PASCH GEOMETRİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Naime KARAKUŞ BAĞCI

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PASCH GEOMETRİ ÜZERİNE

Naime KARAKUŞ BAĞCI

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2017

TEZ ONAY SAYFASI

Naime KARAKUŞ BAĞCI tarafından hazırlanan "Pasch Geometri Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç.Dr. Nilgün SÖNMEZ

Başkan : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye :Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye :Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
……………….sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23/06/2017

İmza
Naime KARAKUŞ BAĞCI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PASCH GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Naime KARAKUŞ BAĞCI
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu araştırmada Pasch geometrisi olan ve olmayan bazı düzlemlerin özellikleri incelendi. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak konu hakkında literatür bilgileri verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızın daha anlaşılır olması için temel kavramlardan ve Düzlem Ayırma Aksiyomundan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde Pasch geometrisi tanımlanmış, Pasch geometrisinin özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise Pasch geometrisinde açı kavramına yer verilmiştir.

2017, vii+55 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzlem Ayırma Aksiyomu (PSA), Pasch Postulatı (PP), Pasch Geometrisi, Missing Strip Düzlemi, Kartezyen Düzlem, Açıölçer Geometri.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ON THE PASCH GEOMETRY

Naime KARAKUŞ BAĞCI
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Nilgün SÖNMEZ

The purpose of the thesis is to investigate the features of some planes which prove the Pasch geometry which not. The thesis consists of four parts. The first part is given the introduction part that contains of a general literature about it. In the second part, the basic concepts necessary for our work and Plane Speration Axiom (PSA) are mentioned. In the third part, Pasch geometry and the Pasch geometry's features are described. In the fourth part, the angle concept is given in the Pasch geometry.

2017, vii+55 Sayfa

Key Words: Plane Separation Axiom (PSA), Pasch Postulate (PP), Pasch Geometry, Missing Strip Plane, Cartesian Plane, Protractor Geometry.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ'e
teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarımın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve bana destek olan eşim Musa BAĞCI'ya; anne şefkatinden mahrum kalarak çalışmamı tamamlamamı sabırla bekleyen küçük kızım İnci Zeynep BAĞCI'ya ve aileme müteşekkirim.

Naime KARAKUŞ BAĞCI
AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	
$\angle ABC$	ABC açısı
$int(\angle ABC)$	ABC açısının içi
$m(\angle ABC)$	ABC açısının ölçüsü
ΔABC	ABC üçgeni
$int(\Delta ABC)$	ABC üçgeninin içi
$\square ABCD$	ABCD dörtgeni
$\simeq$	Eşlik bağıntısı
m_E	Kartezyen açı ölçümü
$\langle \quad \rangle$	Kartezyen iç çarpım
$\| \quad \|$	Kartezyen norm
$X^{\perp}$	X vektörünün diki (normali)
Kısaltmalar	
PSA	Düzlem Ayırma Aksiyomu
PP	Pasch Postulatı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Matematikte bir *aksiyomatik sistem,* genel olarak *tanımsız terim*ler ve *aksiyom*lardan oluşur. Burada, tanımsız terimler –henüz belirlenmemiş- *nesne*lere ve bu nesneler arasındaki –henüz belirlenmemiş- *ilişki*lere, aksiyomlar da bu nesne ve ilişkilerle ilgili *yargı*lara işaret eder. Aksiyomların belirttiği yargılar ispatlanamazlar; ancak *doğru* kabul edilir ve bu yargılardan, mantık kuralları kullanılarak yeni yargılar elde edilebilir. Bu noktada, bir aksiyomatik sistemin aksiyomlarının bazı özelliklere sahip olması beklenir: Tanımsız terimlerle ilgili *her* yargının ya kendisi ya da *değil*i aksiyomlardan elde edilebilmelidir. Aksiyomlar birbiriyle çelişmemelidir (aksiyomlar kullanılarak bir yargının hem kendisi hem de değili elde edilememelidir). Herhangi bir aksiyom, diğer aksiyomlardan elde edilememelidir. Bu özelliklere sırasıyla *tam*lık, *tutarlı*lık ve *bağımsızl*ık özelliği denir; bu özellikleri sağlayan bir aksiyomatik sisteme de sırasıyla *tam, tutarlı* ve *bağımsız* denir. Aksiyomatik sistemlerde tanımsız terimler ve aksiyomların yanında bazı *tanım*lar da bulunabilir. Ancak, bunlar sadece ifadeleri kısaltmak için kullanılır ve bazı özelliklere sahip nesneleri veya ilişkileri belirler.

Aksiyomatik sistemin tanımsız terimleri *yorum*lanabilir; yani tanımsız terimlere belirli anlamlar yüklenebilir. Böylece, aksiyomlar ve bu aksiyomlardan elde edilen yargılar, doğru ya da yanlış olabilen *önerme*lere dönüşürler. Açıkça, eğer bir yorum için aksiyomatik sistemin tüm aksiyomları doğru ise, bu aksiyom sisteminden elde edilen önermeler de doğru olacaktır. Böyle bir yoruma aksiyomatik sistemin bir modeli denir. Bununla birlikte, aynı yorum farklı aksiyomatik sistemler için model olabilir (Çolakoğlu 2009).

1882 de Moritz Pasch (1843-1930) geometrinin aksiyomatik sistemini *VorlesungenÜberNeuereGeometrie* adlı eserinde belirtmiştir. Pasch bu çalışmasında özellikle bir üçgenin bir kenarını kesen doğrunun, üçgenin diğer bir veya iki kenarını kesmek zorunda olduğunu göstermiştir. Bununla *Pasch geometri*nin temelini atmıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde temel geometri literatürüne ve ardından Düzlem Ayırma Aksiyomu (PSA) ile ilgili araştırmalara yer verilmiştir. Bu kısımda PSA yı sağlayan ve sağlamayan düzlemler incelenmiş ve Missing Strip Düzleminin PSA yı sağlamadığının ispatı yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, Pasch Postulatı verilmiş ve Pasch Postulatını sağlayan düzlemlere Pasch geometrileri denilmiş, Pasch geometri olan ve olmayan düzlemler ve özellikle Pasch Postulatı ile PSA arasındaki ilişki incelenmiştir. Yine bu bölümde bir ışının, doğru parçasının, açının ve üçgenin içi tanımlanmış ve bu tanımlar yardımıyla Pasch geometrisinde Pasch Postulatının bir sonucu olan Crossbar Teoremi ispatlanmıştır. Bölümün sonunda ise Crossbar Teoreminin bir uygulaması yapılmıştır ve ayrıca bölümün sonunda Pasch geometrisindeki konveks dörtgenlerin, köşegenlerinin kesiştiği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Pasch geometrilerinde açı ölçme fonksiyonu tanımlanmış ve bu kavram yardımıyla açıölçer (protractor) geometri tanımı ve Kartezyen düzlemde açı ölçümü tanımı verilmiş, bu açı ölçümün bir Kartezyen açı ölçme fonksiyonu olduğu ispatlanmıştır. Son olarak dik açı, eş açı, doğrusal açı ve ters açı kavramları verilmiş ve özellikle dik açı uygulamaları yapılmıştır.

Bu tezin amacı Pasch geometrisi olan-olmayan düzlemlerin ve özelliklerinin incelenmesi ve Pasch geometrisinin geliştirilmesine katkı sağlamaktır.

2. TEMEL KAVAMLAR

Bu bölümde Pasch geometrisine geçişi sağlayan bilgiler Martin (1986), Millmann ve Parker (1991), Salihova (2006), Çolakoğlu (2009), Sönmez ve Ungar (2013) kaynakları esas alınarak özetlendi.

Tanım 2.1 Elemanları noktalar olarak adlandırılan bir $\mathcal{P}$ kümesi, $\mathcal{P}$ nin doğru olarak adlandırılan bazı alt kümelerinin topluluğu $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$ da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (incidence) bağıntısı olmak üzere $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa bu sistem *soyut geometri* olarak adlandırılır:

i. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

ii. Her doğru en az iki nokta kapsar.

$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ soyut geometrisi $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ şeklinde gösterilir.

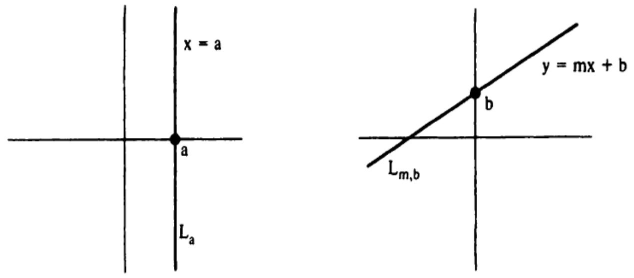
Tanım 2.2 $\mathcal{P} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ olsun. *Doğrular* kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın. a sabit gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin,

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = a\}$$

şeklindeki her alt kümesine *dikey doğru* denir. m ve b sabit gerçel sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin,

$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx + b\}$$

şeklindeki her alt kümesine *dikey olmayan doğru* denir. $\mathcal{L}_E$ tüm dikey ve dikey olmayan doğruların kümesi olsun. Burada $(x, y)\mathcal{I}L_a \Leftrightarrow x = a$ ve $(x, y)\mathcal{I}L_{m,b} \Leftrightarrow y = mx + b$ olmak üzere $\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$ bir soyut geometridir. $\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$ düzlem modeli *Kartezyen düzlem* olarak adlandırılır (Salihova 2006).



Şekil 2.1 Kartezyen düzlemde dikey ve dikey olmayan doğrular

Tanım 2.3 Noktaları ve doğruları,

$$\mathcal{P}_M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \ \ veya \ \ x \geq 1\}$$
$$\mathcal{L}_M = \{l \cap \mathcal{P}_M : l, bir\ kartezyen\ doğru\ ve\ l \cap \mathcal{P}_M \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan düzleme *Missing Strip düzlemi* denir.

Önerme 2.1 Missing Strip düzlemi bir soyut geometridir.

İspat. $(\mathcal{P}_M, \mathcal{L}_M)$ nin doğruları Kartezyen düzlemin doğrularından oluştuğu ve Kartezyen düzlem soyut geometri aksiyomlarını sağladığı için soyut geometri aksiyomları Missing Strip düzleminde de sağlanır.

Tanım 2.4 $\mathcal{P}$ bir noktalar kümesi olsun. $\mathcal{P} \subset l$ olacak şekilde bir l doğrusu varsa $\mathcal{P}$ kümesine *doğrudaş (collinear) noktalar kümesi*, aksi halde *doğrudaş olmayan (non-collinear) noktalar kümesi* denir.

Tanım 2.5 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ soyut geometrisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *incidence geometridir* denir:

- **i.** $\mathcal{L}$ de farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.
- **ii.** Doğrudaş olmayan $A, B, C \in \mathcal{P}$ noktaları vardır (Salihova 2006).

Önerme 2.2 $\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$ Kartezyen düzlemi bir incidence geometridir.

İspat. i) Farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek kartezyen doğrunun varlığı gösterilmelidir. $\mathbb{R}^2$ de $P \neq Q$ olacak şekilde $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ noktaları alınsın. P ve Q noktalarını üzerinde bulunduran faklı iki doğrunun olduğu varsayılsın.

1. Durum: P ve Q noktalarını üzerinde bulunduran $a \neq a'$ olacak şekilde iki farklı L_a ve $L_{a'}$ doğruları göz önüne alınsın. Bu durumda $a = x_1 = x_2$ ve $a' = x_1 = x_2$ olup $a = a'$ bulunur. Bu ise $L_a \neq L_{a'}$ olmasıyla çelişir. Yani P ve Q noktalarından geçen bir tek $L_a = L_{a'}$ doğrusu vardır.

2. Durum: Eğer P ve Q noktalarının her ikisi de L_a ve $L_{m,b}$ doğrusu üzerinde ise bu durumda $P = (a, y_1)$ ve $Q = (a, y_2)$ dir. Aynı zamanda,

$$y_1 = mx_1 + b = ma + b \text{ ve } y_2 = mx_2 + b = ma + b$$

elde edilir ki bu durumda $y_1 = y_2$ olup, $P \neq Q$ olmasıyla çelişir.

3. Durum: Şimdi de P ve Q noktalarını üzerinde bulunduran $L_{m,b} \neq L_{n,c}$ olacak şekilde $L_{m,b}$ ve $L_{n,c}$ doğrularının olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$y_1 = mx_1 + b \text{ ve } y_2 = mx_2 + b \tag{2.1}$$

olur. 2. Durumdan $x_1 \neq x_2$ olur. (2.1) denkleminden

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.2}$$

elde edilir. m nin bu değerinden

$$b = y_1 - mx_1 \tag{2.3}$$

olur. Benzer şekilde $L_{n,c}$ doğrusu için,

$$n = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ve} \quad c = y_1 - nx_1 \tag{2.4}$$

bulunur. Buradan $m = n$ ve $b = c$ olur. Bu ise $L_{m,b} \neq L_{n,c}$ olmasıyla çelişir.

O halde P ve Q yu üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.

ii) $\mathbb{R}^2$ de $\{(1,0),(0,0),(0,1)\}$ şeklinde doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Önerme 2.3 Missing Strip düzlemi bir incidence geometridir.

İspat. i. Missing Strip düzleminin nokta ve doğruları Kartezyen düzlemin nokta ve doğrularından oluştuğu için bu düzlemde farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.

ii. $x < 0,\ x \geq 1$ bölgelerindeki noktalar Kartezyen düzlemin noktaları olduğu için bu bölgelerde doğrudaş olmayan $\{(1,0),(1,1),(2,0)\}$ gibi üç nokta vardır.

Tanım 2.6 Bir $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir *metriktir* denir:

M1. $\forall\, A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A,B) \geq 0$,

M2. $\forall\, A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A,B) = 0 \;\Leftrightarrow A = B$,

M3. $\forall\, A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A,B) = d(B,A)$,

M4. $\forall\, A, B, C \in \mathcal{P}$ için $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (Salihova 2006).

Örnek 2.1 Düzlemde ($\mathbb{R}^2$ de) Öklid (veya Öklidyen) uzaklık fonksiyonu, $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ iki nokta olmak üzere, $d_E: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ d_E(P,Q) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$ şeklinde tanımlıdır ve d_E, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik belirtir (Çolakoğlu 2009).

Tanım 2.7 l, $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ incidence geometrisinin bir doğrusu olsun. $d, \mathcal{S}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $f: l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu l için bir *cetveldir* denir:

i. f fonksiyonu bire-bir ve örtendir

ii. l üzerindeki her P, Q nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q) \tag{2.5}$$

dir. (2.5) denklemine *cetvel denklemi* denir (Salihova 2006).

Önerme 2.4 $l \in \mathcal{L}$ ve $f: l \to \mathbb{R}$ örten ve (2.5) eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f bire-birdir ve l için bir cetveldir.

İspat. Tanım 2.7 nın sağlanması için $f: l \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bire-bir olduğunu göstermeliyiz.

$f(P) = f(Q)$ olsun. (2.5) eşitliğinden ve Tanım 2.6 in *M2* şartından,

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q) = 0 \iff P = Q$$

dir. Yani f fonksiyonu bire-birdir.

Örnek 2.2 $\mathcal{G} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, \mathcal{I}\}$ Kartezyen düzlemi $\forall l \in \mathcal{L}_E$ doğrusu için cetvele sahiptir.

I. Durum: $l = L_a$ şeklinde bir dikey doğru ise $P \in L_a$ ve buradan da her y değeri için $P = (a, y)$ olur. $f: l \to \mathbb{R}$

$$f(P) = f\big((a, y)\big) = y$$

fonksiyonunu tanımlansın. f nin örten olduğu açıktır. $P = (a, y_1)$ ve $Q = (a, y_2)$ ise o zaman,

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = d_E(P, Q)$$

olur. Böylece Önerme 2.4 ten f bir cetveldir.

II. Durum: $l = L_{m,b}$ ise $P \in L_{m,b}$ ve buradan $P = (x, y)$, $y = mx + b$ olur. $f: L_{m,b} \to \mathbb{R}$

$$f(P) = f\big((x, y)\big) = x\sqrt{1 + m^2}$$

fonksiyonunu tanımlansın. Eğer $t \in \mathbb{R}$ ise

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+m^2}} \qquad , \qquad y = \left(\frac{mt}{\sqrt{1+m^2}}\right) + b$$

olur. Ayrıca,

$$f(P) = \frac{t}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \sqrt{1+m^2} = t$$

elde edilir ki böylece f örtendir.

Şimdi kabul edelim ki $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ olsun. Bu durumda,

$$|f(P) - f(Q)| = \left|x_1\sqrt{1+m^2} - x_2\sqrt{1+m^2}\right|$$

$$= \sqrt{1+m^2}|x_1 - x_2| \qquad (2.6)$$

olur. Diğer taraftan,

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{1+m^2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{1+m^2}|x_1 - x_2| \qquad (2.7)$$

elde edilir. (2.6) ve (2.7) denklemlerinin birleştirilmesiyle $|f(P) - f(Q)| = d_E(P,Q)$ elde edilir. Önerme 2.4 ten f bir cetveldir.

Örnek 2.3 Missing Strip düzlemi cetvel postulatını sağlar.

$l = L_a$ şeklinde bir dikey doğrusu için $f(P) = y$ cetveli kullanılabilir.

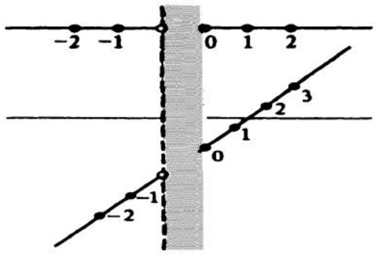
$l = L_{m,b}$ dikey olmayan doğrusunu alalım. Bu doğru için kartezyen düzleminde

$$f(P) = f\big((x,y)\big) = x\sqrt{1+m^2}$$

cetveli kullanılmıştı. Bu cetvelleri Missing Strip düzleminin $l \cap \mathrm{P}_M$ doğruları için kullanamayız. Çünkü f, 1-1 ve örten olmaz. Ama $\left[0, \sqrt{1+m^2}\right)$ yarı açık aralığını ihmal ederek, yeni bir g cetveli tanımlayabiliriz. Yani,

$$g(P) = g\big((x,y)\big)$$
$$= \begin{cases} f\big((x,y)\big), & x < 0\ ise, \\ f\big((x,y)\big) - \sqrt{1+m^2}, & x \geq 1\ ise, \end{cases} \tag{2.8}$$

$g: l \cap \mathrm{P}_M \to \mathbb{R}$ ye 1-1 ve örtendir.



Şekil 2.2 Missing Strip düzleminde $\mathcal{L}_{0,3}$ ve $\mathcal{L}_{1,-2}$ doğruları

Tanım 2.8 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ incidence geometrisi d uzaklık fonksiyonuyla birlikte $\forall l \in \mathcal{L}$ doğrusu için bir cetvele sahipse, *cetvel postulatını sağlıyor* denir. Bu durumda $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d)$ ye bir *metrik geometri* denir (Salihova 2006).

Örnek 2.4 Kartezyen düzlem, d_E Öklid uzaklığıyla birlikte bir metrik geometridir.

Örnek 2.5 Missing Strip düzlemi (2.8) denklemindeki g cetvelinin belirlediği uzaklık fonksiyonuyla birlikte bir metrik geometridir.

Tanım 2.9 $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d)$ metrik geometrisinde A, B ve C üç farklı nokta olmak üzere, eğer bu noktalar aynı doğru üzerinde ve
$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$
eşitliğini sağlıyorsa, B noktası A ve C noktaları *arasındadır* denir ve bu durum$A - B - C$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.10 A ve B farklı iki nokta olmak üzere;
$$\{X \in \mathcal{P} | X = A\ veya\ X = B\ veya\ A - X - B\}$$
kümesine *AB doğru parçası* denir ve $\overline{AB}$ veya $[AB]$ ile gösterilir. Ayrıca A ve B noktalarına, $\overline{AB}$ doğru parçasının sınır noktaları adı verilir.

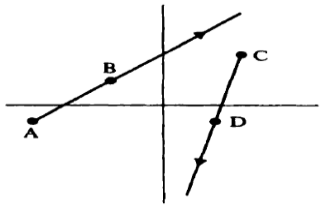
AB ve CD iki doğru parçası olmak üzere eğer;
$$d(A,B) = d(C,D)$$
oluyorsa AB ve CD doğru parçaları *eştir* denir.

Tanım 2.11 A ve B farklı iki nokta olmak üzere;

$$\overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{P} | A - B - X\}$$

kümesine AB ışını, A noktasına da AB ışınının başlangıç noktası denir. AB ışını $\overrightarrow{AB}$ ile gösterilir (Çolakoğlu 2009).

$\overrightarrow{AB}$ ışınlarının kümesi, $\overleftrightarrow{AB}$ doğru kümesinin bir alt kümesidir. Kartezyen düzlemdeki ışınların gösterimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Kartezyen düzlemde ışınlar

Missing Strip düzlemindeki ışınlar, $x < 0$ ve $x \geq 1$ bölgelerinde, Öklid düzlemindeki ışınlarla aynıdır.

Tanım 2.12 Başlangıç noktaları ortak iki farklı ışının birleşim kümesine açı denir. $\overrightarrow{BA}$ ve $\overrightarrow{BC}$ ışınlarının oluşturduğu açıya ABC açısı denir ve $\angle ABC$ şeklinde gösterilir (Çolokoğlu 2009).

Ayrıca B noktasına, $\angle ABC$ açısının köşe noktası adı verilir.

Teorem 2.1 Bir metrik geometride $\angle ABC = \angle DEF$ ise $B = E$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{B}\} &= \{\boldsymbol{Z} \in \angle ABC | \boldsymbol{Z}, \angle ABC \ \ nın\ köşe\ noktası\} \\ &= \{\boldsymbol{Z} \in \angle DEF | \boldsymbol{Z}, \angle DEF \ \ nın\ köşe\ noktası\} \\ &= \{\boldsymbol{E}\}\end{aligned}$$

olur.

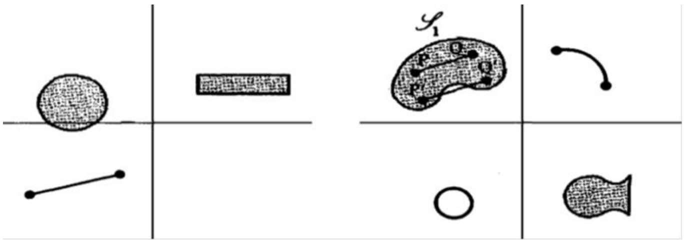
Tanım 2.13 Bir metrik geometride $\{A, B, C\}$ doğrudaş olmayan noktalar ise,

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

kümesine *üçgen* denir.

2.1 Düzlem Ayırma Aksiyomu (PSA)

Tanım 2.1.1 $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$ bir metrik geometri ve $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ olsun. Eğer $P, Q \in \mathcal{P}_1$ olan her P ve Q noktası için $\overline{PQ}$ doğru parçası $\mathcal{P}_1$ in altkümesi oluyorsa $\mathcal{P}_1$ kümesine *konvekstir* denir.



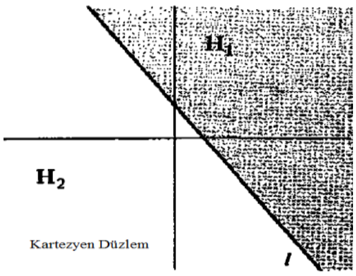
Şekil 2.4 Konveks ve konveks olmayan kümeler

Tanım 2.1.2 Bir $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$ metrik geometrisinde verilen her $l \in \mathcal{L}$ doğrusu için $\mathcal{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan H_1 ve H_2 gibi iki alt kümesi varsa $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$ sistemi *düzlem ayırma aksiyomunu (PSA)* sağlar, denir. Bu durumda H_1 ve H_2 kümelerinin her birine *yarı düzlem*, l doğrusuna da bu yarı düzlemlerin bir *kenarı* denir.

i. H_1 ve H_2 konvekstir.

ii. $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - l$ ($\mathcal{P}$ den l nın çıkarılmasıyla elde edilen küme)

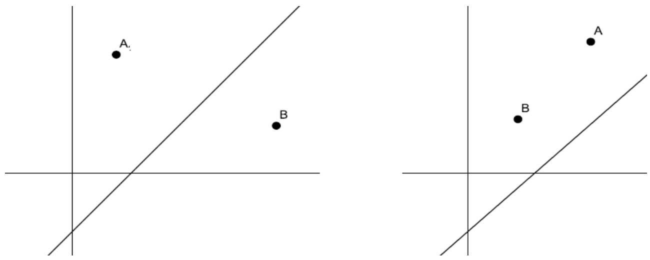
iii. $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ (Çolakoğlu 2009).



Şekil 2.5 Kartezyen düzlemde H_1 ve H_2 yarı düzlemleri

Tanım 2.1.3 $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$, PSA yı sağlayan bir metrik geometri; $l \in \mathcal{L}$, H_1 ve H_2 ise l tarafından belirlenmiş yarı düzlemler olsun. Eğer A ve B noktalarının her ikisi de H_1 ya da H_2 yarı düzleminde iseler A ve B noktalarına *l doğrusunun aynı tarafındadırlar* denir. Eğer A ve B noktalarından biri H_1, diğeri H_2 yarı düzleminde ise bu durumda A ve B noktalarına *l nin zıt (karşıt) tarafındadırlar* denir.

Aşağıdaki şekilde sırasıyla bir Kartezyen doğrunun zıt (karşıt) tarafında ve aynı tarafında olan iki nokta gösterilmiştir.



Şekil 2.6 Kartezyen doğrunun zıt ve aynı tarafında olan noktalar

Teorem 2.1.1 $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$ düzlem ayırma aksiyomunu (PSA) sağlayan bir metrik geometri olsun. l doğrusu üzerinde olmayan $\mathcal{P}$ nin A ve B noktaları için,

i) $A\ ve\ B\ noktalar$ı l nin zıt tarafındadır $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{AB}} \cap l \neq \emptyset$

ii) $A\ ve\ B\ noktalar$ı l nin aynı tarafındadır $\Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$ veya $\overline{\mathrm{AB}} \cap l = \emptyset$

dir.

İspat. i. A ve B noktaları l nin zıt tarafında ise, $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ (veya $A \in H_2$ ve $B \in H_1$) olur. Bu durumda PSA yı sağlayan bir metrik geometri olduğundan Tanım 2.1.2 (iii) den $\overline{\mathrm{AB}} \cap l \neq \emptyset$ olur.

Aksine $\overline{\mathrm{AB}} \cap l \neq \emptyset$ olsun. Eğer $A, B \in H_1$ (veya $A, B \in H_2$) olsaydı H_1 (veya H_2) konveks olduğundan $\overline{AB} \in H_1$ (veya H_2) olurdu. Bu ise $\overline{\mathrm{AB}} \cap l = \emptyset$ anlamına geleceğinden çelişki oluşurdu. O halde A ve B noktaları l doğrusunun zıt tarafında olmalıdırlar.

ii. A ve B noktaları l nin aynı tarafında olsunlar. Bu durumda $A, B \in H_1$ veya $A, B \in H_2$ dir. H_1 ve H_2 konveks olduğundan ya $A = B$ veya $\overline{AB} \in H_1$ veya $\overline{AB} \in H_2$ olur. Dolayısıyla $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ dır.

Tersine $A = B$ veya $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ olsun. $A = B$ ise bu noktalar l nin aynı tarafındadır. $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ ise H_1 ve H_2 yarı düzlemleri konveks olduğundan A ve B noktaları ya H_1 ya da H_2 yarı düzlemindedirler. Yani l nin aynı tarafındaki yarı düzlemdedirler.

Teorem 2.1.2 l, PSA yı sağlayan metrik geometrinin bir doğrusu olsun. Eğer P ve Q noktaları l nin zıt tarafında, Q ve R noktaları da l nin zıt tarafında iseler, o zaman P ve R noktaları l nin aynı tarafındadır.

İspat. l, PSA yı sağlayan metrik geometrinin bir doğrusu olsun. Bu durumda l doğrusu düzlemi H_1 ve H_2 yarı düzlemlerine ayırır. P ve Q noktaları l nin zıt tarafında ise $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$ olur ve dolayısıyla $P \in H_1$ ise $Q \in H_2$ dir. Benzer şekilde Q ve R noktaları l nin zıt tarafında ise $\overline{QR} \cap l \neq \emptyset$ ve $Q \in H_2$ olduğundan $R \in H_1$ olur. H_1 ve H_2 ayrık ve konveks altkümeler olduğundan P ve R noktalarının oluşturduğu doğru parçası $\overline{PR} \cap l = \emptyset$ olup l nin aynı tarafındadırlar.

Teorem 2.1.3 l, PSA yı sağlayan metrik geometrinin bir doğrusu olsun. Eğer P ve Q noktaları l nin zıt tarafında, Q ve R noktaları l nin aynı tarafında iseler o zaman P ve R noktaları l nin zıt tarafındadır.

İspat. l, PSA yı sağlayan metrik geometrinin bir doğrusu olsun. Bu durumda l doğrusu düzlemi H_1 ve H_2 yarı düzlemlerine ayırır. P ve Q noktaları l nin zıt tarafında ise $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$ olup $P \in H_1$ ise $Q \in H_2$ dir. Q ve R noktaları l nin aynı tarafında ise $\overline{QR} \cap l = \emptyset$ olup $Q \in H_2$ olduğundan $R \in H_2$ dir. H_1 ve H_2 ayrık ve konveks altkümeler olduğundan $\overline{PR} \cap l \neq \emptyset$ olup P ve R noktaları l nin zıt tarafındadırlar.

Aşağıdaki önerme doğru parçası ve ışına birer alternatif tanım vermektedir.

Önerme 2.1.1 Kartezyen düzlemde,

$$\overline{AB} = \{C \in \mathbb{R}^2 | C = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{C \in \mathbb{R}^2 | C = A + t(B - A), t \geq 0\}$$

kümelerine sırasıyla *doğru parçası* ve *ışın* denir.

Tanım 2.1.4 $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda,

$$X^{\perp} = (-y, x) \in \mathbb{R}^2$$

ifadesine *X vektörünün diki* denir.

Tanım 2.1.5 Eğer $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ise; $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\langle A, B \rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

fonksiyonuna *iç çarpım* denir.

Önerme 2.1.2 a) Eğer $X \in \mathbb{R}^2$ ise $\langle X, X^{\perp} \rangle = 0$

b) Eğer $X \in \mathbb{R}^2$, $X \neq (0,0)$ ve $\langle Z, X^{\perp} \rangle = 0$ ise bazı $t \in \mathbb{R}$ için $Z = tX$ dir.

İspat. a) $X \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$\langle X, X^{\perp} \rangle = \langle (x,y), (-y,x) \rangle = -xy + xy = 0$$

b) $X = (x,y)$, $Z = (z,w)$ ve $X^{\perp} = (-y,x)$ olsun. Bu durumda $\langle Z, X^{\perp} \rangle = 0$ olması

$$-zy + wx = 0 \tag{2.9}$$

demektir. $X \neq (0,0)$ olduğundan x ve y den en az biri sıfırdan farklıdır. Eğer $x \neq 0$ ise bu durumda (2.9) denkleminin çözümünden $w = {}^{zy}/_{x}$ elde edilir ki $t = {}^{z}/_{x}$ olarak alındığında $Z = tX$ bulunur. Eğer $y \neq 0$ ise bu durumda $z = {}^{wx}/_{y}$ elde edilir ki $t = {}^{w}/_{y}$ olarak alındığında $Z = tX$ bulunur. Her iki durumda da bazı $t \in \mathbb{R}$ için $Z = tX$ elde edilir.

Aşağıdaki önerme Kartezyen düzlemde doğruyu ifade etmenin farklı bir yolunu vermektedir.

Önerme 2.1.3 P ve Q, $\mathbb{R}^2$ nin farklı iki noktası olsun. Bu durumda,

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0\}$$

dır.

İspat. İlk olarak

$$\overleftrightarrow{PQ} \subset \{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0\}$$

olduğu gösterilsin. $A \in \overleftrightarrow{PQ}$ ve $A = P + t(Q-P)$, $t \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = t\langle Q - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0$$

olur. O halde,

$$\overleftrightarrow{PQ} \subset \{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0\}$$

dir.

$\{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0\} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ olduğu gösterilsin. $A \in \mathbb{R}^2$ için $\langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0$ olsun. Eğer $Q \neq P$ ise $Q - P \neq (0,0)$ dir. Önerme 2.1.2 den bir t reel sayısı için $A - P = t(Q-P)$ dir. Böylece,

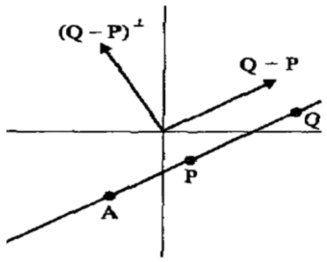
$$A = P + t(Q-P) \in \overleftrightarrow{PQ}$$

olur. $\{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0\} \subset \overleftrightarrow{PQ}$ dir. O halde açıkça $\overleftrightarrow{PQ} = \{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q-P)^{\perp} \rangle = 0\}$ bulunur.

Tanım 2.1.6 $l = \overleftrightarrow{PQ}$ bir Kartezyen doğru olsun.

$$H^{+} = \{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q - P)^{\perp} \rangle > 0\}$$
$$H^{-} = \{A \in \mathbb{R}^2 | \langle A - P, (Q - P)^{\perp} \rangle < 0\}$$

kümelerine *Kartezyen yarı düzlemler* denir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7 Kartezyen yarı düzlemler

Teorem 2.1.4 $l = \overleftrightarrow{PQ}$ doğrusunun belirttiği Kartezyen yarı düzlemler konvekstir.

İspat. $A, B \in H^{+}$ olsun. Böylece,

$$\langle A - P, (Q - P)^{\perp} \rangle > 0 \text{ ve } \langle B - P, (Q - P)^{\perp} \rangle > 0 \qquad (2.10)$$

olur. $C \in \overline{AB}$ ise $C \in H^{+}$ olduğunu gösterilmelidir. Önerme 2.1.1 den $C = A + t(B - A),\ 0 < t < 1$ olduğu kabul edilsin. Böylece,

$$C = (1 - t)A + tB, \qquad 0 < t < 1$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}\langle (C - P), (Q - P)^{\perp} \rangle &= \langle \big((1 - t)A + tB - P\big), (Q - P)^{\perp} \rangle \\ &= \langle \big((1 - t)(A - P) + t(B - P)\big), (Q - P)^{\perp} \rangle \\ &= (1 - t)\langle (A - P), (Q - P)^{\perp} \rangle + t\langle (B - P), (Q - P)^{\perp} \rangle\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < t < 1$ ve (2.10) eşitsizliğinden elde edilen bu son eşitliğin sağ tarafı pozitiftir ve dolayısıyla sol tarafı da pozitif olup $\langle (C - P), (Q - P)^{\perp} \rangle > 0$ ve $C \in H^{+}$ dir. Sonuç olarak H^{+} konvekstir.

H^{-} nin de konveks olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.1.5 Kartezyen düzlem PSA yı sağlar.

İspat. $l = \overleftrightarrow{PQ}$ bir doğru olsun. Eğer $A \in \mathbb{R}^2$ ise o zaman $\langle (A - P), (Q - P)^{\perp} \rangle$ ya pozitif (bu durumda $A \in H^{+}$) ya sıfır (bu durumda Önerme 2.1.3 den $A \in l$) ya da negatiftir (bu durumda $A \in H^{-}$). Böylece $\mathbb{R}^2 - l = H^{+} \cup H^{-}$ dir. H^{+} ve H^{-} ayrık ve Teorem 2.1.4

den konveks olduklarına göre sadece PSA nın (iii) şartının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

$A \in H^+$ ve $B \in H^-$ olsun. $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ olduğunu göstermek için $X = A + t(B - A) \in l$ olacak şekilde bir $0 < t < 1$ sayısı bulunmalıdır. Önerme 2.1.3 e göre $A + t(B - A) \in l$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\langle (A + t(B - A) - P), (Q - P)^{\perp} \rangle = 0$$

olmasıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} \langle (A - P), (Q - P)^{\perp} \rangle &= -t\langle (B - A), (Q - P)^{\perp} \rangle \\ &= t\langle (A - B), (Q - P)^{\perp} \rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

yazılabilir. $A \in H^+$ olduğundan eşitliğin sol tarafı pozitiftir. Şimdi $\langle (A - B), (Q - P)^{\perp} \rangle$ nin de pozitif olduğu gösterilsin. $A - B = (A - P) - (B - P)$ olduğundan,

$$\langle (A - B), (Q - P)^{\perp} \rangle = \langle (A - P), (Q - P)^{\perp} \rangle - \langle (B - P), (Q - P)^{\perp} \rangle \tag{2.12}$$

yazılır. Bu son eşitliğin sağ yanının ilk terimi $A \in H^+$ olduğundan pozitif, ikinci terimi ise $B \in H^-$ olduğundan negatiftir. O halde bu fark işleminin sonucu pozitiftir. Böylece (2.11) eşitliğinden,

$$t = \frac{\langle (A-P), (Q-P)^{\perp} \rangle}{\langle (A-B), (Q-P)^{\perp} \rangle} > 0 \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.12) eşitliğinin (2.13) ifadesinde paydaya yazılmasıyla da payın paydadan daha küçük olduğu ve dolayısıyla $t < 1$ olduğu görülür. O halde (2.13) eşitliğindeki t sayısı $X = A + t(B - A) \in \overline{AB} \cap l$ noktasının var olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.6 Missing Strip düzlemi PSA yı sağlamaz.

İspat. A) Missing Strip düzlemindeki noktalar ve doğrular Tanım 2.3 den

$$\mathcal{P}_M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \;\; veya \;\; x \geq 1\}$$

ve

$$\mathcal{L}_M = \{l \cap \mathcal{P}_M : l, bir\ kartezyen\ doğru\ ve\ l \cap \mathcal{P}_M \neq \emptyset\}$$

şeklindedir. Önerme 2.1.3 de Kartezyen düzlemdeki doğrular belirtilmişti. Benzer şekilde Missing Strip düzlemindeki doğruları

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{A \in \mathcal{P}_M | \langle (\mathrm{A} - \mathrm{P}), (Q - P)^{\perp} \rangle = 0\}$$

biçiminde gösterilebilir. Missing Strip düzlemindeki yarı düzlemler ise,

$$H^+ = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}_M : \langle (\mathrm{A} - \mathrm{P}), (Q - P)^{\perp} \rangle > 0\}$$

$$H^- = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}_M : \langle (\mathrm{A} - \mathrm{P}), (Q - P)^{\perp} \rangle < 0\}$$

biçimindedir.

$$\mathbb{R}^2 - \overleftrightarrow{PQ} = H^+ \cup H^- \text{ve} H^+ \cap H^- = \emptyset$$

dir.

B) Missing Strip düzlemindeki $\overleftrightarrow{PQ}$ doğrusunun ayırmış olduğu H^+ ve H^- yarı düzlemlerin konveksliği gösterilsin.

i) $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in H^+$ olsun. O halde,

$$\langle (\mathrm{A} - \mathrm{P}), (Q - P)^\perp \rangle > 0 \ \text{ ve } \ \langle (\mathrm{B} - \mathrm{P}), (Q - P)^\perp \rangle > 0 \tag{2.14}$$

olur. $C = (c_1, c_2)$ ve $C \in \overline{AB}$ olmak üzere $C \in H^+$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $A - C - B$ ve Önerme 2.1.1 den $C = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$, $0 < t < 1$ olduğu kabul edilsin.

a) $a_1 < 0,\ b_1 < 0$ veya $a_1 \geq 1, b_1 \geq 1$ olsun.

Bu durum Öklid düzleminin PSA yı sağlama şartı ile aynıdır. Yani,

$$\begin{aligned}\langle (C - P), (Q - P)^\perp \rangle &= \langle \big((1 - t)A + tB - P\big), (Q - P)^\perp \rangle \\ &= \langle \big((1 - t)(A - P) + t(B - P)\big), (Q - P)^\perp \rangle \\ &= (1 - t)\langle (A - P), (Q - P)^\perp \rangle + t\langle (B - P), (Q - P)^\perp \rangle \end{aligned} \tag{2.15}$$

$0 < t < 1$ olduğundan ve (2.14) eşitsizliğinden, (2.15) denkleminin sağ tarafı pozitiftir. Sonuç olarak,

$$\langle (C - P), (Q - P)^\perp \rangle > 0$$

olup $C \in H^+$ dir.

b) $a_1 < 0, b_1 \geq 1$ olsun.

$$\langle (C - P), (Q - P)^\perp \rangle = \langle (A + t(B - A) - P), (Q - P)^\perp \rangle$$

$$\langle (C - P), (Q - P)^\perp \rangle - \langle (A - P), (Q - P)^\perp \rangle = t\langle (B - A), (Q - P)^\perp \rangle$$

$$\langle (C - A), (Q - P)^\perp \rangle = t\langle (B - A), (Q - P)^\perp \rangle$$

$$t = \frac{\langle (C - A), (Q - P)^\perp \rangle}{\langle (B - A), (Q - P)^\perp \rangle}$$

olduğundan, $0 < \frac{\langle (C-A),(Q-P)^\perp \rangle}{\langle (B-A),(Q-P)^\perp \rangle} < 1$ bulunur.

- $\frac{\langle (C-A),(Q-P)^\perp \rangle}{\langle (B-A),(Q-P)^\perp \rangle} > 0$ ise,

$\langle (C - A), (Q - P)^\perp \rangle > 0$ ve buradan $a_1 < c_1$ olur.

- $\frac{\langle (C-A),(Q-P)^\perp \rangle}{\langle (B-A),(Q-P)^\perp \rangle} < 1$ ise,

$\langle (C-A), (Q-P)^{\perp} \rangle < \langle (B-A), (Q-P)^{\perp} \rangle$ ve buradan $c_1 < b_1$ olur.

Sonuç olarak $a_1 < c_1 < b_1$ dir. $C = (c_1, c_2) \in \mathcal{P}_M$ olduğundan $c_1 \notin [0,1)$ dir. O halde $c_1 < 0$ veya $c_1 \geq 1$ olması durumunda C noktası A ve B noktalarıyla aynı yarı düzlemde bulunur. Bu durumda $\langle (C-P), (Q-P)^{\perp} \rangle > 0$ dır.

c) $b_1 < 0, a_1 \geq 1$ durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

$A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in H^-$ olması durumu ise (i) ile aynıdır. H^- konvekstir ve dolayısıyla Missing Strip düzlemi konveksktir.

C) **i)** $A = (a_1, a_2) \in H^+$ ve $B = (b_1, b_2) \in H^-$ olsun. $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{PQ} \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $0 < t < 1$ ve $C = A + t(B-A) \in \overleftrightarrow{PQ}$ olacak şekilde bir t sayısı bulunmalıdır.

a) $a_1 < 0,\ b_1 < 0$ veya $a_1 \geq 1, b_1 \geq 1$ olsun.

Bu durum Öklid düzleminin PSA yı sağlama şartı ile aynıdır.

Önerme 2.1.3 den $C = A + t(B-A) \in \overleftrightarrow{PQ}$ olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\langle (A + t(B-A) - P), (Q-P)^{\perp} \rangle = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} \langle (A-P), (Q-P)^{\perp} \rangle &= -t\langle (B-A), (Q-P)^{\perp} \rangle \\ &= t\langle (A-B), (Q-P)^{\perp} \rangle \end{aligned} \tag{2.16}$$

$A \in H^+$ olduğundan, (2.16) eşitliğinin sol tarafı pozitiftir. $\langle (A-B), (Q-P)^{\perp} \rangle$ ifadesinin de pozitif olduğunu gösterelim.

$$\langle (A-B), (Q-P)^{\perp} \rangle = \langle (A-P), (Q-P)^{\perp} \rangle - \langle (B-P), (Q-P)^{\perp} \rangle \tag{2.17}$$

(2.17) eşitliğinin sağ tarafının ilk terimi $A \in H^+$ olduğundan pozitiftir. İkinci terimi $B \in H^-$ olduğundan negatiftir. Fakat çıkarma işleminden dolayı eşitliğin sağ tarafı pozitif olup,

$$\langle (A-B), (Q-P)^{\perp} \rangle > 0$$

dır. (2.16) eşitliğinden ,

$$t = \frac{\langle (A-P), (Q-P)^{\perp} \rangle}{\langle (A-B), (Q-P)^{\perp} \rangle} > 0 \tag{2.18}$$

bulunur.

$$t = \frac{\langle (A-P), (Q-P)^{\perp} \rangle}{\langle (A-P), (Q-P)^{\perp} \rangle - \langle (B-P), (Q-P)^{\perp} \rangle} < 1 \tag{2.19}$$

dir. Çünkü t değerinin payı paydasından küçüktür. (2.18) ve (2.19) den $0 < t < 1$ ve $C = A + t(B-A) \in \overleftrightarrow{PQ}$ olacak şekilde t sayısı vardır.

b) $a_1 < 0, b_1 \geq 1$ olsun.

Bu durumda $C = (c_1, c_2)$ noktası için $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{PQ} = \{C\}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $C \in \overline{AB}$ olduğundan $C = A + t(B - A)$ ve $0 < t < 1$ olacak şekilde bir t sayısı vardır. $A, B, C \in \mathcal{P}_M$ olduğundan $b_1 = c_1 = 1$ olabilir. Buradan,

$$c_1 = a_1 + t(b_1 - a_1)$$

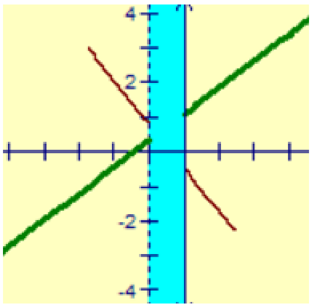
$$t = \frac{1 - a_1}{1 - a_1} = 1$$

olur. Bu ise $t < 1$ durumu ile çelişir.

c) $a_1 \geq 1, b_1 < 0$ durumu $a_1 < 0, b_1 \geq 1$ ile aynıdır.

ii) $A \in H^-$ ve $B \in H^+$ durumu ise (i) ile aynıdır.

Sonuç olarak Missing Strip düzlemi PSA nın (i) ve (ii) şartını sağlayıp, (iii) şartını sağlamadığından PSA yı sağlamaz.



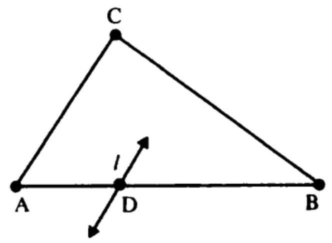
Şekil 2.8 Missing Strip düzleminde kesişmeyen doğru ve doğru parçası

3. PASCH GEOMETRİ

Tanım 3.1 Bir metrik geometride l bir doğru ve ΔABC de bir üçgen olsun. $A - D - B$ şartını sağlayan $D \in l$ noktası için $l \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ ya da $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ ise bu metrik geometri *Pasch Postulatını (PP) sağlar* denir.

Teorem 3.1 (Pasch Teoremi). Bir metrik geometri PSA yı sağlıyorsa Pasch Postulatını (PP) da sağlar.

İspat. Bir metrik geometride**,** ΔABC bir üçgen, l bir doğru ve $A - D - B$ olacak şekilde $D \in l$ noktası verilsin. $l \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ veya $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir (Şekil 3.1).



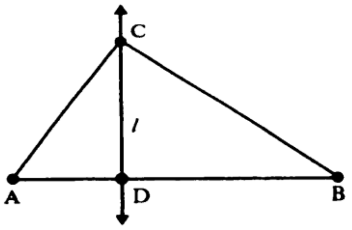
Şekil 3.1 Metrik geometride PP yi sağlayan ΔABC üçgeni

$\overline{AC} \cap l = \emptyset$ olduğu kabul edilsin. O halde $\overline{BC} \cap l \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. Şimdi $A \in \overline{AC} \cap \overleftrightarrow{AB}$ olduğundan $l \neq \overleftrightarrow{AB}$ dir. Bu nedenle hem A ve B noktaları, l doğrusu üzerinde değildirler hem de $\overline{AB} \cap l = \{D\} \neq \emptyset$ olduğundan bu noktalar Teorem 2.1.1 gereğince l doğrusunun zıt tarafındadırlar. A ve C noktaları, $\overline{AC} \cap l = \emptyset$ olduğundan yine Teorem 2.1.1 gereğince l doğrusunun aynı tarafındadır.

Teorem 2.1.3 den B ve C noktaları, l doğrusunun zıt tarafındadır. Bundan dolayı $\overline{BC} \cap l \neq \emptyset$ dir.

$\overline{BC} \cap l = \emptyset$ olduğu durumda $\overline{AC} \cap l \neq \emptyset$ sağlanacaktır.

Pasch Teoremi bir başka ifade ile, bir doğru ile bir üçgen kesişiyorsa o zaman doğru üçgeni en az bir kenarından daha keser. Hatta ortak köşelerden de kesmesi mümkündür demektir (Şekil 3.2).



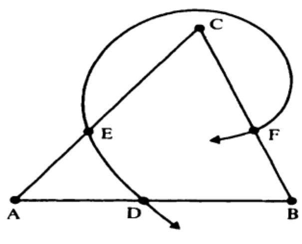
Şekil 3.2 ΔABC üçgenini bir köşesinden kesen l doğrusu

Sonuç olarak, PSA sağlandığında Pasch Postulatının da sağlandığı söylenebilir. Teorem 3.3 de Pasch Postulatını sağlayan bir metrik geometrinin PSA yı da sağladığı gösterilecektir. Sonuç olarak PSA ve PP eşdeğerdir.

Tanım 3.2 PSA yı sağlayan bir metrik geometriye *Pasch geometrisi* denir.

Teorem 3.2 $\mathcal{M} = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$, Pasch Postulatını sağlayan bir metrik geometri olsun. Bu metrik geometride A, B, C doğrudaş olmayan üç nokta ve l doğrusu bu üç noktanın herhangi birinden geçmiyorsa, o zaman l doğrusu ΔABC üçgeninin üç kenarını birden kesemez.

İspat. l doğrusunun ΔABC üçgeninin köşeleri hariç, üçgenin her üç kenarını $\overline{AB} \cap l = \{D\}$, $\overline{AC} \cap l = \{E\}$, $\overline{BC} \cap l = \{F\}$ ve $A - D - B$, $A - E - C$ ve $B - F - C$ olacak şekilde kestiğini kabul edelim. Örneğin D, E ve F noktaları l doğrusunun üzerinde olduklarından, bunlardan biri diğer ikisinin arasındadır. $D - E - F$ olsun (Şekil 3.3). Diğer durumlarda da aynı sonuçlar elde edilmektedir.



Şekil 3.3 ΔABC üçgeninin köşeleri hariç tüm kenarlarını kesen l doğrusu

B , D ve F noktaları doğrudaş değildir. Çünkü aksi halde A, B ve C noktaları da doğrudaş olurdu. Böylece ΔBDF üçgeni elde edilir. $\overline{DF} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{E\}$ olduğundan ΔBDF üçgenine PP uygularsak, ya $\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$ ya da $\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BF} \neq \emptyset$ olacaktır.

$$\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BD} \subset \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BA} = \{A\}$$

dir. $A - D - B$ olup $A \notin \overline{BD}$ dir. Buradan $\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$ elde ederiz. Diğer yandan,

$$\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BF} \subset \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{C\}$$

dir. $C \notin \overline{BF}$ olduğundan $\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BF} = \emptyset$ olacaktır. ΔBDF üçgeninde uygulanan PP ye göre ya $\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BF} \neq \emptyset$ ya da $\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$ olması gerekliydi. O halde kabullenme yanlıştır yani l doğrusu üçgenin köşelerinin herhangi birinden geçmiyorsa üçgenin üç kenarını da kesemez.

Teorem 3.3 Bir metrik geometri PP yi sağlıyorsa aynı zamanda PSA yı da sağlar.

İspat. l bir doğru ve $P \notin l$ olsun. H_1 ve H_2 kümelerini $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ ve $\mathcal{P} - l = H_1 \cup H_2$ şartlarını sağlayacak şekilde tanımlansın:

$$H_1 = \{Q \in \mathcal{P} | Q = P \; veya \; \overline{QP} \cap l = \emptyset\}$$

$$H_2 = \{Q \in \mathcal{P} | Q \notin l \; ve \; \overline{QP} \cap l \neq \emptyset\}$$

Tanım 2.1.2 nin i. ve iii. şartlarının sağlandığı gösterilmelidir.

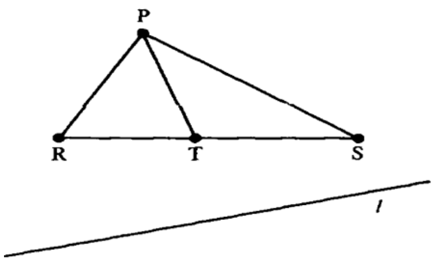
I. Adım: İlk olarak H_1 in konveks olduğu gösterilsin. $R - T - S$ şartını sağlayan $R, S \in H_1$ noktalarını seçelim. $T \in H_1$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için iki durum vardır:

<u>Durum 1(a).</u> R, S, P noktaları doğrudaş olsun. Bu durumda ya $R = P, S = P, R - S - P, S - R - P$ veya $R - P - S$ dir. Bütün durumlarda

$$\overline{RS} \subset \overline{PR} \cup \overline{PS} \tag{3.1}$$

dir. $R \in H_1$ olduğundan $\overline{PR} \cap l = \emptyset$ dir. Bundan dolayı her $F \in \overline{PR}$ elemanı $\overline{PF} \cap l = \emptyset$ özelliğini sağlar. Dolayısıyla $\overline{PR} \subset H_1$ dir. Benzer şekilde $\overline{PS} \subset H_1$ olup (3.1) ifadesinden $\overline{RS} \subset H_1$ dir.

<u>Durum 1(b).</u> R, S, P noktaları doğrudaş olmasınlar. O zaman bir ΔRSP üçgeni elde edilir (Şekil 3.4). $l \cap \overline{PS} = \emptyset$ ve $l \cap \overline{PR} = \emptyset$ olduğundan PP dan $l \cap \overline{RS} = \emptyset$ olmalıdır. Şimdi ΔRTP üçgenini göz önüne alınsın. Eğer $l \cap \overline{RS} = \emptyset$ ve $\overline{RT} \subset \overline{RS}$ olduğundan $\overline{RT} \cap l = \emptyset$ dir. $\overline{RP} \cap l = \emptyset$ olduğundan PP nin ΔRTP üçgenine uygulanmasıyla $\overline{PT} \cap l = \emptyset$ elde edilir. Buradan $T \in H_1$ ve H_1 konvekstir.



Şekil 3.4 Doğrudaş olmayan üç noktadan elde edilen üçgen

II. Adım: Şimdi de H_2 nin konveks olduğu gösterilsin. $\overline{RP} \cap l \neq \emptyset$ ve $\overline{SP} \cap l \neq \emptyset$ olacak şekilde $R, S \in H_2$ noktaları olsun. $R - T - S$ şartını sağlayan $T \in H_2$ noktasının varlığı araştırılacaktır.

Durum 2(a). R, S, P noktaları doğrudaş noktalar olsun. O zaman $\overline{RP} \cap l = \overline{SP} \cap l = \{Q\}$ olacak şekildeki bazı Q noktaları için ya $P - Q - R - S$ yada $P - Q - S - R$ olur. Dolayısıyla $S - T - R$ ise o zaman $P - Q - T$ ve $\overline{TP} \cap l \neq \emptyset$ dir. Böylece $\overline{RS} \subset H_2$ dir.

Durum 2(b). R, S, P noktaları doğrudaş olmasınlar. O zaman $R - T - S$ ise Teorem 3.2 den $T \notin l$ dir (aksi halde l doğrusu ΔPRS üçgeninin her üç kenarını da keserdi). Yine Teorem 3.2 den $\overline{RS} \cap l = \emptyset$ dir ve böylece $\overline{RT} \cap l = \emptyset$ dir. Ancak $\overline{PR} \cap l \neq \emptyset$ idi. PP yi ΔRPT üçgenine uygulanırsa $\overline{PT} \cap l \neq \emptyset$ olur. Sonuç olarak, $T \in H_2$, $\overline{RS} \subset H_2$ ve H_2 konvekstir.

III. Adım: Son olarak $R \in H_1$ ve $S \in H_2$ olduğu kabul edilsin. $\overline{RS} \cap l \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $R = P$ ise $\overline{RS} \cap l = \overline{PS} \cap l \neq \emptyset$ dir ve ispat biter. $R \neq P$ olduğu kabul edilsin.

Durum 3(a). R, S, P doğrudaş olmasınlar. O zaman $\overline{RP} \cap l = \emptyset$ ve $\overline{SP} \cap l \neq \emptyset$ olduğundan, PP den $\overline{RS} \cap l \neq \emptyset$ sağlanır.

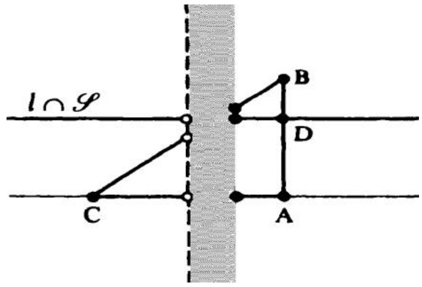
Durum 3(b). R, S, P doğrudaş olsunlar. O zaman $\overline{SP} \cap l \neq \emptyset$ olacağından $P - Q - S$ şartını sağlayan $\overline{SP} \cap l = \{Q\}$ noktası vardır. $R \in \overleftrightarrow{SP}$ ve $R \neq P$, $R \neq S$, $R \neq Q$ ise ya $P - Q - R$, $R - P - Q$ yada $P - R - Q$ dir.

İlk durum gerçekleşmez. Çünkü $R \in H_1$ ve buradan $\overline{PR} \cap l = \emptyset$ olur ki bu da çelişkidir. Eğer ikinci durum $(R - P - Q)$ gerçekleşirse, $R - P - Q - S$ dir ve buradan $\overline{RS} \cap l = \{Q\}$ olur. Son durum olan $P - R - Q$ gerçekleşirse $P - R - Q - S$ elde edilir ve yine $\overline{RS} \cap l = \{Q\}$ olur. Sonuç olarak, $\overline{RS} \cap l \neq \emptyset$ dir.

I. Adım ve II. Adımda H_1 ve H_2 nin konveks olduğunu ve III. Adımda H_1 in bir elemanından H_2 nin bir elemanına çizilen bir doğru parçasının l doğrusunu kesmesi gerektiği görüldü. Sonuç olarak Pasch Postulatını sağlayan bir metrik geometri PSA yı sağlar.

Önerme 3.1 Missing Strip düzlemi bir Pasch geometri değildir.

İspat. $A = (2,0)$, $B = (2,3)$ ve $C = (-2,0)$ olan ΔABC üçgenini göz önüne alalım. $D = (2,2)$ noktasında $\overline{AB}$ nı kesen $l = L_{0,2}$ olacak şekilde $l \cap \mathcal{P}_M$ doğrusu vardır. Ancak $(l \cap \mathcal{P}_M) \cap \overline{AC} = \emptyset$ ve $(l \cap \mathcal{P}_M) \cap \overline{BC} = \emptyset$ olur ki bu durum PP ile çelişir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Missing Strip düzleminde PP

Önerme 3.1 de aynı zamanda PSA yı sağlamayan bir metrik geometri modeli görülmektedir.

3.1 Crossbar Teoremi

Teorem 3.1.1 Pasch geometride boştan farklı, l doğrusu ile kesişmeyen, konveks bir küme $\mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$ nın tüm noktaları l nin aynı tarafındadırlar.

İspat. $A, B \in \mathcal{A}$ ve $B \neq A$ olsun. $\mathcal{A}$ konveks olduğundan $\overline{AB} \subset \mathcal{A}$ dır. Öyleyse$\mathcal{A} \cap l = \emptyset$ den $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ dir. Böylece A ve B noktaları l nin aynı tarafındadırlar. Öyleyse $\mathcal{A}$ nın tüm noktaları l nin aynı tarafındadırlar.

Tanım 3.1.1 Bir metrik geometride,

$$int(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \{A\}$$

kümesine $\overrightarrow{AB}$ *ışınının içi* denir. Bir metrik geometride,

$$int(\overline{AB}) = \overline{AB} - \{A, B\}$$

kümesine $\overline{AB}$ *doğru parçasının içi* denir.

Önerme 3.1.1 Pasch geometride, $int(\overrightarrow{AB})$ ve $int(\overline{AB})$ kümeleri konvekstir.

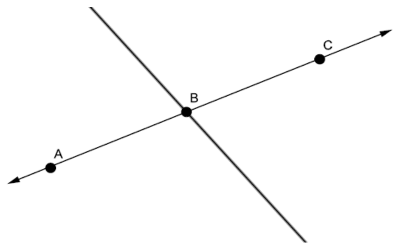
İspat. Pasch geometri bir metrik geometridir. Metrik geometride doğru parçaları ve ışınlar konvekstir. Dolayısıyla $int(\overrightarrow{AB})$ ve $int(\overline{AB})$ konvekstir.

Teorem 3.1.2 Pasch geometride, $\mathcal{A}$ bir doğru, ışın, doğru parçası, bir ışının ya da bir doğru parçasının içi olsun. Eğer $\mathcal{A} \cap l = \emptyset$ olacak şekilde bir l doğrusu varsa o zaman $\mathcal{A}$ nın tamamı, l doğrusunun bir tarafındadır. Eğer $A - B - C$ ve $\overleftrightarrow{AC} \cap l = \{B\}$ olacak şekilde bir B noktası varsa o zaman $int(\overline{BA})$ ve $int(\overrightarrow{BA})$ nın her ikiside l nin aynı tarafında iken $int(\overrightarrow{BA})$ ile $int(\overrightarrow{BC})$, l nin zıt tarafındadır.

İspat. Pasch geometride $\mathcal{A}$ bir doğru, ışın, doğru parçası, bir ışının yada bir doğru parçasının içi olsun. $\mathcal{A} \cap l = \emptyset$ olacak şekilde bir l doğrusu ile $X \neq Y$ olacak şekilde $X, Y \in \mathcal{A}$ alınsın. $\overline{XY} \subset \mathcal{A}$ olduğundan $\overline{XY} \cap l = \emptyset$ olup X ve Y noktaları l nin aynı tarafındadır ve dolayısıyla $\mathcal{A}$ nın her noktası l nin aynı tarafındadır.

$A - B - C$ ve $\overleftrightarrow{AC} \cap l = \{B\}$ olacak şekilde bir B noktası için, $\overrightarrow{BA} - \{B\}$ nin bir elemanı P noktası olsun. Bu durumda $\overrightarrow{PA} \cap l = \emptyset$, $\overline{PA} \cap l = \emptyset$ olup her P noktası için bu durum sağlanacağından $int(\overrightarrow{BA})$ ve $int(\overline{BA})$, l nin aynı tarafındadırlar. $P \in int(\overrightarrow{BA})$, $Q \in$

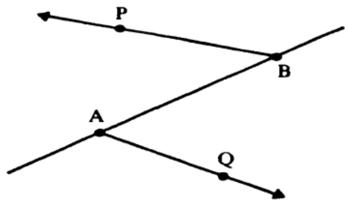
$int(\overrightarrow{BC})$ için $\overline{PQ} \cap l = \{B\} \neq \emptyset$ olup $int(\overrightarrow{BA})$ ile $int(\overrightarrow{BC})$, l doğrusunun zıt tarafındadırlar (Şekil 3.6).



Şekil 3.6 l doğrusunun zıt tarafında bulunan $int(\overrightarrow{BA})$ ve $int(\overrightarrow{BC})$

Teorem 3.1.3 (*Z Teoremi).* Pasch geometride, P ve Q noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt tarafında ise o zaman $\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset$ dir. Özel olarak $\overline{BP} \cap \overline{AQ} = \emptyset$ dir.

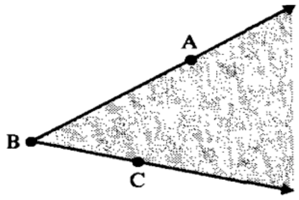
İspat. Eğer P ve Q noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt tarafında ise Teorem 3.1.2 den $int(\overrightarrow{BP})$, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun bir tarafında ve $int(\overrightarrow{AQ})$ ise diğer tarafındadır (Şekil 3.7). Dolayısıyla $int(\overrightarrow{BP}) \cap int(\overrightarrow{AQ}) = \emptyset$ dir. $B \notin \overleftrightarrow{AQ}$ (çünkü A , B , Q doğrudaş değil) olduğundan $\overrightarrow{BP} \cap int(\overrightarrow{AQ}) = \emptyset$ dir. $A \notin \overleftrightarrow{BP}$ den $\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset$ olur. $\overline{BP} \subset \overrightarrow{BP}$ ve $\overline{AQ} \subset \overrightarrow{AQ}$ olduğundan $\overline{BP} \cap \overline{AQ} = \emptyset$ dir.



Şekil 3.7 $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt tarafında bulunan P ve Q noktaları

Şekil 3.7 de kabataslak çizilen ‘Z konfigürasyonu ’görülmektedir.

Tanım 3.1.2 Pasch geometride, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun C noktasını kapsayan tarafı ile $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını kapsayan tarafının arakesitine $\angle ABC$ açısının içi denir ve $int(\angle ABC)$ ile gösterilir.



Şekil 3.8 $\angle ABC$ açısının içi

Teorem 3.1.4 Pasch geometride, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ise o zaman $int(\angle ABC) = int(A'B'C')$ dir.

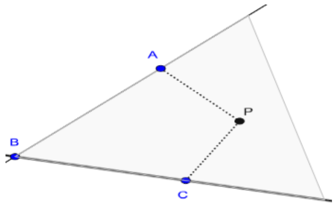
İspat. $\angle ABC = \angle A'B'C'$ olsun. Bu durumda Teorem 2.1 den $B = B'$ dir ve $\overrightarrow{BA}$ ışını $\overrightarrow{B'A'}$ veya $\overrightarrow{B'C'}$ ışını ile çakışacaktır. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ ve $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ olsun. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ ise $A, A' \in int(\overrightarrow{BA})$ dır. l=$\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{B'C'}$ için $l \cap int(\overrightarrow{BA}) = l \cap int(\overrightarrow{B'A'}) = \emptyset$ olduğundan A ve A' noktaları l nin aynı tarafındadır. Bu nedenle $l = \overleftrightarrow{BC}$ nin A noktasını kapsayan tarafı ile $l = \overleftrightarrow{B'C'}$ nin A' noktasını kapsayan tarafı aynıdır. Benzer olarak, $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun C noktasını kapsayan tarafı ile $l = \overleftrightarrow{B'A'}$ nin C' noktasını kapsayan tarafıda aynıdır. Bu nedenle $int(\angle ABC) = int(\angle A'B'C')$ dir.

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'}$ durumunda da benzer şekilde $int(\angle ABC) = int(\angle A'B'C')$ sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.5 Pasch geometride $P \in int(\angle ABC)$ olması için gerek ve yeter şart A ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı tarafında, C ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun aynı tarafında olmasıdır.

İspat. Pasch geometride $P \in int(\angle ABC)$ olsun. Bu durumda P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını kapsayan tarafında ve aynı zamanda $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun C noktasını kapsayan tarafında olacağından A ve P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafında, P ve C noktası $\overleftrightarrow{BA}$ nın aynı tarafındadır.

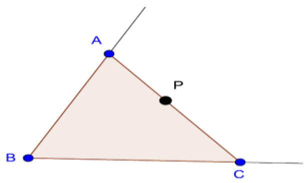
Aksine A ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı tarafında, C ve P noktalarının $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun aynı tarafında olduğu kabul edilsin. $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun A noktasını kapsayan tarafı ile $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun C noktasını kapsayan tarafının arakesiti $int(\angle ABC)$ olup, P noktası bu bölgede olduğundan $P \in int(\angle ABC)$ dir (Şekil 3.9).



Şekil 3.9 $\angle ABC$ açısının içinde bir nokta

Teorem 3.1.6 Pasch geometride, ΔABC verilsin. Eğer $A-P-C$ ise o zaman $P \in int(\angle ABC)$ ve $int(\overline{AC}) \subset int(\angle ABC)$ dir.

İspat. $A-P-C$ durumunda $P \neq A$ ve $P \neq C$ dir. Buradan $P \in int(\overline{AC})$ olmalıdır. Aynı zamanda $A-P-C$ den A ve P noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafında, C ve P noktaları $\overleftrightarrow{BA}$ nın aynı tarafında olup Teorem 3.1.5 den $P \in int(\angle ABC)$ dir. O halde $int(\overline{AC}) \subset int(\angle ABC)$ dir (Şekil 3.10).



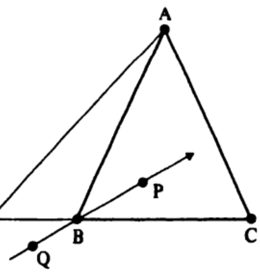
Şekil 3.10 $A-P-C$ ve $P \in int(\angle ABC)$ olan P noktası

Teorem 3.1.7 (Crossbar Teoremi). Pasch geometride $P \in int(\angle ABC)$ ise o zaman $\overrightarrow{BP}$ ışını $\overline{AC}$ doğru parçasını $A-F-C$ olacak şekilde bir tek F noktasında keser.

İspat. $E-B-C$ olacak şekilde bir E noktası alınsın (Şekil 3.11). Teorem 3.1.5 den P ve C noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin aynı tarafındadırlar ve Teorem 3.1.2 den E ve C noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt tarafındadırlar. Bu durumda P ve E noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin zıt tarafında olur. Z Teoreminden $\overrightarrow{BP} \cap \overline{AE} = \emptyset$ dir. $P-B-Q$ olacak şekilde bir Q noktası alınsın. O zaman Q ve A noktaları $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{EC}$ doğrusunun zıt tarafında olurlar. Buradan $\overrightarrow{BQ} \cap \overline{AE} = \emptyset$ dir. Sonuç olarak $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AE} = \emptyset$ olur. PP nin ΔECA üçgenine uygulanmasıyla $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ bulunur. A, B, C doğrudaş olmadığından herhangi bir F noktası için $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AC} = \{F\}$ olur.

$F \neq A$ dır, aksi takdirde $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AE} \neq \emptyset$ olurdu. B, P, C doğrudaş olmadığından $F \neq C$ dir. O halde $F \in int(\overline{AC})$ dir. Ayrıca P, A ve F noktalarının hepsi $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafındadırlar. Bu nedenle $F \in \overleftrightarrow{BP}$ ve $F \in \overrightarrow{BP}$ demektir.

Sonuç olarak $\overrightarrow{BP}$ ışını, $\overline{AC}$ yi $A - F - C$ olacak şekilde bir tek F noktasında keser.

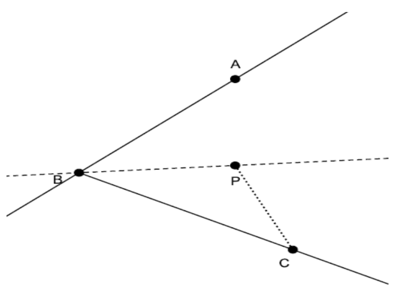


Şekil 3.11 $\overline{AC}$ doğru parçasını $A - F - C$ olacak şekilde bir F noktasında kesen $\overrightarrow{BP}$ ışını

Teorem 3.1.8 Pasch geometride, $P \in int(\angle ABC)$ olacak şekildeki P noktasının $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şart A ve C noktalarının $\overleftrightarrow{BP}$ nın zıt tarafında olmasıdır.

İspat. *<u>Gerek Şart:</u>* Bir Pasch geometride $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ olsun. $P \in int(\angle ABC)$ ise Teorem 3.1.7 den $\overrightarrow{BP} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ olup, Teorem 2.1.1 (i) den A ve C noktaları $\overleftrightarrow{BP}$ nın zıt tarafındadır.

<u>Yeter Şart</u>: A ve C noktaları $\overleftrightarrow{BP}$ nın zıt tarafında olsun. Teorem 3.1.5 gereğince C ve P noktaları $\overleftrightarrow{BA}$ doğrusunun aynı tarafındadırlar. Teorem 2.1.1 (ii) den $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ bulunur (Şekil 3.12).



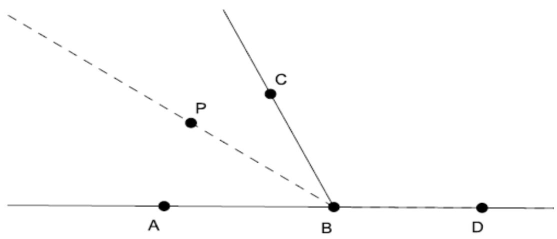
Şekil 3.12 $\overleftrightarrow{BP}$ nın zıt tarafında olan A ve C noktaları

Teorem 3.1.9 Pasch geometride, $A - B - D$ ise o zaman $P \in int(\angle ABC)$ olması için gerek ve yeter şart $C \in int(\angle DBP)$ olmasıdır.

İspat. Bir Pasch geometride $A - B - D$ olsun (Şekil 3.13).

Gerek Şart: P $\in int(\angle ABC)$ ise A ve P noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafındadırlar. A ve D noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt tarafındadırlar. Teorem 2.1.3 den P ile D noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt tarafındadırlar. Teorem 3.1.8 gereğince $\overline{PC} \cap \overleftrightarrow{DB} = \emptyset$ ve $C \in int(\angle DBP)$ dir.

Yeter Şart: Şimdi de $C \in int(\angle DBP)$ olsun. C ve D noktaları $\overleftrightarrow{BP}$ nin aynı tarafındadırlar. $A - B - D$ ve $\overline{AD} \cap \overrightarrow{BP} \neq \emptyset$ olduğundan Teorem 2.1.1 (i) den D ve A noktaları $\overrightarrow{BP}$ nin ve $\overrightarrow{BP} \subset \overleftrightarrow{BP}$ zıt tarafındadırlar. Teorem 2.1.3 den A ile C noktaları $\overleftrightarrow{BP}$ nin zıt tarafındadırlar. Teorem 3.1.8 gereğince $P \in int(\angle ABC)$ dir.



Şekil 3.13 $P \in int(\angle ABC)$ ve $C \in int(\angle DBP)$ olacak şekildeki noktalar

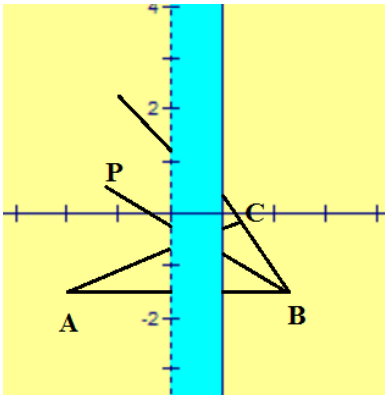
Teorem 3.1.10 Pasch geometride, $\angle ABC$ ve bir P noktası verilsin. $\overrightarrow{BP} \cap int(\overline{AC}) \neq \emptyset$ ise $P \in int(\angle ABC)$ dir.

İspat. $\overrightarrow{BP} \cap int(\overline{AC}) \neq \emptyset$ Teorem 2.1.1 (ii) den A ile C noktaları $\overleftrightarrow{BP}$ doğrusunun zıt tarafında ve Teorem 3.1.8 gereğince $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ ve $P \in int(\angle ABC)$ dir.

Bu teorem Crossbar Teoreminin tersidir.

Teorem 3.1.11 Crossbar Teoremi Missing Strip düzleminde sağlanmaz.

İspat. Crossbar Teoremi, Pasch geometrisinde sağlanan bir teoremdir. Fakat Önerme 3.1 den Missing Strip düzlemi bir Pasch geometri değildir. O halde Crossbar Teoremi Missing Strip düzleminde sağlanmaz.



Şekil 3.14 Missing Strip düzleminde $\overline{AC}$ yi kesmeyen $\overrightarrow{BP}$ ışını

Tanım 3.1.3 Bir metrik geometride, her $D \in int(\overrightarrow{BA})$ ve $E \in int(\overrightarrow{BC})$ olmak üzere,

$$cint(\angle ABC) = \{P|D - P - E\}$$

ifadesine $\angle ABC$ *açısının Crossbar içi* denir.

Teorem 3.1.12 Pasch geometride $cint(\angle ABC) = int(\angle ABC)$ dir.

İspat. Pasch geometride $P \in cint(\angle ABC)$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.5 den P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ nin D noktasını içeren tarafındadır ve $D \in int(\overrightarrow{BA})$ olduğundan aynı zamanda P noktası $\overleftrightarrow{BC}$ nin A noktasını içeren tarafındadır. Benzer şekilde P noktası $\overleftrightarrow{BA}$ nin E noktasını içeren tarafındadır ve $E \in int(\overrightarrow{BC})$ olduğundan P noktası $\overleftrightarrow{BA}$ nin C noktasını içeren tarafındadır. Tanım 3.1.2 den $P \in int(\angle ABC)$ olur. O halde $cint(\angle ABC) = int(\angle ABC)$ dir.

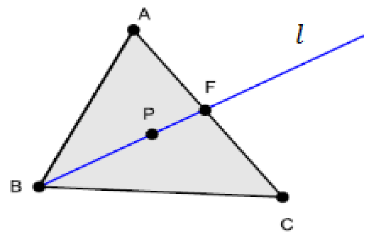
Tanım 3.1.4 Bir Pasch geometride ΔABC üçgeninin $\overleftrightarrow{AB}$ kenarının C noktasını, $\overleftrightarrow{BC}$ kenarının A noktasını ve $\overleftrightarrow{CA}$ kenarının B noktasını içeren bölgelerinin kesişimine ΔABC *üçgeninin içi* denir ve $int(\Delta ABC)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.13 Pasch geometride, $int(\Delta ABC)$ konvekstir.

İspat. Pasch geometri bir metrik geometridir. Metrik geometride üçgenin içi $int(\Delta ABC)$ konvekstir.

Teorem 3.1.14 Pasch geometride, l bir doğru ve $l \cap int(\Delta ABC) \neq \emptyset$ ise o zaman $l \cap (\Delta ABC)$ nin sonucu iki noktadır.

İspat. $l \cap int(\Delta ABC) = \{P\}$ olsun (Şekil 3.14). Bu durumda $P \in int(\angle ABC)$ dir. Teorem 3.1.7 deki Crossbar Teoreminden, bir Pasch geometride $P \in int(\angle ABC)$ ise o zaman $\overrightarrow{BP}$ ışını $\overline{AC}$ doğru parçasını yalnızca $A - F - C$ olacak şekilde bir F noktasında keser. Aynı zamanda $P \in l$ olduğundan $\overrightarrow{BP} \subset l$ dir. Sonuç olarak l doğrusu ΔABC üçgenini B ve F gibi iki noktada keser.



Şekil 3.15 $l \cap int(\Delta ABC) \neq \emptyset$ olması durumu

Teorem 3.1.15 Pasch geometride,

$$int(\Delta ABC) = int(\angle ABC) \cap int(\angle BCA) \cap int(CAB)$$

dir.

İspat. $X \in int(\Delta ABC)$ olsun (Şekil 3.15). Teorem 3.1.5 gereğince X ve C noktası, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun aynı tarafında ve X ve A noktası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı tarafında olduğundan,

$$X \in int(\angle ABC)$$

olur. Yine Teorem 3.1.5 den, X ve A noktası, $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı tarafında ve X ve B noktası $\overleftrightarrow{CA}$ doğrusunun aynı tarafında olduğundan,

$$X \in int(\angle BCA)$$

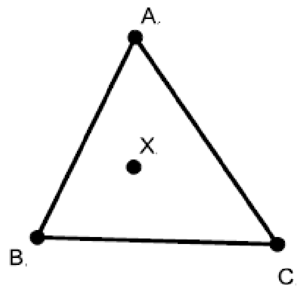
olur. Teorem 3.1.5 den, X ve B noktası, $\overleftrightarrow{CA}$ doğrusunun aynı tarafında ve X ve C noktası $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun aynı tarafında olduğundan,

$$X \in int(\angle CAB)$$

olur. Buradan, $X \in int(\angle ABC) \cap int(\angle BCA) \cap int(\angle CAB)$ bulunur. Öyleyse $int(\Delta ABC) \subset int(\angle ABC) \cap int(\angle BCA) \cap int(\angle CAB)$ dir. Tanım 3.1.4 den $int(\angle ABC) \cap int(\angle BCA) \cap int(\angle CAB) \subset int(\Delta ABC)$ dir. Sonuç olarak,

$$int(\Delta ABC) = int(\angle ABC) \cap int(\angle BCA) \cap int(\angle CAB)$$

dir.



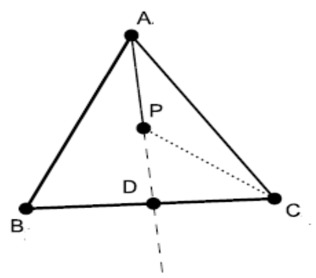
Şekil 3.16 $int(\Delta ABC)$

Teorem 3.1.16 Pasch geometride, $B - D - C$ olmak üzere,

$$int(\Delta ABC) = \{P \mid A - P - D\}$$

dir.

İspat. $P \in int(\Delta ABC)$ olsun (Şekil 3.16). Bu durumda Teorem 3.1.8 den $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{BA} = \emptyset$ olup, B ve C noktaları $\overleftrightarrow{AP}$ nin zıt tarafındadır. Teorem 3.1.7 den $\overrightarrow{AP} \subset \overleftrightarrow{AP}$ ışını $\overline{BC}$ yi $B - D - C$ olan bir D noktasında keser. Aynı zamanda $D \in \overrightarrow{AP}$ dir. $P \in int(\Delta ABC)$ olduğundan $A - P - D$ dir.



Şekil 3.17 $P \in int(\Delta ABC)$ durumu

Teorem 3.1.17 Pasch geometride, $\Delta ABC \cup int(\Delta ABC)$ konvekstir.

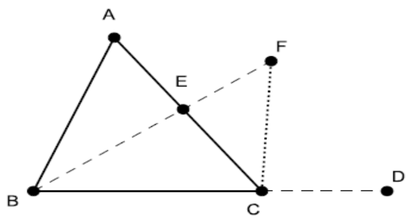
İspat. Önerme 3.1.1 den $int(\overline{AB})$, $int(\overline{BC})$ ve $int(\overline{AC})$ konvekstir. $int(\overline{AB}) \subset \overline{AB}$, $int(\overline{BC}) \subset \overline{BC}$ ve $int(\overline{AC}) \subset \overline{AC}$ olup, $\overline{AB}, \overline{BC}$, $\overline{AC}$ doğruları da konvekstir. O halde ΔABC konvekstir. Teorem 3.1.13 den $int(\Delta ABC)$ de konveks olduğundan $\Delta ABC \cup int(\Delta ABC)$ konvekstir.

Teorem 3.1.18 Pasch geometride, $P \in int(\angle ABC)$ ise $int(\overrightarrow{BP}) \subset int(\angle ABC)$ dir.

İspat. $P \in int(\angle ABC)$ olsun. $X \in int(\overrightarrow{BP})$ noktası alınsın. $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ olup Teorem 3.1.8 den A ve C noktaları $\overleftrightarrow{BP} = \overleftrightarrow{BX}$ doğrusunun zıt tarafındadırlar. X noktası hem $\overrightarrow{BA}$ nın C noktasını içeren tarafında hem de $\overrightarrow{BC}$ nin A noktasını içeren tarafındadır. O halde $X \in int(\angle ABC)$ olacağından $int(\overrightarrow{BP}) \subset int(\angle ABC)$ dir.

Teorem 3.1.19 Pasch geometride, bir ΔABC üçgeni ve $B - C - D$, $A - E - C$ ve $B - E - F$ olacak şekilde D, E, F noktaları verilsin. Bu takdirde $F \in int(\angle ACD)$ dir.

İspat. $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{FE} = \emptyset$ (Şekil 3.18) olup Teorem 3.1.8 den E ve D noktaları $\overleftrightarrow{CF}$ nin zıt tarafındadır ve $F \in int(\angle ECD)$ olur. $A - E - C$ olduğundan $\overrightarrow{CE}$ ile $\overrightarrow{CA}$ aynıdır. O halde $F \in int(\angle ACD)$ dir.



Şekil 3.18 $F \in int(\angle ACD)$ olması durumu

Teorem 3.1.20 Pasch geometride eğer $A - D - B$, C ve E noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun aynı tarafında ise o zaman $\overrightarrow{DE} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ ya da $\overrightarrow{DE} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ dir.

İspat. B ve C noktaları $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusunun aynı tarafında olsun. A noktası, B noktası ile $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusunun zıt taraflarında olduklarından, C noktası ile de zıt tarafta olurlar. Teorem 2.1.1 den $\overleftrightarrow{DE} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ dır. $\overrightarrow{DE} \subset \overleftrightarrow{DE}$ den $\overrightarrow{DE} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ olur.

A ve C noktaları $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusunun aynı tarafında olsun. B noktası, A noktası ile $\overleftrightarrow{DE}$ doğrusunun zıt taraflarında olduklarından, C noktası ile de zıt tarafta olurlar. Teorem 2.1.1 den $\overleftrightarrow{DE} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ dır. $\overrightarrow{DE} \subset \overleftrightarrow{DE}$ den $\overrightarrow{DE} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ bulunur.

Teorem 3.1.21 Pasch geometride, $P \in int(\angle ABC)$ ve $D \in \overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{BC}$ oluyorsa $A - P - D$ dir.

İspat. $D \in \overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{BC}$ olduğundan $D \in \overrightarrow{BC}$ dir. O halde $B - D - C$ veya $B - C - D$ dir. $P \in int(\angle ABC)$ ve $\overline{DP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ olduğundan Teorem 3.1.8 gereğince A ile D noktaları $\overleftrightarrow{BP}$ doğrusunun zıt tarafındadırlar. Sonuç olarak $A - P - D$ dir.

Teorem 3.1.22 Pasch geometride, $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ ise $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP}$ veya $P \in int(\angle ABC)$ veya $C \in int(\angle ABP)$ dir.

İspat. $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ ise Teorem 2.1.1 (ii) den C ve P noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin aynı tarafındadırlar. Bu durumda $P \in \overrightarrow{BC}$ veya $P \notin \overrightarrow{BC}$ olacaktır.

i) $P \in \overrightarrow{BC}$ ise $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP}$ dir.

ii) $P \notin \overrightarrow{BC}$ olsun. $\overline{CP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ olduğundan A ve C noktaları ya $\overrightarrow{BP}$ nin zıt tarafında ya da aynı tarafında olur. A ve C noktaları $\overrightarrow{BP}$ ışınının zıt tarafında ise Teorem 3.1.8 gereğince $P \in int(\angle ABC)$ dir. A ve C noktaları $\overrightarrow{BP}$ ışınının aynı tarafında ise, A ve P noktaları, $\overrightarrow{BC}$ nin zıt tarafında olacağından Teorem 3.1.8 den $C \in int(\angle ABP)$ dir.

Teorem 3.1.23 Pasch geometride, $P \in int(\angle ABC)$ ise P den geçen, hem $\overrightarrow{BA}$ hem de $\overrightarrow{BC}$ yi kesen fakat B noktasından geçmeyen bir l doğrusu vardır.

İspat. Pasch geometride, $P \in int(\angle ABC)$ ise Teorem 3.1.12 den $cint(\angle ABC) = int(\angle ABC)$ olup $E \in int(\overrightarrow{BC})$, $D \in int(\overrightarrow{BA})$ noktaları için $D - P - E$ şartını sağlayan doğru $l = \overleftrightarrow{DE}$ olsun. $E \in int(\overrightarrow{BC})$ olduğundan $E \neq B$ ve $D \in int(\overrightarrow{BA})$ olduğundan $D \neq B$ olup, l doğrusu B noktasından geçmez.

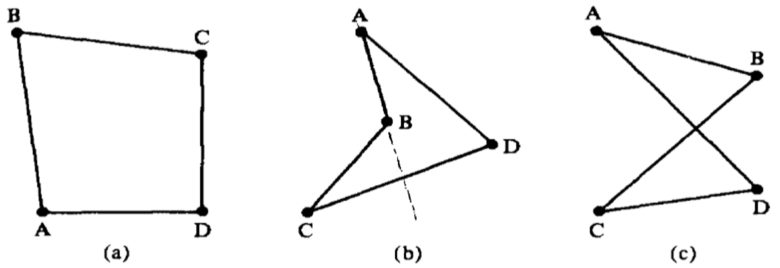
3.2 Konveks Dörtgenler

Tanım 3.2.1 Bir metrik geometride $\{A, B, C, D\}$ kümesi, herhangi üçü doğrudaş olmayan noktalar kümesi olsun. Eğer $int(\overline{AB}), int(\overline{BC}), int(\overline{CD})$ ve $int(\overline{DA})$ den herhangi ikisi kesişmiyorsa,

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$$

ifadesine bir *dörtgen* denir.

Şekil 3.18 in (a) ve (b) parçaları bir dörtgeni temsil ederken (c) bir dörtgen değildir.



Şekil 3.19 Dörtgen ve dörtgen olmayan şekiller

Teorem 3.2.1 Bir metrik geometride $\square ABCD$ verilsin. Bu durumda,

$$\square ABCD = \square BCDA = \square CDAB = \square DABC = \square ADCB = \square DCBA = \square CBAD = \square BADC$$

dir. Ancak $\square ABCD$ ve $\square ABDC$ eş değildir.

İspat. Tanım 3.2.1 den,

$$\begin{aligned} \square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} &= \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} \cup \overline{AB} = \overline{CD} \cup \overline{DA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BC} \\ &= \overline{DA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} = \overline{AD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CB} \cup \overline{BA} \\ &= \overline{DC} \cup \overline{CB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AD} = \overline{CB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DC} \\ &= \overline{BA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CB} \end{aligned}$$

olup,

$$\square ABCD = \square BCDA = \square CDAB = \square DABC = \square ADCB = \square DCBA = \square CBAD = \square BADC$$

dir. Ancak,

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} \neq \overline{AB} \cup \overline{BD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CA} = \square ABDC$$

olur.

Tanım 3.2.2 $\square ABCD$ dörtgeninde $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ *kenarlar*; A, B, C, D *köşeler*; $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ ve $\angle DAB$ *açılar*; $\overline{AC}$ ve $\overline{BD}$ *köşegenler* olarak adlandırılır. Köşegenlerin bitim noktalarına *karşılıklı köşeler*, iki kenarın ortak bir köşesi varsa bu kenarlara *komşu kenarlar,* aksi halde *karşılıklı kenarlar* denir. Eğer iki açının ortak kenarı varsa bu açılara *komşu açılar* aksi halde *karşılıklı açılar* denir.

Teorem 3.2.2 Bir metrik geometride $\square ABCD = \square PQRS$ ise o zaman $\{A, B, C, D\} = \{P, Q, R, S\}$ dir. Ayrıca $A = P$ ise $C = R$ ve $B = Q$ veya $B = S$ dir. O halde, $\square ABCD$ dörtgeninin kenarları, açıları ve köşegenleri $\square PQRS$ dörtgeniyle aynıdır.

İspat. $\square ABCD = \square PQRS$ ise Tanım 3.2.1 den,

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} = \overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RS} \cup \overline{SP} = \square PQRS$$

dir. $A = P$ ise Teorem 3.2.1 den,

$$\square ABCD = \square CBAD = \overline{CB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DC}$$

$$\square PQRS = \square RQPS = \overline{RQ} \cup \overline{QP} \cup \overline{PS} \cup \overline{SR}$$

yazılabilir. $\square ABCD = \square PQRS$ olduğundan $\square CBAD = \square RQPS$ dir. Buradan $C = R$ ve $B = Q$ dur. Benzer şekilde $\square ABCD = \square PQRS = \square\ PSRQ$ dir. Buradan $C = R$ ve $B = S$ dir. Tanım 3.2.2 den, $\square ABCD$ dörtgeninin kenarları, açıları ve köşegenleri $\square PQRS$ dörtgeniyle aynıdır.

Tanım 3.2.3 Pasch geometride, bir $\square ABCD$ dörtgeninin her kenarı, tamamen karşı kenar tarafından belirlenen yarı düzlemdeyse, bu durumda $\square ABCD$ dörtgenine *konveks dörtgen* denir.

Şekil 3.18 (a) konveks dörtgendir fakat (b) konveks dörtgen değildir.

Teorem 3.2.3 Pasch geometride, bir dörtgenin konveks dörtgen olması için gerek ve yeter şart dörtgenin her bir açısının karşı köşesindeki açının iç kısmında bulunmasıdır.

İspat. *Gerek şart:* Bir Pasch geometride $\square ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. Bu durumda Tanım 3.2.3 den dörtgenin her bir kenarı karşı kenarın belirlediği yarı düzlemdedir. Bu durumda $\overline{DC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ nin ayırdığı bir yarı düzlemdedir ve $\overline{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ nin ayırdığı bir yarı düzlemdedir. $\overline{DC} \cap \overline{AD} = \{D\}$ olup D noktası, $\overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AB}$ ışınının C noktasını içeren yarı düzleminde ve $\overrightarrow{BC} \subset \overleftrightarrow{BC}$ ışınının A noktasını içeren yarı düzlemindedir. Tanım 3.1.2 den $D \in int(\angle ABC)$ olur.

Benzer şekilde $C \in int(\angle DAB)$, $B \in int(\angle ADC)$ ve $A \in int(\angle BCD)$ olduğu da gösterilebilir.

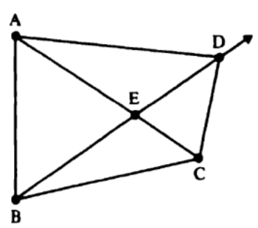
<u>*Yeter şart:*</u> Bir $\square ABCD$ dörtgeninin her bir açısı karşı köşesindeki açının iç kısmında olsun. Bu durumda $D \in int(\angle ABC)$, $C \in int(\angle DAB)$, $B \in int(\angle ADC)$ ve $A \in int(\angle DCB)$ olur.

$D \in int(\angle ABC)$ olduğundan D noktası $\overrightarrow{BA}$ nın C noktasını içeren tarafında ve $C \in int(\angle DAB)$ olduğundan C noktası da $\overrightarrow{AB}$ nin D noktasını içeren tarafındadır. C ve D noktaları $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ nin aynı tarafındadır. Teorem 2.1.1 (ii) den $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$ olduğu için Teorem 3.1.2 den $\overline{CD}$, $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ nin ayırmış olduğu yarı düzlemdedir.

Benzer şekilde dörtgenin diğer kenarlarının da karşı kenarlarının ayırdığı yarı düzlemlerde olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $\square ABCD$ bir konveks dörtgendir.

Teorem 3.2.4 Pasch geometride, bir konveks dörtgenin köşegenleri kesişir.

İspat. $\square ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. Teorem 3.2.3 den $D \in int(\angle ABC)$ dir. Teorem 3.1.7 den (Crossbar Teoremi) $\overrightarrow{BD}$ ışını $\overline{AC}$ doğru parçasını $A - E - C$ olacak şekilde bir tek E noktasında keser. $E \in \overline{BD}$ olduğu gösterilmelidir. $C \in int(\angle DAB)$ olup Crossbar Teoreminden $\overrightarrow{AC}$ ışını $\overline{DB}$ doğru parçasını $B - F - D$ olan bir tek F noktasında keser. Bu durumda $\overleftrightarrow{AC} \neq \overleftrightarrow{BD}$ olduğundan $\{E\} = \overline{AC} \cap \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cap \overline{BD} = \{F\}$ dir. O halde $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\} = \{F\}$ dir (Şekil 3.19).



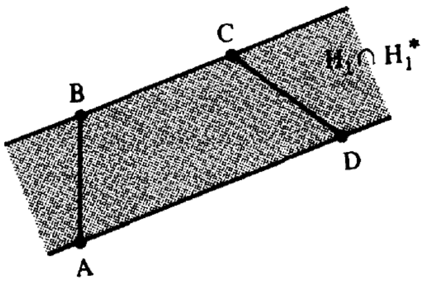
Şekil 3.20 Konveks dörtgen

Teorem 3.2.5 Pasch geometride, $\square ABCD$ bir dörtgen olsun. Eğer $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ise $\square ABCD$ bir konveks dörtgendir.

İspat. $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ise $\overline{BC}$ doğru parçası $\overleftrightarrow{AD}$ doğrusunun bir tarafında ve $\overline{AD}$ doğru parçası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun bir tarafındadır (Şekil 3.20). $\overline{AB}$ doğru parçasının $\overleftrightarrow{CD}$ nin bir tarafında olduğu gösterilmelidir.

$\overline{AB}$ doğru parçasının $\overleftrightarrow{CD}$ nin bir tarafında olmadığı kabul edilsin. O zaman $int(\overline{AB}) \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset$ olur. $\overleftrightarrow{BC}$ nin A yı içeren tarafı H_1 ve $\overleftrightarrow{AD}$ nin B yi içeren tarafı H_1^* olsun. Teorem 3.1.2 den $int(\overline{AB}) \subset H_1 \cap H_1^*$ olur. Bu nedenle $\emptyset \neq int(\overline{AB}) \cap \overleftrightarrow{CD} \subset H_1 \cap H_1^* \cap \overleftrightarrow{CD} = int(\overline{CD})$ dir. Buradan $int(\overline{AB}) \cap int(\overline{CD}) \neq \emptyset$ olur. Bu sonuç ise dörtgen tanımıyla çelişmektedir.

Sonuç olarak, $\overline{AB}$ doğru parçası tamamen $\overleftrightarrow{CD}$ nin bir tarafında ve benzer şekilde $\overline{CD}$ doğru parçası tamamen $\overleftrightarrow{AB}$ nin bir tarafındadır. Dolayısıyla $\square ABCD$ bir konveks dörtgendir.



Şekil 3.21 Pasch geometride $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ olan $\square ABCD$ konveks dörtgen

Teorem 3.2.5 den anlaşılacağı üzere yamuk bir konveks dörtgendir.

Teorem 3.2.6 Pasch geometride, $\square ABCD$ dörtgeninin konveks dörtgen olması için gerek ve yeter şart dörtgenin her kenarının, karşı kenarın belirttiği doğruyla kesişmemesidir.

İspat. $\square ABCD$ bir dörtgen olsun.

<u>*Gerek Şart:*</u> $\square ABCD$ bir konveks dörtgen ise Tanım 3.2.3 den dörtgenin her kenarı, tamamen karşı kenarın belirttiği yarı düzlemdedir. Bu durumda Teorem 2.1.1 (ii) den her kenar karşı kenarın belirttiği doğruyla kesişmez.

Yeter Şart: $\square ABCD$ dörtgeninde her kenar, karşı kenarın belirttiği doğruyla kesişmesin. Bu durumda Teorem 2.1.1 (ii) ve Teorem 3.1.1 den dörtgenin bir kenarı karşı kenarın belirttiği yarı düzlemdedir. O halde $\square ABCD$ konvekstir.

Tanım 3.2.4 $\square ABCD$ konveks dörtgeninde $\overleftrightarrow{AB}$ kenarının C ve D noktalarını kapsayan kısmı, $\overleftrightarrow{BC}$ kenarının A ve D noktalarını kapsayan kısmı, $\overleftrightarrow{CD}$ kenarının A ve B noktalarını kapsayan kısmı ile $\overleftrightarrow{DA}$ kenarının B ve C noktalarını kapsayan kısmının kesişimine $\square ABCD$ dörtgeninin içi denir ve $int(\square ABCD)$ ile gösterilir.

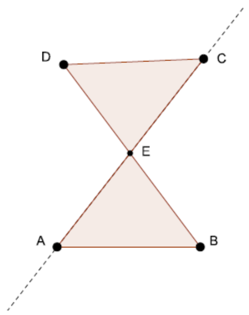
Teorem 3.2.7 $int(\square ABCD)$ konvekstir.
İspat. Teorem 3.1.17 den Pasch geometrideki üçgenler ve üçgenlerin içi konvekstir. Dörtgenlerde üçgenlerden oluştuklarından $int(\square ABCD)$ konvekstir.

Teorem 3.2.8 Pasch geometride, bir dörtgenin köşegenleri kesişiyorsa dörtgen konveks dörtgendir.
İspat. $\square ABCD$ dörtgeninin köşegenleri $\overline{AC}$ ve $\overline{BD}$, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.10 dan $\overrightarrow{AE} \cap int(\overline{BD}) \neq \emptyset$ olup $E \in int(\angle DAB)$ olur. $\overline{AC} \subset \overrightarrow{AE}$ olduğundan $C \in int(\angle DAB)$ olur. Benzer şekilde $\overrightarrow{BE} \cap int(\overline{AC}) \neq \emptyset$ olup $E \in int(\angle ABC)$ olur. $\overline{BD} \subset \overrightarrow{BE}$ olduğundan $D \in int(\angle ABC)$ olur ve bu şekilde $A \in int(\angle BCD)$, $B \in int(\angle ADC)$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.3 den $\square ABCD$ dörtgeni konvekstir.

Teorem 3.2.9 Pasch geometride, bir dörtgenin en az bir köşesi karşı açısının içindedir.
İspat. $\square ABCD$ bir dörtgen olsun. $\square ABCD$ dörtgeninin hiçbir köşesi karşı açısının içinde olmasın. Bu durumda $B \notin int(\angle DCA)$ (Şekil 3.21) ve B noktası ya $\overrightarrow{CD}$ ışınının A noktasını kapsayan tarafında yada $\overrightarrow{CA}$ ışınının D noktasını kapsayan tarafında bulunur. B noktası $\overrightarrow{CD}$ ışınının A noktasını kapsayan tarafında olsun. Bu durumda Teorem 3.1.3 (Z Teoremi) den $\overrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \emptyset$ olup D ve B noktaları $\overrightarrow{CA}$ nın zıt tarafında olurlar. O halde Teorem 2.1.1 den $\overrightarrow{CA} \cap \overline{DB} \neq \emptyset$ olur. Eğer $E = D$ (veya $E = B$) olursa bu durumda C, D, A (veya C, B, A) doğrusal olur ki bu durumda Tanım 3.2.1 den $\square ABCD$ bir dörtgen olmaz. $D - E - B$ olması durumunda ise, $int(\overline{BD}) \cap \overleftrightarrow{CA} = int(\overline{BD}) \cap$

$int(\overleftrightarrow{CA}) = int(\overline{BD}) \cap int(\overline{CA}) \neq \emptyset$ olur ki bu durumda da Tanım 3.2.1 den $\square ABCD$ bir dörtgen olmaz. Bu bir çelişkidir. O halde $\square ABCD$ nin en az bir köşesi karşı kenarının içindedir.

B noktasının $\overrightarrow{CA}$ ışınının D noktasını kapsayan tarafında olması durumu da aynı şekilde gösterilebilir.



Şekil 3.22 Hiçbir köşesi karşı açısının içinde olmayan dörtgen

4. AÇILAR

Tanım 4.1 Bir $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d]$ Pasch geometrisinde, A tüm açıların kümesi olmak üzere, aşağıdaki dört koşulu sağlayan $m: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *açı ölçme fonksiyonu* denir.

i) Eğer $\angle ABC \in A$ ise $0 < m(\angle ABC) < 180$ dir.

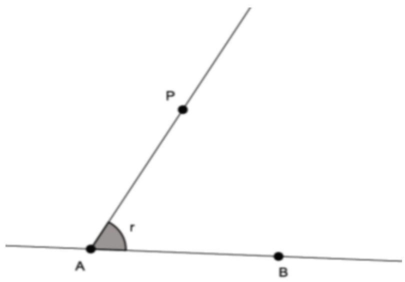
ii) H yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(\angle BAP) = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır (Şekil 4.1).

iii) Eğer D noktası $\angle ABC$ nın iç bölgesinde ise (Şekil 4.2),

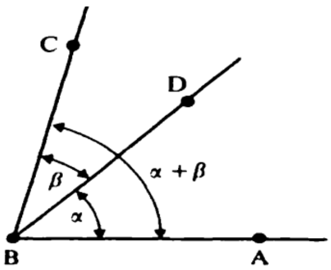
$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC)$$

dir.

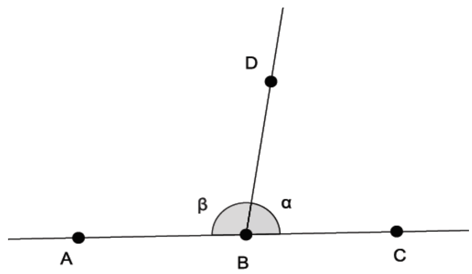
iv) Eğer $A - B - C$ ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise, $m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = 180$ dir (Şekil 4.3) (Yüksel 2012).



Şekil 4.1 $\angle ABC$ açısı



Şekil 4.2 $\angle ABD, \angle DBC$ ve $\angle ABC$ açıları arasındaki ilişki



Şekil 4.3 Toplamları 180 olan açılar

Burada (ii) aksiyomuna *açı oluşturma aksiyomu,* (iii) aksiyomuna ise *açı ekleme aksiyomu* adı verilir.

Tanım 4.2 $[\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},d]$ Pasch geometrisine, bu geometri üzerinde tanımlı bir m açı ölçme fonksiyonuyla birlikte *açıölçer (protractor) geometri* denir ve $[\mathcal{P},\mathcal{L},d,m]$ ile gösterilir (Yüksel2012).
$[\mathcal{P},\mathcal{L},d,m]$ açıölçer (protractor) geometrisi, $[\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},d]$ Pasch geometrisi ve m açı ölçme fonksiyonundan oluşur.

Tanım 4.3 Kartezyen düzlemde,

$$m_E(\angle ABC) = cos^{-1}\left(\frac{\langle A-B, C-B\rangle}{\|A-B\|\cdot\|C-B\|}\right)$$

eşitliğine $\angle ABC$ açısının *Kartezyen açı ölçümü* denir.

Önerme 4.1 X, Y iki vektör ve bu vektörler arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\langle X, Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos\theta$$

dir.

Önerme 4.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $X, Y \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\|\|Y\|$$

dir. Burada eşitsizliğin sağlanması için ya $Y = (0,0)$ ya da $X = tY$ $(t \in \mathbb{R})$ olmalıdır.
İspat. Eğer $Y = (0,0)$ ise $|\langle X, Y\rangle| = 0 = \|X\|\|Y\|$ olduğu açıkça görülür ve eşitlik sağlanır. $Y \neq (0,0)$ olduğu kabul edilsin. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \|X - tY\|^2$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda,

$$g(t) = \langle X - tY, X - tY\rangle = \langle X, X\rangle - 2t\langle X, Y\rangle + t^2\langle Y, Y\rangle$$

$Y \neq (0,0)$ olduğundan $\langle Y, Y \rangle \neq 0$ olup $g(t)$ ikinci dereceden bir fonksiyon olur. $g(t) = \|X - tY\|^2 \geq 0$ olacağından g fonksiyonunun iki farklı reel kökü yoktur. Bu durumda,

$$\langle X, Y \rangle^2 - \langle Y, Y \rangle \langle X, X \rangle \leq 0$$

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\|$$

elde edilir.

$Y \neq (0,0)$ iken $g(t) = \|X - tY\|^2 = 0$ olduğunda ikinci dereceden fonksiyonun çift kat kökü vardır ve $X = tY, (t \in \mathbb{R})$ olur. Bu durumda yine $|\langle X, Y \rangle| = \|X\| \|Y\|$ elde edilir.

Tanım 4.4 $I: [-1,1] \to [0, p]$ olmak üzere $I(x) = \frac{p}{2} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 1-1 ve örten fonksiyonunun tersi olan fonksiyon $c: [0, p] \to [-1,1]$ biçimindeki kosinüs fonksiyonudur (Millman and Parker 1991).

$$s(\theta) = \sqrt{1 - c^2(\theta)},$$

ile belirli $s: [0, p] \to [0,1]$ fonksiyonuna ise sinüs fonksiyonu denir.

Önerme 4.3 θ, φ ve $\theta + \varphi$ açıları $[0, p]$ aralığında olmak üzere,

$$c(\theta + \varphi) = c(\theta)\, c(\varphi) - \mathrm{s}(\theta)\, \mathrm{s}(\varphi)$$

dir.

Önerme 4.4 Eğer $\|X\| = \|Z\| = 1$ ise $\langle X, Z^{\perp} \rangle = \mp\sqrt{1 - \langle X, Z \rangle^2}$ dir.

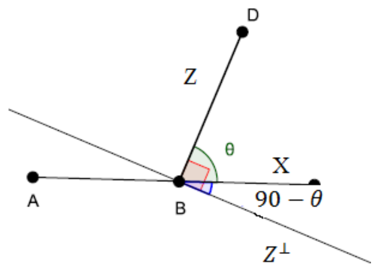
İspat. $\|X\| = \|Z\| = 1$ ve X ile Z arasındaki açının ölçüsü θ olsun. Bu durumda $c(\theta) = \langle X, Z \rangle$ ve $c(90 - \theta) = \mathrm{s}(\theta) = \langle X, Z^{\perp} \rangle$ olur (Şekil 4.4). $c^2(\theta) + s^2(\theta) = 1$ olduğundan,

$$\langle X, Z \rangle^2 + \langle X, Z^{\perp} \rangle^2 = 1$$

$$\langle X, Z^{\perp} \rangle^2 = 1 - \langle X, Z \rangle^2$$

$$\langle X, Z^{\perp} \rangle = \mp\sqrt{1 - \langle X, Z \rangle^2}$$

olur.



Şekil 4.4 Aralarındaki açının ölçüsü θ olan X ile Z ışınları

Önerme 4.5 $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$ Kartezyen düzleminde

$$c\big(m_E(\angle ABC)\big) = \frac{\langle A-B, C-B\rangle}{\|A-B\| \cdot \|C-B\|}$$

biçimindeki m_E bir açı ölçme fonksiyonudur.

İspat. i) $\angle ABC \in \mathcal{A}$ olup bu durumda A, B ve C noktaları doğrusal değildir bundan dolayı $C - B \neq 0$ olmak üzere herhangi bir t reel sayısı için $A - B \neq t(C - B)$ olur (Aksi halde doğrusal noktalar olurlardı). Ayrıca, Önerme 4.2 den,

$$|\langle A-B, C-B\rangle| < \|A-B\|\|C-B\|$$

$$-\|A-B\|\|C-B\| < \langle A-B, C-B\rangle < \|A-B\|\|C-B\|$$

$$-1 < \frac{\langle A-B, C-B\rangle}{\|A-B\|\|C-B\|} < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $-1 < c\big(m_E(\angle ABC)\big) < 1$ olup, c fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan tersi vardır. O halde $0 < c^{-1}\left(\frac{\langle A-B,C-B\rangle}{\|A-B\|\cdot\|C-B\|}\right) < 180$ olduğu görülür.

ii) H yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi r reel sayısı verilsin. $P, Q \in H$ olmak üzere,

$$m_E(\angle ABP) = c^{-1}\left(\frac{\langle A-B,P-B\rangle}{\|A-B\|\cdot\|P-B\|}\right) = r \tag{4.1}$$

$$m_E(\angle ABQ) = c^{-1}\left(\frac{\langle A-B,Q-B\rangle}{\|A-B\|\cdot\|Q-B\|}\right) = r \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2) nin sağ tarafları aynı olduğundan sol tarafları da aynı olmak zorundadır. Dolayısıyla $P = Q$ dur. Bu ise H yarı düzleminde r sayısını veren bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışının varlığını gösterir.

iii) D noktası $\angle ABC$ nın iç bölgesinde olsun. $m_E(\angle ABD) + m_E(\angle DBC) = m_E(\angle ABC)$ olduğu gösterilmelidir. $m_E(\angle ABD) = \alpha$ ve $m_E(\angle DBC) = \beta$ olsun (Şekil 4.5). Ayrıca $X = A - B, Y = C - B, Z = D - B$ ve $\|X\| = \|Y\| = \|Z\| = 1$ olsun. Bu durumda,

$$c\big(m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)\big)=c\big(m_E(\angle ABD)\big)\,c\big(m_E(\angle DBC)\big)-s\big(m_E(\angle ABD)\big)\,s\big(m_E(\angle DBC)\big)$$
$$=\langle X,Z\rangle\langle Y,Z\rangle-\sqrt{1-\langle X,Z\rangle^2}\sqrt{1-\langle Y,Z\rangle^2}\quad (4.3)$$

olur. Önerme 4.4 den $\langle X,Z^{\perp}\rangle=\mp\sqrt{1-\langle X,Z\rangle^2}$ ve $\langle Y,Z^{\perp}\rangle=\mp\sqrt{1-\langle Y,Z\rangle^2}$ ve ayrıca $D\in int(\angle ABC)$ iken $\langle X,Z^{\perp}\rangle$ ile $\langle Y,Z^{\perp}\rangle$ zıt işaretli olacağından,

$$\langle X,Z^{\perp}\rangle\langle Y,Z^{\perp}\rangle=-\sqrt{1-\langle X,Z\rangle^2}\sqrt{1-\langle Y,Z\rangle^2}$$

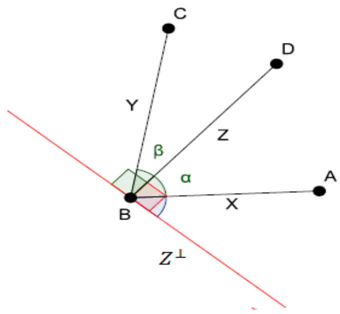
bulunur. Bu ifade (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$c\big(m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)\big)=\langle X,Z\rangle\langle Y,Z\rangle+\langle X,Z^{\perp}\rangle\langle Y,Z^{\perp}\rangle$$
$$=\langle(\langle X,Z\rangle Z+\langle X,Z^{\perp}\rangle Z^{\perp}),Y\rangle$$
$$=\langle X,Y\rangle=c(m_E(\angle ABC))\quad (4.4)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)=m_E(\angle ABC)$$

olur.

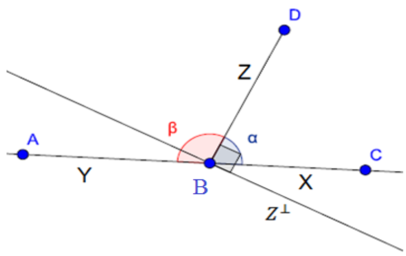


Şekil 4.5 $m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)=m_E(\angle ABC)$ olması durumu

iv) $A-B-C$ ve $D\notin \overleftrightarrow{AC}$ olsun. $m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)=180$ olduğu gösterilmelidir. $m_E(\angle ABD)=\beta$ ve $m_E(\angle DBC)=\alpha$ ve $X=C-B$, $Y=A-B$, $Z=D-B$, $\|X\|=\|Y\|=\|Z\|=1$ olsun. X ile Y zıt vektör olduklarından $\vec{Y}=-\vec{X}$ dir (Şekil 4.6). (4.4) eşitliğinden,

$$c\big(m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)\big)=\langle X,Z\rangle\langle Y,Z\rangle+\langle X,Z^{\perp}\rangle\langle Y,Z^{\perp}\rangle$$
$$=\langle(\langle X,Z\rangle Z+\langle X,Z^{\perp}\rangle Z^{\perp}),Y\rangle=\langle X,Y\rangle=\langle X,-X\rangle=-\|X\|^2=-1$$
$$=c(180)$$

olur. Sonuç olarak $m_E(\angle ABD)+m_E(\angle DBC)=180$ olur.



Şekil 4.6 X, Y, Z ve $Z^{\perp}$ vektörleri

Teorem 4.1 m, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d]$ Pasch geometrisinde α ya bağlı bir açı ölçme fonksiyonu olsun. $t > 0$ için,

$$m_1(\angle ABC) = t \cdot m(\angle ABC)$$

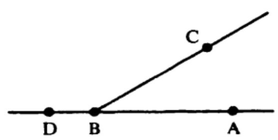
olacak şekilde tanımlı m_1 fonksiyonu da $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d]$ de bir açı ölçme fonksiyonudur.

İspat. m, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ Pasch geometrisinde α ya bağlı bir açı ölçme fonksiyonu olduğuna göre bunun t katı da Tanım 4.1 deki şartları sağlar. Dolayısıyla m_1 de açı ölçme fonksiyonudur.

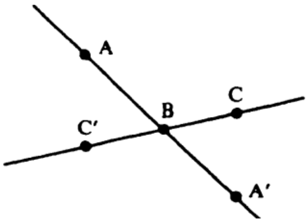
Tanım 4.5 Bir *dar açı* ölçüsü 90 dan az olan açıdır. Bir *dik açı* ölçüsü 90 olan açıdır. Bir *geniş açı* ölçüsü 90 dan büyük olan açıdır. İki açının ölçüleri toplamı 180 ise bu açılara *bütünler açılar*, ölçüleri toplamı 90 olan açılara *tümler açılar* denir.

Tanım 4.6 $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$ ise $\angle ABC$ ve $\angle DEF$ açıları *eştir* denir ve $\angle ABC \simeq \angle DEF$ ile gösterilir.

Tanım 4.7 Eğer $A - B - D$ ise $\angle ABC$ ve $\angle CBD$ açılarına *doğrusal (lineer) açılar* denir (Şekil 4.7). Kesişen iki doğrunun oluşturduğu $\angle ABC$ ve $\angle A'BC'$ açılarına *ters açılar* denir (Şekil 4.8).



Şekil 4.7 Doğrusal (lineer) açı



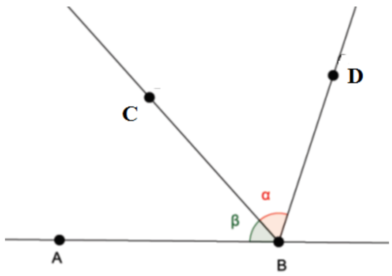
Şekil 4.8 Ters açı

Teorem 4.2 Açıölçer geometrinin iki noktası C ve D, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun aynı tarafında ve $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$ ise o zaman $C \in int(\angle ABD)$ dir.

İspat. Ya A ve C, $\overleftrightarrow{BD}$ nin aynı tarafında ya $C \in \overleftrightarrow{BD}$ yada A ve C, $\overleftrightarrow{BD}$ nin zıt tarafındadırlar. Şimdi son iki durum elenecektir. Eğer $C \in \overleftrightarrow{BD}$ olsaydı bu durumda C ve D noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ nin aynı tarafında olduğundan $C \in int(\overrightarrow{BD})$ olurdu. Böylece $\angle ABC \simeq \angle ABD$ ve $m(\angle ABC) = m(\angle ABD)$ olurdu. Bu ise bir çelişkidir. Eğer A ve C, $\overleftrightarrow{BD}$ nin zıt tarafında olsalardı Teorem 3.1.8 den $D \in int(\angle ABC)$ olurdu ve buradan,

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$$

elde edilirdi. Buradan da $m(\angle DBC) < 0$ olması gerekir. Bu ise Tanım 4.1 ile çelişir. Dolayısıyla burada mümkün olan tek seçenek A ve C noktaları $\overleftrightarrow{BD}$ doğrusunun aynı tarafındadırlar ve $C \in int(\angle ABD)$ dir (Şekil 4.9).



Şekil 4.9 $\overleftrightarrow{BD}$ nin aynı tarafında olan A ve C noktalarının oluşturduğu açılar

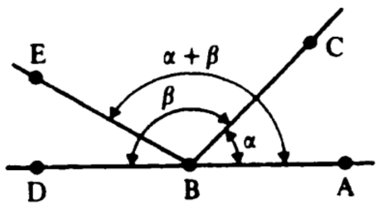
Teorem 4.3 (Doğrusal (Lineer) Açı Teoremi) Eğer açıölçer geometrisinde, $\angle ABC$ ve $\angle CBD$ açıları doğrusal açılarsa bu açılar bütünler açılardır.

İspat. $m(\angle ABC) = \alpha$ ve $m(\angle CBD) = \beta$ olsun. $\alpha + \beta = 180$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $\alpha + \beta < 180$ ve $\alpha + \beta > 180$ durumlarının çelişki oluşturduğu gösterilmelidir.

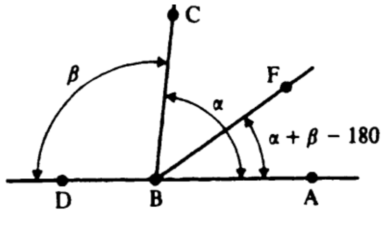
$\alpha + \beta < 180$ olsun. Açı oluşturma aksiyomundan $m(\angle ABE) = \alpha + \beta$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun C noktasını kapsayan tarafında bir E noktası ile belirli bir tek $\overrightarrow{BE}$ ışını vardır (Şekil 4.10). Teorem 4.2 den $C \in int(\angle ABE)$ olur ve $m(\angle ABC) + m(\angle CBE) = m(\angle ABE)$ dir. O halde, $\alpha + m(\angle CBE) = \alpha + \beta$ olup $m(\angle CBE) = \beta$ dır. Öte yandan $\angle ABC$ ile $\angle CBD$ açıları doğrusal açı olduğundan $A - B - D$ dir ve E ile A noktaları $\overrightarrow{BC}$ nin zıt tarafında, A ve D noktaları $\overrightarrow{BC}$ nin zıt tarafında olup Teorem 2.1.2 den E ve D, $\overrightarrow{BC}$ nin aynı tarafındadır. Bu nedenle $E \in int(\angle CBD)$ ve $m(\angle CBE) + m(\angle EBD) = m(\angle CBD)$ olur. O halde $\beta + m(\angle EBD) = \beta$ yani $m(\angle EBD) = 0$ olur. Bu durum çelişki oluşturur. Sonuç olarak $\alpha + \beta < 180$ olmaz.

Şimdi de $\alpha + \beta > 180$ olsun.α ve β nın her ikiside 180 den daha küçük ise $\alpha + \beta < 360$ ve $0 < \alpha + \beta - 180 < 180$ olur. $m(\angle ABF) = \alpha + \beta - 180$ olacak şekilde $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun C noktasını kapsayan tarafında bir F noktasıyla belirli bir tek $\overrightarrow{BF}$ ışını vardır (Şekil 4.11). $\beta < 180$ ise $\alpha + \beta - 180 < \alpha$ olup $F \in int(\angle ABC)$ dir. O halde $m(\angle ABF) + m(\angle FBC) = m(\angle ABC)$ ve $\alpha + \beta - 180 + m(\angle FBC) = \alpha$ yada $m(\angle FBC) = 180 - \beta$ dır. Diğer taraftan $180 - \beta = m(\angle FBC) < m(\angle FBD) = \beta + 180 - \beta = 180$ olup Teorem 4.2 den $C \in int(\angle FBD)$ ve $m(\angle FBC) + m(\angle CBD) = m(\angle FBD)$ olur. O halde $180 - \beta + \beta = m(\angle FBD)$ ve $m(\angle FBD) = 180$ olur. Bu durum çelişki oluşturur. Sonuç olarak $\alpha + \beta > 180$ olamaz.

Öyleyse $\alpha + \beta = 180$ dir.



Şekil 4.10 $m(\angle ABE) = \alpha + \beta < 180$ olması durumunu gösteren $\overrightarrow{BE}$ ışını



Şekil 4.11 $m(\angle ABF) = \alpha + \beta - 180$ olması durumunu gösteren $\overrightarrow{BF}$ ışını

Teorem 4.4 Açıölçer geometride, eğer $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = m(\angle ABD)$ ise o zaman $C \in int(\angle ABD)$ dir.

İspat. C ve D nin $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun aynı tarafında olduğu gösterilmelidir. Fakat varsayalım ki C ve D, $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun zıt tarafında olsunlar. O halde A, D noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusu üzerinde değillerdir. Eğer A ve D , $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafında ise o zaman $A \in int(\angle CBD)$ dir (Şekil 4.12). Buradan,

$$m(\angle CBA) + m(\angle ABD) = m(\angle CBD) > m(\angle ABD)$$

Bu ise teoremin ifadesiyle çelişir. O halde A ve D noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt tarafındadırlar (Şekil 4.13).

$E - B - A$ olacak şekilde E ve D noktaları seçelim. E ve D noktaları, $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun aynı tarafında olsunlar. Bu takdirde $E \in int(\angle CBD)$ olur ve

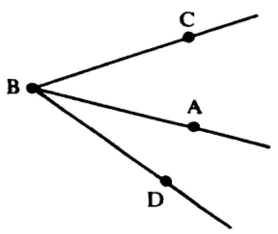
$$m(\angle CBE) + m(\angle EBD) = m(\angle CBD)$$

dir. $\angle ABC$ ve $\angle CBE$ doğrusal açılar olduklarından $m(\angle CBE) = 180 - m(\angle ABC)$ dir. Buradan,

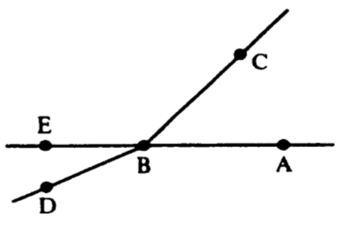
$$180 - m(\angle ABC) + m(\angle EBD) = m(\angle CBD)$$

$$180 + m(\angle EBD) = m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = m(\angle ABD)$$

dir. Bu durumda $m(\angle ABD) > 180$ olmalıdır. Bu açı ölçüm fonksiyonunun tanımı ile çelişir. O halde C ve D noktaları $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusunun aynı tarafında olmalıdırlar.



Şekil 4.12 *A* ve *D* noktalarının $\overleftrightarrow{BC}$ nin aynı tarafında olması durumu



Şekil 4.13 *A* ve *D* noktalarının $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt tarafında olması durumu

Teorem 4.5 Bir açıölçer geometride, eğer A ve D noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt tarafında ve $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$ ise $A - B - D$ ve $\angle ABC$ ile $\angle CBD$ açıları doğrusal açılardır.

İspat. A ve D noktaları $\overleftrightarrow{BC}$ nin zıt tarafında ve $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$ (Şekil 4.14) olduğundan (4.4) eşitliği de kullanılarak,

$$\mathrm{c}\big(m(\angle ABC) + m(\angle CBD)\big) = \mathrm{c}(180)$$

$$\mathrm{c}\big(m(\angle ABC)\big)\,\mathrm{c}\big(m(\angle CBD)\big) - \mathrm{s}\big(m(\angle ABC)\big)\,\mathrm{s}\big(m(\angle CBD)\big) = -1$$

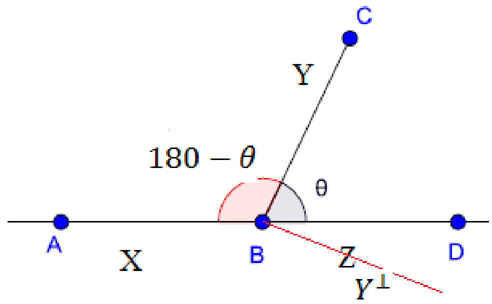
$$\langle X,Y\rangle\langle Z,Y\rangle - \sqrt{1-(\langle X,Y\rangle)^2}\sqrt{1-(\langle Z,Y\rangle)^2} = -1$$

$$\langle X,Y\rangle\langle Z,Y\rangle + \langle X,Y^{\perp}\rangle\langle Z,Y^{\perp}\rangle = -1$$

$$\langle(\langle X,Y\rangle Y + \langle X,Y^{\perp}\rangle Y^{\perp}), Z\rangle = -1$$

$$\langle X,Z\rangle = -1$$

bulunur. Buradan $Z = -X$ olacağından $A - B - D$ olur. Sonuç olarak, $\angle ABC$ ile $\angle CBD$ açıları doğrusal açılardır.

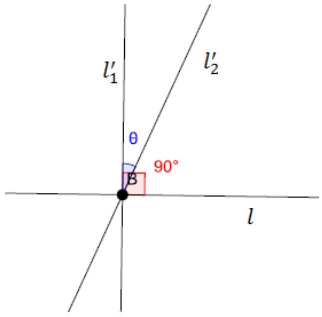


Şekil 4.14 $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$ olması durumu

Tanım 4.8 l ve l' iki farklı doğru olsun. Eğer $l \cup l'$ bir dik açı kapsıyorsa, bu durumda l ve l' doğruları *diktir* denir ve $l \perp l'$ şeklinde yazılır. Eğer doğrular dik ise bu doğruların belirttikleri iki doğru parçası veya iki ışın da birbirine diktirler.

Teorem 4.6 Açıölçer geometride, bir l doğrusu ve $B \in l$ noktası verilsin. $B \in l'$ ve $l' \perp l$ olacak şekilde bir tek l' doğrusu vardır.

İspat. B noktasından geçen, l ye dik olan iki doğru l_1' ve l_2', $l_1' \neq l_2'$ olsun (Şekil 4.15). l_1' ve l_2' doğruları arasındaki açıyı θ alalım. $l_1' \perp l$ olduğundan l_1' ile l arasındaki açı 90 dır. Buradan l_2' ile l arasındaki açı $90 - \theta$ olur. $l_2' \perp l$ olduğu için $90 - \theta = 90$ ve buradan da $\theta = 0$ elde edilir. Bu ise $l_1' \neq l_2'$ kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $B \in l'$ olan bir tek $l' \perp l$ doğrusu vardır.



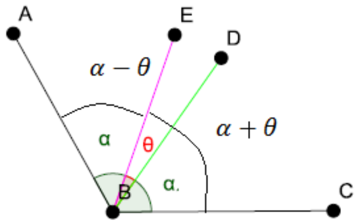
Şekil 4.15 Bir doğruya dik olan iki farklı doğru

Teorem 4.7 Açıölçer geometride, $\overline{AB}$ doğru parçasının orta noktası M, $\overline{AB} \cap l = \{M\}$ ve $l \perp \overline{AB}$ olacak şekilde bir tek l orta dikmesi vardır.

İspat. $\overline{AB}$ nin orta noktası M ve $\overline{AB} \cap l_1 = \overline{AB} \cap l_2 = \{M\}$ olacak şekildeki $l_1 \neq l_2$ doğruları için $l_1 \perp \overline{AB}$ ve $l_2 \perp \overline{AB}$ olsun. l_1 ile l_2 arasındaki açı θ olmak üzere, $l_1 \perp \overline{AB}$ olduğundan l_1 ile $\overline{AB}$ arasındaki açının ölçüsü 90 olur. Bu durumda l_2 ile $\overline{AB}$ arasındaki açının ölçüsü ise $90 - \theta$ olur. $l_2 \perp \overline{AB}$ olduğundan $90 - \theta = 90$ ve $\theta = 0$ elde edilir. O halde $l_1 = l_2$ dir.

Teorem 4.8 Açıölçer geometride, her $\angle ABC$ açısının, $D \in int(\angle ABC)$ ve $m(\angle ABD) = m(\angle DBC)$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{BD}$ açıortayı vardır.

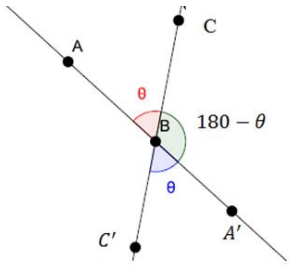
İspat. $D, E \in int(\angle ABC)$ ve $m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = m(\angle ABE) = m(\angle EBC)$ olacak şekilde $\angle ABC$ açısının $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{BE}$ olan iki farklı açıortayı olsun. Ayrıca $\overrightarrow{BD}$ ve $\overrightarrow{BE}$ açılarının arasındaki açının θ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = \alpha$ ise $\overrightarrow{BE}$ açıortay olduğundan $m(\angle ABE) = m(\angle EBC) = \alpha - \theta$ olmalıdır (Şekil 4.16). Bu durumda $m(\angle ABD) = m(\angle DBC) = m(\angle ABE) = m(\angle EBC)$ olduğundan $\alpha = \alpha - \theta$ ve $\theta = 0$ elde edilir. Bu ise $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{BE}$ olmasıyla çelişir. O halde $m(\angle ABD) = m(\angle DBC)$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{BD}$ açıortayı vardır.



Şekil 4.16 Bir açının açıortayı

Teorem 4.9 (Ters Açı Teoremi). Açıölçer geometride, eğer $\angle ABC$ ve $\angle A'BC'$ ters açılarsa bu durumda $\angle ABC \simeq \angle A'BC'$ dir.

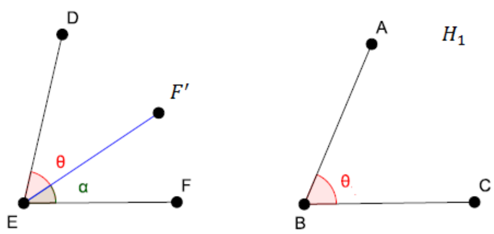
İspat. $\angle ABC$ ve $\angle A'BC'$ ters açı olsunlar (Şekil 4.17). Bu durumda $A - B - A'$ ve $C - B - C'$ dir. $A - B - A'$ olduğundan Tanım 4.7 den $\angle ABC$ ve $\angle CBA'$ doğrusal açılardır. $m(\angle ABC) = \theta$ ise $m(\angle CBA') = 180 - \theta$ olur. Yine $C - B - C'$ olduğundan $\angle CBA'$ ile $\angle A'BC'$ açıları doğrusal açılar ve $m(\angle CBA') = 180 - \theta$ dır. O halde $m(\angle A'BC') = \theta$ olmalıdır. Sonuç olarak $m(\angle A'BC') = m(\angle ABC) = \theta$ olup Tanım 4.6 den $\angle ABC \simeq \angle A'BC'$ dir.



Şekil 4.17 Açıölçer geometride ters açılar

Teorem 4.10 (Açı Oluşturma Teoremi). Açıölçer geometride, H_1 yarı düzleminin bir tarafında bulunan $\overrightarrow{ED}$ ışını ve $\angle ABC$ açısı verilmiş olsun. Bu durumda $\angle ABC \simeq \angle DEF$ ve $F \in H_1$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{EF}$ ışını vardır.

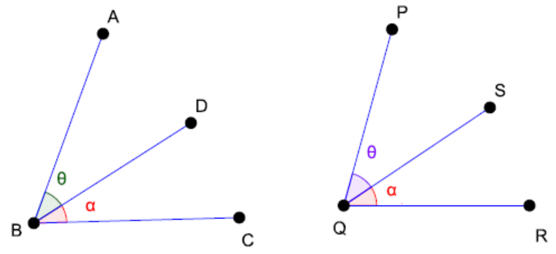
İspat. $\angle ABC \simeq \angle DEF$ ve $\angle ABC \simeq \angle DEF'$ olacak şekilde $F, F' \in H_1$ ve $\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{EF'}$ ışınlarını alalım. Bu ışınlar arasındaki açı α ve $m(\angle ABC) = m(\angle DEF) = \theta$ olsun (Şekil 4.18). $m(\angle DEF') = \theta - \alpha$ dir. $\angle ABC \simeq \angle DEF'$ olduğundan $\theta - \alpha = \theta$ ve $\alpha = 0$ olur. Bu durumda $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF'}$ olup $\angle ABC \simeq \angle DEF$ ve $F \in H_1$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{EF}$ ışını vardır.



Şekil 4.18 Eş açılar

Teorem 4.11 (Açı Ekleme Teoremi). Açıölçer geometride, eğer $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$, $\angle ABD \simeq \angle PQS$ ve $\angle DBC \simeq \angle SQR$ ise bu durumda $\angle ABC \simeq \angle PQR$ dir.

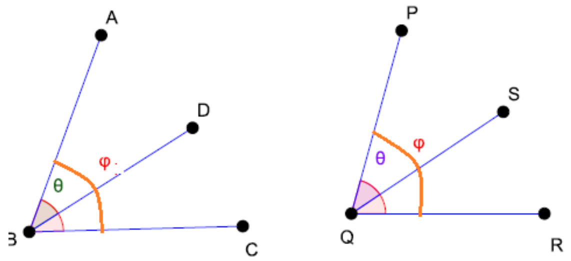
İspat. $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$, $\angle ABD \simeq \angle PQS$ ve $\angle DBC \simeq \angle SQR$ ise (Şekil 4.19) $m(\angle ABD) = m(\angle PQS) = \theta$ ve $m(\angle DBC) = m(\angle SQR) = \alpha$ olsun. $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = \theta + \alpha$ ve $m(\angle PQR) = m(\angle PQS) + m(\angle SQR) = \theta + \alpha$ olduğundan $\angle ABC \simeq \angle PQR$ dir.



Şekil 4.19 Açı ekleme

Teorem 4.12 (Açı Çıkarma Teoremi). Açıölçer geometride, $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$, $\angle ABD \simeq \angle PQS$ ve $\angle ABC \simeq \angle PQR$ ise o zaman $\angle DBC \simeq \angle SQR$ dir.

İspat. $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$, $\angle ABD \simeq \angle PQS$ ve $\angle ABC \simeq \angle PQR$ ise (Şekil 4.20) $m(\angle ABD) = m(\angle PQS) = \theta$ ve $m(\angle ABC) = m(\angle PQR) = \varphi$ olsun. $m(\angle ABC) - m(\angle ABD) = \varphi - \theta$ ve $m(\angle PQR) - m(\angle PQS) = \varphi - \theta$ olup $m(\angle DBC) = m(\angle ABC) - m(\angle ABD) = m(\angle PQR) - m(\angle PQS) = m(\angle SQR)$ elde edilir. Tanım 4.6 den $\angle DBC \simeq \angle SQR$ dir.



Şekil 4.20 Açı çıkarma

5. KAYNAKLAR

Çolakoğlu H. B. (2009). Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Martin G.E. (1986).The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane. Springer, New York, USA.

Millman, R.S. and Parker, G.D. (1991). Geometry: A Metric Approach with Models. Springer-Verlag, Second Edition, New York, USA.

Salihova S. (2006). Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Sönmez N. and Ungar A.A. The Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry and Its Plane Seperation Axiom. *Advances in Applied Clifford Algebras,* **23**, 1:209-236, 2013.

Yüksel S. (2012). Taksi Uzayda Bazı Düzgün Çokgenler ve Çokyüzlüler Üzerine. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Naime KARAKUŞ BAĞCI
Doğum Yeri/ Tarihi	**:**	Konya/Ilgın 16.05.1987
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
İletişim	**:**	topolojikhayat@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	**:**	Ilgın Anadolu Lisesi, 2005
Lisans	**:**	Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2009
Yüksek Lisans	**:**	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2017

Çalıştığı Kurum ve Yıllar

2012-2014	**:**	Özel Etüt Merkezi
2015-(Halen)	**:**	Ilgın Ş.M. Altın Mes. Ve Tek. And. Lisesi