{A_n\}$ X in kompakt alt kümelerinin bir dizisi ve $A \subset X$ kompakt olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset K$ olacak şekilde X in bir K kompakt alt kümesi var ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ olur.

İspat. $\lim_{n\to\infty} h(A_n, A) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{h^*(A, A_n),\ h^*(A_n, A)\right\} \neq 0$$

sağlanır. Dolayısıyla bazı $\gamma > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{h^*(A, A_n),\ h^*(A_n, A)\right\} > \gamma$$

olur. O halde $\lim_{n\to\infty} h^*(A, A_n) \neq 0$ veya $\lim_{n\to\infty} h^*(A_n, A) \neq 0$ dır.

(i) Eğer $\lim_{n\to\infty} h^*(A, A_n) \neq 0$ ise, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} d(x, A_n) > 0$$

ve A nın kompaktlığını göz önüne alırsak

$$\forall n,\ \exists x_n \in A\ :\ d(x_n, A_n) > 0$$

olur. K kümesi kompakt olduğundan, $(x_n) \subset K$ dizisi için $\overline{x} \in A$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) alt dizisi mevcuttur, öyleki $x_{n_k} \to \overline{x}$ dir. Fakat

$$\forall n_k\ :\ d(x_{n_k}, A_{n_k}) > 0 \tag{5.4}$$

dir. $A = \liminf_{n\to\infty} A_n$ olduğundan ve Teorem 4.1.12 den $z_n \to \overline{x}$ olacak şekilde $z_n \in A_n$ olan bir (z_n) alt dizisi vardır. Buradan, Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n_k}, A_{n_k}) \leq \rho(x_{n_k}, z_{n_k}) \leq \rho(x_{n_k}, \overline{x}) + \rho(\overline{x}, z_{n_k})$$

dir. Böylece,

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, A_{n_k}) = 0$$

olur ki bu da (5.4) ile çelişir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} h^*(A, A_n) = 0$ elde edilir.

(ii) $\lim_{n\to\infty} h^*(A_n, A) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $L \subset \mathbb{N}$ olan $\{A_n\}$ nin $\{A_l\}_{l\in L}$ alt küme dizisi vardır öyleki

$$\lim_{l\to\infty} h^*(A_l, A) = \lim_{l\to\infty} \sup_{y\in A_l} d(y, A) > 0$$

ve

$$\forall l \in L,\ \exists x_l \in A_l\ :\ d(x_l, A) > 0$$

dir.

$\{x_l\} \subset K$ ve K kompakt olduğundan $\overline{x} \in X$ olan ve $x_l \to \overline{x}$ olacak şekilde yakınsak bir alt dizi mevcuttur. Buradan $\overline{x} \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olur. Fakat, her l_k için

$$0 < d(x_{l_k}, A) \leq \rho(x_{l_k}, \overline{x}) \qquad \text{ve} \qquad 0 < d(x_{l_k}, A) = 0$$

olur ki, bir çelişki elde ederiz. Böylece (i) ve (ii) den $\lim\limits_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$ elde edilir. □

Uyarı 5.1.18 Küme dizisinin monoton artan veya monoton azalan olması Hausdorff yakınsak olmasını gerektirmez.

Örneğin; Reel sayılarda $\{A_n\}$ küme dizisini $A_n = [n, \infty)$ şeklinde tanımlayalım. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ olduğundan $\{A_n\}$ küme dizisi $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ye Hausdorff yakınsak değildir.

Teorem 5.1.19 $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi ve A, X in kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $A_n \xrightarrow{h} A$ ise,

$$A = \bigcap_{n\geq 1} cl\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)$$

olur.

İspat. $A_n \xrightarrow{h} A$ ise, $A_n \to A$ olacağından,

$$\bigcap_{n\geq 1} cl\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \subset A \tag{5.5}$$

olur. Uyarı 5.1.14 kullanarak, $n \geq 1$ ve keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\exists m \geq n \ : \ A \subset \mathbb{B}(A_m, \varepsilon) \Rightarrow A \subset \left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $A \subset cl\left(\bigcup\limits_{m\geq n} A_m\right)$ yazabiliriz. Bu her $n \geq 1$ için doğru olduğundan

$$A \subset \bigcap_{n\geq 1} cl\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \tag{5.6}$$

elde ederiz. (5.5) ve (5.6) dan istenen elde edilir. □

Tanım 5.1.20 (A_n), $\big(CL(X), h\big)$ uzayında boş kümeden farklı bir küme dizisi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n \geq N$ olduğunda $h(A_n, A_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (A_n) küme dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 5.1.21 Eğer (X,ρ) bir tam metrik uzay ise, o zaman $\big(CL(X),h\big)$ uzayı da bir tam metrik uzaydır.

İspat. $\{A_n\}$, $\big(CL(X),h\big)$ uzayında boş kümeden farklı kapalı kümelerin herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\{A_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz. O halde, Teorem 5.1.19 e göre $\{A_n\}$ dizisinin

$$A=\bigcap_{n\geq 1} cl\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)$$

kümesine yakınsadığını göstermek yeterlidir. Bunun için sırasıyla aşağıdakileri göstermeliyiz. (i) A kapalıdır, (ii) A boş küme değildir ve (iii) $A_n \xrightarrow{h} A$ dır.

(i) Kapalı kümelerin sayılabilir kesişimi kapalı olacağından, istenen açıktır.

(ii) A bir Cauchy dizisi olduğundan, $\varepsilon>0$ için $\delta=\frac{\varepsilon}{3}>0$ alalım. Her bir $k\geq 0$ ve her $n,m\geq N_k$ için

$$h(A_n,A_m)<\frac{\delta}{2^{k+1}}$$

olacak şekilde $N_k\in\mathbb{N}$ vardır.

Şimdi, $k=0$ için $\exists N_0$ vardır, öyleki her $n,m\geq N_0$ için

$$h(A_n,A_m)<\frac{\delta}{2}$$

olur. Herhangi bir $n_0\geq N_0$ ve $\forall n\geq N_0$ için

$$h(A_n,A_{n_0})<\frac{\delta}{2} \qquad \text{ise} \qquad \sup_{x\in A_{n_0}} d(x,A_n)<\frac{\delta}{2}$$

dır. Böylece, herhangi bir sabit $x_{n_0}\in A_{n_0}$ ve $\forall n\geq N_0$ için

$$d(x_{n_0},A_n)<\frac{\delta}{2}$$

olur. $k=1$ için $\exists N_1$ vardır öyleki her $n,m\geq N_1$ için

$$h(A_n,A_m)<\frac{\delta}{2^2}$$

dır. Herhangi bir $n_1\geq \max\{N_0,N_1\}$, her $x\in A_{n_1}$ ve her $n\geq N_1$ için

$$h(x,A_n)<\frac{\delta}{2^2}$$

elde ederiz. $x_{n_1}\in A_{n_1}$ seçilirse, herhangi $x\in A_n$ ve $n\geq N_1$ için

$$\rho(x_{n_1},x_{n_0})\leq \rho(x_{n_1},x)+\rho(x,x_{n_0})$$

ve

$$\rho(x_{n_1}, x_{n_0}) \leq \frac{\delta}{2^2} + \frac{\delta}{2} = 3\frac{\delta}{2^2} = \frac{\varepsilon}{2^2}$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde $n_k \geq \max\{N_0, N_1, \cdots, N_k\}$ için $x_{n_{k+1}} \in A_{n_{k+1}}$ seçebiliriz öyleki

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

dır. Böylece (x_{n_k}) Cauchy dizisi olur. X tam bir metrik uzay olduğundan $x_{n_k} \to \overline{x}$ olacak şekilde bir $\overline{x} \in X$ mevcuttur.

Diğer taraftan her bir $n \geq 1$ için $n_{k_0} \geq n$ vardır öyleki $n_k \geq n_{k_0}$ için

$$x_{n_k} \in \bigcup_{m \geq n} A_m \Rightarrow \overline{x} \in cl\Big(\bigcup_{m \geq n} A_m\Big)$$

dir. Bu ifade her $n \geq 1$ için doğrudur. Her $n \geq 1$ için

$$\overline{x} \in cl\Big(\bigcup_{m \geq n} A_m\Big) \Rightarrow \overline{x} \in \bigcap_{n \geq 1} cl\Big(\bigcup_{m \geq n} A_m\Big) = A$$

dır. Sonuç olarak $A \neq \emptyset$ elde edilir.

(iii) $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğunu gösterelim. (i) den, $\rho(\cdot, x_0)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göz önüne alarak, her bir $n_0 \geq N_0$ ve $x_{n_0} \in A_{n_0}$

$$\rho(\overline{x}, x_{n_o}) = \lim_{n_k \to \infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_o}) \leq \lim_{n_k \to \infty} \Sigma_{i=1}^{n_k} \rho(x_{n_k}, x_{n_o}) < \lim_{n_k \to \infty} \Sigma_{i=1}^{n_k} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece, her $n_0 \geq N_0$ ve her $x_{n_0} \in A_{n_0}$ için $\rho(\overline{x}, x_{n_o}) < \varepsilon$ dur. O halde, $\forall n_0 \neq N_0$ için $A_{n_0} \subset B_\varepsilon(\overline{x}) \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$ olur. Buradan en az bir N_0 vardır öyleki her $n \geq N_0$ için

$$h^*(A_n, A) < \varepsilon \tag{5.7}$$

elde edilir.

Diğer taraftan x, A kümesinin keyfi bir elamanı olsun. O zaman $x \in cl\Big(\bigcup_{m \geq N_0} A_m\Big)$ ise en az bir $m \geq N_0$ ve en az bir $z \in A_m$ için

$$\rho(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.8}$$

dir. Ayrıca,

$$d(x, A_n) \leq d(x, A_m) + h(A_m, A_n)$$

olur. $\{A_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan bir N_0' vardır, öyleki her $n \geq N_0'$ için

$$h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $N_1' := \max\{N_0, N_0'\}$ diyelim. (5.8) i göz önüne alırsak $\forall n, m \geq N_1'$ için

$$d(x, A_n) \leq d(x, A_m) + h(A_m, A_n) \leq \rho(x, z) + h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $\forall n \geq N_1'$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$ ve böylece $x \in \mathbb{B}(A_n, \varepsilon)$ olur. $x,\ A$ kümesinin keyfi bir elamanı olduğu için $\forall n \geq N_1'$ için

$$A \in \mathbb{B}(A_n, \varepsilon) \qquad \text{ve} \qquad h^*(A, A_n) < \varepsilon \tag{5.9}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (5.7) ve (5.9) dan, $\forall n \geq N_1'$ için

$$h(A_n, A) < \varepsilon$$

olur. Böylece, $A_n \xrightarrow{h} A$ elde edilir. $\square$

6 WİJSMAN ve FİSHER YAKINSAKLIK

Bu bölümde Wijsman yakınsaklık ve Fisher yakınsaklık tanıtıldı. Son olarak, Hausdorff yakınsaklık, Fisher yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık ve Kuratowski yakınsaklık arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

6.1 Wijsman Yakınsaklık

Tanım 6.1.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_n, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_n\}$ dizisi A kümesine *Wijsman yakınsaktır* denir ve

$$A_n \xrightarrow{W} A \ \text{ veya } W - \lim A_n = A$$

ile gösterilir (Baronti and Papini 1986).

Örnek 6.1.2 $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\{A_n\}$ dizisi,

$$A_n = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2ny = 0\big\}$$

biçiminde tanımlansın. $A = \big\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\big\}$ olmak üzere, $W - \lim A_n = A$ dır.

6.2 Fisher Yakınsaklık

Küme dizilerinde farklı bir yakınsak olan Fisher yakınsaklığın tanımı verilecektir.

Tanım 6.2.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_n, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer,

(α): her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_ε vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için $h^*(A_n, A) < \varepsilon$

(β): her $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için en az bir $n_{\varepsilon,x}$ vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$

koşulları sağlanıyorsa, $\{A_n\}$ dizisi A kümesine *Fisher yakınsaktır* denir ve

$$A_n \xrightarrow{F} A \ \text{ veya } F - \lim A_n = A$$

ile gösterilir (Baronti and Papini 1986).

Sonuç 6.2.2 Önerme 5.1.13 den, $H - \lim A_n = A$ olması için, (α) ve

(γ) : her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_ε vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için $h^*(A, A_n) < \varepsilon$

şartlarının sağlaması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Kuratowski yakınsaklık, Fisher Yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık ve Hausdorff yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Teorem 6.2.3 Kapalı kümelerin bir $\{A_n\}$ dizisi için,

Hausdorff yakınsak $\Rightarrow$ Fisher Yakınsak $\Rightarrow$ Wijsman Yakınsak $\Rightarrow$ Kuratowski yakınsak

ilişkisi vardır (Baronti and Papini 1986).

İspat. $(H) \Rightarrow (F)$: $n_{\varepsilon,x}$ doğal sayısı x den bağımsız olduğundan dolayı (γ) koşulu (α) koşulunu gerektirir. O halde, ispat açıktır.

$(F) \Rightarrow (W)$: $F - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olsun. Eğer A boş küme ise, o zaman en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır, öyleki her $n > n_0$ için $A_n = \emptyset$ olur ki bu durumda gerektirme sağlanır. Şimdi de A nın boştan farklı olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ alalım. (α) koşulunundan dolayı en az bir n_ε vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için $A_n \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon)$ dır. Böylece, $d(x, A_n) \geq d(x, \mathbb{B}(A, \varepsilon))$ olur ve

$$d(x, \mathbb{B}(A, \varepsilon)) = \max\left\{0, d(x, A) - \varepsilon\right\}$$

elde ederiz. O halde, her $n > n_\varepsilon$ için $d(x, A) \leq d(x, A_n) + \varepsilon$ dır. Bu ise

$$d(x, A) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) \tag{6.1}$$

olduğunu gösterir.

Ters eşitsizliği elde etmek için $d(x, y) < d(x, A) + \varepsilon$ şartını sağlayan bir $y \in A$ alalım. (β) koşulundan en az bir $n_{\varepsilon,y}$ vardır, öyleki her $n > n_{\varepsilon,y}$ için $d(y, A_n) < \varepsilon$ dır. Böylece, (3.2) den

$$d(x, A_n) \leq d(x, y) + d(y, A_n) < d(x, A) + 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$\limsup_{n\to\infty} d(x, A_n) \leq d(x, A) + 2\varepsilon$$

demektir. Böylece, ε keyfi olduğu için

$$\limsup_{n\to\infty} d(x, A_n) \leq d(x, A) \tag{6.2}$$

bulunur. (6.1) ve (6.2) eşitsizliklerini birlikte göz önüne aldığımızda

$$\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = d(x, A)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$(W) \Rightarrow (K)$: $W - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olsun. Eğer A boş küme ise herhangi bir x için $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, A_n) = \infty$ olur, bu ise $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ olduğunu gösterir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

olur. Şimdi de A kümesi boştan farklı olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = d(x, A) = 0$$

olur. Bu ise $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ olduğunu gösterir. O halde

$$A \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \tag{6.3}$$

dır.

Şimdi $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ alalım. O zaman $\liminf\limits_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$ dir. $W - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ olduğundan,

$$d(x, A) = \lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$$

olur. Böylece $x \in A$ elde edilir. Bu

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq A \tag{6.4}$$

olduğunu gösterir. (6.3) ve (6.4) kapsamaları birlikte göz önüne alındığında

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

elde edilir. $\square$

Şimdi de Teorem 6.2.3 de verilen kapsamaların terslerinin genelde doğru olmadığını gösteren örnekler verelim.

Örnek 6.2.4 l_2 kareleri mutlak toplanabilen dizilerin uzayını göstermek üzere, $\{A_n\}$ küme dizisini

$$A_n := [e_1, e_n]$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $[a, b]$ ile a ve b noktalarını birleştiren doğru parçası gösterilmektedir.

Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A = \{e_1\}$ olur. Ancak

$$d(\theta, A_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{ve} \qquad d(\theta, A) = 1$$

olduğundan $W - \lim\limits_{n\to\infty} A_n \neq A$ bulunur.

Örnek 6.2.5 $\mathbb{R}^2$ uzayında, $\{A_n\}$ küme dizisini

$$A_n := \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq n;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{n}\, x\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. $A = \{(x, y) : 0 \leq x;\ y = 0\}$ olmak üzere $W - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ bulunur. Fakat $F - \lim\limits_{n\to\infty} A_n \neq A$ olur.

Örnek 6.2.6 $X = \mathbb{R}$ uzayında, $\{A_n\}$ küme dizisini

$$A_n := [-n, n]$$

şeklinde tanımlayalım. $F - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbb{R}$ olmasına karşın $H - \lim\limits_{n\to\infty} A_n \neq \mathbb{R}$ olur.

7 KAYNAKLAR

Aubin, J. P. and Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston.

Balcı, M. (2000). Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

Balcı, M. (2010). Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets, In: Methods of functional analysis in approximation theory (pp. 133-155), ISNM 76, Birkhauser, Basel.

Bayraktar, M. (2010). Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **31**: 421–432.

Beer, G. (1993). Topologies on closed and closed convex sets, Kluwer Academic, Dordrecht.

Beer, G. (1994). Wijsman convergence of convex sets under renorming, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, **22**(2): 207–216.

Beer, G. (2002). On the Compactnees theorem for sequence of closed sets, *Mathematica Balkanica*, **16**: 327–338.

Beer, G. and R. Lucchetti (1993). Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space, *Transactions of the American Mathematical Society*, **335**: 805–822.

Dolecki, S. (1982). Tangency and differentiation: some applications of convergence theory, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **130**: 223–255.

Dontchev, A. L. and Rockafellar, R. T. (2009). Implicit functions and solution mappings: A view from variational analysis, Springer.

Fisher, B. (1981). Common fixed points of mappings and set-valued mappings, *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, **18**: 69–77.

Geletu, A. (2006). Introduction to topological spaces and set-valued maps. Lecture Notes in Math. Institute of Mathematics, Department of Operations Research & Stochestics, Ilmenau University of Technology.

Hausdorff, F. (1914). Grundzuge derMengenlehre, Verlag von Veit, Leipzig, Reprinted by Chelsea, New York.

Hausdorff, F. (1927). Mengenlehre, Walter de Gruyter, Berlin.

Holmes, R. B. (1966), Approximating best approximations, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **14**: 106–113.

Kanibir, A. and Reilly, I. L. (2009). Generalized continuity for multifunctions, *Acta Mathematica Hungarica*, **122**(3): 283-292.

Kanibir, A. and Reilly, I. L. (2010). On generalized continuity and openness for set-valued functions, *Acta Mathematica Hungarica*, **126**(4): 369-380.

Kuratowski, K. (1966), Topologie, I & II, Panstowowe Wyd Nauk, Warsaw, Academic Press, New York.

Kuratowski, K. (1971). Applications of set-valued mappings to various spaces of continuous functions, *General Topology and its Applications*, **1**(2): 155–161.

Lucchetti, R. and A. Torre (1994), Classical set convergences and topologies, *Set-Valued Analysis*, **36**: 219–240.

Löhne, A. and Zalinescu, C. (2006). On convergence of closed convex sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **319**: 617–634.

Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Michael, E. (1951). Topologies on spaces of subsets, *Transactions of the American Mathematical Society*, **71**: 152–182.

Mirmostafaee, A. K. (2014). Strong quasi-continuity of set-valued functions, *Topology and its Applications*, **164**: 190–196.

Mosco, U. (1969). Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Advances in Mathematics*, **3**: 510–585.

Nadler, S. B. (1978). Hyperspaces of Sets, Dekker, New York.

Painlave, P. (1909). C.R.A.S. Paris.

Rockafellar, R. T. and Wets, R.J.-B. (1998). Variational Analysis, Springer, Berlin.

Salinetti, G. and Wets, R. J.-B. (1979). On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, *SIAM Review*, **21**: 18–33.

Salinetti, G. and R. J-B. Wets (1981), On the convergence of closed-valued measurable multifunctions, *Transactions of the American Mathematical Society*, **266**: 275–289.

Sonntag, Y. (1976), Interprétation géométrique de la convergence d'une suite de convexes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **282**: 1099–1100.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1993). Set convergences. An attempt of classification, *Transactions of the American Mathematical Society*, **340**(1): 199–226.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1992). Scalar convergence of convex sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **164**: 219–241.

Wijsman, R. A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, *American Mathematical Society*, **70**: 186–188.

Wijsman, R. A. (1966). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**(1): 32–45.

Yamauchi, T. (2012). Continuous selections for set-valued mappings with finite-dimensional convex values, *Topology and its Applications*, **159**: 1219–1222.

Yüksel, Ş. (2011). Genel Topoloji, Eğitim Akademi Yayınları.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ayşe İĞDE
Doğum Yeri ve Tarihi	: Kalecik-ANKARA, 16/02/1990
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: ayseigde0@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Kalecik Lisesi, 2008
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2013