MUTLAK GEOMETRİDE EŞLİK AKSİYOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erkan ERÇOLAK

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUTLAK GEOMETRİDE EŞLİK AKSİYOMLARI

Erkan ERÇOLAK

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2017

TEZ ONAY SAYFASI

Erkan ERÇOLAK tarafından hazırlanan "Mutlak geometride eşlik aksiyomları" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik AnaBilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Başkan : Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

……./……./……. tarih ve

……./…….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23/06/2017

Erkan ERÇOLAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MUTLAK GEOMETRİDE EŞLİK AKSİYOMLARI

Erkan ERÇOLAK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak konu ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde izometri ve yansıma kavramları tanıtılıp bunlarla ilgili teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde mutlak geometride Kenar-Açı-Açı ile Kenar-Açı-Kenar eşlik aksiyomları arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Son bölümde Kenar-Kenar-Kenar ile Kenar-Açı-Kenar eşlik aksiyomları arasındaki ilişki açıklanmıştır.

2017, viii + 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Mutlak geometri, Kenar-Açı-Kenar, Kenar-Açı-Açı ve Kenar-Kenar-Kenar eşlik aksiyomları.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

THE CONGRUENCE AXIOMS IN ABSOLUTE GEOMETRY

Erkan ERÇOLAK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Nilgün SÖNMEZ

This thesis consists of five main parts.

The first part is given the introduction part that contains of a general literature about it. In the second part, the basic concepts necessary for our work are given. In the third part, the concepts of isometry and reflection are introduced and related theorems are given. In the fourth part, in absolute geometry the relation between Side-Angle-Angle and Side-Angle -Side congruence axioms is mentioned. In the last part, the relation between Side - Side - Side and Side- Angle -Side congruence axioms is explained.

2017, viii + 58 pages

KeyWords: Absolute geometry, Side-Angle-Side, Side-Angle-Angle, Side-Side-Side congruence axioms

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca ve bu tez çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ'e teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemedikleri için eşim Çimen ERÇOLAK'a, oğlum Eren ERÇOLAK'a kızım Ceren ERÇOLAK'a teşekkür ederim.

Erkan ERÇOLAK
AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\overleftrightarrow{AB}$	AB doğrusu
$\overline{AB}$	AB doğru parçası
int $(\overline{AB})$	AB doğru parçasının içi
AB	AB doğru parçasının uzunluğu
$\square\ ABCD$	$ABCD$ dörtgeni
$\overrightarrow{AB}$	AB ışını
int $(\overrightarrow{AB})$	AB ışınının içi
ΔABC	ABC üçgeni
$A - B - C$	Arada olma bağıntısı B, A ile C arasındadır
$\mathbb{L}$	Doğrular kümesi
$\simeq$	Eşlik sembolü
A	Nokta
$\mathbb{P}$	Noktalar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{I}$	Üzerinde olma bağıntısı
$\mathcal{H}$	Yarı düzlem

Kısaltmalar

DAA	Düzlem ayırma aksiyomu
KAK	Kenar açı kenar eşliği
KAA	Kenar açı açı eşliği
KKK	Kenar kenar kenar eşliği
PP	Pasch postülatı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Öklid, "Elementler" adlı 13 kitaptan oluşan eserlerinden ilk 4 tanesinde düzlem geometriyi incelemektedir. Öklid'in kitaplarındaki aksiyomlarda var olan bazı belirsizlikler ve eksiklikler uzun yıllar boyunca bilinmesine karşın, aynen kullanılmışlardır. Ancak Hilbert 1889'da çağının bilgileriyle Öklid düzlemin aksiyomlarını yeniden düzenlemiştir. *Grundlagen der Geometrie* adlı eserde bu aksiyom sistemi verilmiştir. Artık Öklid düzlemi için, tüm matematik dünyasınca "mükemmel" olarak değerlendirilen bu aksiyom sistemi (Hilbert Düzenlemesi) geçerlidir, denilebilir.

Ancak çağdaş matematik bilgileri gözönüne alınarak daha kısa ve daha rafine bir aksiyom sistemi oluşturulmuştur. Öklid düzlem geometrisini işleyen birçok eserde kullanılan Birkhoff'un metrik aksiyomlarının bir modifikasyonu olan bu aksiyom sistemi aşağıdaki şekilde verilmiştir. Burada $\mathbb{P}$ noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ de $\mathbb{P}$ nin bazı alt kümelerinin ailesi olan doğrular kümesi olsun.

[E1] Farklı iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[E2] Her doğru en az iki nokta, $\mathbb{P}$ kümesi de doğrusal olmayan üç nokta içerir.

[E3] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d, negatif olmayan bir $d(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[E4] Her A ve B noktaları için $d(A, B) = d(B, A)$ dir.

[E5] Her A, B ve C noktaları için $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ dir.

[E6] Verilen her l doğrusu için bir $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm A, B noktaları için $|f(A) - f(B)| = d(A, B)$ dir.

[E7] Verilen her l doğrusu için $\mathbb{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ gibi iki alt kümesi vardır.

(i) $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ konvekstir.

(ii) $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathbb{P} - l$ ($\mathbb{P}$ den l nin çıkarılmasıyla elde edilen küme).

(iii) $A \in \mathcal{H}_1$ ve $B \in \mathcal{H}_2$ ise, $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ dir.

[E8] m, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[E9] $\mathcal{H}$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in \mathcal{H}$ olmak üzere $m(\angle PAB) = r$ olacak sekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[E10] Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise, $m(\angle ABD)$+ $m(\angle DBC)$= $m(\angle ABC)$ dir.

[E11] Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise , $m(\angle ABD)$ +$m(\angle DBC)$=180 dir.

[E12] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

[E13] l doğrusu ve l nin dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır (Çolakoğlu 2009).

Bu onüç aksiyomdan onikinci aksiyom yani Kenar-Açı-Kenar eşlik aksiyomunun sağlanmadığı geometrilerde vardır. Bunlara örnek olarak taksi geometri, maksimum geometri verilebilir. Kenar-Açı-Kenar aksiyomunun sağlandığı geometriye ise, *Mutlak (absolute) geometri* denir. Son zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda mutlak geometrideki Kenar-Açı-Kenar aksiyomunun Kenar-Açı-Açı ve Kenar-Kenar-Kenar denkliğine değinilmiştir (Donnelly 2010, 2013).

Bu tez çalışmasının asıl amacı, mutlak geometride eşlik aksiyomları ve bunlar arasındaki ilişkiler kullanılarak mutlak geometrinin geliştirilmesine katkıda bulunmaktır. Gerekli açıklamalar Öklidyen düzlemde incelenmiştir.

Bu amaçla, ikinci bölümde tez çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde izometri ve yansıma kavramları tanıtılıp bunlarla ilgli teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde mutlak geometride Kenar-Açı-Açı ile Kenar-Açı-Kenar eşlik aksiyomları arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Son bölümde Kenar-Kenar-Kenar ile Kenar-Açı-Kenar eşlik aksiyomları arasındaki ilişki açıklanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümdeki tanım ve teoremler Martin (1982, 1986), Moise (1990), Millman ve Parker (1991) ve Çolakoğlu (2009) kaynaklarından faydalanılarak verilmiştir.

Tanım 2.1 (Soyut geometri) $\mathbb{P}$ elemanları noktalar olan bir küme; $\mathbb{L}$ de, $\mathbb{P}$ nin boş küme olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları doğrular olan bir küme olmak üzere, aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan matematiksel sisteme *soyut geometri* denir ve $[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ ile gösterilir.

(i) $\mathbb{P}$ deki her farklı iki noktadan geçen en az bir doğru vardır.

(ii) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

Tanım 2.2 (Incidence geometri) $\mathbb{I}$, nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (incidence) bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ soyut geometrisine *konum (incidence) geometrisi* denir.

(i) $\mathbb{P}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

(ii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 2.3 (Metrik) $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki (i) ve (ii) koşullarını sağlarsa, d ye $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* denir. Eğer üç koşulu da sağlarsa, d ye $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *metriktir* denir.

(i) Her $P, Q \in \mathcal{X}$ için $d\,(P, Q) \geq 0$ ve $d\,(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ dir.

(ii) Her $P, Q \in \mathcal{X}$ için $d\,(P, Q) = d\,(Q, P)$ dir.

(iii) Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için $d\,(P, Q) \leq d\,(P,R) + d\,(R, Q)$ dir

Tanım 2.4 (Cetvel) l, $[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ konum geometrisinin bir doğrusu, d de $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna l için *cetveldir* denir.

(i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

(ii) l üzerindeki her P ve Q noktaları için $|f(P) - f(Q)| = d\,(P, Q)$ dir.

Burada, (ii) eşitliğine *cetvel denklemi*, $f(P)$ ye ise P nin f ye bağlı *koordinatı* denir.

Tanım 2.5 (Metrik geometri) [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}$] bir konum geometrisi ve d , $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, $\forall\ l \in \mathbb{L}$ doğrusu bir cetvele sahipse, d ile birlikte [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}$] konum geometrisine *metrik geometri* denir ve [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] ile gösterilir.

Tanım 2.6 (Arada olma) A, B ve C, [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] metrik geometrisinde üç farklı nokta olmak üzere, eğer bu noktalar aynı doğru üzerinde ve $d\ (A,B) + d\ (B,C) = d\ (A, C)$ ise, B noktası A ve C noktaları arasındadır denir ve $A - B - C$ ile gösterilir.

Tanım 2.7 (Doğru parçası) A ve B farklı iki nokta olmak üzere,

$$AB = \{X \in \mathbb{P} :\ X = A \text{ veya } X = B \text{ veya } A - X - B\}$$

kümesine AB *doğru parçası* denir ve $\overline{AB}$ veya $[AB]$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8 (Doğru parçalarının eşliği ve doğru parçasının içi) $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ iki doğru parçası olmak üzere, eğer $d(A,B) = d(C,D)$ ise $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ doğru parçaları eştir denir ve $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$ ile gösterilir. $\overline{AB}$ - $\{A, B\}$ kümesine ise $\overline{AB}$ *doğru parçasının içi* denir ve $int(\overline{AB})$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 (Işın) $\overline{AB} \cup \{X \in \mathbb{P} : A - B - X\}$ kümesine AB *ışını*, A noktasına AB ışınının başlangıç noktası denir ve $\overrightarrow{AB}$ veya $[AB$ ile gösterilir.

Tanım 2.10 (Işının içi) $\overrightarrow{AB}$ - $\{A\}$ kümesine ise $\overrightarrow{AB}$ *ışınının içi* denir ve $int(\overrightarrow{AB})$ ile gösterilir.

Tanım 2.11 [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] bir metrik geometri ve $S \subset \mathbb{P}$ olsun. Eğer S içindeki her farklı P ve Q noktaları için $\overline{PQ} \subset S$ ise, S kümesine *konvekstir* denir.

Tanım 2.12 (Düzlem Ayırma Aksiyomu (DAA)) [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] metrik geometrisinde, verilen her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu için $\mathbb{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ gibi iki alt kümesi varsa, [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] sistemi *düzlem ayırma aksiyomunu sağlar* denir. Bu durumda, $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ kümelerinin herbirine bir *yarı düzlem* , l doğrusuna da bu *yarı düzlemlerin kenarı* denir.

(i) $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ konvekstir.

(ii) $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathbb{P} - l$ ($\mathbb{P}$ den l nin çıkarılmasıyla elde edilen küme).

(iii) $A \in \mathcal{H}_1$ ve $B \in \mathcal{H}_2$ ise, $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ dir.

Tanım 2.13 (Pasch geometri) Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye *Pasch geometri* denir (Çolakoğlu 2009).

Teorem 2.1 $[\mathbb{P},\mathbb{L},d]$ düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometri, A ve B noktaları l doğrusu üzerinde olmayan iki nokta olsun. Bu durumda

(i) A ve B noktaları l doğrusunun zıt bölgelerindedir ancak ve ancak $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ dir.

(ii) A ve B noktaları l doğrusunun aynı bölgesindedir ancak ve ancak $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ veya $A = B$ dir.

İspat. (i): A ve B noktaları l nin zıt bölgesinde ise, $A \in \mathcal{H}_1$ ve $B \in \mathcal{H}_2$ (veya $A \in \mathcal{H}_2$ ve $B \in \mathcal{H}_1$) olur. Bu durum da Tanım 2.12 (iii) den $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ olur.
Tersine $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ olsun. Eğer $A, B \in \mathcal{H}_1$ (veya $A, B \in \mathcal{H}_2$) olsaydı $\mathcal{H}_1$ (veya $\mathcal{H}_2$) konveks olduğundan $\overline{AB} \in \mathcal{H}_1\ (veya\ \mathcal{H}_2)$ olurdu. Bu durumda $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ olurdu. Dolayısıyla bu bir çelişkidir ve A ve B noktaları l doğrusuna göre zıt bölgelerde olmalıdırlar.

(ii): A , B noktaları l doğrusuna göre aynı bölgede olsunlar. Bu durumda $A, B \in \mathcal{H}_1$ veya $A, B \in \mathcal{H}_2$ dir. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ konveks olduğundan ya $A = B$ veya $\overline{AB} \in \mathcal{H}_1$ veya $\overline{AB} \in \mathcal{H}_2$ olur. Dolayısıyla $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ dır.

Aksine $A = B$ veya $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ olsun. $A = B$ ise bu noktalar l nin aynı tarafındadır. $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ ise $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ yarı düzlemleri konveks olduğundan A ve B noktaları ya $\mathcal{H}_1$ ya da $\mathcal{H}_2$ yarı düzlemindedirler. Yani l nin aynı bölgesindeki yarı düzlemdedirler.

Teorem 2.2 l, düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan metrik geometride bir doğru olsun. P ve Q noktaları l doğrusunun zıt bölgelerinde ve Q ve R noktaları da l doğrusunun zıt bölgelerinde ise P ve R noktaları l doğrusunun aynı bölgesindedir.

İspat. l , DAA yı sağlayan metrik geometrinin bir doğrusu olsun. Bu durumda l doğrusu düzlemi $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ yarı düzlemlerine ayırır. P ve Q noktaları l nin zıt bölgesinde ise $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$ olur ve dolayısıyla $P \in \mathcal{H}_1$ ise $Q \in \mathcal{H}_2$ dir. Benzer şekilde Q ve R noktaları l nin zıt bölgesinde ise $\overline{QR} \cap l \neq \emptyset$ olur ve $Q \in \mathcal{H}_2$ olduğundan $R \in \mathcal{H}_1$

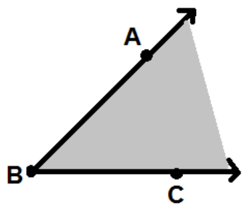
olur. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ ayrık ve konveks alt kümeler olduğundan P ve R noktalarının oluşturduğu doğru parçası $\overline{PR} \cap l = \emptyset$ olup l nin aynı bölgesindedirler.

Teorem 2.3 l düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan metrik geometride bir doğru olsun. P ve Q noktaları l doğrusunun zıt bölgelerinde ve Q ve R noktaları l doğrusunun aynı bölgesinde ise P ve R noktaları l doğrusunun zıt bölgesindedir.

İspat: l, DDA yı sağlayan metrik geometrinin bir doğrusu olsun. Bu durumda l doğrusu düzlemi $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ yarı düzlemlerine ayırır. P ve Q noktaları l nin zıt bölgesinde ise $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$ olup $P \in \mathcal{H}_1$ ise $Q \in \mathcal{H}_2$dir. Q ve R noktaları l nin aynı bölgesinde ise $\overline{QR} \cap l = \emptyset$ olup $Q \in \mathcal{H}_2$ olduğundan $R \in \mathcal{H}_2$dir. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ ayrık ve konveks alt kümeler olduğundan $\overline{PR} \cap l \neq \emptyset$ olup P ve R noktaları l nin zıt bölgesindedirler.

Tanım 2.14 (Açı) Başlangıç noktaları ortak farklı iki ışınının birleşim kümesine açı denir. $\overrightarrow{BA}$ ve $\overrightarrow{BC}$ ışınlarının oluşturduğu açıya ABC *açısı* denir ve $\angle ABC$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.15 (Açının İç Bölgesi) Pasch geometride $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun C noktasını içeren bölgesiyle, $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını içeren bölgesinin kesişimine $\angle ABC$ *açısının iç bölgesi* denir ve $int(\angle ABC)$ ile gösterilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Açının iç bölgesi

Tanım 2.16 (Açı Ölçme Fonksiyonu) Bir $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d\,]$ Pasch geometrisinde, $\mathcal{A}$ tüm açıların kümesi olmak üzere, aşağıdaki dört koşulu sağlayan $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna *açı ölçme fonksiyonu* denir.

(i) Eğer $\angle ABC \in \mathcal{A}$ ise, $0 < m\,(\angle ABC) < 180$ dir.

(ii) $\mathcal{H}$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in \mathcal{H}$ olmak üzere $m(\angle PAB) = r$ olacak sekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

(iii) Eğer D noktası $\angle ABC$ açısının *iç bölgesi*nde ise,

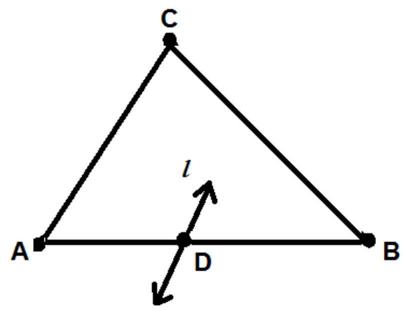
$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC) \text{ dir.}$$

(iv) Eğer $A - B - C$ ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = 180 \text{ dir.}$$

Tanım 2.17 (Açıölçer geometri) $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ Pasch geometrisine, bu geometri üzerinde tanımlı bir m açıölçme fonksiyonuyla birlikte *açıölçer (protractor) geometri* denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ ile gösterilir.

Tanım 2.18 (Pasch postülatı (PP)) Bir metrik geometride l bir doğru ve ΔABC de bir üçgen olsun. $A - D - B$ şartını sağlayan $D \in l$ noktası için $l \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ ya da $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ ise bu metrik geometri *Pasch Postulatını (PP) sağlar* denir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Pasch postülatının şekli

Teorem 2.4 (Pasch Teoremi) Eğer bir metrik geometri düzlem ayırma aksiyomunu (DAA) sağlıyorsa Pasch postülatını sağlar.

İspat. Bir metrik geometride, ΔABC bir üçgen, l bir doğru olsun. $A - D - B$ olacak şekilde $D \in l$ noktası verilsin. $l \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ veya $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir (Şekil 2.2).

$\overline{AC} \cap l = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O halde $\overline{BC} \cap l \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. Şimdi $A \in \overline{AC} \cap \overleftrightarrow{AB}$ olduğundan $l \neq \overleftrightarrow{AB}$ dir. Bu nedenle hem A ve B noktaları, l doğrusu üzerinde değildirler hem de $\overline{AB} \cap l = \{D\} \neq \emptyset$ olduğundan bu noktalar teorem 2.1 gereğince l doğrusunun zıt bölgesindedirler. A ve C noktaları, $\overline{AC} \cap l = \emptyset$ olduğundan yine teorem 2.1 gereğince l doğrusunun aynı bölgesindedir. Teorem 2.3 den B ve C noktaları, l doğrusunun zıt bölgesindedir. Bundan dolayı $\overline{BC} \cap l \neq \emptyset$ dir. Benzer şekilde $\overline{BC} \cap l = \emptyset$ olduğu durumda da $\overline{AC} \cap l \neq \emptyset$ sağlanacaktır.

Teorem 2.5 Bir Pasch geometride $\mathcal{A}$ bir doğru, ışın, doğru parçası, bir ışının yada bir doğru parçasının içi olsun. Eğer $\mathcal{A} \cap l = \emptyset$ olacak şekilde bir l doğrusu varsa o zaman $\mathcal{A}$ nın tamamı l doğrusunun bir bölgesindedir. Eğer $A - B - C$ ve $\overleftrightarrow{AC} \cap l = \{B\}$ olacak şekilde bir B noktası varsa o zaman $int(\overline{BA})$ ve $int(\overrightarrow{BA})$ nın her ikiside l nin aynı bölgesinde iken $int(\overrightarrow{BA})$ ile $int(\overrightarrow{BC})$, l nin zıt bölgesindedir.

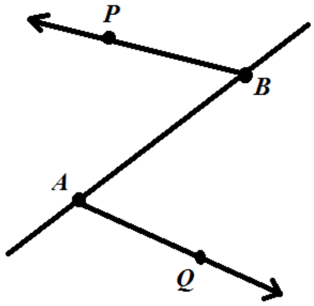
İspat. Bir Pasch geometride $\mathcal{A}$ bir doğru, ışın, doğru parçası, bir ışının ya da bir doğru parçasının içi olsun. $\mathcal{A} \cap l = \emptyset$ olacak şekilde bir l doğrusu ve $X \in \mathcal{A}$ ve de $\mathcal{A}$ nın herhangi bir Y noktasını alalım. $\overline{XY} \subset \mathcal{A}$ olduğundan $\overline{XY} \cap l = \emptyset$ olup X ve Y noktaları l nin aynı bölgesindedir ve dolayısıyla $\mathcal{A}$ nın her noktası X noktasıyla l nin aynı bölgesinde olup $\mathcal{A}$ nın tamamı l nin bir bölgesindedir.

$A - B - C$ ve $\overleftrightarrow{AC} \cap l = \{B\}$ olacak şekilde bir B noktası olsun. $\overrightarrow{BA} - \{B\}$ nin bir elemanı P noktası olsun. Bu durumda $\overrightarrow{PA} \cap l = \emptyset$, $\overline{PA} \cap l = \emptyset$ ve $\overrightarrow{PA} \cap \overline{PA} = \overline{PA}$ olup her P noktası için bu durum sağlanacağından $int(\overrightarrow{BA})$ ve $int(\overline{BA})$, l nin aynı bölgesindedirler. Fakat $int(\overrightarrow{BA}) \cap int(\overrightarrow{BC}) = \emptyset$ ve $P \in int(\overrightarrow{BA})$, $Q \in int(\overrightarrow{BC})$ için $\overline{PQ} \cap l = \{B\} \neq \emptyset$ olup $int(\overrightarrow{BA})$ ile $int(\overrightarrow{BC})$ l doğrusunun zıt bölgesindedirler.

Teorem 2.6 (Z teoremi) Bir Pasch geometride P ve Q noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun zıt bölgelerinde ise $\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset$ dir. Özel olarak $\overline{BP} \cap \overline{AQ} = \emptyset$ dir (Şekil 2.3).

İspat. Eğer P ve Q noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt bölgesinde ise Teorem 2.5 den $int(\overrightarrow{BP})$, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun bir bölgesinde ve $int(\overrightarrow{AQ})$ ise diğer bölgesindedir. Dolayısıyla $int(\overrightarrow{BP}) \cap int(\overrightarrow{AQ}) = \emptyset$ dir. Eğer $B \notin \overleftrightarrow{AQ}$ ise (çünkü A, B, Q doğrudaş değil) $\overrightarrow{BP} \cap int(\overrightarrow{AQ}) = \emptyset$

elde edilir. Eğer $A \notin \overleftrightarrow{BP}$ ise $\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset$ elde edilir. Bu şekilde $\overline{BP} \subset \overrightarrow{BP}$ ve $\overline{AQ} \subset \overrightarrow{AQ}$ olur.



Şekil 2.3 Z konfügürasyonu

Teorem 2.7 Bir Pasch geometride $P \in int(\angle ABC)$ olması için gerek ve yeter şart A ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı bölgesinde, C ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun aynı bölgesinde olmasıdır.

İspat. Bir Pasch geometride $P \in int(\angle ABC)$ olsun. Bu durumda P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını kapsayan bölgesinde ve aynı zamanda $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun C noktasını kapsayan bölgesinde olduğundan A ve P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı bölgesinde, P ve C noktası $\overleftrightarrow{BA}$ nın aynı bölgesindedir.

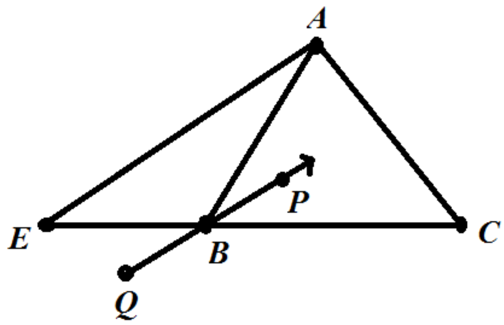
Aksine A ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı bölgesinde, C ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun aynı bölgesinde olduğu kabul edilsin. $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını kapsayan bölgesi ile $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun C noktasını kapsayan bölgesinin arakesiti $int(\angle ABC)$ olup, P noktası her iki bölgenin de elemanı olduğundan arakesitin de elemanıdır. Yani $P \in int(\angle ABC)$ dir.

Teorem 2.8 (Crossbar teoremi(Kesen Işın Teoremi)) Bir Pasch geometride P noktası $\angle ABC$ açısının iç bölgesinde ise $\overrightarrow{BP}$ ışını, $\overline{AC}$ doğru parçasını $A - F - C$ olacak şekilde bir tek noktada keser.

İspat. $E - B - C$ olacak şekilde bir E noktasını düşünelim (Şekil 2.4). Teorem 2.7 den P ve C noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin aynı bölgesindedirler ve Teorem 2.5 den E ve C noktaları

$\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt bölgesindedirler. Böylece P ve E noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt bölgesinde olur. Z Teoreminden $\overrightarrow{BP} \cap \overline{AE} = \emptyset$ dir. $P - B - Q$ olacak şekilde bir Q noktası alınsın. O zaman Q ve A, $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{EC}$ doğrusunun zıt bölgesinde olurlar. Yine Z Teoremine göre $\overrightarrow{BQ} \cap \overline{AE} = \emptyset$ dir. Böylece $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AE} = \emptyset$ olur. ΔECA üçgenine PP nin uygulanmasıyla $\overrightarrow{BP} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ olduğu görülür. A, B, C doğrudaş olmadığından bir F noktası için $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AC} = \{F\}$ olur.

$F \neq A$ (yoksa $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AE} \neq \emptyset$ olur) ve $F \neq C$ (yoksa B, P, C doğrudaş olur) dir. Böylece $F \in int(\overline{AC})$ dir. Son olarak P, A ve F noktalarının hepsi $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafındadırlar ve bu nedenle $F \in \overleftrightarrow{BP}$ olup $F \in \overrightarrow{BP}$ dir. Bunun sonucu olarak $\overrightarrow{BP}$ ışını, $\overline{AC}$ yi $A - F - C$ olacal şekilde yalnız bir F noktasında keser (Şekil 2.4).



Şekil 2.4 Crossbar teoreminin şekli

Tanım 2.19 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, eğer $m\ (\angle ABC) = m\ (\angle DEF)$ ise ABC ve DEF *açıları eştir* denir. Ayrıca, iki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verildiğinde, eğer birinci üçgenin kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve bu kenarlar arasındaki açılarına eş ise bu *iki üçgen eştir* denir.

Tanım 2.20 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, iki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve bu kenarlar arasındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş iken bu üçgenler de eş ise, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ sistemi *Kenar-Açı-Kenar (KAK) aksiyomunu* sağlıyor denir.

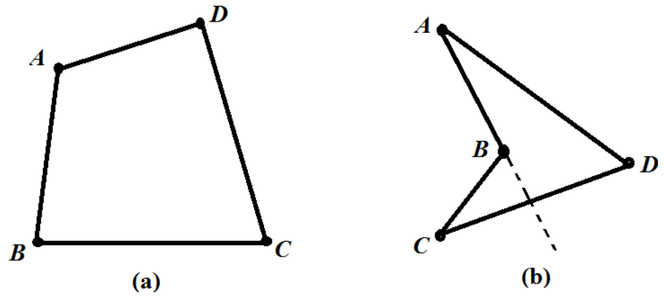
Tanım 2.21 KAK aksiyomunu sağlayan açıölçer geometriye *mutlak (absolute,neutral) geometri* denir (Çolakoğlu 2009).

Tanım 2.22 (Protractor Postülatı) m tüm açıları $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 180\}$ kümesinden bir elemana eşleyen bir açı ölçme fonksiyonu olmak üzere

a) $\overrightarrow{VA}$, $\mathcal{H}$ yarı düzleminde bir ışın ise her bir $r \in (0, 180)$ için $m(AVP) = r$ olacak şekilde yalnız bir $\overrightarrow{VP}$ ışını vardır.

b) $B \in int(\angle AVC)$ ise $m(\angle AVB) + m(\angle BVC) = m(\angle AVC)$ dir.

Tanım 2.23 (Konveks Dörtgen) Pasch geometride, her bir kenarı bütünüyle (kenarın üzerinde bulunduğu doğru) karşısındaki kenarın belirlediği yarı düzlemde olan dörtgene *konveks dörtgen* denir. Şekil 2.3 de (a) konveks (b) ise konveks değildir.



Şekil 2.5 Konveks dörtgen

Teorem 2.9 (Açı oluşturma teoremi) $\angle AVB$ bir açı, $\overrightarrow{WC}$ bir ışın, $\mathcal{H}$ ise $\overleftrightarrow{WC}$ doğrusunun belirttiği yarı düzlem olsun. $\mathcal{H}$ da $\angle AVB \simeq \angle CWD$ olacak şekildeki D noktası için bir tek $\overrightarrow{WD}$ ışını vardır.

İspat. Tanım 2.22 den $\angle AVB \simeq \angle CWD$ olacak şekildeki D noktası için bir tek $\overrightarrow{WD}$ ışını vardır.

3. İZOMETRİ VE YANSIMA

Tanım 3.1 (İzometri) $[\mathbb{P},\mathbb{L},d]$ ve $[\mathbb{P}',\mathbb{L}',d']$ metrik geometriler olmak üzere $A,B \in \mathbb{P}$ olmak üzere

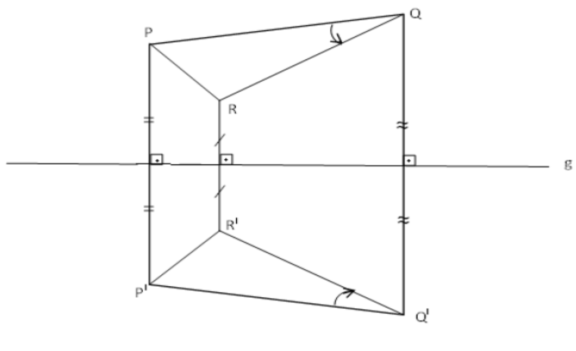
$$\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$$
$$d(A,B) = d'(\varphi A, \varphi B)$$

eşitliğini sağlıyorsa φ ye $[\mathbb{P},\mathbb{L},d]$ ve $[\mathbb{P}',\mathbb{L}',d']$ arasında bir *izometri* denir (Sönmez 2006). İzometri, direkt izometri ve karşıt izometri olmak üzere ikiye ayrılır. Direkt izometri yönü korur. Ötelemeler ve dönmeler direkt izometridir. Karşıt izometri yönü ters çevirir. Yansımalar karşıt izometridir (Çakan 2011).

Teorem 3.1 Eğer bir izometri bir doğru üzerindeki farklı iki noktayı sabit bırakır ise bu izometri doğru üzerindeki noktalar kümesini sabit bırakır.

İspat. A ve B bir doğru üzerinde herhangi noktalar olsun. Bu noktalardan farklı olarak A - P - B olacak şekilde bir P noktası alınsın. O halde AP ve BP uzaklıkları sıfırdan farklıdır. Eğer BP uzaklığı bilinirse P noktası bulunabilir. İzometri uzaklığı koruyan bir dönüşüm olduğundan, A ve B noktalarını sabit bırakan izometri P noktasınıda sabit bırakmalıdır. Benzer şekilde, aynı izometri bu doğru üzerindeki bütün noktaları sabit bırakır.

Tanım 3.2 g, düzlemde herhangi bir doğru olmak üzere g nin her noktasını kendisine ve düzlemin diğer her bir noktasını g ye göre simetriği olan noktaya dönüştüren bir dönüşüme g ye göre bir yansıma ve g doğrusuna da bu yansımanın ekseni denir.



Şekil 3.1 Öklid düzleminde yansıma

Şekil 3.1 de P, Q, R noktaları doğrudaş değildir. Bu noktaların g ye göre yansımaları, sırası ile, P', Q', R' dir. g doğrusu PP', QQ', RR' yi dik kesmektedir (Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 3.2 Yansımalar açıların yönünü ters çeviren hareketlerdir. Bir yansıma, ekseni üzerindeki noktalardan başka hiç bir noktayı sabit bırakmaz. Bir yansıma ekseninden ve eksenine dik olan doğrulardan başka hiçbir doğruyu sabit bırakmaz.

İspat. Bir yansımanın düzlemde bire-bir bir dönüşüm olduğu açıktır. Hatta Şekil 3.1den yansımanın uzaklığı koruduğu da gösterilebilir. O halde bir yansıma bir harekettir. Her noktanın eksene göre yansımışı eksene göre simetriği olduğundan, her açının yönü tersi olur. O halde Şekil 3.1 de PQR açısının yönü pozitif ise görüntüsü olan $P'Q'R'$açısının yönü negatiftir. Ekseni g olan bir yansımada g nin noktaları sabit noktalardır. Ayrıca g doğrusu ve g ye dik olan bütün doğrular da sabit doğrulardır, g ye göre simetrik olan şekil de yansımada sabit kalır (Hacısalihoğlu 1998).

Bu tezde yansımalar aynı zamanda hareket olarak ifade edilecektir.

Teorem 3.3 Doğrudaş olmayan üç noktayı, doğrudaş olmayan üç noktaya dönüştüren iki farklı hareket yoktur.

İspat. α, β izometrileri sırasıyla doğrudaş olmayan A, B, C noktalarını, doğrudaş olmayan A', B', C' noktalarına dönüştürsün. O zaman $\alpha\beta^{-1}$ izometrisi A, B, C noktalarının her birini sabit bırakır ve bundan dolayı ι özdeşlik dönüşümü olmak zorundadır. $\alpha\beta^{-1} = \iota$ olmak üzere,

$$(\alpha\beta^{-1})\,\beta = \iota\beta$$

$$\alpha(\beta^{-1}\beta) = \beta$$

$$\alpha\iota = \beta$$

elde edilir.

Teorem 3.4 İki noktayı sabit bırakan bir izometri bir yansıma ya da birim dönüşümdür.

İspat. m doğrusu üzerindeki P ve Q noktalarını sabit bırakan bir α izometrisi gözönüne alınsın. α izometrisi için iki durum vardır. α izometrisi ya ι ya da σ_m yansımasıdır. Teorem 3.1 den $\alpha = \iota$ durumu aşikardır. $\alpha \neq \iota$ olsun. $\alpha = \sigma_m$ yansıması olduğunu gösterilecektir. Eğer $\alpha \neq \iota$ ise Teorem 3.1 ye göre α tarafından sabit bırakılmayan bir R noktası, m doğrusunun dışında olmalıdır. Bu takdirde P, Q, R noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır. $R' = \alpha(R)$ olsun. α bir izometri olduğu için $PR = PR'$ ve $QR = QR'$ dir. P ve Q nun herbiri R ve R' den eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olduğundan m doğrusu $\overline{RR'}$ nün orta dikmesidir. Sonuç olarak $\alpha(R) = R' = \sigma_m(R)$ dir. Aynı zamanda $\alpha(P) = P' = \sigma_m(P)$ ve $\alpha(Q) = Q' = \sigma_m(Q)$ dir. Teorem 3.3 e göre $\alpha = \sigma_m$ elde edilir.

Şimdi yansımaların bileşkesiyle ilgili bazı teoremlerden bahsedilecektir.

Teorem 3.5 Tek bir noktayı sabit bırakan izometri kesişen iki doğruya göre yansımanın bir bileşkesidir.

İspat. Bir α izometrisinin bir tek C noktasını sabit bıraktığı varsayılsın. P noktası C den farklı bir nokta, $\alpha(P) = P'$ ve m doğrusu $\overline{PP'}$ nün orta dikmesi olsun. α bir izometri olduğu için $CP = CP'$ dir. Bu durumda C noktası m doğrusunun üzerindedir. Bu yüzden $\sigma_m(C) = C$ ve $\sigma_m(P') = P$ dir. $\sigma_m\alpha(C) = \sigma_m(C) = C$ ve $\alpha(P) = \sigma_m(P') = P$ dir. Teorem 3.4 e göre $l = \overleftrightarrow{CP}$ olmak üzere $\sigma_m\alpha = \iota$ ya da $\sigma_m\alpha = \sigma_l$ dir. Ancak $\sigma_m\alpha \neq \iota$ dir. Yoksa α, σ_m olurdu ve C den başka noktaları da sabit bırakırdı. Bu yüzden bazı l doğrusu için $\sigma_m\alpha = \sigma_l$ dir. Bu eşitliğin iki tarafına soldan σ_m ile bileşke işlemi uygulandığında $\alpha = \sigma_m\sigma_l$ elde edilir.

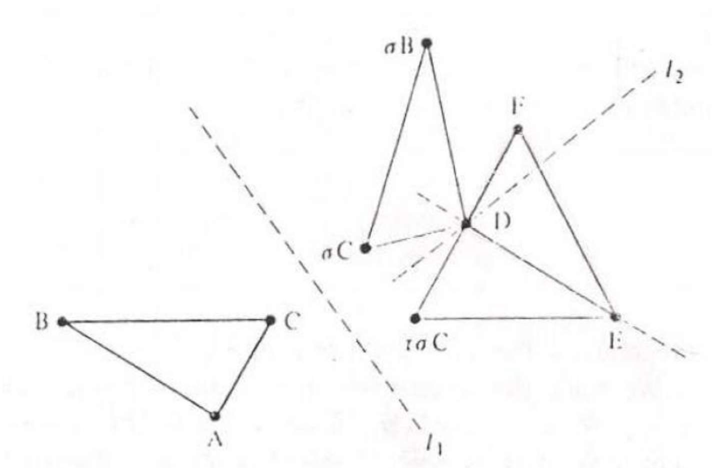
Herhangi m doğrusu için $\iota = \sigma_m\sigma_m$ olduğundan önceki iki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.6 Bir noktayı sabit bırakan bir izometri en fazla iki yansımanın bir bileşkesidir.

Teorem 3.7 Yansımaların bileşkesi bir izometridir. Her izometri en fazla üç yansımanın bileşkesidir.

İspat. Kabul edelim ki özdeşlik(birim) olmayan bir α izometrisi P noktasını farklı Q noktasına dönüştürsün. m doğrusu da $\overline{PQ}$ nun orta dikmesi olsun. $\sigma_m\alpha$ izometrisi P noktasını sabit bırakır. Teorem 3.6 ya göre $\sigma_m\alpha$ nin en fazla iki yansımanın bileşkesi olması gerekir. Bu iki yansımanın bileşkesine β denilsin. Böylece $\alpha = \sigma_m\beta$ dir ve α en fazla üç yansımanın bileşkesidir (Martin 1982).

Öklid düzleminde iki üçgenin köşe noktaları arasında birebir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu iki üçgen KAK göre eştir. Bu iki eş üçgen en fazla üç yansıma ile meydana gelir (Şekil 3.2) (Çakan 2011).



Şekil 3.2 Üç yansıma ile $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ gösterimi

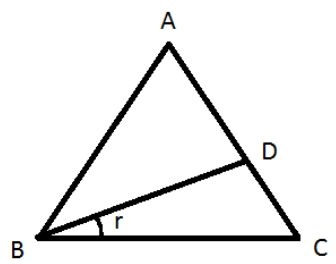
Tanım 3.2 (Kolinasyon) [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}$] ve [$\mathbb{P}'$,$\mathbb{L}'$] incidence geometriler olmak üzere her $l \in \mathbb{L}$ için $\varphi(l) \in \mathbb{L}'$ olacak şekilde bir $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ dönüşümüne kolinasyon denir (Sönmez 2006).

4. MUTLAK GEOMETRİDE KENAR-AÇI-AÇI İLE KENAR-AÇI-KENAR EŞLİK AKSİYOMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde Mutlak Geometri aksiyom sisteminden sadece Tanım 2.20 de verilen Kenar-Açı-Kenar (KAK) eşlik aksiyomu kaldırılıp yerine Kenar-Açı-Açı (KAA) eşlik aksiyomu konularak yeni bir aksiyom sistemi oluşturulmuştur. Yapacağımız tüm ispatlarda bu yeni aksiyom sistemi kullanılmıştır.

Tanım 4.1 (Kenar-Açı-Açı Aksiyomu) $[\mathbb{P},\mathbb{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, $\Delta\, ABC$ ve $\Delta\, DEF$ üçgenlerinin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$ $\angle BAC \simeq \angle EDF$ ve $\angle ABC \simeq \angle DEF$ iken $\Delta\, ABC \simeq \Delta\, DEF$ ise $[\mathbb{P},\mathbb{L}, d, m]$ sistemi *Kenar-Açı-Açı* (KAA) *aksiyomu*nu sağlıyor, denir.

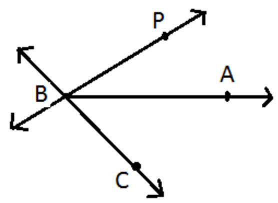
Teorem 4. 1 ABC bir üçgen olmak üzere her $r \in \mathbb{R}$ için $0 < r < m\,(\angle ABC)$ olacak şekilde $r = m\,(\angle DBC)$ eşitliğini sağlayan, $\overline{AC}$ doğru parçasının iç bölgesinde bir tek D noktası vardır.



Şekil 4.1 Üçgenin bir iç açısını bölme

İspat. $r \in \mathbb{R}$ ve $0 < r < m\,(\angle ABC)$ durumunda $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun dışında A noktası ile aynı bölgede bulunan $r = m\,(\angle PBC)$ olacak şekilde bir tek P noktası vardır (Tanım 2.16). P noktası $\angle ABC$ açısının iç bölgesinde olmasın. O halde A ve C noktaları, $\overleftrightarrow{PB}$ doğrusunun aynı veya zıt bölgesindedir.

(1) <u>A ve C noktaları , $\overleftrightarrow{PB}$ doğrusunun aynı bölgesinde olsun</u>



Şekil 4.2 Doğrunun aynı bölgesindeki noktalar

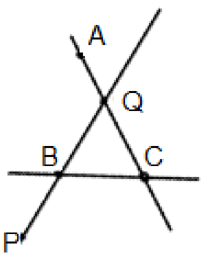
A ve P noktaları, $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı bölgesinde ve A ve C noktaları ise, $\overleftrightarrow{PB}$ doğrusunun aynı bölgesinde olduğundan (Şekil 4.2) A noktası $\angle PBC$ açısının iç bölgesindedir (Tanım 2.15). Bu durumda $m(\angle PBA) + m(\angle ABC) = m(\angle PBC)$ olur (Tanım 2.16 (iii)). Fakat bu durum $r = m(\angle PBC)$ ve $0 < r < m(\angle ABC)$ olmasıyla çelişir. O halde A ve P, $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı bölgesinde ise P noktası $\angle ABC$ açısının iç bölgesindedir ve teorem 2.4 gereğince $\overline{AC}$ üzerinde bir tek D noktası vardır.

(2) <u>A ve C noktaları , $\overleftrightarrow{PB}$ doğrusunun zıt bölgesinde olsun</u>

Tanım 2.12 gereğince $int(\overline{AC}) \cap \overleftrightarrow{PB} \neq \emptyset$ olup bu kesişim noktasına Q denilsin (Şekil 4.3). Burada üç durum vardır. $P - B - Q$, $B = Q$ ya da Q noktası $\overrightarrow{BP}$ ışının iç bölgesinde olabilir.

i) <u>$P - B - Q$ durumu</u>

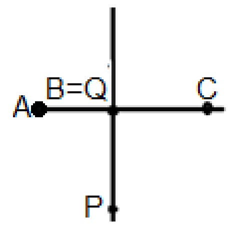
Bu durumda P ve Q noktaları, $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt bölgesinde olur. İspatın başında belirtildiği gibi P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun dışında A noktası ile aynı bölgededir. O halde A ve Q noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun zıt bölgesindedir (Teorem 2.3). Bu ise Q noktasının $\overline{AC}$ üzerinde olmasıyla çelişir. O halde $P - B - Q$ durumu gerçekleşmez.



Şekil 4.3 Doğrunun zıt bölgesindeki noktalara göre $P - B - Q$ durumu

ii) $B = Q$ olsun

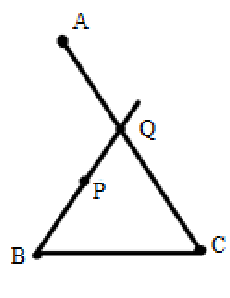
$Q \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC}$ dir (Şekil 4.4). Fakat $C \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC}$ dir. Q noktası $\overline{AC}$ doğru parçasının iç bölgesinde olduğundan $Q \neq C$ dir. Bu ise $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{BC}$ doğrularının iki farklı noktada kesişmeleri anlamına gelir yani $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ olur. Bu ise çelişkidir. Çünkü A, B ve C noktaları doğrudaş değildir.



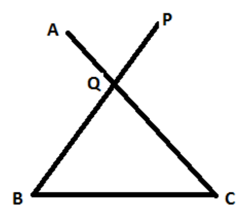
Şekil 4.4 Doğrunun zıt bölgesindeki noktalara göre $B = Q$ durumu

iii) Q noktasının $\overrightarrow{BP}$ ışının iç bölgesinde olsun

Bu durumda $B - P - Q$ (Şekil 4.5) veya $B - Q - P$ (Şekil 4.6) olabilir. Her iki durumda da $m(\angle ABQ)$=$m(\angle ABP)$ ve $m(\angle CBQ)$=$m(\angle CBP)$ dir.



Şekil 4.5 Doğrunun zıt bölgesindeki noktalara göre $B - P - Q$ durumu



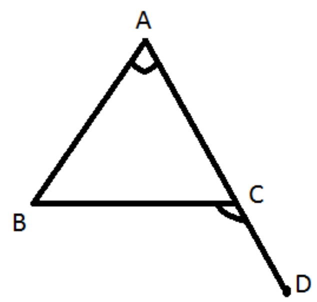
Şekil 4.6 Doğrunun zıt bölgesindeki noktalara göre $B - Q - P$ durumu

Q noktası $\overline{AC}$ doğru parçasının iç bölgesinde olduğundan, Q , $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını içeren bölgesinde ve $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun C noktasını içeren bölgesindedir. Yani $Q \in int(\angle ABC)$ dir. Buradan $m(\angle ABC)$=$m(\angle ABQ)$+ $m(\angle CBQ)$ =$m(\angle ABP)$ + $m(\angle CBP)$ olup $P \in int(\angle ABC)$ olmaktadır . Bu ise $P \notin int(\angle ABC)$ seçimiyle çelişir.

O halde $P \in int(\angle ABC)$ olmalıdır. Teorem 2.6 (Crossbar Teoremi) gereğince $int(\overrightarrow{BP})$ $\cap\ int(\overline{AC}) = D$ olacak şekilde bir tek $D \in int(\overline{AC})$ vardır. $D \in int(\overrightarrow{BP})$ olduğundan $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BD}$ dir. Sonuç olarak $m(\angle DBC)$=$m(\angle PBC)$= dir. Tanım 2.16 (ii) gereğince de $m(\angle DBC)=r$ olmaktadır.

Teorem 4.2 Üçgenin bir dış açısının ölçüsü kendisine komşu olmayan iç açıların ölçüsünden büyüktür

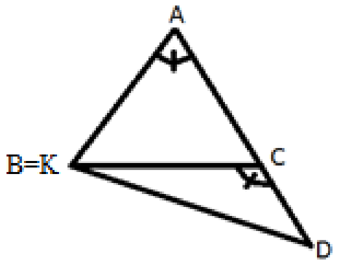
İspat. $\Delta\ ABC$ bir üçgen, D ise $A - C - D$ olacak şekilde bir nokta olsun (Şekil 4.7).Bir iç açının kendine komşu olmayan bir dış açıdan büyük olduğunu varsayalım. Yani $m(\angle BAC) \geq m(\angle BCD)$ olsun. Bu durumda ya $m(\angle BAC) = m\ (\angle BCD)$ ya da $m(\angle BAC)$ $> m(\angle BCD)$ dir.



Şekil 4.7 Dış açı

i) <u>$m(\angle BAC) = m\ (\angle BCD)$ olsun</u>

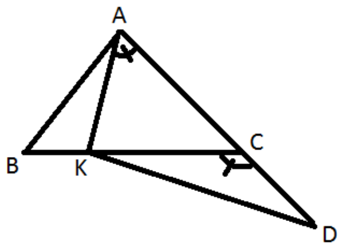
Bunun için K=B olacak şekilde K noktası alınsın (Şekil 4.8). Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta KDC \simeq \Delta KDA$ olur. Bu durumda $\overline{DA}$ = $\overline{DC}$ olur. Bu ise $A - C - D$ ile çelişir. Çünkü $A - C - D$ olması $\overline{DA} > \overline{DC}$ olmasını gerektirir. Bu nedenle $m(\angle BAC) = m(\angle BCD)$ durumu sağlanmaz.



Şekil 4.8 *m(∠BAC) = m (∠BCD)* durumu

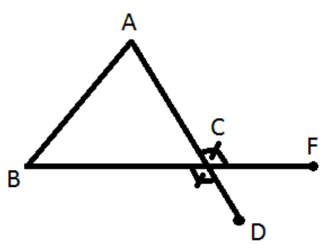
ii) <u>$m(\angle BAC) > m(\angle BCD)$ olsun</u>

$m\ (\angle KAC) = \ m\ (\angle KCD)$ olacak şekilde bir tek $K \in int(\overline{BC})$ noktası alınsın (Şekil 4.9). Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta\ KDC \simeq \Delta\ KDA$. Bu durumda $\overline{DA}$ = $\overline{DC}$ olur. Bu ise $A - C - D$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak, $m(\angle BAC)$ < $m(\angle BCD)$ olmak zorundadır.



Şekil 4.9 *m(∠BAC) > m(∠BCD)* durumu

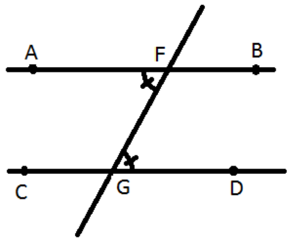
Son olarak $B - C - F$ olacak şekilde bir F noktası alınsın (Şekil 4.10). $A - C - D$ ve $B - C - F$ olduğundan $\angle\ BCD$ ile $\angle\ ACF$ ters açılardır ve ölçüleri eşittir. $m(\angle ACF) = m(\angle BCD)$ ve $m(\angle ACF)$>$m(\angle ABC)$ olduğundan $m(\angle ABC)$< $m(\angle BCD)$ elde edilir.



Şekil 4.10 *m*(∠*ABC*)< *m*(∠*BCD*) durumu

Teorem 4.3 Herhangi iki doğru, başka bir doğru ile kesildiğinde, oluşan iç ters açıların ölçüleri eşit ise bu iki doğru paraleldir.

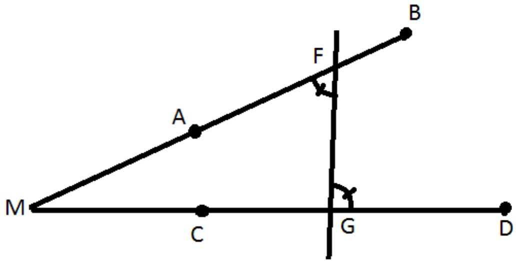
İspat. $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{FG}$ üç farklı doğru, $A - F - B,\ C - G - D,\ m(\angle AFG)$=$m(\angle DGF)$ ve A ve C noktaları $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusunun aynı bölgesinde olsun (Şekil 4.11).



Şekil 4.11 İç ters açıların ölçüleri eşit olan paralel iki doğru

$\overleftrightarrow{AB}$ ile $\overleftrightarrow{CD}$ doğruları paralel olmasın. $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = M$ ve $M \in \overleftrightarrow{FG}$ olsun. Bu durumda $M \in \overleftrightarrow{FG}$ ve $M \in \overleftrightarrow{AB}$ olduğundan $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{FG} = M$ dir. Aynı zamanda $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{FG} = F$ olduğundan $F = M$ dir. Benzer şekilde $M \in \overleftrightarrow{FG}$ ve $M \in \overleftrightarrow{CD}$ olduğundan $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FG} = M$ dir . $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FG} = G$ olduğundan $G = M$ dir. F= M ve G=M olduğundan $F = G$ olur. Bu durum ise $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ doğruları farklı iki doğru olduğundan çelişkiye yol açar.

Şimdi de $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = M$ ve $M \notin \overleftrightarrow{FG}$ olma durumu gözönüne alınsın (Şekil 4.12). M noktası, A ve C noktalarının bulunduğu bölgede düşünülebilir. Bu durumda $\Delta\, FMG$ üçgeninin $\angle\, FGD$ dış açısının ölçüsü kendisine komşu olmayan $\angle MFG$ iç açısının ölçüsünden büyüktür. Halbuki $m(\angle AFG)$=$m(\angle DGF)$ idi. Bu durum Teorem 4.2 ile çelişir.

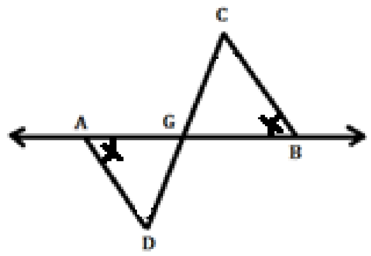


Şekil 4.12 İç ters açılarının ölçüleri eşit olan kesişen iki doğru

O halde $\overleftrightarrow{AB}$ ile $\overleftrightarrow{CD}$ doğruları paraleldir.

Teorem 4.4 $\overleftrightarrow{AB}$ bir doğru, C ve D noktaları ise $\angle ABC \simeq \angle BAD$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun zıt bölgelerinde olsun. $G = \overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD}$ için $A - G - B$ dir. Ayrıca $\overline{AD} \simeq \overline{BC}$ ise $\Delta DAG \simeq \Delta CBG$ olup G noktası $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ doğru parçalarının orta noktasıdır.

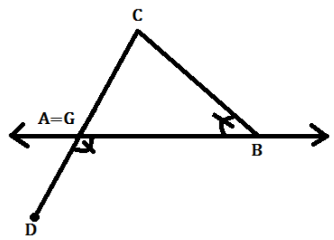
İspat. C ve D noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun zıt bölgelerinde farklı iki nokta olsun. Bu durumda Tanım 2.8 gereğince $\overline{CD}$ doğru parçası, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunu keser. Bu kesim noktasına G denilsin (Şekil 4.13).



Şekil 4.13 $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusu ve $\overline{CD}$ doğru parçasının kesişmesi durumu

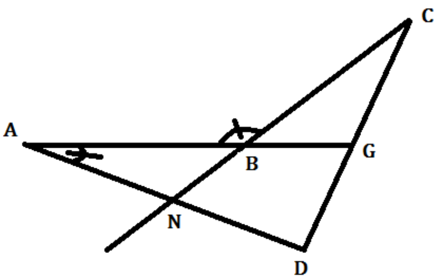
$A = G$ ya da $B = G$ olabilme durumunu inceleyelim.

$A=G$ olsun (Şekil 4.14). Teoremin ifadesinde $\angle ABC \simeq \angle BAD$ idi. Bu durum Teorem 4.2 ile çelişir. O halde $A \neq G$ dir. Benzer şekilde $B \neq G$ olduğu gösterilebilir.



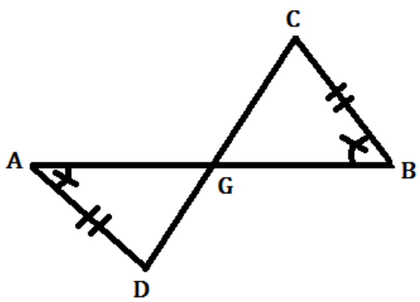
Şekil 4.14 $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusu ve $\overline{CD}$ doğru parçasının kesişiminde $A=G$ durumu

Şimdi de $A - B - G$, $A - G - B$ ya da $G - A - B$ durumları incelensin. $A - B - G$ olsun. $B \in int(\overline{AG})$ olduğundan Teorem 2.4 gereğince $\overleftrightarrow{CB}$ doğrusu $\Delta\, AGD$ üçgeninin diğer kenarını N gibi bir noktada keser (Şekil 4.15).



Şekil 4.15 $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusu ve $\overline{CD}$ doğru parçasının kesişiminde $A-B-G$ durumu

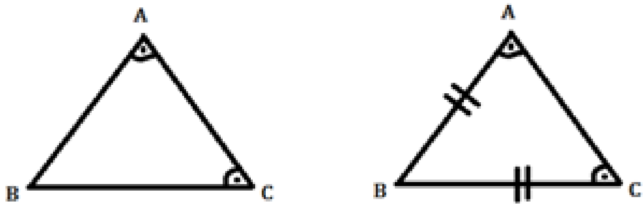
$\angle ABC \simeq \angle BAD$ olduğundan Teorem 4.3 gereğince $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overleftrightarrow{CB}$ ve bu nedenle $N \in int(\overline{GD})$ yani $G-N-D$ olması gerekir. $C-G-D$ olduğudan $C \neq N$ dir. Bu durumda $\overleftrightarrow{BC}$ ile $\overleftrightarrow{GD}$ doğruları hem N hem de C noktasında kesişmiş olur. Bu ise $\overleftrightarrow{BC}$ ve $\overleftrightarrow{GD}$ doğrularının çakışması anlamına gelir. $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{GD}$ ise D noktası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusu üzerinde olur ki bu da $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overleftrightarrow{CB}$ olmasıyla çelişir. O halde $A-B-G$ olamaz. Benzer yolla $G-A-B$ olmadığı gösterilebilir. Sonuç olarak $A-G-B$ dir.



Şekil 4.16 $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusu ve $\overline{CD}$ doğru parçasının kesişiminde $A-G-B$ durumu

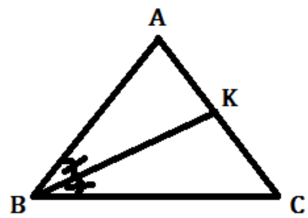
$\overline{AD} \simeq \overline{BC}$ olsun. $A-G-B$ ve $C-G-D$ olduğundan $\angle AGD$ ile $\angle CGB$ ters açılar olup eştirler(Şekil 4.16). Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta DAG \simeq \Delta CBG$ dir. Bu durumda $AG = BG$ ve $CG = DG$ dir. $A-G-B$ ve $AG = BG$ olduğundan G noktası $\overline{AB}$ doğru parçasının orta noktasıdır. Benzer şekilde $C-G-D$ ve $CG = DG$ olduğundan G noktası $\overline{CD}$ doğru parçasının orta noktasıdır.

Teorem 4.5 ΔABC bir üçgen olsun. $\angle BAC \simeq \angle BCA$ ise $\overline{BA} \simeq \overline{BC}$ dir.



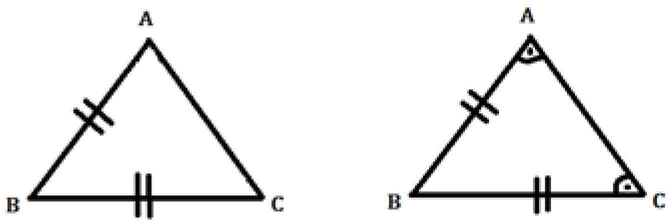
Şekil 4.17 İki iç açısı eş üçgenin kenarları arasındaki ilişki

İspat. $K \in int(\overline{AC})$ ve $\overrightarrow{BK}$ ışını $\angle ABC$ açısının açıortayı olsun (Şekil 4.18). Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta KBA \simeq \Delta KBC$ olacağından $\overline{BA} \simeq \overline{BC}$ dir.



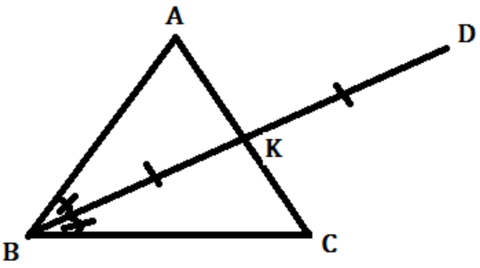
Şekil 4.18 İki iç açısı eş üçgende üçüncü açının açıortayı

Teorem 4.6 (Pons Asinorum) ΔABC bir üçgen olsun. $\overline{BA} \simeq \overline{BC}$ ise $\angle BAC \simeq \angle BCA$ dir (Şekil 4.19).



Şekil 4.19 İki kenar uzunluğu eşit üçgenin açıları arasındaki ilişki

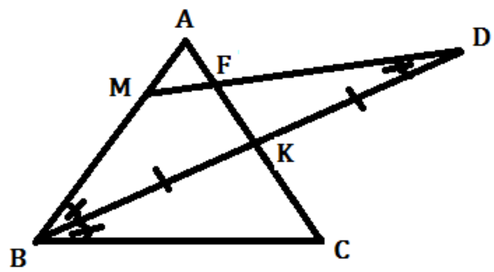
İspat. $K \in int(\overline{AC})$ ve $\overrightarrow{BK}$ ışını $\angle ABC$ açısının açıortayı olsun. $\overline{BD}$ doğru parçasının orta noktası K olacak şekilde D noktası alınsın (Şekil 4.20).



Şekil 4.20 İki kenar uzunluğu eşit üçgende $\overline{BD}$ doğru parçası

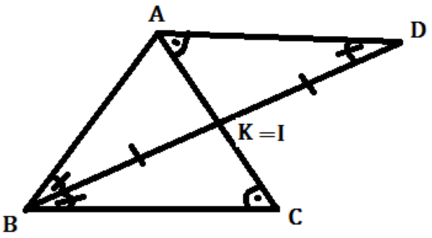
F noktası, $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunun A noktası ile aynı bölgesinde, ∠*BDF*≃ ∠*DBC* ve $\overline{DF} \simeq \overline{BC}$ olacak şekilde bir nokta olsun (Şekil 4.21). Teorem 4.4 gereğince $F-K-C$ ve $\Delta FDK \simeq \Delta CBK$ dir. $F-K-C$ olduğundan $F \in int(\overrightarrow{CA})$ dir.

$A \neq F$ olsun. Bu durumda $A-F-K-C$ ya da $F-A-K-C$ dir. Benzer durumlar olduğundan $A-F-K-C$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, $F \in int(\overline{AK})$, Pasch teoremi gereğince $\overleftrightarrow{FD}$ doğrusu ΔABK üçgeninin diğer kenarını M gibi bir noktada keser.



Şekil 4.21 İki kenar uzunluğu eşit üçgende *BD* doğru parçası ve *A*≠*F* durumu

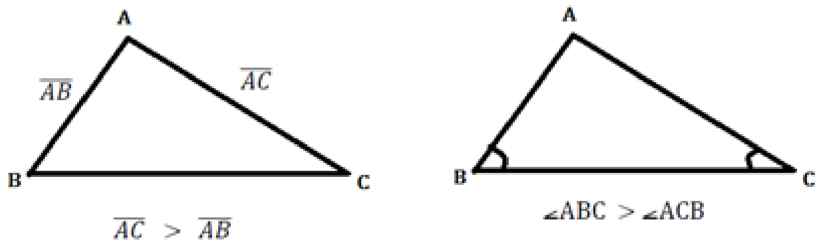
$\overleftrightarrow{FD}$ ile $\overleftrightarrow{BK}$ doğruları D noktasında kesiştiğinden ve D noktası ΔABK üçgeni üzerinde olmadığından dolayı $M \in int(\overline{AB})$ dir. Bu durumda $\angle MDB \simeq \angle MBD$ olan ΔDMB üçgeni elde edilir. Bu üçgende Teorem 4. 5 den dolayı MD=MB dir. Ayrıca, $M-F-D$ olduğundan $MD > FD$ ve $A-M-B$ olduğundan $AB > MB$ dir. Bu iki eşitsizlikten $MD > FD = BC$=$AB > MB$ elde edilir. Bu ise MD=MB durumu ile çelişkiye yol açar. Sonuç olarak, A= F, $\Delta ADK \simeq \Delta CBK$ ve ∠*DAK* ≃ ∠*BCK* olmalıdır.



Şekil 4.22 İki kenar uzunluğu eşit üçgende $\overline{BD}$ doğru parçası ve A=F durumu

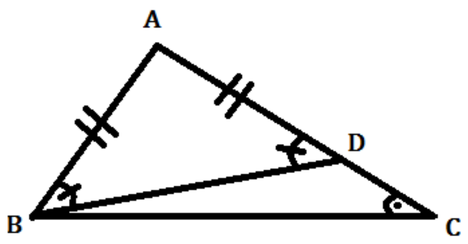
$I \in int(\overline{BD}\,)$ olacak şekilde bir nokta ve $\overrightarrow{AI}$ ışını, $\angle DAB$ açısının açıortayı olsun (Şekil 4.22). Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta IAB \simeq \Delta IAD$ dir. Bu durumda BI=DI dır. Bu da I noktasının $\overline{BD}$ doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir. O halde K= I dır ve $\overrightarrow{AK}$ ışını, $\angle DAB$ nin açıortayıdır. Sonuç olarak $\angle DAK \simeq \angle BAK$ dir. $\angle BAC$= $\angle\, BAK \simeq \angle\, DAK \simeq \angle\, BCK$ =$\angle BCA$ dir.

Teorem 4.7 Bir üçgenin iki kenarı eşit değilse uzun kenarı gören açı, kısa kenarı gören açıdan büyüktür.



Şekil 4.23 Üçgende kenar açı ilişkisi

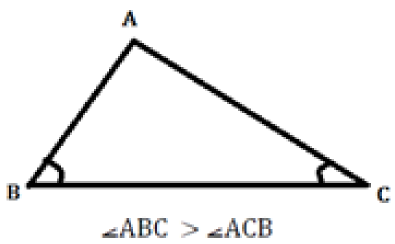
İspat. ΔABC bir üçgen ve $\overline{AC} > \overline{AB}$ olsun. $\angle ABC > \angle\, ACB$ olduğunun gösterilmesi gerekir (Şekil 4.23). D noktası, $A - D - C$ olacak şekilde bir nokta ve $\overline{AB} \simeq \overline{AD}$ olsun (Şekil 4.24). $\overline{AB} \simeq \overline{AD}$ olduğundan ΔBDC üçgeninde Teorem 4.6 gereğince $\angle DBA \simeq \angle\, BDA$ dir. $\angle BDA$ açısı da, dış açı olup Teorem 4.2 den $m(\angle BDA) > m(\angle ACB)$ dır.

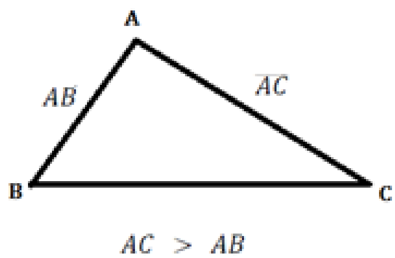


Şekil 4.24 İki kenarı eşit olmayan üçgende $A - D - C$ durumu

$D \in int(\angle ABC)$ olduğundan $\angle ABC > \angle DBA$ dır. O halde $\angle ABC > \angle DBA \simeq \angle BDA > \angle ACB$ dir.

Teorem 4.8 Bir üçgenin iki iç açısı eşit değilse büyük açının karşısındaki kenarın uzunluğu, küçük açının karşısındaki kenarın uzunluğundan büyüktür.



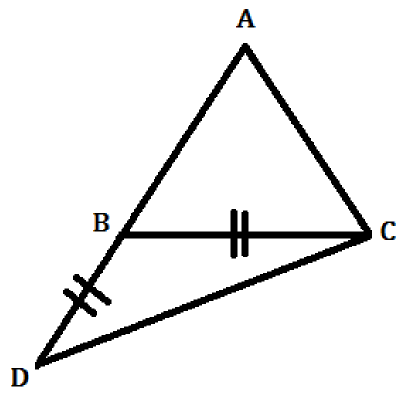


Şekil 4.25 Üçgende açı kenar ilişkisi

İspat. ΔABC bir üçgen ve $\angle ABC > \angle ACB$ olsun. $\overline{AC} > \overline{AB}$ olduğunun gösterilmesi gerekir (Şekil 4.25). Eğer $\overline{AB} \simeq \overline{AC}$ olursa Teorem 4.6 gereğince $\angle ABC \simeq \angle ACB$ olur ki bu bir çelişkidir. Eğer $\overline{AB} > \overline{AC}$ olursa Teorem 4.7 gereğince $\angle ABC < \angle ACB$ olur ki bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak $\overline{AC} > \overline{AB}$ dir.

Teorem 4.9 Herhangi bir üçgende, herhangi iki kenarın uzunlukları toplamı üçüncü kenarın uzunluğundan büyüktür.

İspat. ΔABC bir üçgen ve D noktası, $A - B - D$ ve $BD = BC$ olacak şekilde bir nokta olsun (Şekil 4.26). Bu durumda $AD = AB + BD = AB + BC$ dir.



Şekil 4.26 $A - B - D$ ve $BD = BC$ olacak şekildeki D noktası

$B \in int(\angle ACD)$ olduğundan $m(\angle ACD) > m(\angle BCD)$ dir. $BD = BC$ durumunda ise teorem 4.6 dan $\angle BCD \simeq \angle BDC$ dir. Buradan $\angle ACD > \angle BDC$ olduğu ifade edilebilir. Teorem 4.7 den ΔADC üçgeninde $AD > AC$ dir. O halde $AB + BD > AC$ yani $AB + BC > AC$ dir. Benzer şekilde, $AC + CB > AB$ ve $AC + AC > BC$ eşitsizliklerininde sağlandığı gösterilebilir.

Teorem 4.10 A, B, C üç farklı nokta olsun.

(i) $AB + BC = AC \Leftrightarrow A - B - C$

(ii) A, B, C doğrusal değildir $\Leftrightarrow AB + BC > AC$, $AC + CB > AB$ ve $BA + AC > BC$ dir.

İspat. (i) <u>$Yeter\ şart$:</u> $A - B - C$ olsun. Bu durumda Tanım 2.6 gereğince $AB + BC = AC$ dir.

<u>$Gerek\ şart$:</u> $AB + BC = AC$ ve B noktasının $\overline{AC}$ üzerinde olmadığını kabul edelim. Bu durumda ya A, B, C doğrusal değildir ya da $B - A - C$, $A - C - B$ durumlarından biri geçerlidir.

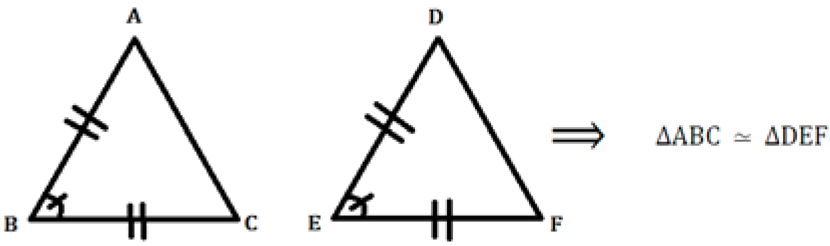
Eğer A, B, C doğrusal değilse Teorem 4. 9 gereğince $AB + BC > AC$ dir.

Eğer $B - A - C$ ise $BC > AC$ yani $AB + BC > AC$ dir. Eğer $A - C - B$ ise $AB > AC$ yani $AB + BC > AC$ dir. Bu durum ise $AB + BC = AC$ ile çelişir. O halde $A - B - C$ dir.

(ii) $\underline{Gerek\ şart:}$ A, B, C doğrusal olmayan üç farklı nokta olsun. Bu durumda Teorem 4.9 gereğince $AB + BC > AC$, $AC + CB > AB$ ve $BA + AC > BC$ dir.

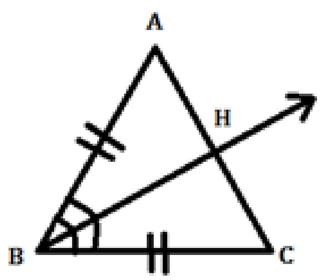
$\underline{Yeter\ şart:}$ $AB + BC >$ AC, AC+CB $> AB$ ve $BA + AC > BC$ olsun. Tanım 2.6 gereğince $A - B - C,\ B - A - C, A - C - B$ durumları sağlanmaz. O halde A, B, C doğrusal değildir .

Teorem 4. 11 ΔABC ve ΔDEF üçgenleri $\overline{AB} \simeq \overline{BC} \simeq \overline{DE} \simeq \overline{EF}$ ve $\angle ABC \simeq \angle DEF$ olacak şekilde iki ikizkenar üçgen olsunlar. Bu takdirde $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir (Şekil 4.27).

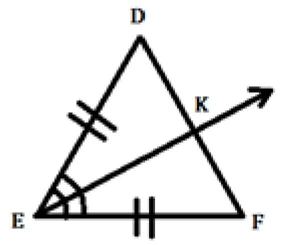


Şekil 4.27 İki kenarları ve bunlar arasındaki açıları eş ikizkenar üçgenler

İspat. H noktası $int(\overline{AC})$ üzerinde ve $\overrightarrow{BH}$ ışını $\angle ABC$ açısının açıortayı olacak şekilde bir nokta olsun (Şekil 4.28). Benzer şekilde K noktasınında $int(\overline{DF})$ üzerinde ve $\overrightarrow{EK}$ ışınında $\angle DEF$ açısının açıortayı olacak şekilde bir nokta olduğunu kabul edelim (Şekil 4.29).

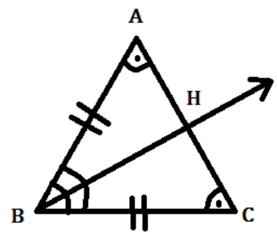


Şekil 4.28 İkizkenar ΔABC üçgeninin tepe açısının açıortayı



Şekil 4.29 İkizkenar ΔDEF üçgeninin tepe açısının açıortayı

Teorem 4.6 dan $\angle BAH \simeq \angle BCH$ dir (Şekil 4.30). Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta HBA \simeq \Delta HBC$ dir. Buradan $\angle BHA$ ve $\angle BHC$ doğrusal çifti eş açılardır ve $\angle BHC$ dik açıdır. Benzer şekilde $\angle EKF$ dik açıdır (Şekil 4.29).

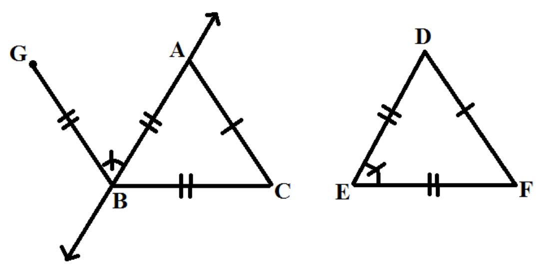


Şekil 4.30 İkizkenar üçgende $\angle BAH \simeq \angle BCH$ durumu

Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta CBH \simeq \Delta FEK$ ve $\angle BCA \simeq \angle EFD$ dir. O halde Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.

Teorem 4.12 ΔABC ve ΔDEF üçgenleri ikizkenar üçgenler olsunlar. $\overline{AB} \simeq \overline{BC},\ \overline{DE} \simeq \overline{EF}$ ve $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$ ise $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.

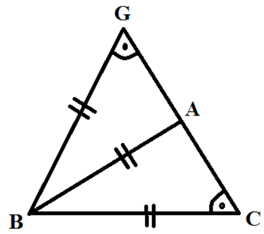
İspat. G, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun C noktasını içermeyen bölgesinde $\angle ABG \simeq \angle DEF$ ve $\overline{BG} \simeq \overline{DE}$ olacak şekilde bir nokta olsun (Şekil 4.31). Teorem 4.11 gereğince $\Delta GBA \simeq \Delta DEF$ dir.



Şekil 4.31 $\angle ABG \simeq \angle DEF$ ve $\overline{BG} \simeq \overline{DE}$ olacak şekildeki G noktası

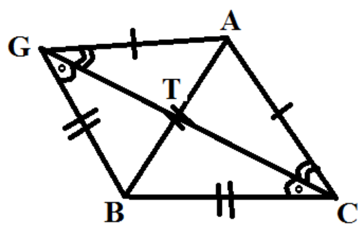
G ve C noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun zıt bölgelerinde olduğundan Tanım 2.12 (iii) den $\overline{GC}$ doğru parçası $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunu T gibi bir noktada keser.

Eğer $T = A$ veya $T = B$ ise Teorem 4.6 gereğince $\angle AGB \simeq \angle ACB$ dir (Şekil 4.32). Bu durumda Tanım 2.19 den $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.



Şekil 4.32 $\overline{\boldsymbol{GC}} \cap \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \{\boldsymbol{T}\}$, T=A veya T=B durumu

$A - T - B$ olsun (Şekil 4.33). $\angle ABG \simeq \angle DEF$ olduğundan $\overline{GA} \simeq \overline{AC}$ dir. Teorem 4.6 gereğince $\angle BGT \simeq \angle BCT$ ve $\angle AGT \simeq \angle ACT$ dir.

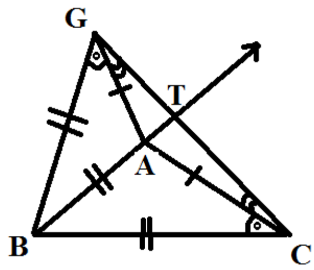


Şekil 4.33 $\overline{GC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{T\}$, $A - T - B$ durumu

$T \in int(\angle BGA)$ ve $T \in int(\angle BCA)$ olduğundan Tanım 2.16 (iii) gereğince $m(\angle BGA)$ = $m\angle(BGT)$ + $m\angle(AGT)$ = $m(\angle BCT)$ + $m(\angle ACT)$= $m(\angle BCA)$ dir. O halde eğer $A - T - B$ ise $m(\angle BGA) \simeq m(\angle BCA)$ dir.

Şimdi de $T - A - B$ olma durumu incelensin.

Yine Teorem 4.6 gereğince $\angle AGT \simeq \angle ACT$ ve $\angle BGT \simeq \angle BCT$ dir (Şekil 4.34).



Şekil 4.34 $\overline{GC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{T\},\ T - A - B$ durumu

A $\in int(\angle BCT)$ ve A $\in int(\angle BGT)$ olduğundan Tanım 2.16 (iii) den $m(\angle BGA)$ = $m(\angle BGT)$ - $m(\angle AGT)$ = $m(\angle BCT)$ - $m(\angle ACT)$ = $m(\angle BCA)$ dir.O halde $T - A - B$ ise $m(\angle BGA) \simeq m(\angle BCA)$ dir. Benzer şekilde $T - B - A$ ise $m(\angle BGA) \simeq m(\angle BCA)$ dir.

Tüm durumlar için $m(\angle BAG) \simeq m(\angle BGA) \simeq m(\angle BCA) \simeq m(\angle BAC)$ olduğu gösterilmiş oldu. Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomu gereğince $\Delta BAG \simeq \Delta BAC$ ve $\angle ABC \simeq \angle ABG \simeq \angle DEF$ dir. Teorem 4.11 gereğince $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.

Teorem 4.13 (Dört Açı Teoremi) $A' - V - A$ ve $B' - V - B$ olmak üzere $\angle AVB$ dik açı ise $\angle AVB', \angle A'VB$ ve $\angle A'VB'$ açılarının her biri dik açıdır.

İspat. x+y = π ve x= π/2 olduğunda y= π/2 olması gerektiğinden $\angle AVB', \angle A'VB$ ve $\angle A'VB'$ açılarının her biri dik açıdır.

Teorem 4.14 P, l doğrusu üzerinde bir nokta olmak üzere, P noktasından geçen l doğrusuna dik olan bir tek doğru vardır.

İspat. $l = \overleftrightarrow{PA}$ ve $\mathcal{H}$, l nin bir yarı düzlemi olsun. Tanım 2.22 gereğince B noktası $\mathcal{H}$ yarı düzleminde olmak üzere $m(\angle APB) = \pi/2$ olacak şekilde yalnız bir $\overrightarrow{PB}$ ışını vardır. O halde $\overleftrightarrow{PB}$ doğrusu P noktasından geçen l doğrusuna dik bir doğrudur.

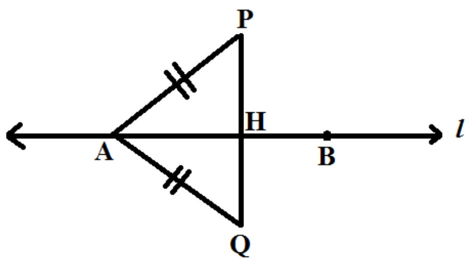
d, P noktasından geçen l doğrusuna dik bir doğru olsun. Bu durumda d doğrusu l doğrusunu keser ve $d \neq l$ olup hem $\mathcal{H}$ yarı düzleminde hem de m doğrusu üzerinde olan bir C noktası vardır. $d \perp l$ olduğundan Teorem 4.13 gereğince $\angle APC$ dik açıdır.

Yukarıda $\overrightarrow{PB}$ ışınının tek olduğu belirtildiğinden $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$ dir. Bu nedenle $d = \overleftrightarrow{PB}$ dir ve $\overleftrightarrow{PB}$ doğrusu P noktasından geçen l doğrusuna dik olan tek doğrudur.

Teorem 4.15 P bir nokta, l bir doğru olmak üzere P noktasından geçen l doğrusuna dik bir tek doğru vardır.

İspat. (i) P noktası l doğrusu üzerinde olsun.Teorem 4.14 gereğince P noktasından geçen l doğrusuna dik yalnız bir doğru vardır.

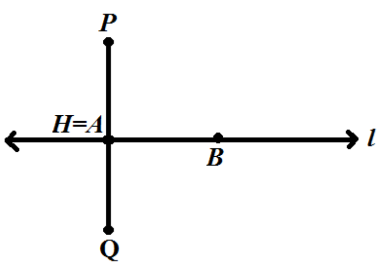
(ii) P noktası l doğrusu üzerinde olmasın. A ve B, l üzerinde farklı iki nokta , Q noktası P noktasıyla zıt bölgede $m(\angle PAB) \simeq m(\angle QAB)$ ve $\overline{AP} \simeq \overline{AQ}$ olacak şekilde bir nokta ve $\overline{PQ} \cap \overleftrightarrow{AB} = H$ olsun (Şekil 4.35).



Şekil 4.35 Bir doğrunun dışındaki bir noktadan çizilen dikme ve $\overline{AP} \cap \overleftrightarrow{AB} = H$ durumu

(a) $H = A$ olma durumu

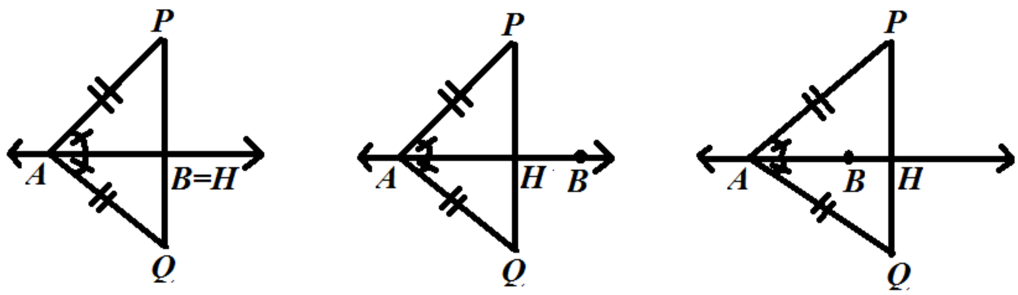
Bu durumda $\angle PHB$ ve $\angle QHB$ eş doğrusal açılar olduğundan $\angle PHB$ dik açı olup $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$ dir (Şekil 4.36).



Şekil 4.36 $\overline{AP} \cap \overleftrightarrow{AB} = H$ için $H = A$ durumu

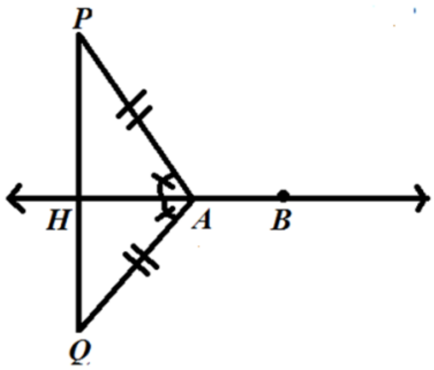
(b) $H \neq A$ olma durumu

H = B, $B - H - A$ ya da $H - B - A$ olduğunda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}$ olup $\angle PAB = \angle PAH$ ve $\angle QAB = \angle QAH$ dır (Şekil 4.37).



Şekil 4.37 $\overline{AP} \cap \overleftrightarrow{AB}$ = H için H = B, $B - H - A$, $H - B - A$ durumları

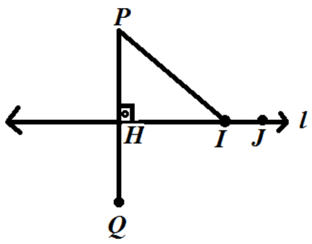
$B - A - H$ olduğunda $\angle PAB$ ve $\angle PAH$ doğrusal açılar olup $m(\angle PAH)$ = π - $m(\angle PAB)$ ve benzer şekilde $m(\angle QAH)$ = π - $m(\angle QAB)$ dir (Şekil 4.38).



Şekil 4.38 $\overline{AP} \cap \overleftrightarrow{AB}$ = H için $B - A - H$ durumu

Yukarıdaki durumların her birinde $m(\angle PAB) \simeq m(\angle QAB)$ olduğundan $m(\angle PAH) \simeq m(\angle QAH)$ dır. $\overline{AP} \simeq \overline{AQ}$ olduğundan Teorem 4.6 gereğince $m(\angle HPA) \simeq m(\angle HQA)$ dır. Ayrıca KAA göre $\Delta\, HAP \simeq \Delta\, HAQ$ dir. Bu eşlikten $\angle PHA$ ve $\angle QHA$ eş doğrusal açılar olup $\angle PHA$ dik açıdır. Yani $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$ dir.
Şimdi ise tekliği gösterilsin.

$I \neq H$, $I \in l$ ve $\overleftrightarrow{PI} \perp l$ olsun. l üzerinde $H - I - J$ olmak üzere bir J noktası alalım (Şekil 4.39). $\Delta\, HIP$ üçgeninde $\angle PIJ$ dik açı olmalıdır ancak bu Teorem 4.2 ile çelişir (dış açı kendisine komşu olmayan açıdan büyük olmalıdır).



Şekil 4.39 P noktasından geçen $\boldsymbol{l}$ doğrusuna çizilen dikmenin tekliği

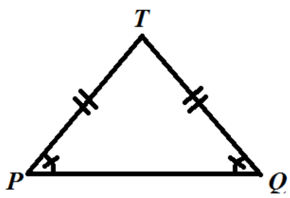
O halde P noktasından geçen l doğrusuna dik yalnız bir doğru vardır.

Teorem 4.16 P ve Q farklı iki nokta olmak üzere P ve Q dan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi $\overline{PQ}$ doğru parçasının orta dikmesidir.

İspat. P ve Q noktalarına eşit uzaklıkta bir T noktası alalım. $P - T - Q$ ise T , $\overline{PQ}$ doğru parçasının orta noktasıdır ve $\overline{PQ}$ doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir.

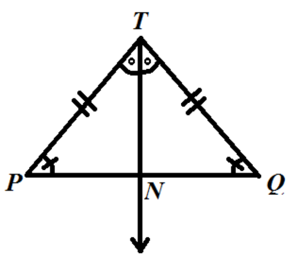
Şimdi T noktasının $\overleftrightarrow{PQ}$ doğrusunun üzerinde olmama durumu incelensin.

$T \notin \overleftrightarrow{PQ}$ olsun. $TP = TQ$ olduğundan Teorem 4.6 den $m(\angle TPQ) \simeq m(\angle TQP)$ dir (Şekil 4.40).



Şekil 4.40 P ve Q dan eşit uzaklıktaki $T \notin \overleftrightarrow{PQ}$ noktası

$N \in int(\overline{PQ})$ noktası, $\overline{PQ}$ doğru parçası üzerinde, $\overrightarrow{TN}$ ışını $\angle PTQ$ nun açıortayı olacak şekilde bir nokta olsun (Şekil 4.41). KAA göre $\Delta NTP \simeq \Delta NTQ$ dur.

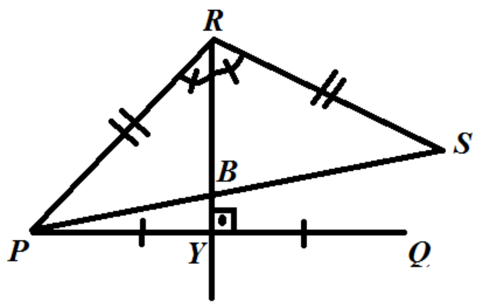


Şekil 4.41 Orta dikme doğrusu

Bu durumda $\angle PNT$ ve $\angle QNT$ açıları eş doğrusal açılar olup $\angle PNT$ dik açıdır. Ayrıca $PN = QN$ olduğundan N, $\overline{PQ}$ doğru parçasının orta noktasıdır. Sonuç olarak $\overleftrightarrow{TN}$, $\overline{PQ}$ doğru parçasının orta dikmesidir.

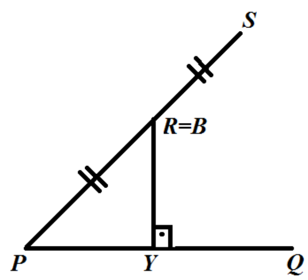
Şimdi orta dikme üzerindeki noktaların P ve Q noktalarından eşit uzaklıkta olduğu gösterilmelidir.

R, $\overline{PQ}$ nun orta dikmesi üzerinde ve Y noktası $\overline{PQ}$ nun orta noktası olsun (Şekil 4.42). $R = Y$ ise R noktası P ve Q noktalarından eşit uzaklıktadır. $R \neq Y$ olması durumu incelensin. S noktası, $m(\angle SRY) = m(\angle PRY)$ ve $SR = PR$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{RY}$ doğrusunun Q yu içeren bölgesinde olsun.



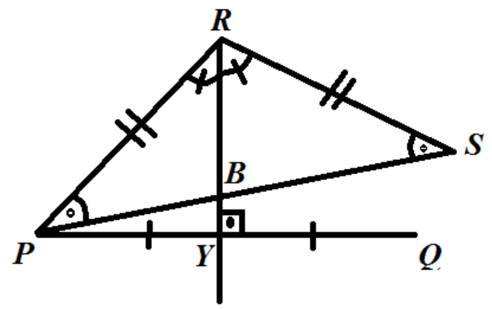
Şekil 4.42 Orta dikme doğrusu üzerindeki noktaların P ve Q noktalarına göre durumları

$\overline{PS} \cap \overleftrightarrow{RY} = B$ olsun. $S = Q$ olduğu gösterilmelidir.
$R = B$ ise $m(\angle SRY)$ ve $m(\angle PRY)$ eş doğrusal açılar olup $\angle PRY$ dik açı olur (Şekil 4.43). Bu durum $\overleftrightarrow{PY}$ ve $\overleftrightarrow{PR}$ doğrularının $\overleftrightarrow{RY}$ doğrusuna dik olmasını gerektirir. Ancak $\overleftrightarrow{PY} \neq \overleftrightarrow{PR}$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $R \neq B$ dir.



Şekil 4.43 Orta dikme doğrusu üzerindeki noktalardan $R = B$ olma durumu

$PR = SR$ olduğundan Teorem 4.6 dan $\angle RPB \simeq \angle RSB$ dir. Kabulenmeden $\angle SRY \simeq \angle PRY$ olduğundan $\angle SRB \simeq \angle PRB$ dir (Şekil 4.44). Kenar-Açı-Açı aksiyomu gereğince $\Delta BRP \simeq \Delta BRS$ olur. Buradan $\angle RBP$ ve $\angle RBS$ eş doğrusal açılar olup $\angle RBP$ dik açıdır.



Şekil 4.44 $\angle SRB \simeq \angle PRB$ durumu

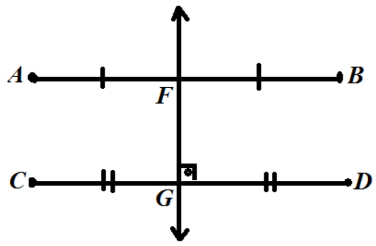
Bu durumda $RY \perp PS$ olur ve bu $\overleftrightarrow{PS} = \overleftrightarrow{PQ}$ olduğu anlamına gelir. O halde $B = \overleftrightarrow{RY} \cap \overleftrightarrow{PS} = \overleftrightarrow{RY} \cap \overleftrightarrow{PQ} = Y$ dir. $\Delta BRP \simeq \Delta BRS$ olduğundan $PB = SB$ dir.

$B = Y$ olduğundan $PY = PB = SB = SY$ dir. Böylece $\overline{PS}$ doğru parçasının orta noktası Y olacak şekilde bir tek S noktası olduğu gösterilmiş oldu. Yani $S = Q$ olup $RP = RS = RQ$ dir.

Sonuç olarak R noktası, P ve Q dan eşit uzaklıkta olan bir noktadır.

Teorem 4.17 A, B, C, D, F, G altı farklı nokta, $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusu $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ doğru parçalarının orta dikmesi olmak üzere A ve C noktaları da, $\overleftrightarrow{FG}$ nin aynı bölgesinde $A - F - B$ ve $C - G - D$ biçiminde bulunsun. Bu durumda $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ doğru parçasını $F - M - G$ olacak şekilde bir M noktasında keser ve $\overline{AD} \simeq \overline{BC}$ dir.

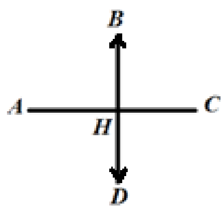
İspat. Eğer A, B, C doğrusal olursa $\overleftrightarrow{CG}$ ve $\overleftrightarrow{CF}$ doğrularının ikisi birden $\overleftrightarrow{GF}$ ye dik olur bu ise $\overleftrightarrow{CG} \neq \overleftrightarrow{CF}$ olduğundan bir çelişkidir. Benzer şekilde A, B, C, D noktalarından herhangi üçünün doğrusal olamayacağı gösterilebilir. O halde Teorem 4.3 den $\overleftrightarrow{AB}$ ve $\overleftrightarrow{CD}$ paraleldir ve $int(\overline{AB}) \cap int(\overline{CD}) = \emptyset$ dir. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$, $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusunun ayırdığı yarı düzlemler olup $A, C \in \mathcal{H}_1$ ve $B, D \in \mathcal{H}_2$ olsun (Şekil 4.45).



Şekil 4.45 $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ doğru parçalarının orta dikmesi

$A, C \in \mathcal{H}_1$ den $\overline{AC} \subset \mathcal{H}_1$, $B, D \in \mathcal{H}_2$ den $\overline{BD} \subset \mathcal{H}_2$ dir. $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$ olduğundan int $(\overline{AC}) \cap$ int $(\overline{BD}) = \emptyset$ dir. $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{CD} = C$ olduğundan int $(\overline{AC}) \cap$ int $(\overline{CD}) = \emptyset$ dir. Benzer şekilde int $(\overline{AC})$, int $(\overline{CD})$, int $(\overline{BD})$ ve int $(\overline{AB})$ den herhangi ikisi kesişemezler. O halde $\square\ ACDB$ iyi tanımlıdır.

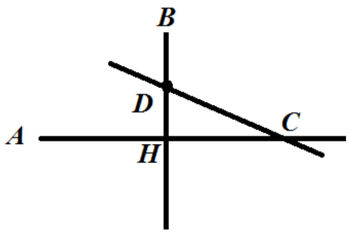
$\overleftrightarrow{AB}$ ve $\overleftrightarrow{CD}$ paralel olduğundan A ve B noktaları $\overleftrightarrow{CD}$ doğrusunun aynı bölgesindedir. A ve C , $\overleftrightarrow{BD}$ nin zıt bölgelerinde olsunlar (Şekil 4.46). Bu durumda $\overline{AC}$ doğru parçası $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunu H gibi bir noktada keser.



Şekil 4.46 A ve C noktalarının $\overleftrightarrow{BD}$ nin zıt bölgelerinde olma durumu

A, B, C, D den herhangi üçü doğrusal olmadığından $H \neq B$ ve $H \neq D$ dir. Bununla birlikte $int(\overline{AC}) \cap int(\overline{BD}) = \emptyset$ olduğundan $B - H - D$ olamaz. O halde $B - D - H$ ya da $H - B - D$ olmalıdır. İki durumda benzer olduğundan $B - D - H$ durumu ele alınsın (Şekil 4.47).

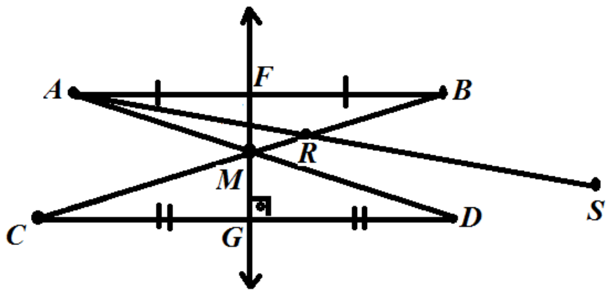
$A - H - C$ olduğundan H ve B noktaları, $\overleftrightarrow{CD}$ doğrusunun aynı bölgesinde olmalıdırlar fakat $B - D - H$ olduğundan H ve B nin $\overleftrightarrow{CD}$ doğrusunun zıt bölgesinde olmak zorundadır. Bu bir çelişkidir.



Şekil 4.47 $\overline{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{H\}$ ve $B - D - H$ durumu

O halde A ve C, $\overleftrightarrow{BD}$ nin aynı bölgesindedir ve $A \in int(\angle BDC)$ dir. Benzer şekilde $B \in int(\angle ACD)$, $C \in int(\angle ABD)$, $D \in int(\angle CAB)$ dir. Bu durumda $\square ACDB$ konvekstir ve $\overline{AD}$ ile $\overline{BC}$, M gibi bir noktada kesişirler (Şekil 4.48).

$m(\angle BAM) > m(\angle ABM)$ olduğu varsayılsın. R , $\overline{MB}$ nin iç bölgeside $m(\angle BAR) = m(\angle ABM) = m(\angle ABR)$ olacak şekilde bir nokta ve S, $A - R - S$ ve $RC = RS$ olacak şekilde bir nokta olsun.



Şekil 4.48 $\overline{AD}$ ile $\overline{BC}$ doğru parçalarının kesişimi

$\angle BAR \simeq \angle ABR$ olduğundan $AR = BR$ dir (Teorem 4.5). O halde R, $\overleftrightarrow{FG}$ nin üzerindedir (Teorem 4.16). $\overleftrightarrow{AB}$ ve $\overleftrightarrow{CD}$ paralel olduğundan A , B, F noktaları $\overleftrightarrow{CD}$ nin aynı bölgesinde ve C, D, G noktaları ise $\overleftrightarrow{AB}$ nin aynı bölgesindedir. $B - R - M - C$

olduğundan R ve G noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin, R ve F noktaları $\overleftrightarrow{CD}$ nin aynı bölgesindedir. Bu durumda $F - R - G$ olmalıdır.

$A - R - S$ den A ve S, $\overleftrightarrow{FG}$ nin zıt bölgesindedir. O halde S ve C, $\overleftrightarrow{FG}$ nin zıt bölgesinde olup $\overline{SC}$, $\overleftrightarrow{FG}$ yi T gibi bir noktada keser. $B - F - A$ dan A ve F, $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı bölgesindedir. Benzer şekilde $C - T - S$ den T ve S, $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı bölgesindedir. $B - R - M - C$ ve $A - R - S$ durumlarından A ve S noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt bölgesinde bulunurlar. $\overleftrightarrow{FT} \cap \overleftrightarrow{BC} = R$ den $F - R - T$. Kenar –Açı –Açı aksiyomu gereğince $\Delta\, RFA \simeq \Delta\, RFB$ ve $\angle FRA \simeq \angle FRB$. $A - R - S$ ve $F - R - T$ olduğundan $\angle ARF$ ve $\angle SRT$ ters açılardır ve $\angle ARF \simeq \angle SRT$. Benzer şekilde $F - R - T$ ve $B - R - C$ den $\angle BRF$ ve $\angle CRT$ ters açılar olup $\angle BRF \simeq \angle CRT$. O halde $\angle ARF \simeq \angle SRT \simeq \angle BRF \simeq \angle CRT$. $RS = RC$ den $\angle RST \simeq \angle RCT$. Sonuç olarak Kenar –Açı –Açı aksiyomu gereğince $\Delta\, TRS \simeq \Delta\, TRC$ olur. Bu durumda $\angle RTC$ ve $\angle RTS$ eş doğrusal açılar olup $\angle RTC$ dik açıdır ve $\overleftrightarrow{FG} \perp \overleftrightarrow{CS}$ olup $\overleftrightarrow{CS} = \overleftrightarrow{CD}$ elde edilir. Bununla birlikte $T = \overleftrightarrow{FG} \cap \overleftrightarrow{CS} = \overleftrightarrow{FG} \cap \overleftrightarrow{CD}$ $=G$ den $CG = CT = ST = SG$ ulaşılır.

$\overline{CS}$ nin orta noktası G olacak şekilde bir tek S noktasının varlığını gösterilmiş oldu ve buna göre $S = D$ dir. Bu durumda $R = \overline{AS} \cap \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BC} = M$ dir. Bu ise $R \in int(\overline{MB})$ olmasıyla çelişir. O halde $m(\angle BAM) \leq m(\angle ABM)$ dir. Benzer şekilde $m(\angle BAM) \geq m(\angle ABM)$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $m(\angle BAM) = m(\angle ABM)$ ve $AM = BM$ dir, yani M noktası, $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusu üzerindedir. $A - M - D$ olduğundan M ve G, $\overleftrightarrow{AB}$ nin aynı bölgesinde, M ve F noktaları ise $\overleftrightarrow{CD}$ nin aynı bölgesindedir. Yani $F - M - G$ dir. $M, \overleftrightarrow{FG}$ üzerinde ve $\overleftrightarrow{FG}$, $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ nin orta dikmesi olduğundan $AM = BM$ ve $CM = DM$ olur. Bu durumda, $A - M - D$ ve $B - M - C$ olduğundan $AD = AM + MD = BM + MC = BC$ dir.

Teorem 4.18 A, B, C, D, F, G altı farklı nokta, $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusu $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ doğru parçalarının orta dikmesi olmak üzere A ve C noktaları $A - F - B$ ve $C - G - D$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusunun aynı bölgesinde iki nokta olsun. $\overline{AD}$ ve $\overline{BC}$ doğru parçalarının kesim noktası M olmak üzere eğer $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$ ise

(1) $\overline{MA} \simeq \overline{MB} \simeq \overline{MC} \simeq \overline{MD}$,

(2) $\overline{MF} \simeq \overline{MG}$,

(3) M noktası $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ve $\overline{FG}$ doğru parçalarının orta noktasıdır,

(4) $\overline{AC}$, $\overline{FG}$ ve $\overline{BD}$ doğru parçaları aynı orta dikmeye sahiptirler.

İspat. $F - M - G$ ve $A - M - D$ olduğundan $\angle AMF$ ile $\angle DMG$ ters açılar olup $\angle AMF \simeq \angle DMG$ dir. Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta\, AFM \simeq \Delta\, DGM$ elde edilir. Bu eşlikten $\overline{MA} \simeq \overline{MD}$ ve $\overline{FM} \simeq \overline{MG}$. M noktası $\overleftrightarrow{FG}$ doğrusu üzerinde bulunduğundan $\overline{AM} \simeq \overline{BM}$ ve $\overline{DM} \simeq \overline{CM}$ olur. Bu durumda $\overline{MA} \simeq \overline{MB} \simeq \overline{MC} \simeq \overline{MD}$.
l doğrusu $\overline{FG}$ nin orta dikmesi olsun. Bu durumda M, l doğrusunun üzerindedir. Teorem 4.3 gereğince $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ve $l \parallel \overleftrightarrow{CD}$ dir. F ve G, l doğrusunun zıt bölgelerinde ve $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $l \parallel \overleftrightarrow{CD}$ olduğundan A ve C noktaları l doğrusunun zıt bölgesinde bulunurlar. Bu durumda $\overline{AC}$, l doğrusunu H gibi bir noktada keser. Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomu gereğince $\Delta\, MGC \simeq \Delta\, MGD$ olacağından $\angle CMG \simeq \angle DMG$ olur. O halde $\angle AMF \simeq \angle CMG \simeq \angle DMG$ elde edilir. Buradan da $m(\angle HMA) = m(\angle HMF) - m(\angle AMF) = m(\angle HMG) - m(\angle CMG) = m(\angle HMC)$ dir. $\overline{AM} \simeq \overline{MC}$ olduğundan $\angle MAH \simeq \angle MCH$ olur. Buradan Kenar-Açı-Açı eşlik aksiyomuna göre $\Delta\, HMA \simeq \Delta\, HMC$ ve $\overline{AH} \simeq \overline{HC}$ eşlikleri bulunmuş olur. Ayrıca $\angle AHM$ ve $\angle CHM$ eş doğrusal açılar olup $\angle AHM$ dik açıdır. Bu durumda l doğrusu $\overline{AC}$ nin orta dikmesidir. Benzer şekilde l doğrusunun $\overline{BD}$ nin orta dikmesi olduğu gösterilebilir.

l bir doğru olsun. l doğrusuna göre yansıma $\rho_l : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ olmak üzere $P \in l$ ise $\rho_l(P) = P$, $P \notin l$ ise $\rho_l(P) = Q$ ve l , $\overline{PQ}$ doğru parçasının orta dikmesi şeklinde tanımlanır.

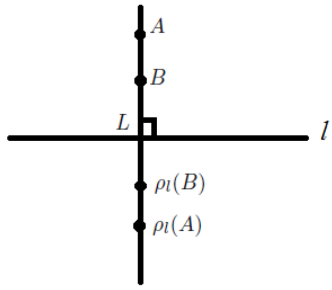
Teorem 4. 19 Bir doğruya göre yansıma bir izometridir.

İspat. Verilen bir P noktası ve bir l doğrusu için P den geçen l ye dik yalnız bir q doğrusu vardır (Teorem 4.15). l ile q yalnız bir noktada kesişir, bu nokta M olsun. q doğrusu üzeride M, $\overline{PQ}$ nun orta noktası olacak şekilde bir tek Q noktası vardır. Bu durumda bir doğruya göre yansıma, düzlemde iyi tanımlanmış bir fonksiyondur.

A ve B iki nokta olsun. Eğer A ve B noktalarının ikisi birden l üzerinde ise $\rho_l(A) = A$ ve $\rho_l(B) = B$ olmak üzere $AB = \rho_l(A)\rho_l(B)$ dir. B noktası l üzerinde fakat A noktası l

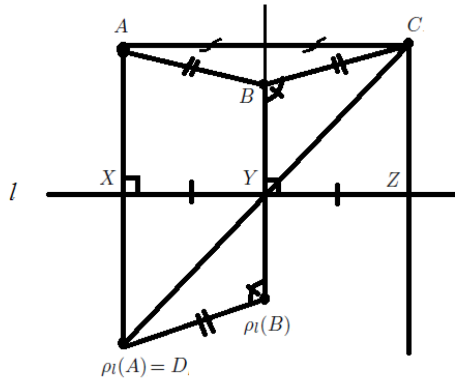
üzerinde olmasın. B, l üzerinde olduğundan $\rho_l(B) = B$ dir ve l doğrusu $\overline{A\rho_l(A)}$ doğru parçasının orta dikmesi olduğundan $BA = B\rho_l(A) = \rho_l(B)\rho_l(A)$ dir. Benzer şekilde A noktası l üzerinde ama B noktası l üzerinde değilse $BA = \rho_l(B)\rho_l(A)$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi $\overleftrightarrow{AB}$, l ye dik olsun ve L noktası da $\overleftrightarrow{AB}$ ile l doğrularının kesim noktası olsun (Şekil 4.49). f, $\overleftrightarrow{AB}$ için $f(L) = 0$ olacak şekilde bir koordinat sistemi olursa ρ_l tanımından $f(\rho_l(A)) = -f(A)$ ve $f(\rho_l(B)) = -f(B)$ dir. $AB = |f(A) - f(B)| = |f(\rho_l(A)) - f(\rho_l(B))| = \rho_l(A)\rho_l(B)$ dir.



Şekil 4.49 $\overleftrightarrow{AB} \perp l$ olacak şekildeki A ve B noktalarının l doğrusuna göre yansımaları

$\overleftrightarrow{AB}$, l ye dik olmasın (Şekil 4.50). Eğer A ve B , l nin zıt bölgesindelerse Teorem 4.17 den $BA = \rho_l(B)\rho_l(A)$ dir. A ve B noktaları l nin aynı bölgesinde olsunlar. X, $\overline{A\rho_l(A)}$ doğru parçasının orta noktası, Y noktası, $\overline{B\rho_l(B)}$ doğru parçasının orta noktası, Z noktası da $\overline{XZ}$ nin orta noktası Y olacak şekilde bir nokta olsun. C noktası l doğrusuna göre A ile aynı bölgede, $\overleftrightarrow{CZ}$ doğrusu l ye dik ve $CZ = AX$ olsun. $\overleftrightarrow{B\rho_l(B)}$, $\overline{XZ}$ nin orta dikmesi olduğundan Teorem 4.18(4) den $\overleftrightarrow{B\rho_l(B)}$ aynı zamanda $\overline{AC}$ nin de orta dikmesidir. B noktası $\overline{AC}$ doğru parçasının orta dikmesi üzerinde olduğundan $AB = CB$ dir. D noktası $\overleftrightarrow{B\rho_l(B)}$ doğrusuna göre A noktası ile aynı bölgede $\angle Y\rho_1(B)D \simeq \angle YBC$ ve $\overline{\rho_l(B)D} \simeq \overline{BC}$ olacak şekilde bir nokta olsun.



Şekil 4.50 l doğrusuna dik olmayan $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusundaki noktaların l doğrusuna göre yansımaları

Teorem 4.4 ten Y, $\overline{DC}$ nin orta noktasıdır. Aynı zamanda Teorem 4.18(3) den Y, $\overline{\rho_l(A)C}$ nin de orta noktasıdır. Bu durumda $D = \rho_l(A)$ ve $AB = CB = D\rho_l(B)\rho_l(A)\rho_l(B)$ dir. Sonuç olarak ρ_l bir izometridir.

Teorem 4.20 Bir l doğrusuna göre yansıma, uzunlukları ve açıların ölçülerini koruyan, l üzerindeki noktaları sabit bırakan ve l doğrusunun yarı düzlemlerini karşılıklı yer değiştiren kolinasyondur.

İspat. ρ_l bir izometri olduğundan ρ_l uzaklıkları korur (Tanım 3.1). ρ_l yansıması tanımı gereğince l üzerindeki noktaları sabit bırakır ve l doğrusunun yarı düzlemlerini karşılıklı yer değiştirir.

$\rho_l(A) = \rho_l(B)$ kabul edilsin. ρ_l bir izometri olduğundan $AB = \rho_l(A)\rho_l(B) = 0$ dir. Buradan $A = B$ ve ρ_l bire-birdir. Verilen bir P noktası için ρ_l yansıması tanımı gereğince $\rho_l(\rho_l(P)) = P$ dir. Bu durumda ρ_l örtendir. Sonuç olarak ρ_l düzlemde bire-bir örtendir.

$A - B - C$ olduğunu kabul edilsin. Tanım 2.6 dan $AB + BC = AC$ dir. $\rho_l(A)\rho_l(B) = AB$, $\rho_l(B)\rho_l(C) = BC$ ve $\rho_l(A)\rho_l(C) = AC$ olduğundan $\rho_l(A)\rho_l(B) + \rho_l(B)\rho_l(C) = \rho_l(A)\rho_l(C)$ dir. ρ_l bire-bir ve A, B, C noktaları birbirinden farklı olduğundan $\rho_l(A), \rho_l(B), \rho_l(C)$ birbirinden farklıdır. Teorem 4.10 dan $\rho_l(A) - \rho_l(B) - \rho_l(C)$ dir. $\rho_l(\rho_l(A)) = A$, $\rho_l(\rho_l(B)) = B$, $\rho_l(\rho_l(C)) = C$ olduğundan benzer şekilde

$\rho_l(A)-\rho_l(B)-\rho_l(C)$ iken $A-B-C$ olduğu gösterilebilir. O halde $\rho_l(A)-\rho_l(B)-\rho_l(C)$ için gerek ve yeter şart $A-B-C$ dir, yani ρ_l arada olmayı korur.

ρ_l bir izometri olduğundan AB, BC, AC uzunluklarından herhangi ikisinin toplamı üçüncüden büyüktür ancak ve ancak $\rho_l(A)\rho_l(B)$, $\rho_l(B)\rho_l(C)$ ve $\rho_l(A)\rho_l(C)$ herhangi ikisinin toplamı üçüncüden büyüktür. Teorem 4.10 gereğince A, B, C doğrusaldır ancak ve ancak $\rho_l(A)$, $\rho_l(B)$, $\rho_l(C)$ doğrusaldır. Bununla birlikte ρ_l bire-bir ve örten olduğundan ve arada olmayı koruduğundan üçgenleri ve doğruları korur. Aynı zamanda ρ_l doğruları ve arada olmayı koruduğundan ρ_l ışınları ve açıları korur. ρ_l doğruları koruduğundan ρ_l de düzlemde $\mathbb{L}$ kümesindeki doğruları doğrulara eşleyen β_l fonksiyonu vardır. ρ_l bire-bir ve örten olduğundan β_l fonksiyonu da bire-bir ve örtendir. ρ_l arada olmayı koruduğundan ρ_l de β_l fonksiyonları için $\beta_l(\overleftrightarrow{JK}) = \overleftrightarrow{\rho_l(J)\rho_l(K)}$ yazabiliriz. Bu durumda P noktasının $\overleftrightarrow{JK}$ üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\rho_l(P)$, $\beta_l(\overleftrightarrow{JK})$ üzerinde olmasıdır. Sonuç olarak ρ_l bir kolinasyondur.

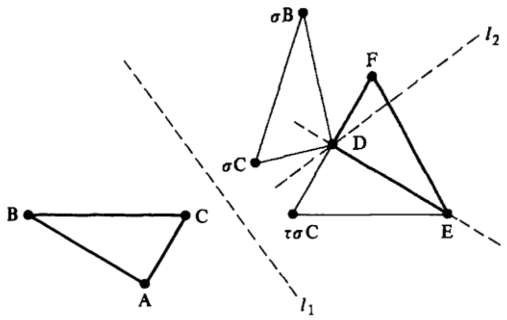
Verilen $\angle RST$ açısında $\overline{SG} \simeq \overline{SR}$ olacak şekilde $int\ (\overrightarrow{ST})$ de bir nokta G olsun. ρ_l açıları koruduğundan $\angle\rho_l(R)\rho_l(S)\rho_l(T) = \angle\rho_l(R)\rho_l(S)\rho_l(G)$ dir. Aynı zamanda $\overline{\rho_l(S)\rho_l(R)} \simeq \overline{SR} \simeq \overline{SG} \simeq \overline{\rho_l(S)\rho_l(G)}$ ve $\overline{\rho_l(G)\rho_l(R)} = \overline{GR}$ dir. Teorem 4.12 den $\Delta\, RSG \simeq \Delta\, \rho_l(R)\rho_l(S)\rho_l(G)$ dir.

Bu durumda $m(\angle RST) = m(\angle RSG) = m(\angle\rho_l(R)\rho_l(S)\rho_l(G)) = m(\angle\rho_l(R)\rho_l(S)\rho_l(T))$ dir. Sonuç olarak ρ_l açı ölçülerini korur.

Şimdi KAK eşlik aksiyomu teorem olarak ifade ve ispat edilsin.

Teorem 4.21 (Kenar-Açı-Kenar) ΔABC ve ΔDEF iki üçgen olsun. $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\angle ABC \simeq \angle DEF$ ve $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ ise $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.

İspat. $\angle BAC \simeq \angle EDF$, $\angle ACB \simeq \angle DFE$ ve $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$ eşliklerinin doğru olduğu gösterilmelidir. Teorem 4. 20 den bir l doğrusu üzerinde yansıma, uzunlukları ve açıların ölçülerini koruyan, l üzerindeki noktaları sabit bırakan ve l doğrusunun belirlediği yarı düzlemleri karşılıklı yer değiştiren kolinasyondur. Şimdi $\rho\tau\sigma(\Delta ABC) \simeq \Delta DEF$ olacak şekilde σ, τ, ρ yansıma dönüşümlerinin varlığı gösterilecektir.



Şekil 4.51 Üç yansımanın bileşkesi ile $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ gösterimi

$A = D$ kabul edilsin. Bu durumda σ birim(özdeşlik) yansıma olur. Eğer $A \neq D$ ise $\overline{AD}$ doğru parçasının orta dikmesi l_1 olacak şekilde bir yansıma σ olsun. Teorem 4.18 den $\sigma A = D$ dir (Şekil 4.51).

$\sigma B = E$ olsun. Bu durumda τ birim(özdeşlik) yansıma olur. Eğer $\sigma B - D - E$ olursa τ, D noktasında $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusuna dik l_2 doğrusuna göre yansıma ya da τ dönüşümü $\angle\sigma BED$ nin açıortay doğrusu l_2 olacak şekilde l_2 ye göre bir yansıma olur. Her iki durumda da $D \in l_2$ olup $\tau D = D$ dir.

Şimdi $\tau\sigma B = E$ olduğu gösterilsin.Eğer $\sigma B - D - E$ ise $\overline{D\sigma B} = \overline{\sigma A\sigma B} \simeq \overline{AB} \simeq \overline{DE}$ dir. Teorem 4.18 den l_2 doğrusu $\overline{\sigma BE}$ nin orta dikmesi ve $\tau\sigma B = E$ dir. Eğer $\sigma B, D, E$ doğrusal değillerse bu durumda l_2, $\angle\sigma BDE$ nin açıortay doğrusu olup σB ve $\tau\sigma B$ noktaları l_2 nin zıt bölgelerindedir ve $l_2 \cap \overline{\sigma B\tau\sigma B} = \{Q\}$ olacakşekilde bir Q noktası vardır. $Q \in int(\angle\sigma BDE)$ dir ve l_2 $\angle\sigma BDE$ nin açıortay doğrusu olduğundan $\angle QD\sigma B \simeq \angle QDE$ dir. τ bir yansıma olduğundan $\angle QD\sigma B \simeq \angle QD\tau\sigma B$ dir. $\tau\sigma B$ ve E noktaları l_2 nin σB noktasını içermeyen bölgesindedir. Teorem 2.9 dan $\angle QDE \simeq \angle QD\tau\sigma B$ olur. O halde $\overrightarrow{D\tau\sigma B} \simeq \overrightarrow{DE}$ dir. $\overline{D\tau\sigma B} \simeq \overline{D\sigma B} \simeq \overline{AB} \simeq \overline{DE}$ olduğundan $\tau\sigma B = E$ bulunur. O halde her durumda $\tau\sigma B = E$ eşitliği elde edilir.

Son olarak $\rho\tau\sigma C = F$ olduğu gösterilsin. Eğer $\tau\sigma C$ noktası $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusu F noktasını içeren bölgesinde ise ρ birim (özdeşlik) yansıma olur aksi halde ρ, $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusuna göre yansımadır. Teorem 2.9 dan $\rho\tau\sigma C = F$ dir.

Sonuç olarak $\varphi = \rho\tau\sigma$ açı ölçülerini koruyan bir izometridir olup $\Delta ABC \simeq \Delta\varphi A\varphi B\varphi C$ dir. Ayrıca

$$\varphi A = \rho\tau\sigma A = \rho\tau D = \rho D = D$$
$$\varphi B = \rho\tau\sigma B = \rho E = E$$
$$\varphi C = \rho\tau\sigma C = F.$$

O halde $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.Yani Kenar-Açı-Kenar sağlanmış olur.

Sonuç olarak KAK ve KAA eşlik aksiyomları denktirler.

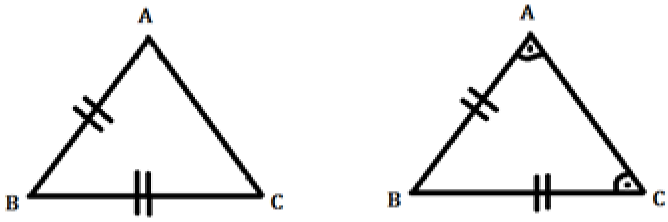
5. MUTLAK GEOMETRİDE KENAR-KENAR-KENAR İLE KENAR-AÇI-KENAR EŞLİK AKSİYOMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde Mutlak Geometri aksiyom sisteminden Tanım 2.20 de verilen Kenar-Açı-Kenar (KAK) eşlik aksiyomu kaldırılıp yerine Kenar-Kenar-Kenar (KKK) eşlik aksiyomu (Tanım 5.1) ve üçgen eşitsizliği (Tanım 5.2) eklenerek yeni bir aksiyom sistemi oluşturulmuştur. Yapacağımız tüm ispatlarda bu yeni aksiyom sistemi kullanılmıştır.

Tanım 5.1 (Kenar-Kenar-Kenar Aksiyomu) $[\mathbb{P},\mathbb{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, ΔABC ve $\Delta\, DEF$ üçgenlerinin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$ ve $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ iken $\Delta\, ABC \simeq \Delta\, DEF$ ise $[\mathbb{P},\mathbb{L}, d, m]$ sistemi *Kenar- Kenar - Kenar* (KKK) *aksiyomu*nu sağlıyor denir.

Tanım 5.2 (Genel Üçgen Eşitsizliği) Herhangi bir ΔABC üçgeni için $AC \leq AB + BC$ ise ΔABC üçgeni *genel üçgen eşitsizliği aksiyomu*nu sağlıyor, denir.

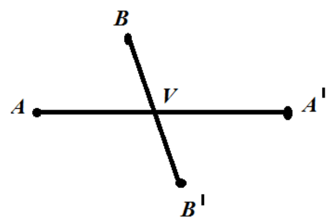
Teorem 5.1 (Pons Asinorum) ΔABC bir üçgen olsun. $\overline{BA} \simeq \overline{BC}$ ise $\angle BAC \simeq \angle BCA$ dir.



Şekil 5.1 $\overline{BA} \simeq \overline{BC}$ ve $\angle BAC \simeq \angle\, BCA$ durumları

İspat. $\overline{BA} \simeq \overline{BC}$ ve $\overline{AC}$ kendisine eş olduğundan KKK göre $\Delta ABC \simeq \Delta CBA$ dir. Bu durumda $\angle BAC \simeq \angle BCA$ dir (Şekil 5.1).

Tanım 5.3 Bir $\angle AVB$ açısında $A - V - A'$ ve $B - V - B'$ ise $\angle AVB$ ve $\angle A'VB'$ açılarına *ters açılar* denir. $\angle AVB$ ve $\angle A'VB$ açılarına ise *komşu açılar* denir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2 Ters ve komşu açılar

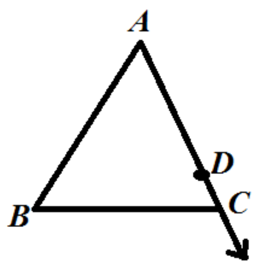
Tanım 5.4 (Bütünler Açı) $m(\angle ABC) + m(\angle DEF) = \pi$ ise $\angle ABC$ ve $\angle DEF$ açılarına *bütünler açılar* denir.

Teorem 5.2 Eş açıların bütünler açıları da eştir.

İspat $\angle CBD$ açısı $\angle ABC$ açısının bütünleri, $\angle RQM$ açısı $\angle PQR$ açısının bütünleri ve $\angle ABC \simeq \angle PQR$ olsun. Tanım 5.4 gereğince $\angle ABC + \angle CBD = \pi$ ve $\angle PQR + \angle RQM = \pi$ dir. $\angle ABC \simeq \angle PQR$ ise $m(\angle ABC) = m\ (\angle PQR)$ dir. $m\angle ABC$ = x olsun. Bu durumda $\angle ABC + \angle CBD = \pi$ olduğundan $m(\angle CBD) = \pi$-x dir. Benzer şekilde $m(\angle RQM) = \pi$-x dir. Tanım 2.19 dan $\angle CBD \simeq \angle RQM$ dir.

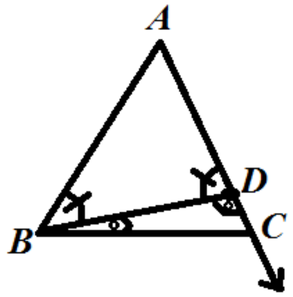
Teorem 5.3 (Üçgen Eşitsizliği) Bir $\Delta\, ABC$ üçgeninde $AC < AB + BC$ dir.

İspat. Tanım 5.2 gereğince $AC \leq AB + BC$ dir. $AC = AB + BC$ olamayacağını göstererek ispat yapılsın. $AC = AB + BC$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $AD = AB$ olacak şekilde $\overrightarrow{AC}$ ışını üzerinde bir tek nokta vardır. Bu nokta D olsun. $AC = AB + BC$ ve $BC > 0$ olduğundan $AC > AB = AD$ olur. Bu yüzden $D \neq C$ ve aynı zamanda $A - D - C$ dir. O halde $AC = AD + DC$ eşitliği elde edilir (Şekil 5.3).



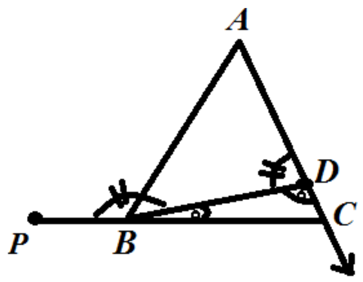
Şekil 5.3 $AC = AD + DC$ durumu

$AC = AD + DC$, $AD = AB$ ve $AC = AB + BC$ olduğundan $AD + DC = AC = AB + BC = AD + BC$ ve $DC = BC$ dir**.** Bu durumda $\overline{AB} \simeq \overline{AD}$ olan ΔDAB ikizkenar üçgeni elde edilir. Teorem 5.1 gereğince $\angle ABD \simeq \angle ADB$ olur. Benzer şekilde $\overline{DC} \simeq \overline{BC}$ olan ΔDBC ikizkenar üçgeni de elde edilir ve Teorem 5.1 gereğince $\angle BDC \simeq \angle DBC$ dir (Şekil 5.4).



Şekil 5.4 $\angle BDC \simeq \angle DBC$ olacak şekildeki $\Delta\ DBC$ ikizkenar üçgeni

$C - B - P$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusu üzerinde bir nokta P olsun. Bu durumda $\angle CBD$ ile $\angle DBP$ açıları, $\angle CDB$ ve $\angle BDA$ bütünler açı olduğundan ve $\angle BDC \simeq \angle DBC$ olduğundan Teorem 5.2 gereğince $\angle DBP \simeq \angle BDA$ dir (Şekil 5.5).



Şekil 5.5 $\angle DBP \simeq \angle BDA$ durumu

$A - D - C$ olduğundan A ve C, $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunun zıt bölgesindedir. $C - B - P$ olduğundan P ve C, $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunun zıt bölgesindedir. Teorem 2.2 gereğince A ve P, $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunun aynı bölgesindedir. $\angle DBP \simeq \angle BDA \simeq \angle DBA$ ve A ile P, $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunun aynı bölgesinde olduğundan $\overrightarrow{BP} \simeq \overrightarrow{BA}$ dır. Buradan $\overleftrightarrow{BP} \simeq \overleftrightarrow{BA}$ olur.

$C - B - P$ den $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{BP} = \overleftrightarrow{BA}$ elde edilir. Bu durum bir çelişkidir. A, B, C noktalarının doğrusal olması anlamına gelir. O halde $AC \neq AB + BC$ ve $AC < AB + BC$ dir.

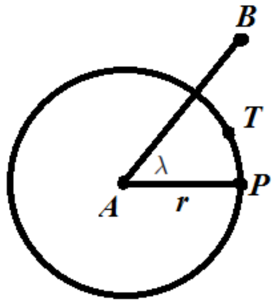
Aşağıda KAK eşlik aksiyomu yerine KKK eşlik aksiyomu ve üçgen eşitsizliği kullanılarak iki çember teoreminin ispatı yapılmaktadır. P bir nokta, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ olmak üzere P noktasından r birim uzaklıktaki noktaların kümesi P *merkezli* r *yarıçaplı çember*i tanımlar ve bu çember $C_r(P)$ ile gösterilmektedir.

Teorem 5.4 A ve B farklı iki nokta ve $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun bir yarı düzlemi $\mathcal{H}$ olsun. $\alpha \in (0,\pi)$ ve $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ olmak üzere $m(\angle BAP) = \alpha$ ve $AP = r$ olacak şekilde $\mathcal{H}$ yarı düzleminde bir tek P noktası vardır.

İspat. P, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun ayırdığı $\mathcal{H}$ yarı düzleminde $AP = r$ olacak şekilde bir nokta olsun. Bu durumda Tanım 2.22 gereğince $\alpha \in (0,\pi)$ olmak üzere $m(\angle BAP) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır. O halde $m(\angle BAP) = \alpha$ ve $AP = r$ olacak şekilde bir tek P noktası vardır.

Teorem 5.5 A ve B farklı iki nokta olsun. $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ ve $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun bir yarı düzlemi $\mathcal{H}$ olsun. $AQ_0 = r$ olacak şekilde $\overrightarrow{AB}$ üzerindeki bir nokta Q_0, $Q_\pi - A - B$ ve $AQ_\pi = r$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{AB}$ üzerindeki tek nokta da Q_π olsun. $\mathcal{H}$ yarı düzleminde her $\theta \in (0,\pi)$ için $m(\angle BAQ_\theta) = \theta$ ve $AQ_\theta = r$ olacak şekilde $C_r(A)$ çemberi üzerinde tek nokta Q_θ olsun. $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(0) = BQ_0$, $g(\pi) = BQ_\pi$ ve her $\theta \in (0,\pi)$ için, $g(\theta) = BQ_\theta$ olacak şekilde tanımlansın. g fonksiyonu $[0,\pi]$ kapalı aralığında süreklidir.

İspat. $\lambda \in (0,\pi)$ olsun. g fonksiyonunun λ nın solunda sürekli olduğu ispatlanacaktır. λ nın sağında sürekli olmasının ispatı da benzer şekildedir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere P ve T, $\mathcal{H}$ yarı düzleminde $C_r(A)$ çemberi üzerinde $\lambda = m(\angle BAP) > m(\angle BAT)$ olacak şekildeki iki nokta olsunlar.



Şekil 5.6 Çemberde $\lambda = m(\angle BAP) > m(\angle BAT)$ olacak şekildeki noktalar

Bu durumda $m(\angle BAP) > m(\angle BAT)$ dan $T \in int(\angle BAP)$ dir. $\mathcal{D}$, $\overleftrightarrow{AP}$ doğrusunun T noktasını içeren yarı düzlemi olsun.

$X_1 = T$ olacak şekilde $\overline{PT}$ doğru parçası üzerindeki noktalarla (X_i) dizisi tanımlayalım. Bu dizide $\forall\, i \geq 1$ için X_{i+1} noktası $\overline{PX_i}$ nin orta noktası kabul edelim. Bu durumda $PX_{i+1} = \dfrac{1}{2} PX_i$ olup $i \longrightarrow \infty$ için $PX_i \longrightarrow 0$ dır. $\forall\, i \geq 1$ için $m(\angle PAX_i) = \beta_i$ tanımlayalım.

$i \geq 2$ olmak üzere P ve T noktaları $\mathcal{H}$ yarı düzleminde bulunduğundan, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ konveks olduğundan ve de $P - X_i - T$ olmasından dolayı $X_i \in int(\angle BAP)$ dir. $\forall\, i \geq 1$ için $AJ_i = r$ olacak şekilde $\overrightarrow{AX_i}$ ışını üzerindeki tek nokta J_i olsun.

$n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ olmak üzere J_n, B ve P noktalarını doğrusal kabul edelim. $J_n - P - B$ olursa $J_nB = BP + PJ_n$ olur. Eğer P noktası J_n ile B arasında değilse ya $J_n - B - P$ olup $J_nP > J_nB$ ya da $B - J_n - P$ olup $BP > J_nB$ dir. Her iki durumda da $J_nB \leq BP + PJ_n$ dir. Şayet J_n, B ve P noktalarını doğrusal değilse üçgen eşitsizliğinden $J_nB < BP + PJ_n$ dir. Yani her durumda $J_nB \leq BP + PJ_n$ dir.

$X_n = J_n$ olsun. Bu durumda $X_nJ_n = 0$ ve $X_nP = J_nP$ dir. Buradan $J_nP \leq X_nP + X_nJ_n$ ve $J_nB \leq BP + PJ_n \leq BP + (X_nP + X_nJ_n)$ elde edilir. $X_n \neq J_n$ kabul edelim. $X_n \in int(\angle BAP)$ olduğundan $P \notin \overleftrightarrow{AX_n} = \overleftrightarrow{J_nX_n}$ dir. Bu durumda P, X_n ve J_n doğrusal değildir ve üçgen eşitsizliğinden $J_nP < X_nP + X_nJ_n$ dir. Yani her iki durumda da $J_nB \leq BP + PJ_n \leq BP + (X_nP + X_nJ_n)$ dir. Benzer şekilde gösterilebilir ki $BP \leq BJ_n + PJ_n \leq BJ_n + (X_nP + X_nJ_n)$ dir.

$P \notin \overleftrightarrow{AX_n}$ olduğundan P, X_n ve A noktaları doğrusal değildir. Bu durumda üçgen eşitsizliğinden $X_nA < X_nP + AP = X_nP + r$ dir. O halde $X_nA - r < X_nP$ yazılabilir. Benzer şekilde yine üçgen eşitsizliğinden $r = AP < X_nA + X_nP$ olup $r - X_nA < X_nP$ dir. $X_nA - r < X_nP$ ve $r - X_nA < X_nP$ olduğundan $|r - X_nA| < X_nP$ eşitsizliği yazılabilir.

$X_n = J_n$ olsun. Bu durumda $X_nJ_n = 0$ ve $X_nA = J_nA = r$ olup $X_nJ_n = 0 = |r - X_nA|$ dır. $X_n \neq J_n$ kabul edelim. Eğer $r = J_nA > X_nA$ olursa $J_n - X_n - A$ olması gerekir ve bu durumda $r = J_nA = J_nX_n + X_nA$ olup $J_nX_n = |r - X_nA|$ dir. Eğer $r = J_nA < X_nA$ olursa $X_n - J_n - A$ ve $X_nA = J_nX_n + J_nA = J_nX_n + r$ olup $J_nX_n = |r - X_nA|$ elde edilir. Yani her iki durumda da $J_nX_n = |r - X_nA|$ dır.

Şu ana kadar elde edilenlerle $J_nB \leq BP + PJ_n \leq BP + (X_nP + X_nJ_n) = BP + X_nP + |r - X_nA| < BP + X_nP + X_nP = BP + 2X_nP$ ya da başka bir deyişle $BP > J_nB - 2X_nP$ yazılabilir. Benzer şekilde $BP \leq J_nB + PJ_n \leq J_nB + (X_nP + X_nJ_n) = J_nB + X_nP + |r - X_nA| < J_nB + X_nP + X_nP = J_nB + 2X_nP$ ya da başka bir deyişle $J_nB > BP - 2X_nP$ yazılabilir. O halde $BP - 2X_nP < J_nB < BP + 2X_nP$ aynı zamanda $J_nB - 2X_nP < BP < J_nB + 2X_nP$ elde edilir. $-2X_nP < J_nB - BP < 2X_nP$ ve $-2X_nP < BP - J_nB < 2X_nP$ eşitsizliklerinden $|J_nB - BP| < 2X_nP$ yazılabilir.

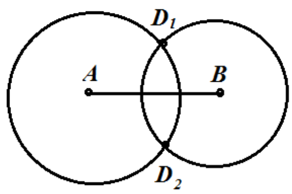
$i \longrightarrow \infty$ için $PX_i \longrightarrow 0$ olduğundan $PX_q < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde q $\in \mathbb{Z}$ vardır. $0 \leq \lambda - \alpha < \beta_q$ olacak şekilde $\alpha \in (0, \lambda]$ olsun. K da $\mathcal{H}$ yarı düzleminde $AK = r$ ve $m(\angle BAK) = \alpha$ olacak şekilde bir nokta olsun. $\lambda - \alpha = 0$ olursa Teorem 5.4 den $K = P$ dir. Bu durumda $g(\lambda) = g(\alpha)$ olup $|g(\lambda) - g(\alpha)| = 0 < \varepsilon$ dur.

$0 < \lambda - \alpha < \beta_q$ olsun. $\alpha \in (0, \lambda)$ ve $m(\angle BAK) = \alpha$ olduğundan $K \in int(\angle BAP)$ olup $\lambda = \alpha + m(\angle PAK)$ yani $m(\angle PAK) = \lambda - \alpha$ dır. $m(\angle PAK) = \lambda - \alpha < \beta_q$ olduğundan

Teorem 4.1 den $m(\angle PAK) = m(\angle PAM)$ olacak şekilde $int(\overline{PX_q})$ üzerinde M noktası vardır.

Benzer şekilde X_n ve J_n yerine sırasıyla M ve K alarak $|KB - BP| < 2MP$ olduğu gösterilebilir. $M \in int(\overline{PX_q})$ olduğundan $MP < PX_q$ olur. O halde $|KB - BP| < 2MP < 2X_qP < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olur. $g(\alpha) = KB$ ve $g(\lambda) = BP$ olduğundan $|g(\alpha) - g(\lambda)| < \varepsilon$ dur. Sonuç olarak $0 \leq \lambda - \alpha < \beta_q$ olacak şekilde $\alpha \in (0, \lambda]$ için $|g(\alpha) - g(\lambda)| < \varepsilon$ yani g fonksiyonu λ nın solunda süreklidir.

Teorem 5.6 (İki Çember Teoremi) A ve B farklı iki nokta, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, ve $r_1, r_2 > 0$ olsun. Eğer AB, r_1 ve r_2 nin her biri diğer ikisinin toplamından küçük ise $C_{r_1}(A)$ ve $C_{r_2}(B)$ çemberleri D_1 ve D_2 gibi iki farklı noktada kesişirler. Aynı zamanda D_1 ve D_2 noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun zıt bölgelerindedirler (Şekil 5.7).



Şekil 5.7 İki çemberin farklı iki noktada kesişmesi durumu

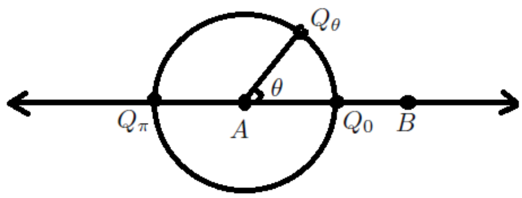
İspat. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun ayırdığı iki yarı düzlem olsun. $\overrightarrow{AB}$ ışını üzerinde $AQ_0 = r_1$ olacak şekilde bir Q_0 noktası alalım. $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusu üzerinde $Q_\pi - A - B$ ve $AQ_\pi = r_1$ olacak şekildeki tek nokta da Q_π olsun. $\mathcal{H}_1$ yarı düzleminde her $\theta \in (0,\pi)$ için $m(\angle BAQ_\theta) = \theta$ ve $AQ_\theta = r_1$ olacak şekilde $C_{r_1}(A)$ çemberi üzerinde bir nokta Q_θ olsun. g: $[0,\pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $g(0) = BQ_0$, $g(\pi) = BQ_\pi$ ve her $\theta \in (0,\pi)$ için , $g(\theta) = BQ_\theta$ olacak şekilde tanımlansın.

Q_0 noktası $\overrightarrow{AB}$ ışını üzerinde bulunduğundan aşağıdaki üç durumdan biri sağlanmak zorundadır.

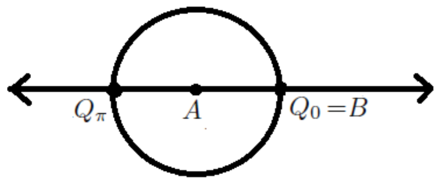
(1) $A - Q_0 - B$, $BQ_0 = AB - r_1 < r_2$ (Şekil 5.8)

(2) $Q_0 = B$, $BQ_0 = 0 < r_2$ (Şekil 5.9)

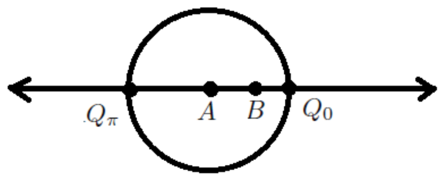
(3) $A - B - Q_0$, $BQ_0 = r_1 - AB < r_2$ (Şekil 5.10)



Şekil 5.8 $A - Q_0 - B$ durumu



Şekil 5.9 $Q_0 = B$ durumu



Şekil 5.10 $A - B - Q_0$ durumu

Üç durumda da $BQ_0 < r_2$ olduğu görülmektedir. $Q_\pi - A -$ B ve $AQ_\pi = r_1$ olduğundan $BQ_\pi = r_1 + AB > r_2$ dir. Teorem 5.5 gereğince g fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında süreklidir. g fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında sürekli, $g(0) = BQ_0 < r_2$ ve $g(\pi) = BQ_\pi > r_2$ olduğundan ara değer teoremi gereğince $g(\lambda) = r_2$ olacak şekilde $\lambda \in (0,\pi)$ vardır.

Teorem 5.4 gereğince $\mathcal{H}_1$ yarı düzleminde AQ_λ=r_1 ve $m(\angle BAQ_\lambda) = \lambda$ biçiminde Q_λ noktası vardır. Bu durumda $\mathcal{H}_1$ yarı düzlemindeki Q_λ noktası, AQ_λ=r_1 ve BQ_λ= $g(\lambda) = r_2$ olacak şekilde bir noktadır. Aynı zamanda Q_λ noktası, hem $C_{r_1}(A)$ hem de $C_{r_2}(B)$ çemberi üzerindedir.

Şimdi $\mathcal{H}_1$ yarı düzleminde hem $C_{r_1}(A)$ hem de $C_{r_2}(B)$ çemberi üzerinde olan böyle bir noktanın tek olduğu gösterilecektir. $\mathcal{H}_1$ yarı düzleminde P_1 ve P_2 farklı iki nokta ve her ikisi de $C_{r_1}(A)$ ve $C_{r_2}(B)$ çemberleri üzerinde olsunlar. $m(\angle BAP_1)$= $m(\angle BAP_2)$ ise Teorem 5.4 gereğince P_1= P_2 olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $m\angle BAP_1 \neq m(\angle BAP_2)$ olmalıdır. P_1 ve P_2 noktalarının ikisi de $C_{r_1}(A)$ çemberi üzerinde olduğundan $AP_1 = AP_2 = r_1$ dir. Benzer şekilde P_1 ve P_2 noktalarının ikisi de $C_{r_2}(B)$ çemberi üzerinde olduğundan $BP_1 = BP_2 = r_2$ dir. Buradan KKK eşlik aksiyomu gereğince $\Delta ABP_1 \simeq \Delta ABP_2$ dir. Bu eşlikten $m(\angle BAP_1)$= $m(\angle BAP_2)$ yazılır. Bu ise $m(\angle BAP_1) \neq m(\angle BAP_2)$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\mathcal{H}_1$ yarı düzleminde hem $C_{r_1}(A)$ hem de $C_{r_2}(B)$ çemberi üzerinde bir tek nokta vardır.

Benzer şekilde $\mathcal{H}_2$ yarı düzleminde de hem $C_{r_1}(A)$ hem de $C_{r_2}(B)$ çemberi üzerinde de bir tek nokta vardır.

Şimdi KAK eşlik aksiyomunu teorem olarak ispatlayalım.

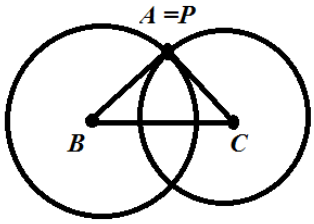
Teorem 5.7 (Kenar-Açı-Kenar) ΔABC ve ΔDEF iki üçgen olsun. $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\angle ABC \simeq \angle DEF$ ve $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ ise $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ dir.

İspat. $h = EF$, $k = DF$, $t = DE$ olsun. Teorem 5.3 den h, k, t uzunluklarından her biri diğer ikisinin toplamından küçüktür.

Teorem 5.6 den $C_t(B)$ çemberi ile $C_k(C)$ çemberi, $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını içeren bölgesinde yalnız bir noktada kesişirler (Şekil 5.9). Bu nokta P olsun.

KKK göre $\Delta PBC \simeq \Delta DEF$ dir. Bununla birlikte $\angle PBC \simeq \angle DEF \simeq \angle ABC$ ve $\overline{PB} \simeq \overline{DE} \simeq \overline{AB}$ dir.

A ve P noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı tarafında olduğundan Teorem 5.4 den $P = A$ olur. O halde $\Delta ABC = \Delta PBC \simeq \Delta DEF$ dir.



Şekil 5.11 Çemberlerin $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını içeren bölgesinde kesişmesi durumu

Sonuç olarak KAK ve KAA eşlik aksiyomları denktirler.

KAYNAKLAR

Çakan, R. (2011). Hiperbolik Uzayın İzometrileri Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Çolakoğlu, H. B. (2009**).** Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Donnelly, J. (2010). The Equivalence of Side-Angle-Side and Side-Angle-Angle in the Absolute Plane. *Journal of Geometry,* **97**: 69-82.

Donnelly, J. (2013). The Equivalence of Side-Angle-Side with Side-Side-Side and the General Triangle Inequality in the Absolute Plane. *Journal of Geometry,* **104**:265-275.

Hacısalihoğlu, H. H. (1998). İki ve Üç boyutlu Uzayda Dönüşümler ve Geometriler, Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara.

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie, Verlag Von B. G. Teubner, Leibzig, Germany

Martin, G. E. (1982). Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry, Springer-Verlag, New York, USA.

Martin, G.E. (1986). The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane. 2. edition, Springer-Verlag, New York, USA.

Millman, R. and Parker, G. (1991). Geometry: A Metric Approach with Models. 2. edition, Springer-Verlag, New York, USA.

Moise, E.E. (1990). Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. 3. edition, Addison-Wesley Publishing Company, USA.

Sönmez, N. (2006). Poincaré Yarı Düzlem Geometrisi Üzerine. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı SOYADI	: Erkan ERÇOLAK
Doğum Yeri ve Tarihi	: İzmir, 12.03.1979
Yabancı Dili	: İngilizce
Medeni Hali	: Evli
İletişim	: ercolakerkan@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Ali Güral Anadolu Lisesi	(1997)
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi	(2001)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

İmrallı İlköğretim Okulu	(2001-2004)
Şuhut Endüstri Meslek Lisesi	(2004-2006)
Kocatepe Anadolu Lisesi	(2006- …)