AYRIK KESİRLİ ANALİZDE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aynur ASTAM

DANIŞMAN

Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kasım, 2016

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYRIK KESİRLİ ANALİZDE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

Aynur ASTAM

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kasım, 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Aynur ASTAM tarafından hazırlanan "Ayrık Kesirli Analizde Başlangıç Değer Problemleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 18.11.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Başkan : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ Fen Edebiyat Fakültesi,

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet DUMAN
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ Fen Fakültesi,

Üye : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ Fen Edebiyat Fakültesi,

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/11/2016

Aynur ASTAM

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

AYRIK KESİRLİ ANALİZDE
BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

Aynur ASTAM
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Bu çalışmada, ayrık kesirli operatörlerin analizi, ayrık kesirli analizde başlangıç değer problemlerinin varlığının ve çözümlerinin sürekliliği incelenmiş, literatürde verilen temel bazı teoremlerin ispatları açılmış ve teoremler örneklerle de desteklenmiştir.

2016, v + 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrık Kesirli Analiz, Başlangıç Değer Problemleri, Riemann-Liouville Operatörü

ABSTRACT

INITIAL VALUE PROBLEMS
IN DISCRETE FRACTIONAL CALCULUS

Aynur ASTAM

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

In this study, the analysis of discrete fractional operators, the existence of initial value problems and the continuity of solutions in discrete fractional analysis are investigated. On the other hand the proofs of some basic theorems given in the literature have been explained and the theorems have been supported by examples.

2016, v + 42 pages

Key Words: Discrete fractional calculus, initial value problems, Riemann-Liouville operators

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e, tez yazım aşamasında benden yardımını esirgemeyen sevgili eşime, her zaman, her konuda bana destek veren, bugünlere ulaşmama vesile olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Aynur ASTAM
AFYONKARAHİSAR 2016

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\leq$	Küçüktür ya da eşittir
$\geq$	Büyüktür ya da eşittir
∞	Sonsuz
$\Delta(.)$	Fark operatörü
$\Delta^{-\vartheta}f$	f fonksiyonunun ϑ-inci mertebeden kesirli toplamı
$\Delta^{\vartheta}f$	f fonksiyonunun ϑ-inci mertebeden kesirli farkı
$\int_a^b$	Belirli integral
Γ	Gamma fonksiyonu
$\sigma(.)$	İleri sıçrama operatörü
ϑ	Değişik teta
α	Alfa
β	Beta
γ	Gama
$\sum$	Toplam Operatörü
$t^{(n)}$	Faktöriyel fonksiyonu
$\in$	Elemanıdır
R	Reel Sayılar Kümesi
lim	Limit

1. GİRİŞ

Türev ve integral operatörleri analizin iki temel kavramlarıdır. Benzer olarak fark ve toplam operatörleri de ayrık analizin iki temel kavramlarıdır. Genel olarak türev ve fark operatörleri n bir tam sayı olduğunda n-inci mertebeye kadar bir fonksiyona uygulanabilirler ve sırasıyla $d^n f(x)/dx^n$, $\Delta^n f(x)$ şeklinde gösterilirler.

Kesirli analiz, türev ve integral operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabileceğini ifade eder. Örneğin bir fonksiyonun $1/2$-inci mertebeden türevini $\sqrt{5}$-inci mertebeden integralini hesaplayabiliriz.

Kesirli analiz, keyfi mertebeden türev ve integraller ile ilgilenen uygulamalı matematiğin bir dalıdır ve onların uygulamaları bilim, mühendislik, uygulamalı matematik, ekonomi ve diğer alanlarda görülür. $D = \frac{d}{dx}$ operatörünü içeren diferansiyel analizin özellikleri ile fark operatörü olarak bilinen $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ operatörünü içeren ayrık kesirli analizin özellikleri arasında bir benzerlik olduğu bilinir. Aynı benzerlik kesirli ve ayrık kesirli analizin operatörleri arasında da vardır.

Kesirli analizin tohumu 3 yüzyıl kadar önce L-Hospital'dan Leibniz'e gönderilen bir mektupta ekildi. Burada L-Hospital $n = 1/2$ ise $d^n y/dx^n$'in anlamı hakkında bir soru oluşturdu. 30 Eylül 1695 tarihli cevapta, Leibniz "Bu belirgin bir paradokstur. Bir gün kullanışlı sonuçlar çizilecek" yazdı ve konu ile ilgili araştırmalar başladı.
Sonra Johann Bernoulli'nin cevabı ile birlikte, Leibniz genel mertebelerin türevlerini ispatladı. Leibniz $1/2$-inci mertebenin türevi anlamına gelen $d^{\frac{1}{2}}y$ gösterimini kullandı. 1730'da Euler, 1772'de Lagrange tarafından kesirli türevlere birbirinden farklı kaynaklarda değinildi.

Diaz ve Osler (1974), n-inci mertebeden fark için ϑ herhangi bir gerçek veya kompleks sayı olduğunda kesirli farkı,

$$\Delta^{\vartheta} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\vartheta}{k} f(x+\vartheta-k), \tag{1.1}$$

$$\binom{\vartheta}{k} = \frac{\Gamma(\vartheta+1)}{\Gamma(\vartheta-k+1)k!}\ , \tag{1.2}$$

Miller ve Ross (1989), $t \equiv \vartheta(mod1)$ ve $0 < \vartheta < 1$ olduğunda, kesirli mertebeden toplam ve fark operatörlerini sırasıyla aşağıda gösterildiği şekilde tanımladı.

$$\Delta^{-\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a}^{t-\mu} \big(t-\sigma(s)\big)^{(\vartheta-1)} f(s), \tag{1.3}$$

$$\Delta^{\vartheta} f(t) = \Delta\Delta^{-(1-\vartheta)} f(t) = \Delta \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=a}^{t-1+\vartheta} \big(t-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} f(s) \tag{1.4}$$

Bu tezde Atıcı ve Eloe (2007, 2009), Atıcı ve Uyanık (2015) ve Goodrich (2010) incelendi ve bu çalışmalardaki bazı teoremlerin ispatları açıldı. Bu çalışmalarda ayrık kesirli operatörlerin analizi, ayrık kesirli analizde başlangıç değer problemlerinin varlığının ve çözümlerinin sürekliliğinin incelenmesi yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ayrık kesirli analizde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. Gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ olarak ifade edilen özel soyut bir fonksiyondur ve tamsayı olmayan değerlerin faktöriyele genelleştirilmesi ilk olarak Euler tarafından gösterilmiştir. $x > 0$ için,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= (-e^{-t})|_0^\infty \\ &= -e^{-\infty} + e^{-0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{x+1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \end{aligned}$$

$t^x = u \ \Rightarrow xt^{x-1}dt = du$

$e^{-t}dt = dv \ \Rightarrow \ -e^{-t} = v$ olsun.

$$\begin{aligned} &= [-t^x e^{-t}]|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \\ &= [-\infty^x e^{-\infty} + 0e^0] + x\Gamma(x) \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.3}$$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ bağıntısı önemli bir fonksiyonel eşitliktir ve tamsayı değerler için fonksiyonel eşitlik,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.4}$$

haline gelir. Bu nedenle, Gamma fonksiyonu sıfır olmayan pozitif reel sayılar için faktöriyel fonksiyonunun bir genişlemesi olarak yorumlanabilir.

$$x = 1, \qquad \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$
$$x = 2, \qquad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1$$
$$x = 3, \qquad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1$$

.

.

.

$$x = n-1, \qquad \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\dots 1 = (n-1)!$$
$$x = n, \qquad \Gamma(n+1) = (n)\Gamma(n) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

Tanım 2.2. Azalan faktöriyel (faktöriyel polinomu) $t^{(n)}$ herhangi bir $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$t^{(n)} = t(t-1)(t-2)\dots\big(t-(n-1)\big) = \prod_{k=0}^{n-1}(t-k) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}, \qquad (2.5)$$

olarak tanımlanır ve Γ Gamma fonksiyonunu belirtir (Atıcı and Eloe 2007).

Teorem 2.1. Faktöriyel fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $\Delta t^{(\vartheta)} = \vartheta t^{(\vartheta-1)}$, ($\Delta$ ileri fark operatörü)

ii. $(t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$, $\mu \in \mathbb{R}$

iii. $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$

iv. $t^{(\vartheta+\beta)} = (t-\beta)^{(\vartheta)} t^{(\beta)}$ (Atıcı and Eloe 2007)

v. $\Delta_s (t-s)^{(\vartheta)} = -\vartheta(t-s-1)^{(\vartheta-1)}$, $s \in \mathbb{R}$ (Goodrich 2010).

İspat.

Makalede verilmeyen i, ii, iii, iv ispatlarını yapalım. Azalan faktöriyelin tanımına ve özelliklerine göre ispatlar aşağıdaki gibi gösterilebilir.

i.

$$\Delta t^{(\vartheta)} = \Delta \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}$$
$$= \frac{\Gamma((t+1)+1)}{\Gamma((t+1)-\vartheta+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}$$

Δ Operatörünün özelliğinden,

$$= \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-\vartheta+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}$$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{(t-\vartheta+1)\Gamma(t-\vartheta+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}\\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}(\frac{t+1}{t-\vartheta+1} - 1)\\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}\frac{\vartheta}{(t-\vartheta+1)}\\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta)!}\frac{\vartheta}{(t-\vartheta+1)}
\end{aligned}
$$

$\Gamma(n+1) = n!$ özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta\frac{\Gamma(t+1)}{(t-\vartheta+1)!}\\
&= \vartheta\frac{\Gamma(t+1)}{(t+1-(\vartheta-1))}
\end{aligned}
$$

$t^{(n)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$ özelliğinden,

$$= \vartheta t^{(\vartheta-1)}$$

elde edilir.

ii.

$$(t-\mu)t^{(\mu)} = (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\mu)}$$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
&= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{(t-\mu)\Gamma(t-\mu)}\\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-(\mu+1))}\\
&= t^{(\mu+1)}
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
\mu^{(\mu)} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\mu)}\\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1)}\\
&= \Gamma(\mu+1)
\end{aligned}
$$

iv.

$$t^{(\vartheta+\beta)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\vartheta-\beta)}$$

$\Gamma(t-\beta+1)$ ile çarpar ve bölersek,

$$= \frac{\Gamma(t-\beta+1)}{\Gamma(t+1-\vartheta-\beta)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\beta+1)}$$
$$= (t-\beta)^{(\vartheta)} t^{(\beta)}$$

elde edilir.

v. Azalan faktöriyel tanımı ve gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden,

$$\Delta_s (t-s)^{(\vartheta)} = (t-s-1)^{(\vartheta)} - (t-s)^{(\vartheta)}$$
$$= \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-\vartheta)} - \frac{\Gamma(t-s+1)}{\Gamma(t-s-\vartheta+1)}$$
$$= \frac{(t-s-\vartheta)\Gamma(t-s) - \Gamma(t-s+1)}{\Gamma(t-s-\vartheta+1)}$$
$$= -\vartheta(t-s-1)^{(\vartheta-1)}$$

elde edilir.

■

Lemma 2.1. $a, \vartheta \in \mathbb{R}$ olsun. y ve f, $\mathbb{N}_{\vartheta+a}$ da tanımlı fonksiyonlar ve $\gamma > 0$ sabit sayı ise, her $t \in \mathbb{N}_{\vartheta+a}$ için

$$y(t) \leq f(t) + \gamma \sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1} y(\tau)$$

dir. Ayrıca,

$$y(t) \leq f(t) + \gamma \sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1} f(\tau)\,(1+\gamma)^{t-\tau-1}$$

dir.

Uyarı 2.1. Analizde verilen her $\vartheta > 0$ reel sayısı için,

$$\frac{d}{dt} t^{\vartheta} = \vartheta t^{\vartheta-1}$$

ve ayrık analizde,

$$\Delta t^{(\vartheta)} = \vartheta t^{(\vartheta-1)}$$

dir. Bu nedenle, analizdeki x^n kuvvetleri ve ayrık analizdeki $x^{(n)}$ benzerdir.

Bu tezdeki bazı ispatlar ayrık analiz için çarpım kuralına bağlı olduğundan, bu kuralı bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.1. f ve g reel değerli fonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(t)g(t)\big) &= g(t)\Delta f(t) + f(\sigma(t))\Delta g(t)\\ &= g\big(\sigma(t)\big)\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t),\end{aligned} \tag{2.6}$$

$(\sigma(t) = t + 1)$

Birinci eşitlik için,

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(t)g(t)\big) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)\big(g(t+1) - g(t)\big) + g(t)(f(t+1) - f(t))\\ &= f(\sigma(t))\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t).\end{aligned}$$

İkinci eşitlik için,

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(t)g(t)\big) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - g(t+1)f(t) + g(t+1)f(t) - f(t)g(t)\\ &= g(t+1)\big(f(t+1) - f(t)\big) + f(t)(g(t+1) - g(t))\\ &= g(\sigma(t))\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)\end{aligned}$$

(Kelley and Peterson 2001).

Uyarı 2.2. (2.6) denkleminden,

$$g(t)\Delta f(t) = \Delta\big(f(t)g(t)\big) - f(\sigma(t))\Delta g(t)$$

dir.

Her iki tarafa da $t = 1$ den $b - 1$'e kadar toplam operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{b-1}\big(g(t)\Delta f(t)\big) &= \sum_{t=1}^{b-1}\Delta\big(f(t)g(t)\big) - \sum_{t=1}^{b-1}\big(f\big(\sigma(t)\big)\Delta g(t)\big)\\ &= \sum_{t=1}^{b-1}[f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)] - \sum_{t=1}^{b-1}\big(f\big(\sigma(t)\big)\Delta g(t)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= [&f(2)g(2) - f(1)g(1) + f(3)g(3) - f(2)g(2) + f(4)g(4) - f(3)g(3) + \cdots\\ &+ f(b-1)g(b-1) - f(b-2)g(b-2) + f(b)g(b)\\ &- f(b-1)g(b-1)] - \sum_{t=1}^{b-1}\big(f\big(\sigma(t)\big)\Delta g(t)\big)\end{aligned}$$

$$= [f(b)g(b) - f(1)g(1)] - \sum_{t=1}^{b-1} f(\sigma(t))\Delta g(t)$$

$$\sum_{t=1}^{b-1}\big(g(t)\Delta f(t)\big) = f(t)g(t)\big|_1^b - \sum_{t=1}^{b-1} f\big(\sigma(t)\big)\Delta g(t), \tag{2.7}$$

$b > 1$ tam sayı, (2.7) ayrık kesirli analizde toplam formülü olarak bilinir (Kelley and Peterson 2001).

Tanım 2.3. a herhangi bir reel sayı ve ϑ herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f'nin ϑ-inci mertebeden kesirli toplamı,

$$\Delta_a^{-\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=a}^{t-\vartheta} \big(t - \sigma(s)\big)^{(\vartheta-1)} f(s) \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır (Miller and Ross 1989).

Burada $s = a(mod 1)$ için f fonksiyonu, ve $t = a + \vartheta(mod 1)$ için $\Delta_a^{-\vartheta} f$ kesirli toplamı tanımlanmıştır.

Uyarı 2.3. $\vartheta = 1$ için,

$$\Delta_a^{-\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=a}^{t-\vartheta} \big(t - \sigma(s)\big)^{(\vartheta-1)} f(s)$$

tanımı

$$\Delta_a^{-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \sum_{s=a}^{t-1} \big(t - \sigma(s)\big)^{(1-1)} f(s)$$

$t^{(n)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$ özelliğinden,

$$= \quad \frac{1}{1} \sum_{s=a}^{t-1} \frac{\Gamma(t - \sigma(s) + 1)}{\Gamma(t - \sigma(s) + 1 - 0)} f(s)$$

$$= \quad \sum_{s=a}^{t-1} f(s)$$

$$\Rightarrow \Delta_a^{-1} f(t) = \sum_{t=1}^{t-1} f(s)$$

şekline gelir.

a herhangi bir reel sayı, ϑ herhangi bir pozitif reel sayı olsun. $m - 1 < \vartheta < m$ ve burada m bir tam sayıdır. f'nin ϑ-inci mertebeden kesirli farkı,

$$\Delta^{\vartheta} f(t) = \Delta^m \Delta^{-(m-\vartheta)} f(t) = \Delta^m \frac{1}{\Gamma(m-\vartheta)} \sum_{s=a}^{t-m+\vartheta} \big(t - \sigma(s)\big)^{(m-\vartheta-1)} f(s) \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.4. $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y(0) \geq 0$ olsun. Eğer, her $a \in \mathbb{N}_0$ için

$$y(a+1) \geq \vartheta y(0)$$

ise y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-artan fonksiyondur (Atıcı and Uyanık 2015).

y, $\mathbb{N}_0$ da artan ve $0 < \vartheta < 1$ ise y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-artandır. Ayrıca y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-artan ve $\vartheta \geq 1$ ise y, $\mathbb{N}_0$ da artandır. $\vartheta = 1$ ise y, $\mathbb{N}_0$ da artandır ancak ve ancak y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-artandır.

Tanım 2.5. $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y(0) \leq 0$ olsun. Eğer, her $a \in \mathbb{N}_0$ için

$$y(a+1) \ \leq \vartheta y(0)$$

ise y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-azalan fonksiyondur (Atıcı and Uyanık 2015).

y, $\mathbb{N}_0$ da azalan ve $0 < \vartheta < 1$ ise y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-azalandır. Ayrıca y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-azalan ve $\vartheta \geq 1$ ise y, $\mathbb{N}_0$ da azalandır. $\vartheta = 1$ ise y, $\mathbb{N}_0$ da azalandır ancak ve ancak y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-azalandır.

Örnek 2.2. $\mathbb{N}_0$ da $g(t) = e^{-t}$ olsun.

$\vartheta \in (0, 1/e]$ olduğunda g'nin ϑ-artan fonksiyon olduğunu gösterelim.

$0 < \vartheta \leq \ 1/e$ eşitsizliğinin her iki tarafını e^{-t} ile çarpalım.

$0 < \vartheta e^{-t} \leq \ e^{-(1+t)}$ elde ederiz. Böylece, tanım 2.4. den $\mathbb{N}_0$ da $g(t) = e^{-t}$ ϑ-artandır (Atıcı and Uyanık 2015).

Tanım 2.6. Bir diferansiyel denklem çözülmek istendiğinde gerçekten bir çözümü olduğundan ve bu çözümün tek olduğundan emin olunmalıdır. Bu husus $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ eşitliğindeki $f(x,y)$ fonksiyonunun Lipschitz şartının sağlanmasını gerekli kılar. $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasını içine alan bir R bölgesinde tanımlı ve sürekli olduğunu varsayalım. Bölgenin kapalı ve bir dikdörtgenle sınırlı olduğunu kabul edelim. Şayet R bölgesindeki bütün x, y_1 ve y_2 ler için

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayacak bir L varsa $f(x,y)$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar.

Teorem 2.2. f, $\mathbb{N}_a$ da tanımlanan reel değerli bir fonksiyon olsun ve $\mu, \vartheta > 0$ olsun. $t = \mu + \vartheta,\ mod(1)$ olacak şekilde tüm t ler için

$$\Delta^{-\vartheta}[\Delta^{-\mu} f(t)] = \Delta^{-(\mu+\vartheta)} f(t) = \Delta^{-\mu}\left[\Delta^{-\vartheta} f(t)\right]$$

dir (Atıcı and Eloe 2007).

Uyarı 2.4. f, tam sayılar kümesinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olsun. Ayrık analizde,

$$\Delta\Delta^{-1} f = f$$

dir.

Lemma 2.2. $\mu \neq 1$ olsun ve $\mu + \vartheta + 1$ in pozitif tamsayı olduğunu varsayalım.

Dolayısıyla,

$$\Delta^{-\vartheta} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\vartheta+1)} t^{(\mu+\vartheta)}$$

dir (Atıcı and Eloe 2007).

Uyarı 2.5. Herhangi bir c sabiti için, $\Delta^{\vartheta} c$ sıfır değildir.

Bunu görmek için, kuvvet kuralını ve toplam operatörünün lineerlik özelliğini kullanırız. Bir c sabitinin kesirli farkı,

Lemma 2.2.den,

$$\Delta\Delta^{-(1-\vartheta)} c = \Delta \frac{c}{\Gamma(2-\vartheta)} t^{(1-\vartheta)}$$

Δ-türev ve $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ den,

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\vartheta)} t^{(-\vartheta)}$$

dir. Burada $0 < \vartheta < 1$ dir.

Örnek 2.2. f ve g tamsayılar kümesinde tanımlı olsun. $\vartheta = \frac{1}{2}$ için kuvvet kuralı aracılığı ile aşağıdaki gibi faktöriyel polinomlarının ϑ −inci toplamını hesaplayabilir ve genelleyebiliriz.

Çözüm:

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} t^{(0)} = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma\left(0+\frac{1}{2}+1\right)} t^{(0+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} t^{(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t+1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} t^{(1)} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+1\right)} t^{(1+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{(\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+1-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} t^{(2)} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}+1\right)} t^{(2+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} t^{(\frac{5}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t+1-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t-\frac{3}{2}\right)}$$

Böyle $t^{(n)}$ için $1/2$-inci mertebeden toplam aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Delta^{-1/2}t^{(n)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t-n+\frac{1}{2}\right)}$$

Teorem 2.3. Herhangi bir $\vartheta > 0$ için, aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\Delta^{-\vartheta}\Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\vartheta}f(t) - \frac{(t-a)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}f(a) \qquad (2.10)$$

Öyle ki f, $\mathbb{N}_a$ da tanımlıdır (Atıcı and Eloe 2009).

Uyarı 2.6.

$$\Delta^{-\vartheta}\Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\vartheta}f(t) - \frac{(t-a)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}f(a)$$

denkleminde ϑ yerine $\vartheta + 1$ yazılarak, teorem 2.2. den (üs kuralı),

$$\Delta^{-\vartheta-1}\Delta f(t) = \Delta^{-\vartheta}f(t) - \frac{(t-a)^{(\vartheta)}}{\Gamma(\vartheta+1)}f(a)$$

elde edilir. Bu

$$\Delta^{-\vartheta}f(t) = \Delta^{-\vartheta-1}\Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(\vartheta)}}{\Gamma(\vartheta+1)}f(a) \qquad (2.11)$$

denklemini ifade eder (Atıcı and Eloe 2009).

Uyarı 2.7. $p-1 < \vartheta < p$ olsun. Burada p bir pozitif tamsayıdır. Teorem 2.3. den,

$$\Delta\Delta^{\vartheta}f(t) = \Delta\Delta^{p}\left(\Delta^{-(p-\vartheta)}f(t)\right)$$

$$= \Delta^{p+1}(\Delta^{-(p-(\vartheta))}f(t))$$

$$= \Delta^{p}(\Delta\Delta^{-(p-\vartheta)}f(t))$$

teorem 2.3. ($\vartheta = p - \vartheta$),

$$= \Delta^{p}(\Delta^{-(p-\vartheta)}\Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(p-\vartheta-1)}}{\Gamma(p-\vartheta)}f(a))$$

$$= \Delta^{p}\Delta^{-(p-\vartheta)}\Delta f(t) + \Delta^{p}\frac{(t-a)^{(p-\vartheta-1)}}{\Gamma(p-\vartheta)}f(a)$$

lemma 2.2. ve teorem 2.2. den,

$$= \Delta^{\vartheta}\Delta f(t) + \frac{1}{\Gamma(p-\vartheta)}\frac{\Gamma(p-\vartheta-1+1)}{\Gamma\left((p-\vartheta-1)-p+1\right)}(t-a)^{(p-\vartheta-1-p)}f(a)$$

$$= \Delta^{\vartheta}\Delta f(t) + \frac{1}{\Gamma(p-\vartheta)}\frac{\Gamma(p-\vartheta)}{\Gamma(-\vartheta)}(t-a)^{(-\vartheta-1)}f(a)$$

$$\Rightarrow \Delta\Delta^{\vartheta} f(t) = \Delta^{\vartheta}\Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(-\vartheta-1)}}{\Gamma(-\vartheta)} f(a)$$

elde edilir (Atıcı and Eloe 2009).

Böylece, teorem 2.3. deki denklemin herhangi bir ϑ reel sayısı için geçerli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Teorem 2.4. ϑ herhangi bir gerçek sayı ve p herhangi bir pozitif tam sayısı için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\Delta^{-\vartheta}\Delta^{p} f(t) = \Delta^{p}\Delta^{-\vartheta} f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{(\vartheta-p+k)}}{\Gamma(\vartheta+k-p+1)} \Delta^{k} f(a), \tag{2.12}$$

Öyle ki f, $\mathbb{N}_a$ da tanımlıdır (Atıcı and Eloe 2009).

Uyarı 2.8. (2.12) de ϑ yerine $\vartheta + p$ yazar ve teorem 2.2. yi kullanırsak,

$$\Delta^{-\vartheta} f(t) = \Delta^{-\vartheta-p}\Delta^{p} f(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{(\vartheta+k)}}{\Gamma(\vartheta+k+1)} \Delta^{k} f(a). \tag{2.13}$$

(Atıcı and Eloe 2009).

Teorem 2.5. p pozitif bir tam sayı ve $\vartheta > p$ olsun. Öyleyse,

$$\Delta^{p}\left[\Delta^{-\vartheta} f(t)\right] = \Delta^{-(\vartheta-p)} f(t). \tag{2.14}$$

dir (Atıcı and Eloe 2009).

3. AYRIK KESİRLİ OPERATÖRLERİN ANALİZİ

Bu bölümde ayrık kesirli fark operatörleri için monotonluk sonucu verilmiş, literatürde verilen temel teoremlerin ispatları açılmıştır.

Teorem 3.1. $y(0) \geq 0$, $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\vartheta \in (0,1)$ ve her $t \in \mathbb{N}_{1-\vartheta}$ için

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) \geq 0$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-artandır (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat. Matematiksel tümevarım ile y'nin ϑ-artan olduğunu ispatlayacağız. İlk olarak, kesirli toplam tanımından,

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) = \Delta\Delta_0^{-(1-\vartheta)} y(t) = \Delta[\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \left(t-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)] \geq 0$$

eşitsizliğini inceleyelim.

$$s(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \left(t-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)$$

olsun. $\Delta s(t) \geq 0$ olduğundan, $s(t)$, $\mathbb{N}_{1-\vartheta}$ de artan bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} s(2-\vartheta) - s(1-\vartheta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(1-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(1) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\left[\Delta(-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(0) + (-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(1)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\left[-\vartheta\frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(2)} y(0) + \frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(1)} y(1)\right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$y(1) \geq \vartheta y(0)$$

dır. Şimdi, tümevarım hipotezinin $n = k-1$ değeri için geçerli olduğunu varsayalım. Böylece,

$$y(k) \geq \vartheta y(k-1) \geq \vartheta^2 y(k-2) \geq \cdots \geq \vartheta^k y(0) \geq 0 \tag{3.1}$$

elde edilir. $n = k$ için eşitsizlik,

$$y(k+1) \geq \vartheta y(k) \tag{3.2}$$

dir. (3.2)'nin ispatı için ilk olarak,

$$s(k+1-\vartheta)=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k}\big(k+1-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)$$

ve

$$s(k+2-\vartheta)=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k+1}\big(k+2-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)$$

eşitliklerini hesaplayalım. $s(t)$, artan olduğundan;

$$\begin{aligned}&s(k+2-\vartheta)-\ s(k+1-\vartheta)\\&=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k+1}\big(k+2-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)\\&-\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k}\big(k+1-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)\geq 0\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki toplam operatörlerinden,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(k+1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(0)+(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(1)\\&+(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(2)+\cdots+(2-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k-1)+(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)\\&+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)]-\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(0)\\&+(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(1)\\&+(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(2)+\cdots+(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k-1)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)]\\&\geq 0\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer terimler ortak paranteze alındığında aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\big[\big[(k+1-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(0)\\&+\big[(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(1)\\&+\big[(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(2)+\cdots\\&+\big[(2-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(k-1)\\&+\big[(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(k)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)\big]\ \geq 0\end{aligned}$$

Daha sonra, Δ operatörünü $y(0),y(1),\dots,y(k+1)$ katsayılarına uygularsak,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[\Delta(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(0)+\Delta(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(1)$$
$$+\Delta(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(2)+\cdots+\Delta(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k-1)$$
$$+\Delta(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)]\ \geq 0$$

elde edilir. Δ operatörüne

$$\Delta t^{(\mu)}=\mu\Delta t^{(\mu-1)}$$

kuvvet kuralını uygularsak,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(-\vartheta)(k-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(0)+(-\vartheta)(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(1)$$
$$+(-\vartheta)(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(2)+\cdots+(-\vartheta)(1-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(k-1)$$
$$+(-\vartheta)(-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(k)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)]\geq 0$$

elde edilir. Azalan faktöriyel tanımından,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(-\vartheta)\frac{\Gamma(k-\vartheta+1)}{\Gamma(k-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(0)$$
$$+(-\vartheta)\frac{\Gamma(k-1-\vartheta+1)}{\Gamma(k-1-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(1)$$
$$+(-\vartheta)\frac{\Gamma(k-2-\vartheta+1)}{\Gamma(k-2-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(2)+\cdots$$
$$+(-\vartheta)\frac{\Gamma(1-\vartheta+1)}{\Gamma(1-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(k-1)$$
$$+(-\vartheta)\frac{\Gamma(-\vartheta+1)}{\Gamma(-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(k)+\ \Gamma(-\vartheta+1)y(k+1)]\geq 0$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi sadeleştirirsek,

$$y(k+1)+\frac{(-\vartheta)}{\Gamma(1-\vartheta)}[\frac{\Gamma(k-\vartheta+1)}{\Gamma(k+2)}y(0)+\frac{\Gamma(k-\vartheta)}{\Gamma(k+1)}y(1)$$
$$+\ \frac{\Gamma(k-1-\vartheta)}{\Gamma(k)}y(2)+\cdots+\frac{\Gamma(2-\vartheta)}{\Gamma(3)}y(k-1)+\frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(2)}y(k)]\ \geq 0$$

elde edilir. Böylece,

$$y(k+1) + \frac{(-\vartheta)}{\Gamma(1-\vartheta)}[\frac{(k-\vartheta)(k-1-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(k+2)}y(0) + \frac{(k-1-\vartheta)(k-2-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(k+1)}y(1) + \frac{(k-2-\vartheta)(k-3-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(k)}y(2) + \cdots + \frac{(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(3)}y(k-1) + \frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(2)}y(k)] \geq 0$$

dır. Buradan,

$$y(k+1) \geq \frac{(k-\vartheta)(k-1-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+2)}y(0) + \frac{(k-1-\vartheta)(k-2-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+1)}y(1) + \frac{(k-2-\vartheta)(k-3-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k)}y(2) + \cdots + \frac{(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(3)}y(k-1) + \frac{\vartheta}{\Gamma(2)}y(k)$$

dır. (3.1) tümevarım varsayımından,

$$y(k+1) - \vartheta y(k) \geq \frac{(k-\vartheta)(k-1-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+2)}y(0) + \frac{(k-1-\vartheta)(k-2-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+1)}y(1) + \frac{(k-2-\vartheta)(k-3-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k)}y(2) + \cdots + \frac{(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(3)}y(k-1) \geq 0$$

elde edilir. Bundan dolayı, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$y(k+1) - \vartheta y(k) \geq 0$$

olarak sonuçlandırabiliriz.

■

Artan faktöriyel,

$$t^{\overline{\vartheta}} = \frac{\Gamma(t+\vartheta)}{\Gamma(t)}$$

olarak tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun sıfır ve negatif tamsayılar için tanımlı olmadığına dikkat edelim. $t \to t^{\overline{\vartheta}}, \{t \in \mathbb{R} : \ t\ ve\ t+\vartheta, \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\ a\ ait\ değil\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlıdır.

Teorem 3.2. $y(0) \geq 0$, $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\vartheta \in (0,1)$ ve y'nin $\mathbb{N}_0$ da artan bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Her $t \in \mathbb{N}_{1-\vartheta}$ için

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) \geq 0$$

dır (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat.

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) = \Delta\Delta_0^{-(1-\vartheta)} y(t) = \Delta[\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \left(t-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)] \geq 0$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Benzer olarak,

$$s(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \left(t-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)$$

olsun. İspatı tamamlamak için, $s(t)$'nin $\mathbb{N}_{1-\vartheta}$ de artan olduğunu göstermeliyiz. $k \geq 1$, herhangi bir k reel sayısı için,

$$s(k+1-\vartheta) - s(k-\vartheta) \geq 0$$

dır. Aslında,

$$s(k+1-\vartheta) - s(k-\vartheta)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k} \left(k+1-\vartheta-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s) - \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} \left(k-\vartheta-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} \Delta_k \left(k-\vartheta-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s) + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} (-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(k)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} (-\vartheta)\left(k-\vartheta-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta-1)} y(s) + y(k)$$

$$= y(k) - \vartheta y(k-1) + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} (-\vartheta)\left(k-\vartheta-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta-1)} y(s)$$

$$= y(k) - \vartheta y(k-1) + \frac{\vartheta}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} \big(k - \vartheta - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)} (y(k-1) - y(s))$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} (-\vartheta)\big(k - \vartheta - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)} y(k-1)$$

$$\geq y(k) - \vartheta y(k-1) + \frac{y(k-1)}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} (-\vartheta)\big(k - \vartheta - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}$$

$$= y(k) - y(k-1) + y(k-1) + \frac{y(k-1)}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} (-\vartheta)\big(k - \vartheta - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}$$

$$\geq y(k-1)(1 + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} (-\vartheta)\big(k - \vartheta - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)})$$

$$= y(k-1) \sum_{s=0}^{k} \frac{(-\vartheta)^{\bar{s}}}{s!} = \ y(k-1) \frac{(1-\vartheta)^{\bar{k}}}{k!} \geq 0$$

elde edilir.

■

Teorem 3.3. $y(0) > 0$, $y\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\vartheta \in (0,1)$ ve y'nin $\mathbb{N}_0$'da kesin artan fonksiyon olduğunu varsayalım. Her $t \in \mathbb{N}_{1-\vartheta}$ için

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) > 0$$

dır (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat.

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) = \Delta\Delta_0^{-(1-\vartheta)} y(t) = \Delta[\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \big(t - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s)] > 0$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Benzer olarak,

$$s(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \big(t - \sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s)$$

olsun. İspatı tamamlamak için, $s(t)$'nin $\mathbb{N}_{1-\vartheta}$ de artan olduğunu göstermeliyiz. $k \geq 1$, herhangi bir k reel sayısı için,

$$s(k + 1 - \vartheta) - s(k - \vartheta) > 0$$

dır. Aslında,

$$s(k+1-\vartheta)-s(k-\vartheta)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k}\big(k+1-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)-\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-1}\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-1}\Delta_k\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)+\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-1}(-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}y(s)+y(k)$$

$$=y(k)-\vartheta y(k-1)+\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-2}(-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}y(s)$$

$$=y(k)-\vartheta y(k-1)+\frac{\vartheta}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-2}\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}(y(k-1)-y(s))$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-2}(-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}y(k-1)$$

$$>y(k)-\vartheta y(k-1)+\frac{y(k-1)}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-2}(-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}$$

$$=y(k)-y(k-1)+y(k-1)+\frac{y(k-1)}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-1}(-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}$$

$$>y(k-1)(1+\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k-1}(-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)})$$

$$=y(k-1)\sum_{s=0}^{k}\frac{(-\vartheta)^{\bar{s}}}{s!}=\ y(k-1)\frac{(1-\vartheta)^{\bar{k}}}{k!}>0$$

elde edilir.

■

Sonuç 3.1. $h\colon[1,+\infty)_{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı negatif olmayan, sürekli fonksiyon ve A negatif olmayan reel bir sayı olsun. Ayrık kesirli başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$\Delta_0^{\vartheta}y(t)=h\big(t+\vartheta-1,y(t+\vartheta-1)\big),\quad t\in\mathbb{N}_{2-\vartheta}$$
$$y(0)=A$$

dır. y, ϑ-artan ve negatif değildir (Atıcı and Uyanık 2015).

Benzer yolla, yukarıdaki sonuçlar başlangıç noktasında negatif değerli fonksiyon için elde edilebilir.

Teorem 3.4. $y(0) \leq 0$, $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\vartheta \in (0,1)$ ve her $t \in \mathbb{N}_{1-\vartheta}$ için

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) \leq 0$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda y, $\mathbb{N}_0$ da ϑ-azalandır (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat. Matematiksel tümevarım ile y'nin ϑ-azalan olduğunu ispatlayacağız. İlk olarak, kesirli toplam tanımından,

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) = \Delta\Delta_0^{-(1-\vartheta)} y(t) = \Delta[\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \left(t-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)] \leq 0$$

eşitsizliğini inceleyelim.

$$s(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \left(t-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)$$

olsun. $\Delta s(t) \leq 0$ olduğundan, $s(t)$, $\mathbb{N}_{1-\vartheta}$ de azalan bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} s(2-\vartheta) - s(1-\vartheta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(1-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(1) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}(-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\left[\Delta(-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(0) + (-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(1)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\left[-\vartheta\frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(2)} y(0) + \frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(1)} y(1)\right] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$y(1) \leq \vartheta y(0)$$

dır. Şimdi, tümevarım hipotezinin $n = k-1$ değeri için geçerli olduğunu varsayalım. Böylece,

$$y(k) \leq \vartheta y(k-1) \leq \vartheta^2 y(k-2) \leq \cdots \leq \vartheta^k y(0) \leq 0 \tag{3.3}$$

elde edilir. $n = k$ için eşitsizlik,

$$y(k+1) \leq \vartheta y(k) \tag{3.4}$$

dir. (3.4)'ün ispatı için ilk olarak,

$$s(k+1-\vartheta) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k} \left(k+1-\vartheta-\sigma(s)\right)^{(-\vartheta)} y(s)$$

ve

$$s(k+2-\vartheta)=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k+1}\big(k+2-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)$$

eşitliklerini hesaplayalım. $s(t)$, azalan olduğundan;

$$s(k+2-\vartheta)-\ s(k+1-\vartheta)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k+1}\big(k+2-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}\sum_{s=0}^{k}\big(k+1-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)}y(s)\leq 0$$

dır. Yukarıdaki toplam operatörlerinden,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(k+1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(0)+(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(1)$$
$$+(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(2)+\cdots+(2-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k-1)+(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)$$
$$+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)]-\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(0)$$
$$+(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(1)$$
$$+(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(2)+\cdots+(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k-1)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)]$$
$$\leq 0$$

elde ederiz. Benzer terimler ortak paranteze alındığında aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[\big[(k+1-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(0)$$
$$+\big[(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(1)$$
$$+\big[(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(2)+\cdots$$
$$+\big[(2-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(k-1)$$
$$+\big[(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}-(-\vartheta)^{(-\vartheta)}\big]y(k)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)]\ \leq 0$$

Daha sonra, Δ operatörünü $y(0),y(1),\dots,y(k+1)$ katsayılarına uygularsak,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[\Delta(k-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(0)+\Delta(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(1)$$
$$+\Delta(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(2)+\cdots+\Delta(1-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k-1)$$
$$+\Delta(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k)+(-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)]\ \leq 0$$

elde edilir. Δ operatörüne

$$\Delta t^{(\mu)} = \mu \Delta t^{(\mu-1)}$$

kuvvet kuralını uygularsak,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(-\vartheta)(k-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(0) + (-\vartheta)(k-1-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(1)$$
$$+ (-\vartheta)(k-2-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(2) + \cdots + (-\vartheta)(1-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(k-1)$$
$$+ (-\vartheta)(-\vartheta)^{(-\vartheta-1)}y(k) + (-\vartheta)^{(-\vartheta)}y(k+1)] \le 0$$

elde edilir. Azalan faktöriyel tanımından,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)}[(-\vartheta)\frac{\Gamma(k-\vartheta+1)}{\Gamma(k-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(0)$$
$$+ (-\vartheta)\frac{\Gamma(k-1-\vartheta+1)}{\Gamma(k-1-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(1)$$
$$+ (-\vartheta)\frac{\Gamma(k-2-\vartheta+1)}{\Gamma(k-2-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(2) + \cdots$$
$$+ (-\vartheta)\frac{\Gamma(1-\vartheta+1)}{\Gamma(1-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(k-1)$$
$$+ (-\vartheta)\frac{\Gamma(-\vartheta+1)}{\Gamma(-\vartheta+1+\vartheta+1)}y(k) + \ \Gamma(-\vartheta+1)y(k+1)] \le 0$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi sadeleştirirsek,

$$y(k+1) + \frac{(-\vartheta)}{\Gamma(1-\vartheta)}[\frac{\Gamma(k-\vartheta+1)}{\Gamma(k+2)}y(0) + \frac{\Gamma(k-\vartheta)}{\Gamma(k+1)}y(1)$$
$$+ \ \frac{\Gamma(k-1-\vartheta)}{\Gamma(k)}y(2) + \cdots + \frac{\Gamma(2-\vartheta)}{\Gamma(3)}y(k-1) + \frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(2)}y(k)] \ \le 0$$

elde edilir. Böylece,

$$y(k+1)$$
$$+ \frac{(-\vartheta)}{\Gamma(1-\vartheta)}[\frac{(k-\vartheta)(k-1-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(k+2)}y(0)$$
$$+ \frac{(k-1-\vartheta)(k-2-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(k+1)}y(1)$$
$$+ \frac{(k-2-\vartheta)(k-3-\vartheta)\ldots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(k)}y(2) + \cdots$$
$$+ \frac{(1-\vartheta)\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(3)}y(k-1) + \frac{\Gamma(1-\vartheta)}{\Gamma(2)}y(k)] \le 0$$

dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&y(k+1) \\
&\leq \frac{(k-\vartheta)(k-1-\vartheta)\dots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+2)}y(0) \\
&+\frac{(k-1-\vartheta)(k-2-\vartheta)\dots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+1)}y(1) \\
&+\frac{(k-2-\vartheta)(k-3-\vartheta)\dots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k)}y(2)+\cdots \\
&+\frac{(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(3)}y(k-1)+\frac{\vartheta}{\Gamma(2)}y(k)
\end{aligned}
$$

dır. (3.3) tümevarım varsayımından,

$$
\begin{aligned}
&y(k+1)-\vartheta y(k) \\
&\leq \frac{(k-\vartheta)(k-1-\vartheta)\dots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+2)}y(0) \\
&+\frac{(k-1-\vartheta)(k-2-\vartheta)\dots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k+1)}y(1) \\
&+\frac{(k-2-\vartheta)(k-3-\vartheta)\dots(2-\vartheta)(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(k)}y(2)+\cdots \\
&+\frac{(1-\vartheta)\vartheta}{\Gamma(3)}y(k-1)\leq 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bundan dolayı, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$y(k+1)-\vartheta y(k)\leq 0$$

olarak sonuçlandırabiliriz.

■

Teorem 3.5. $y(0) \leq 0$, $y:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\vartheta \in (0,1)$ ve y'nin $\mathbb{N}_0$ da azalan bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Her $t \in \mathbb{N}_{1-\vartheta}$ için

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) \leq 0$$

dır (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat.

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) = \Delta\Delta_0^{-(1-\vartheta)} y(t) = \Delta\Big[\frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \big(t-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s)\Big] \leq 0$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Benzer olarak,

$$s(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-(1-\vartheta)} \big(t-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s)$$

olsun. İspatı tamamlamak için, $s(t)$'nin $\mathbb{N}_{1-\vartheta}$ de azalan olduğunu göstermeliyiz. $k \geq 1$, herhangi bir k reel sayısı için,

$$s(k+1-\vartheta) - s(k-\vartheta) \leq 0$$

dır. Aslında,

$$s(k+1-\vartheta) - s(k-\vartheta)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k} \big(k+1-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s) - \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} \big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} \Delta_k \big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta)} y(s) + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} (-\vartheta)^{(-\vartheta)} y(k)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} (-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)} y(s) + y(k)$$

$$= y(k) - \vartheta y(k-1) + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} (-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)} y(s)$$

$$= y(k) - \vartheta y(k-1) + \frac{\vartheta}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} \big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)} \big(y(k-1) - y(s)\big)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} (-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)} y(k-1)$$

$$\leq y(k) - \vartheta y(k-1) + \frac{y(k-1)}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-2} (-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}$$

$$= y(k) - y(k-1) + y(k-1) + \frac{y(k-1)}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} (-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)}$$

$$\leq y(k-1)(1 + \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \sum_{s=0}^{k-1} (-\vartheta)\big(k-\vartheta-\sigma(s)\big)^{(-\vartheta-1)})$$

$$= y(k-1) \sum_{s=0}^{k} \frac{(-\vartheta)^{\bar{s}}}{s!} = \; y(k-1) \frac{(1-\vartheta)^{\bar{k}}}{k!} \leq 0$$

elde edilir.

■

Sonuç 3.2. $h: [1, +\infty)_{\mathbb{N}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı negatif olmayan, sürekli fonksiyon ve A negatif olmayan reel bir sayı olsun. Ayrık kesirli başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$\Delta_0^{\vartheta} y(t) = h\big(t+\vartheta-1, y(t+\vartheta-1)\big), \quad t \in \mathbb{N}_{2-\vartheta}$$
$$y(0) = A$$

dır. y, ϑ-azalan ve pozitif değildir (Atıcı and Uyanık 2015).

Ayrık kesirli operatör $\Delta_0^{-\vartheta}$, $\mathbb{N}_0$'dan $\mathbb{N}_{c+\vartheta}$'ye tanımlıdır. Bundan dolayı, aşağıdaki eşitlik her $t \in \mathbb{N}_{c+\vartheta}$ için tanımlıdır.

$$\Delta_c^{-\vartheta} f(t) = \sum_{s=c}^{t-\vartheta} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(s)$$

Burada c, herhangi bir reel sayıdır. $a \in \mathbb{N}_c$ ise her $t \in \mathbb{N}_{a+\vartheta}$ için $\Delta_a^{-\vartheta} f(t)$ yi hesaplamak mantıklıdır. Bu operatörün böyle bir karakteristik özelliği, ayrık kesirli analizin temel teoremini elde etmek için bize yol gösterir.

Teorem 3.6. f, $\mathbb{N}_c$ de tanımlı ve $a, b \in \mathbb{N}_c$, $a < b$ olsun. Böylece $\vartheta \in (0,1)$ olduğunda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\Delta_{a-\vartheta+1}^{-\vartheta} \Delta_a^{\vartheta} f(t)|_{t=b} = f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)$$

Yukarıdaki eşitliğin ispatı için, her $\vartheta > 0$ için teorem 2.3. den aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\Delta_c^{-\vartheta} \Delta f(t) = \Delta \Delta_c^{-\vartheta} f(t) - \frac{(t-c)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(c)$$

f, $\mathbb{N}_c$ de tanımlıdır.

Ayrıca teorem 2.2. yi kullanırsak, her $\vartheta, \mu > 0$ için

$$\Delta_{\vartheta}^{-\mu}\big[\Delta_0^{-\vartheta} f(t)\big] = \Delta_0^{-(\vartheta+\mu)} f(t) = \Delta_{\mu}^{-\vartheta}\big[\Delta_0^{-\mu} f(t)\big]$$

dir. Öyle ki $t \equiv (\mu+\vartheta) mod(1)$ (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat. Teorem 2.3. deki eşitliğin sol tarafını kullanarak ispata başlayalım.

$$\Delta_{a-\vartheta+1}^{-\vartheta} \Delta_a^{\vartheta} f(t)|_{t=b}$$
$$= \Delta \Delta_{a-\vartheta+1}^{-\vartheta} \Delta_a^{-(1-\vartheta)} f(t)|_{t=b} - \frac{(t-(a-\vartheta+1))^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}|_{t=b} \Delta_a^{-(1-\vartheta)} f|_{t=a-\vartheta+1}$$

Burada teorem 2.2. ve özdeşlik

$$\Delta_a^{-(1-\vartheta)} f|_{t=a-\vartheta+1} = f(a)$$

kullanılırsa,

$$= \Delta \Delta_a^{-1} f(t)|_{t=b} - \frac{\big(b-(a-\vartheta+1)\big)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)$$

$$= f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1))^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)$$

■

Teorem 3.7. f ve g, $\mathbb{N}_c$ de tanımlı ve g, $[a,b] \cap \mathbb{N}_c$ de tanımlı kesin artan fonksiyon, $g(a) > 0$ olsun. Burada $a, b \in \mathbb{N}_c$, $a < b$ dir. $\tau_1, \tau_2 \in [a,b]$, $\vartheta \in (0,1)$ öyle ki,

$$\frac{\Delta_a^\vartheta f(\tau_1)}{\Delta_a^\vartheta g(\tau_1)} \leq \frac{f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)}{g(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} g(a)} \leq \frac{\Delta_a^\vartheta f(\tau_2)}{\Delta_a^\vartheta g(\tau_2)}$$

dir (Atıcı and Uyanık 2015).

İspat. Tersini varsayalım. Her $t \in [a,b]$ için,

$$\frac{f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)}{g(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} g(a)} > \frac{\Delta_a^\vartheta f(t)}{\Delta_a^\vartheta g(t)} \tag{3.3}$$

veya

$$\frac{f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)}{g(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} g(a)} < \frac{\Delta_a^\vartheta f(t)}{\Delta_a^\vartheta g(t)} \tag{3.4}$$

olsun. g, kesin artan olduğundan $[a+1-\vartheta, b+1-\vartheta]$ ayrık aralığında $\Delta_a^\vartheta g(t) > 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece, yukarıdaki (3.3) eşitsizliğinden,

$$\frac{f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)}{g(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} g(a)} \Delta_a^\vartheta g(t) > \Delta_a^\vartheta f(t)$$

elde edilir.

Kesirli toplam operatörü lineer ve eşitsizliği koruduğundan, yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafına $t = b$ de $\Delta_{a-\vartheta+1}^{-\vartheta}$ eşitliğini uygularsak,

$$\frac{f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)}{g(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} g(a)} \Delta_{a-\vartheta+1}^{-\vartheta} \Delta_a^\vartheta g(t)|_{t=b} > \Delta_{a-\vartheta+1}^{-\vartheta} \Delta_a^\vartheta f(t)|_{t=b}$$

elde edilir. Teorem 3.6.' nın bir sonucu olarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a) > f(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} f(a)$$

Benzer yolla, (3.4) eşitsizliğini görebiliriz. Böylece ispat tamamlanır.

■

Uyarı 3.1. Teorem 3.7. de,

$$g(b) - \frac{(b-a+\vartheta-1)^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} g(a)$$

ifadesi sıfıra eşit değildir. Sıfıra eşit olduğunu varsayalım.

$$\frac{g(b)}{g(a)} = \frac{\Gamma(b-a+\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(b-a+1)} < 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, $g(b) < g(a)$ olduğunu ifade eder. Bu sonuç teoremin ispatı ile çelişir (Atıcı and Uyanık 2015).

4. AYRIK KESİRLİ BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN SÜREKLİLİĞİ

Bu bölüm boyunca $\vartheta \in (0,1]$ ve $f: (\mathbb{N}_{\vartheta-1} \cup \mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ tanımlı olduğunu varsayalım. Lineer olmayan ayrık kesirli başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$\Delta^{\vartheta} y(t) \quad = \quad f\big(t+\vartheta-1, y(t+\vartheta-1)\big) \tag{4.1}$$

$$\Delta^{\vartheta-1} y(t)|_{t=0} \quad = \quad y(\vartheta-1) = y_0 \tag{4.2}$$

Burada $t \in \mathbb{N}_0$ dır. Şimdi, $0 < \varepsilon_0 < \vartheta \leq 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük, öyle ki
$0 < \varepsilon_0 \leq \vartheta - \varepsilon < \vartheta \leq 1$ dir.

$$\Delta^{\vartheta-\varepsilon} z(t) \quad = \quad f(t+\vartheta-\varepsilon-1, y(t+\vartheta-\varepsilon-1)) \tag{4.3}$$

$$\Delta^{\vartheta-\varepsilon-1} z(t)|_{t=0} \quad = \quad z(\vartheta-\varepsilon-1) = z_0 \tag{4.4}$$

Burada $t \in \mathbb{N}_0$ dır.

Bizim amacımız f de uygun koşullar altında, $\varepsilon \to 0^+$ ve $z_0 \to y_0$ iken (4.1)-(4.2) ve (4.3)-(4.4) problemlerinin çözümlerini göstermektir. Yani, problem (4.1)-(4.2) ϑ ve y_0 a göre bir süreklilik koşulunu sağlar. Bu sonucun ispatı için, Teorem 4.1.'i ispatlayalım. Fakat ilk olarak bir başlangıç lemması vermemiz gerekir.

Lemma 4.1. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü, $t \in \mathbb{N}_{\vartheta-1}$ için

$$y(t) = \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} a_0 + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} f(s+\vartheta-1, y(s+\vartheta-1))$$

olarak verilir (Atıcı and Eloe 2009).

Teorem 4.1. (4.1)-(4.2) ve (4.3)-(4.4) de verilen ayrık kesirli başlangıç değer problemlerini düşünelim. $f(t,y)$, $f: (\mathbb{N}_{\vartheta-1} \cup \mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iken bir fonksiyon olsun. Öyle ki, $f(t,y)$ bir Lipschitz koşulunu sağlar: Yani, $L, M > 0$ sabitleri var, öyle ki her y_1, y_2 ve $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_{\vartheta-1} \cup \mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}$ için
$|f(t_1,y_1) - f(t_2,y_2)| \leq L|t_1 - t_2| + M|y_1 - y_2|$ dir. $\xi \geq \vartheta$ olarak verilsin.

$$N = max\left\{ \max_{t \in [\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \left| \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} y_0 \right|, \max_{t \in [\vartheta-\varepsilon-1,\xi-\varepsilon]_{\mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}}} \left| \frac{(t-\varepsilon)^{\vartheta-\varepsilon-1}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} z_0 \right| \right\}$$

ve

$$Q_0 = \max_{(t,y) \in [\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}} \cup [\vartheta-\varepsilon-1,\xi-\varepsilon]_{\mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}} \times [-2N,2N]} f(t,y)$$

ve varsayalım ki

$$\max_{t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\left|(t-s-1)^{(\vartheta-1)}\right|,$$

$$\max_{t\in[\vartheta-\varepsilon-1,\xi-\varepsilon]_{\mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}}}\sum_{s=0}^{t-\vartheta+\varepsilon}\left|(t-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}\right|\leq\frac{\Gamma(\vartheta)}{Q_0}N.$$

(4.1)-(4.2) nin çözümü y ve (4.3)-(4.4) ün çözümü z ise, her $t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için

$$|y(t)-z(t-\varepsilon)|\leq\emptyset(t)+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1}\emptyset(\tau)\left(1+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\right)^{t-\tau-1}$$

dir. Burada,

$$K_0=\max_{(t,\tau)\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}\times[\vartheta-1,\varepsilon-1]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}}|(t-\tau+\vartheta-2)^{(\vartheta-1)}|$$

ve

$$\begin{aligned}\emptyset(t)&=\left|\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}y_0-\frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}z_0\right|\\&+\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}Q_0\left|\frac{t^{(\vartheta)}}{\vartheta}-\frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}}{\vartheta-\varepsilon}\right|+Q_0\left|\frac{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)-\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)}(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}\right|\\&+\varepsilon\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}\end{aligned}$$

(Goodrich 2010).

İspat. Lemma 4.1. den,

$$y(t)=\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}y_0+\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}f\big(s+\vartheta-1,y(s+\vartheta-1)\big)\qquad(4.5)$$

ve

$$\begin{aligned}z(t)&=\frac{t^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}z_0\\&+\frac{1}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta+\varepsilon}(t-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1,z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\end{aligned}\qquad(4.6)$$

dır.

$y(t)$, $\mathbb{N}_{\vartheta-1}=\{\vartheta-1,\ \vartheta,\ \vartheta+1,\dots\}$ kümesinde, $z(t)$, $\mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}=\{\vartheta-\varepsilon-1,\ \vartheta-\varepsilon,$ $\vartheta-\varepsilon+1,\dots\}$ kümesinde tanımlıdır.

Bu amaçla,

$$\tilde{z}(t) = z(t-\varepsilon) \tag{4.7}$$

olsun. Karşılaştırma için,

$$\tilde{z}(t) = \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} z_0 + \frac{1}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big) \tag{4.8}$$

olsun. (4.8) in sağ tarafını ele alalım.

$$\begin{aligned}
|y(t)-\tilde{z}(t)| &= \Bigg| \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} y_0 - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} z_0 \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} f\big(s+\vartheta-1, y(s+\vartheta-1)\big) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon \\
&\quad -1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big) \Bigg| \\
&\le \left| \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} y_0 - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} z_0 \right| \\
&\quad + \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} f\big(s+\vartheta-1, y(s+\vartheta-1)\big) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big) \Bigg| \\
&\quad + \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big) \Bigg|
\end{aligned}$$

$$+\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right.$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon$$

$$\left.-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right| \tag{4.9}$$

dir. (4.9) un sağ tarafındaki terimlerin her dört çiftinin analizini gösterelim. İlk terimi ele alalım.

$$\left|\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}y_0-\frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}z_0\right| \tag{4.10}$$

Burada $t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$dir.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}y_0-\frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}z_0\right|=|\,y_0-z_0|\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}$$

Burada $|y_0-z_0|<\delta, \delta>0$ sabittir. Öyleyse,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}y_0-\frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}z_0\right|=|\,y_0-z_0|\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}<\frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}\delta$$

dir. δ ve ε yeterince küçük seçilmiştir. (4.10)'da $t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ keyfi olarak küçük seçilebilir. (4.9) da üçüncü bölüme dikkat edelim.

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon\right.$$

$$-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\ \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon$$

$$\left.-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right| \tag{4.11}$$

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\big[(t-s-1)^{(\vartheta-1)}-(t-\varepsilon-s-1)^{(v-\varepsilon-1)}\big]f\big(s+\vartheta-\varepsilon\right.$$

$$\left.-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right| \tag{4.12}$$

olduğu görülür. N teoremde tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$Q_0 = \max_{(t,y)\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}\cup[\vartheta-\varepsilon-1,\xi-\varepsilon]_{\mathbb{N}_{\vartheta-\varepsilon-1}}\times[-2N,2N]} f(t,y) \quad (4.13)$$

Teoremin açıklamasında verilen hipotezler ile gözlemleyelim.

$$|y(t)| \le N + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\left|(t-s-1)^{(\vartheta-1)}\right| \left|f\big(s+\vartheta-1, y(s+\vartheta-1)\big)\right|$$

$$\le N + \frac{Q_0}{\Gamma(\vartheta)}\frac{\Gamma(\vartheta)}{Q_0}N$$

Öyle ki, $|y(t)| \le 2N$ dir. Benzer bir iddaa $|z(t)| \le 2N$ olduğunu gösterir. Böylece, (4.12) ve (4.13) den,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\left[(t-s-1)^{(\vartheta-1)} - (t-\varepsilon-s-1)^{(v-\varepsilon-1)}\right] f\big(s+\vartheta-\varepsilon - 1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right|$$

$$\le Q_0\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\left[(t-s-1)^{(\vartheta-1)} - (t-\varepsilon-s-1)^{(v-\varepsilon-1)}\right]\right|$$

Lemma 2.1. den,

$$= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}Q_0\left|[-\frac{1}{\vartheta}(t-s)^{(\vartheta)}]_0^{t-\vartheta+1} + [\frac{1}{\vartheta-\varepsilon}(t-\varepsilon-s)^{(\vartheta-\varepsilon)}]_0^{t-\vartheta+1}\right|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}Q_0\left|\frac{t^{(\vartheta)}}{\vartheta} - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}}{\vartheta-\varepsilon}\right| \quad (4.14)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}Q_0\left|\frac{t^{(\vartheta)}}{\vartheta} - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}}{\vartheta-\varepsilon}\right| = 0$$

dır. Öyle ki, (4.11) de $\varepsilon \to 0^+$ dır. (4.9) da dördüncü bölümü inceleyelim.

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big) - \frac{1}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)} f\big(s+\vartheta-\varepsilon - 1, z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right| \quad (4.15)$$

(4.15)'i (4.11)'dekine benzer biçimde yeniden yazalım. (4.13)'ü kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1,z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-\varepsilon-s-1)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1,z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right|$$

$$\leq Q_0\left|\frac{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)-\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}\left[-\frac{1}{\vartheta-\varepsilon}(t-\varepsilon-s)^{(\vartheta-\varepsilon)}\right]_0^{t-\vartheta+1}\right|$$

$$= Q_0\left|\frac{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)-\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)}(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}\right| \qquad (4.16)$$

(4.14) de olduğu gibi, (4.16)'nın sağ tarafını ele alalım.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} Q_0\left|\frac{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)-\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)}(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}\right| = 0$$

Öyle ki, (4.15)'de $\varepsilon \to 0^+$ dır. Son olarak, (4.9)'da ikinci terimi inceleyelim.

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}f\big(s+\vartheta-1,y(s+\vartheta-1)\big)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1,z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right| \qquad (4.17)$$

f 'de Lipschitz koşulunu kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}f\big(s+\vartheta-1,y(s+\vartheta-1)\big)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}f\big(s+\vartheta-\varepsilon-1,z(s+\vartheta-\varepsilon-1)\big)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}(t-s-1)^{(\vartheta-1)}[L\varepsilon+M|y(s+\vartheta-1)-z(s+\vartheta-\varepsilon-1)|]$$

$$= \varepsilon \frac{L}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} + \frac{M}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} |y(s+\vartheta-1) - z(s+\vartheta-\varepsilon - 1)| \qquad (4.18)$$

elde edilir. (4.18)'in sağ tarafına dikkat edelim. Her $t \in [\vartheta-1, \xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} = 0 \qquad (4.19)$$

bulunur. Şimdiye kadar ki sonuçları özetleyelim. (4.10), (4.14), (4.16) ve (4.18)'i birleştirerek (4.9)'u yeniden bulalım.

$$|y(t) - z(t-\varepsilon)| = |y(t) - \tilde{z}(t)|$$

$$\leq \left| \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} y_0 - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} z_0 \right| + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} Q_0 \left| \frac{t^{(\vartheta)}}{\vartheta} - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}}{\vartheta-\varepsilon} \right|$$

$$+ Q_0 \left| \frac{\Gamma(\vartheta-\varepsilon) - \Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)} (t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)} \right|$$

$$+ \varepsilon \frac{L}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)}$$

$$+ \frac{M}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} |y(s+\vartheta-1) - z(s+\vartheta-\varepsilon-1)| \qquad (4.20)$$

Burada,

$$\phi(t) = \left| \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} y_0 - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon-1)}}{\Gamma(\vartheta-\varepsilon)} z_0 \right| + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} Q_0 \left| \frac{t^{(\vartheta)}}{\vartheta} - \frac{(t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)}}{\vartheta-\varepsilon} \right|$$

$$+ Q_0 \left| \frac{\Gamma(\vartheta-\varepsilon) - \Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)} (t-\varepsilon)^{(\vartheta-\varepsilon)} \right| + \varepsilon \frac{L}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} \qquad (4.21)$$

olarak tanımlayalım. (4.20)'de (4.21)'i ve $\tau = s + \vartheta - 1$ eşitliğini kullanırsak, $t \in [\vartheta-1, \xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için

$$|y(t) - z(t-\varepsilon)| = |y(t) - \tilde{z}(t)|$$

$$\leq \phi(t) + \frac{M}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} |y(s+\vartheta-1) - z(s+\vartheta-\varepsilon-1)|$$

$$= \phi(t) + \frac{M}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{s=0}^{t-\vartheta} (t-s-1)^{(\vartheta-1)} |y(s+\vartheta-1) - z(s+\vartheta-\varepsilon-1)| \qquad (4.22)$$

elde edilir.

Son olarak, lemma 2.1. de verilen Gronwall eşitsizliğini kullanalım. (4.22)'ye lemma 2.1. i uygularsak,

$$K_0 = \max_{(t,\tau)\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}\times[\vartheta-1,t-1]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \left|(t-\tau+\vartheta-2)^{(\vartheta-1)}\right|$$

Böylece (4.22)'den,

$$|y(t)-z(t-\varepsilon)| \leq \phi(t) + \frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1}|y(\tau)-z(\tau-\varepsilon)| \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.23)'e Gronwall eşitsizliğini uygularsak,

$$|y(t)-z(t-\varepsilon)| = |y(t)-\tilde{z}(t)| \leq \phi(t) + \frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1}\phi(\tau)\left(1+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\right)^{t-\tau-1} \tag{4.24}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

■

Uyarı 4.1. Teorem 4.1. ifadesi ve ispatı ile ilgili bir gözlem yapalım. Q_0 ancak ve ancak $\varepsilon \neq 0$ iken gereklidir. Böylece, $\varepsilon = 0$ olduğu durumlarda teorem 4.1. in hipotezi uygundur. Şimdi, ispatlamış olduğumuz teorem 4.1. den sonuçlar çıkaracağız (Goodrich 2010).

Sonuç 4.1. Teorem 4.1. in hipotezini varsayalım. Ayrıca, $|y_0 - z_0| = \delta$ olduğunu varsayalım. Daha sonra, problem (4.1)-(4.2)'nin çözümü y, problem (4.3)-(4.4)'ün çözümü z olarak verilsin. Her $\eta > 0$ ve $\delta, \varepsilon > 0$ için,

$$|y(t)-z(t-\varepsilon)| < \eta \tag{4.25}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $t \in [\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$, $\xi > 0$ dır (Goodrich 2010).

İspat. Gamma fonksiyonunun şartlarında ϕ yazarak başlayalım.

$$\phi(t) = \left|\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(\vartheta-\varepsilon)y_0 - \Gamma(t-\varepsilon+1)\Gamma(\vartheta)z_0}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(t-\vartheta+2)\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}\right|$$

$$+\frac{Q_0}{\Gamma(\vartheta)}\left|\frac{(\vartheta-\varepsilon)\Gamma(t+1)-\vartheta\Gamma(t-\varepsilon+1)}{\vartheta\Gamma(t-\vartheta+1)}\right|$$

$$+Q_0|\Gamma(\vartheta-\varepsilon)-\Gamma(\vartheta)|\left|\frac{\Gamma(t-\varepsilon+1)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)\Gamma(t-\vartheta+1)}\right|$$

$$+\frac{\varepsilon L}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-\vartheta+1)} \tag{4.26}$$

(4.26)'da her terim için $\delta, \varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilerek, keyfi küçük yapılabilir.

Bu amaçla, $\eta_0 > 0$ olarak verilsin. $0 < \varepsilon < N_1$ olduğunda $N_1 > 0$ olarak seçebiliriz. $[\vartheta - \varepsilon, +\infty)$ da $\Gamma(.)$'in düzgün sürekliliği her $t \in [\vartheta - 1, \xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için

$$|\Gamma(\vartheta - \varepsilon) - \Gamma(\vartheta)| < \frac{\eta_0}{4Q_0\left|\frac{\Gamma(t-\varepsilon+1)}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(\vartheta-\varepsilon+1)\Gamma(t-\vartheta+1)}\right| + 4} < \frac{\eta_0}{4} \tag{4.27}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, $N_2 > 0$ öyle ki $0 < \varepsilon < N_2$ dir. $[\vartheta - \varepsilon, +\infty)$ kümesinde gamma fonksiyonunun düzgün sürekliliğinden,

$$\frac{Q_0}{\Gamma(\vartheta)}\left|\frac{(\vartheta-\varepsilon)\Gamma(t+1) - \vartheta\Gamma(t-\varepsilon+1)}{\vartheta\Gamma(t-\vartheta+1)}\right|$$
$$\leq \frac{Q_0}{\Gamma(\vartheta)}\left[|\Gamma(t+1) - \Gamma(t+1-\varepsilon)|\frac{1}{\Gamma(t-\vartheta+1)} + \varepsilon\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\vartheta+1)}\right]$$
$$\leq \frac{\eta_0}{8} + \frac{\eta_0}{8} = \frac{\eta_0}{4} \tag{4.28}$$

Ayrıca, $0 < \varepsilon < N_3$ ve $\delta = |y_0 - z_0| < \frac{\eta_0}{8}.\max_{t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \frac{1}{\Gamma(t-\varepsilon+1)\Gamma(\vartheta)}$ olduğunda, $N_3 > 0$ sayıları için,

$$\frac{1}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(t-\vartheta+2)\Gamma(\vartheta-\varepsilon)}|\Gamma(t+1)\Gamma(\vartheta-\varepsilon)y_0 - \Gamma(t-\varepsilon+1)\Gamma(\vartheta)z_0|$$
$$\leq |y_0||\Gamma(t+1)\Gamma(\vartheta-\varepsilon) - \Gamma(t-\varepsilon+1)\Gamma(\vartheta)| + |y_0 - z_0||\Gamma(t-\varepsilon+1)\Gamma(\vartheta)|$$
$$\leq |y_0|[|\Gamma(t+1) - \Gamma(t+1-\varepsilon)||\Gamma(\vartheta-\varepsilon)| + |\Gamma(t-\varepsilon+1)||\Gamma(\vartheta-\varepsilon) - \Gamma(\vartheta)|]$$
$$+|y_0 - z_0||\Gamma(t-\varepsilon+1)\Gamma(\vartheta)|$$
$$\leq \frac{\eta_0}{8} + \frac{\eta_0}{8} \leq \frac{\eta_0}{4} \tag{4.29}$$

dir. Son olarak, $0 < \varepsilon < N_4$ olduğunda

$$\frac{\varepsilon L}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{s=0}^{t-\vartheta}\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-\vartheta+1)} < \frac{\eta_0}{4} \tag{4.30}$$

olduğundan $N_4 > 0$ olarak seçebiliriz. Çünkü, (4.30)'da toplam ve miktar $\frac{L}{\Gamma(\vartheta)}$ ile sınırlandırılır.

Şimdi, $N = min\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ olsun. $0 < \varepsilon < N$ olduğunda, $t \in [\vartheta - 1, \xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için (4.27)-(4.30),

$$|\phi(t)| < \eta_0 \tag{4.31}$$

olduğunu ifade eder. $\phi(t)$, keyfi küçük yapılabilir. $\eta > 0$ olarak verilsin. Bazı $N_5 \geq 0$ sayısı için,

$$\max_{t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \left| \frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1} \left(1+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\right)^{t-\tau-1} \right| \leq N_5 \tag{4.32}$$

dir. (4.31) ve (4.32) birlikte δ ve ε nun yeteri kadar küçük seçilebileceğini ifade eder. Öyle ki,

$$\max_{t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \phi(t) < min\left\{\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2N_5+1}\right\} \tag{4.33}$$

dir. Böylece, (4.31)-(4.33)'den, verilen her $\eta > 0$ için

$$|y(t) - z(t-\varepsilon)| < \eta$$

elde edilir. δ ve ε yeteri kadar küçük seçilmiştir ve böylece ispat tamamlanır.

■

Sonuç 4.2. Teorem 4.1. hipotezinin sağlandığını varsayalım. Ayrıca, $|y_0 - z_0| = \delta$ olduğunu varsayalım. $\xi > 0$ olarak verilsin. (4.3)-(4.4)'de $\varepsilon = 0$ olduğunu varsayalım. Daha sonra, (4.1)-(4.2) probleminin bir çözümü y ve (4.3)-(4.4) probleminin bir çözümü z olarak verilsin. Aşağıda belirtildiği şekilde her $\eta > 0$ için sınır şekilde $\delta > 0$ olarak seçebiliriz. Her $t \in [\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için

$$|y(t) - z(t-\varepsilon)| < \eta \tag{4.34}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodrich 2010).

İspat. $\varepsilon = 0$ ise (4.21)'den,

$$\phi(t) = \frac{t^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} |y_0 - z_0|$$

dır.

$[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ kompakt kümesinde bir $\xi_0 \in [\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ sayısı mevcuttur. Öyle ki,

$$\max_{\tau\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \phi(\tau) = \frac{{\xi_0}^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} |y_0 - z_0|$$

dır.

$$K_1 = \max_{(t,\tau)\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}\times[\vartheta-1,t-1]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \left(1+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\right)^{t-\tau-1}$$

olduğunda,

$$|y(t) - z(t)| \leq \frac{{\xi_0}^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)} \delta$$

$$+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\sum_{\tau=\vartheta-1}^{t-1}\frac{\xi_0{}^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}\left(1+\frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\right)^{t-\tau-1}\delta$$

$$\leq \delta\left[\frac{\xi_0{}^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}+\frac{MK_0K_1\xi_0{}^{(\vartheta-1)}(\xi-\vartheta+1)}{\left(\Gamma(\vartheta)\right)^2}\right] \tag{4.35}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$0<\delta<\frac{\eta}{\frac{\xi_0{}^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}+\frac{MK_0K_1\xi_0{}^{(\vartheta-1)}(\xi-\vartheta+1)}{\left(\Gamma(\vartheta)\right)^2}} \tag{4.36}$$

olarak seçilir. (4.35) ve (4.36) birlikte,

$$|y(t)-z(t)|\leq \delta\left(\frac{\xi_0{}^{(\vartheta-1)}}{\Gamma(\vartheta)}+\frac{MK_0K_1\xi_0{}^{(\vartheta-1)}(\xi-\vartheta+1)}{\left(\Gamma(\vartheta)\right)^2}\right)<\eta \tag{4.37}$$

olduğunu ifade eder. Böylece ispat tamamlanır.

■

Sonuç 4.3. Teorem 4.1. hipotezinin sağlandığını varsayalım. Ayrıca, (4.1)-(4.2)'nin bir çözümü $y(t)$ ve (4.3)-(4.4)'ün bir çözümü $z(t)$ olsun. $\vartheta=1$ olduğunda,

$$|y(t)-z(t-\varepsilon)|\leq \phi(t)+MK_0\sum_{\tau=0}^{t-1}\phi(\tau)(1+MK_0)^{t-\tau-1}$$

elde edilir. Burada,

$$\phi(t)=\left|y_0-\frac{(t-\varepsilon)^{(-\varepsilon)}}{\Gamma(1-\varepsilon)}z_0\right|$$

$$+Q_0\left[\left|t-\frac{(t-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}}{1-\varepsilon}\right|+\left|\frac{(\Gamma(1-\varepsilon)-1)(t-\varepsilon)^{(-\varepsilon)}}{\Gamma(2-\varepsilon)}\right|\right]+t\in L \tag{4.38}$$

dir (Goodrich 2010).

Sonuç 4.4. Teorem 4.1. hipotezinin sağlandığını ve $\vartheta=1$ olduğunu varsayalım. $|y_0-z_0|=\delta$ ve (4.3)-(4.4)'de $\varepsilon=0$ olduğunu varsayalım. (4.1)-(4.2) probleminin bir çözümü y ve (4.3)-(4.4)'ün bir çözümü z olarak verilsin. Aşağıda belirtildiği şekilde her $\eta>0$ için sınır şekilde $\delta>0$ olarak seçebiliriz. Her $t\in[\vartheta-1,\xi]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için,

$$|y(t)-z(t)|<\eta \tag{4.39}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodrich 2010).

İspat. (4.37)'den $0<\delta<\frac{\eta}{1+MK_0K_1\xi}$ seçilir. Daha sonra, sonuç 4.2. sonucu ifade eder.

Sonuç 4.2. için bir örnek verelim.

Örnek 4.1. $\varepsilon = 0, \vartheta = \frac{9}{10}$, $\eta = 2$ ve $\xi = \frac{99}{10}$ olduğunu varsayalım. $f(t, y) = t + y$ olsun. Böylece, kesirli başlangıç değer problemlerinin çifti için sonuç 4.2. yi uygulayalım.

$$\Delta^{\frac{9}{10}} y(t) = \left(t - \frac{1}{10}\right) + y\left(t - \frac{1}{10}\right) \tag{4.40}$$

$$\Delta^{-\frac{1}{10}} y(t)|_{t=0} = y\left(-\frac{1}{10}\right) = y_0 \tag{4.41}$$

ve

$$\Delta^{\frac{9}{10}} z(t) = \left(t - \frac{1}{10}\right) + y\left(t - \frac{1}{10}\right) \tag{4.42}$$

$$\Delta^{-\frac{1}{10}} z(t)|_{t=0} = z\left(-\frac{1}{10}\right) = z_0 \tag{4.43}$$

ve $\delta = |y_0 - z_0|$ olarak seçilebilir. Öyle ki, her $t \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{99}{10}\right]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ için

$$|y(t) - z(t)| < 2 = \eta \tag{4.44}$$

dir. Burada y ve z sırasıyla (4.40)-(4.41) ve (4.42)-(4.43) problemlerinin çözümüdür. Bu amaçla, aşağıdaki miktarlarda sonuç çıkarabiliriz.

$$M = 1 \tag{4.45}$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{10} \tag{4.46}$$

$$K_0 = \max_{(t,\tau)\in\left[-\frac{1}{10},\frac{99}{10}\right]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}\times\left[-\frac{1}{10},t-1\right]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \left|\left(t - \tau - \frac{11}{10}\right)^{\left(-\frac{1}{10}\right)}\right| \approx 1.07 \tag{4.47}$$

$$K_1 = \max_{(t,\tau)\in\left[-\frac{1}{10},\frac{99}{10}\right]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}\times\left[-\frac{1}{10},t-1\right]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}} \left(1 + \frac{MK_0}{\Gamma(\vartheta)}\right)^{t-\tau-1} \approx 512 \tag{4.48}$$

Böylece, (4.45)-(4.48) ile verilen değerlerle birlikte (4.36) varsayımını kullanırsak,

$$\delta < \frac{\eta}{\dfrac{\left(-\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{9}{10}-1\right)}}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} + \dfrac{1.07 \times 512 \times \left(-\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{9}{10}-1\right)} \times \left(\frac{99}{10} - \frac{9}{10} + 1\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)\right)^2}} \approx \frac{\eta}{5121} \tag{4.49}$$

olarak bulunur. (4.49)'da $\eta = 2$ olarak alınırsa,

$$\delta < 0.000391 \tag{4.50}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, (4.50) eğer $\left[-\frac{1}{10},\frac{99}{10}\right]_{\mathbb{N}_{\vartheta-1}}$ aralığında y ve z çözümlerinin her birinin $\eta = 2$ için aynı kalmasını istiyorsak, başlangıç koşulu olan y_0 ve z_0'ın yaklaşık olarak 0.000391'den daha fazla olmaması gerekir.

5. KAYNAKLAR

Atici, F. M. and Eloe, P. W. (2007) . A transform method in discrete fractional calculus. *International Journal of Difference Equations*, **2**: 165-176.

Atici, F. M. and Eloe, P. W. (2009). Initial value problems in discrete fractional calculus. *Proceedings of the American Mathmatical Society*, **3**: 981-989.

Atici, F. M. and Uyanik, M. (2015). Analysis of discrete fractional operators. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **9**: 139-149.

Bohner, M. and Guseinov, G. (2007). The convolution on time scales, Abstract and Applied Analysis, Art. ID 58373, **24**.

Bohner, M. and Peterson, A. (2001). Dynamic equations on time scales, An introduction with applications. Birkhäuser Boston,Inc., Boston, MA.

Bohner, M. and Peterson, A. (2002). Laplace transform and Z-transform: Unification and extension, *Methods and Applications of Analysis*, **9**: 151-157.

Diaz, J. B. and Osler T. J. (1974). Differences of Fractional Order, *Mathematics of Computation*, 185-202.

Goodrich, C. S. (2010). Continuity of solutions to discrete fractional initial value problems. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**: 3489-3499.

Goodrich, C. S. (2012). On discrete sequential fractional boundary value problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **385**: 111-124.

Goodrich, C. S. (2014). A convexity result for fractional differences. *Applied Mathematics Letters*, **35:** 58-62.

Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (2001). Difference Equations: An Introduction with Applications, Harcourt/Academic Press, San Diego.

Miller, K. S. and Ross, B. (1989). Fractional Difference Calculus, In Univalent functions, Fractional Calculus and Their Applications, Ellis Horwood Series in Mathematics and its applications. Horwood, Chichester, 139–152.

Miller, K. S. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc. NewYork.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Aynur ASTAM
Doğum Yeri ve Tarihi	: Kadıköy - 1990
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0554 275 64 49 / aynur.astam@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Öğretmen Eyüp Topçu Anadolu Lisesi 2004-2008
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi 2008-2012
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi 2012-

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Türk Ekonomi Bankası Afyon 2013-