2-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevim YEGÜL

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Sevim YEGÜL

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS, 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Sevim YEGÜL tarafından hazırlanan "2-Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine "adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/08/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** larak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Özer TALO
Celal Bayar Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatih KARAKUŞ
Afyon Kocatepe Üniv. Eğitim Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2015 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../2015

Sevim YEGÜL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

2-NORMLU UZAYLARDA
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Sevim YEGÜL
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalıştığımız tez konusu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon, örnek ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarla ilgili tanım, kavram ve teoremler verildi, Ayrıca,2-normlu uzaylarla ilgili bazı temel özellikler incelendi. Dördüncü bölümde, 2-normlu uzaylarında ve 2-Banach uzaylarında istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy kavramları ve bu kavramlar ile ilgili özellikler incelendi. Ayrıca, 2-normlu uzayların yapıları ve genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar olarak bilinen yeni bir yapı araştırıldı.

2015, v+37 sayfa

Anahtar Kelimeler : İstatistiksel yakınsaklık, 2-normlu uzaylar, 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON STATISTICAL CONVERGENCE
IN 2-NORMED SPACES

Sevim YEGÜL
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, historical development of related notions of the thesis subject was mentioned. In the second chapter, some basic definitions, notions, examples and theorems related to study were given. In the third chapter, definitions, concepts, and theorems related to 2-normed spaces were given. Also, properties about 2-normed spaces were examined. In the fourth chapter, the concepts of statistical convergence, Cauchy sequences and properties related to this concepts in 2-normed spaces were investegated. Also, structure of 2-normed spaces and a new structure called generalized 2-normed spaces were examined.

2015, v+37 pages

Key Words : Statistical convergence, 2-normed spaces, statistical convergence and statistical Cauchy sequences in 2-normed spaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd.Doç.Dr. Erdinç DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tezimi yazdığım süreç boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen Yrd.Doç.Dr.Uğur Ulusu'ya teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Sevim YEGÜL

AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{R}^d$	d-boyutlu reel Öklid uzayı
c	Tüm yakınsak olan dizilerin uzayı
c_0	Tüm sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
ℓ_∞	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_1	Mutlak toplanabilen dizilerin uzayı
$\|.,.\|$	2-norm fonksiyonu
$\|.\|_p$	$2 \leq p \leq \infty$ olmak üzere baz ile elde edilen norm
$\|.\|_\infty$	2-normların maksimumu olan sonsuz norm fonksiyonu
$\|.,...,.\|$	n-norm fonksiyonu
$\|.,...,.\|_\infty$	(n-1) boyutlu-norm fonksiyonu
$\{u_1,...,u_d\}$	d boyutlu baz
$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x,r)$	$\{u_1,...,u_d\}$ bazı altındaki x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
(X,d)	Metrik uzay
$(X,\|.,.\|)$	2-Banach uzayı
$(C,\|\|\|)$	Banach cebiri
$\|K\|$	K kümesinin kardinelitesi
$<.,.>$	iç çarpım uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_n)	Reel sayı dizisi
F	Sınırlı lineer 2-fonksiyonel
$st-\lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti

1 GİRİŞ

Limit, yakınsaklık ve süreklilik gibi kavramlar analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturan en önemli kavramlardır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahiptir. 1951' de Fast'in istatistiksel yakınsak kavramını tanımlanmasından bu yana istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları ile ilgili çalışmalar Connor (1989), Schoenberg (1959), Maddox (1970), Šalát (1980), Fast (1952), Fridy (1985, 1993), Nuray ve Ruckle (2000), Rath ve Tripathy (1994) ve daha birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır.

Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizisi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla ilişkiler bulan ve yine yakınsaklık alanında önemli yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Fridy ve Orhan (1993) bu çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

2-metrik uzay ve 2-normlu uzay kavramları ilk önce Gähler (1963, 1965) tarafından tanıtıldı. Daha sonra bu kavramlar Açıkgöz (2007), Gunawan ve Mashadi (2001), Gürdal ve Pehlivan (2004, 2009), Gürdal ve Açık (2008), Gürdal (2006), Lewandowska (2001, 2003), Rezapour (2005), Mursaleen ve Alotaibi (2011), Sarabadan ve Talebi (2011), Şahiner vd. (2007), Tripathy vd. (2012), Šalát vd. (2005), White (1969) ve birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Gunawan ve Mashadi (2001), sonlu boyutlu 2-normlu uzayları çalıştılar ve 2-normdan türetilen belli bir normu kullanarak 2-normlu uzayların topolojilerinin tam olarak tanımlanabileceğini gösterdiler. 2-Banach uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterdiler ve bu gerçeği kullanarak, Sabit Nokta teoremini ispatladılar. Dahası, elde ettikleri sonuçların bazı sonsuz boyutlu 2-normlu uzaylara genişletilebileceğini gösterdiler.

Açıkgöz (2007), 2-normlu uzaylar teorisini ve onların yapılarını inceleyip, bu yapıların normlu uzaylar ile farkını açıkladı. Ayrıca, genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar olarak adlandırılan yeni bir yapı tanımladı.

Gürdal ve Pehlivan (2009), 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık çalıştılar. Reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığının bazı özelliklerinin 2-normlu uzaylarda ki diziler için de elde edilebileceğini gösterdiler. Ayrıca, 2-normlu uzaylarda istatistiksel Cauchy dizisini tanımlayıp, 2-normlu uzaylarda ki bir dizi için istatistiksel Cauchy dizisi olma kriterini elde ettiler. Bunun yanında, 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizisi arasındaki ilişkiyi incelediler.

Gürdal ve Pehlivan (2004), 2-Banach uzaylarda istatistiksel yakınsaklık çalıştılar. Ayrıca, 2-Banach uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizisinin çakıştığını elde ettiler.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde, matematik alanında elzem olan ve bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, Gunawan ve Mashadi (2001) ve Açıkgöz (2007) tarafından yapılan çalışmalardaki 2-normlu uzaylarda temel tanım, teorem ve özellikleri vereceğiz.

Dördüncü bölümde ise, Gürdal ve Pehlivan (2009) ve Gürdal ve Pehlivan (2004) çalışmalardaki 2-normlu uzaylarda ve 2-Banach uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizisi ve bu iki kavram ile ilgili özellikleri, teoremleri ve ispatlarını vereceğiz.

Son olarak, tez için temel kaynak olarak kullandığımız kitap, makale ve tezleri kaynaklar kısmında vereceğiz.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay ve altuzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik ve Metrik Uzay). X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, x) = 0$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanırsa, d fonksiyonuna, X üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

(M1) $d(x, x) = 0$ şartı yerine $(\mathrm{M1})'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şartını alırsak d fonksiyonuna, *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Bir lineer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).

Bu çalışmamızda, $\mathbb{R}$ reel uzay üzerinde

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan *alışılmış mutlak değer metriğini* gözönüne alacağız. Burada $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2 (Dizi Uzayı). Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞ , c , c_0 , ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary 1989).

Tanım 2.1.3 (Yarı Norm ve Norm). X bir lineer uzay ve $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|\theta\| = 0$,

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *yarı normlu uzay* denir.

Burada (N2) şartı yerine $(\text{N2})'$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı sağlanırsa, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *bir normlu uzay* denir.

Tanım 2.1.4 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

1) Her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa, (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

2) $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir x vektörü varsa (yani, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) x_n dizisi x e *yakınsaktır* denir. Bu x vektörü, x_n dizisi tarafından bir tek olarak belirtilir.

3) $m, n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise (yani, verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) x_n dizisine *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar 2000).

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.5 (Normlu Cebir, Banach Cebiri) C bir cebir ve C de bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olsun. Bu norm, her $x, y \in C$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

şartını sağlıyorsa ve C nin birim elemanı olması halinde de

$$\|e\| = 1$$

ise C ye *normlu cebir* denir. $(C, \|.\|)$ normlu cebiri, normlu lineer uzay olarak tam ise bu normlu cebire *Banach cebiri* denir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.1.6 (Açık ve Kapalı Yuvar). (X, d) metrik uzayında, x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için;

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

cümlelerine, sırasıyla, x_0 merkezli, r yarıçaplı *açık yuvar* ve *kapalı yuvar* denir (Musayev ve Alp 2000)

Tanım 2.1.7 (Kompakt Uzay, Dizisel Kompaktlık). Bir topolojik uzayın her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahip ise uzaya *kompakt uzay* denir.

Bir metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut ise metrik uzaya *dizisel kompakttır* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.8 (Lineer Bağımsızlık, Lineer Bağımlılık) L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de L nin sonlu bir alt cümlesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa S cümlesine veya $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) *lineer bağımsızdır*, denir.

Lineer bağımsız olmayan kümeye *lineer bağımlı küme* denir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.1.9 (Baz (Taban)) L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı B, L cümlesinin bir alt cümlesi olsun. B lineer bağımsız ve B, L yi geriyorsa yani $< B >= L$ ise B ye (F üzerinde) L nin bir *bazı (tabanı)* denir (Bayraktar 2000).

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, tek dizilerde yoğunluk kavramını, istatistiksel yakınsaklık tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.2.1 (Doğal Yoğunluk) $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ cümlelerini alalım. $|K| = card\, K$ (K cümlesinin kardinalitesi) olmak üzere,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine, sırasıyla, K cümlesinin *alt* ve *üst yoğunlukları* denir. $\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K cümlesinin *doğal yoğunluğu* denir. $K \subset \mathbb{N}$ cümlesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven et al.1991).

Şimdi doğal yoğunluk ile ilgili bazı özellik ve örnekler verelim:

1) $K \subseteq \mathbb{N}$ sonlu ise $\delta(K) = 0$ dır.

2) $K = \mathbb{N}$ ise $\delta(K) = \frac{n}{n} = 1$ dir.

1) ve 2) den bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $0 \leq \delta(K) \leq 1$ dir.

3) $K = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = T$ ise

$$\delta(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

olur.

4) $K = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = C$ ise

$$\delta(C) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

olur.

5) $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ise

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olur.

6) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ise

$$\delta(K_1 \cup K_2) - \delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$$

olur.

7) $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ olur.

8) $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$ dır.

Tanım 2.2.2 (İstatistiksel Yakınsaklık) Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise, $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir (Fast 1951).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ile ilgili olan ve literatürde mevcut bulunan bir kaç örnek verelim:

Örnek 2.2.3

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \{k : |x_k - l| \geq \epsilon\} = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k : k = n^2\}$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olduğundan, $st - \lim x = 0$ elde edilir.

Örnek 2.2.4

$$x_k = \begin{cases} k, k = n^3 \in \mathbb{N} \\ 1, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8, \ldots\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \{k : |x_k - 1| \geq \varepsilon\} = \{k : k = n^3\}$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olduğundan, $st - \lim x = 0$ elde edilir.

Örnek 2.2.5

$$x_k = \begin{cases} -1, k \in tek \\ 1, k \in çift \end{cases}$$

dizisinin yoğunluğu 0 olmadığından istatistiksel yakınsak değildir.

Önerme 2.2.6 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsakır.

Bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani, istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Bu bir örnekle gösterelim.

Tanım 2.2.7 Bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\delta(\{K : |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

ise x dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy 1985).

Teorem 2.2.8 Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir:

i. x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

ii. x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii. h.h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

3 2-NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından yapılan 2-normlu uzaylar ile ilgili temel tanım, lemma ve teoremleri vereceğiz. Daha sonra Açıkgöz (2007) tarafından yapılan 2-normlu uzay ve onun yapısı hakkındaki tanım ve teoremleri ve 2-normlu uzayın genelleştilmesini ele alacağız.

3.1 Sonlu Boyutlu 2-Normlu Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 3.1.1 X, $2 \leq d < \infty$ olmak üzere d boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde

$$\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\|.,.\|$ fonksiyonuna bir 2-norm denir.

(i) $\|x, y\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır;

(ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$;

(iii) $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

$(X, \|.,.\|)$ çiftine *2-normlu uzay* denir.

2-normlu uzayın bir standart örneği aşağıdaki 2-normla donatılmış $\mathbb{R}^2$ dir:

$\|x, y\| :=$ köşeleri $0 = (0, 0), x$ ve y vektörleri olan üçgensel bölge.

Herhangi bir $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x, y\| \geq 0 \quad ve \quad \|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$$

özelliklerinin sağlandığı görülür. Ayrıca, x, y ve z lineer bağımlı ise (bu, örneğin $d = 2$ olduğunda olur) o zaman,

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\| \quad veya \quad \|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

dir.

2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayı verilsin. Aşağıda tanımlanan bir dizinin limit kavramından faydalanarak bir topoloji elde edilebilir.

Her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

ise X deki bir (x_n) dizisine $x \in X$ değerine yakınsaktır denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ile gösterilir ve (x_n) dizisinin limiti x dir, denir.

2-normlu uzaylarda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki (x_n) dizisi X deki iki farklı x ve y limitlerine yakınsasın. $\|x - y, z\| \neq 0$ olacak şekilde $z \in X$ seçelim ve aynı anda

$$\|x_N - x, z\| < \frac{1}{2}\|x - y, z\| \text{ ve } \|x_N - y, z\| < \frac{1}{2}\|x - y, z\|$$

olacak şekilde yeterince büyük $N \in X$ alalım. O zaman üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|x - y, z\| &\leq \|x - x_N, z\| + \|x_N - y, z\| \\ &< \frac{1}{2}\|x - y, z\| + \frac{1}{2}\|x - y, z\| \\ &= \|x - y, z\| \end{aligned}$$

olur ki bu da bir çelişkidir. Böylece, eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

varsa tek olmalıdır.

Bundan sonra $(X, \|.,.\|)$ ikilisini 2-normlu uzay olarak alacağız. Aksi belirtilmedikçe X in d boyutunu $2 \leq d < \infty$ olduğunu kabul edeceğiz. Sabit $\{u_1, ..., u_d\}$, X için bir baz olsun. O zaman biz aşağıdakileri yazabiliriz.

Lemma 3.1.2 X de bir (x_n) dizisi X de bir x elemanına yakınsaktır gerek ve yeter şart her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

olmasıdır.

İspat 3.1.3 Eğer her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

ise bu durumda, her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

olduğunu göstermemiz ispat için yeterlidir. Açık olarak her $y \in X$ ve $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$ için

$$y = \alpha_1 u_1, ..., \alpha_d u_d$$

yazıbilir ve üçgen eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_n - x, y\| \leq |\alpha_1|\|x_n - x, u_1\| + ... + |\alpha_d|\|x_n - x, u_d\|$$

elde edilir.

Lemma 3.1.4 X de bir (x_n) dizisi X de bir x elemanına yakınsaktır gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \max\{\|x_n - x, u_i\| : i = 1, ..., d\} = 0$$

olmasıdır.

Bu basit gerçek bizi X üzerindeki bir normun tanımına götürür. X üzerinde $\{u_1, ..., u_d\}$ bazıyla bir norm tanımlayabiliriz. $\|.\|_\infty$ normunu

$$\|x\|_\infty := \max\{\|x, u_i\| : i = 1, ..., d\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Gerçektende;

(i) $\|x\|_\infty = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = \theta$ olmasıdır.

(ii) $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\|x\|_\infty$ dir.

(iii) Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

dir.

Genelde $1 \leq p \leq \infty$ için X üzerinde $\|.\|_p$ normunu

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{d} \|x, u_i\|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Fakat X sonlu boyutlu olduğundan tüm bu normlar denktir. Bu nedenle aksi belirtilmedikçe bu bölüm boyunca sadece $\|.\|_\infty$ ile çalışacağız.

Burada bazın seçimi önemli değildir. X için başka $\{v_1, ..., v_d\}$ şeklinde bir baz seçilir ve $\|.\|_\infty$ normu bu baza ait olarak tanımlanırsa sonuçta elde edilen norm, $\{u_1, ..., u_d\}$ bazına göre tanımlanan norma denk olacaktır.

Türetilmiş $\|.\|_\infty$ normunu kullanarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.5 X de bir (x_n) dizisinin X de x e yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$$

olmasıdır.

Türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu yardımıyla, x noktasında r yarıçaplı (x, r) merkezli $B_{\{u_1,...,u_d\}}$ açık yuvarı

$$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x, r) := \{y : \|x - y\|_\infty < r\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yuvarları kullanarak *Lemma 3.1.5* yı aşağıdaki gibi verilebilir.

Lemma 3.1.6 X de bir (x_n) dizisinin X de x e yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\{u_1,...,u_d\}}(x, \varepsilon)$$

olmasıdır.

Tüm sonuçları özetleyerek aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.1.7 Herhangi bir sonlu boyutlu 2-normlu uzay bir normlu uzay ve onun topolojisi, türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu tarafından üretilen ile bağdaşır (uyuşur).

Aşağıda göstereceğimiz gibi, bir normlu uzaydaki bir çok sonuç, türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu veya onun yuvarları kullanılarak 2-normlu uzaylarda doğrulanabilir. Önce bazı örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.1.8 $X = \mathbb{R}^2$ yi, $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinden meydana gelen paralel kenarın alanı olarak alalım. Bu açıkca

$$\|x,y\| = |x_1y_2 - x_2y_2|, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

formülüyle verilebilir. $\mathbb{R}^2$ için $\{i, j\}$ standart bazı alınsın. O zaman

$$\|x,i\| = |x_2| \text{ ve } \|x,j\| = |x_1|$$

ve böylece $\{i, j\}$ bazına ait türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}, x = (x_1, x_2)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, burada tanımlanan $\|.\|_\infty$ normu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki düzgün norm ile tamamen aynıdır. Bundan dolayı $B_{\{i,j\}}(x, r)$ yuvarı x merkezli r yarıçaplı bir karedir. Türetilen norm $\mathbb{R}^2$ üzerindeki öklid normuna denk olduğundan, yukarıdaki 2-normu ile donatılan $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminden başka birşey ifade etmez sonucuna varırız.

Daha genel olarak;

Uyarı 3.1.9 $\|x, y\| :=$ x ve y den meydana gelen paralel kenarın alanı olan normlu uzay olmak üzere $(\mathbb{R}^d, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı öklid normuna eşittir.

İspat 3.1.10 Her $x = (x_1, ..., x_d)$ ve $y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$ için, $\|x, y\|$ 2-normlu uzayı açık olarak

$$\|x,y\| = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{d} y_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{d} x_iy_i\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile verilebilir.

$\mathbb{R}^d$ için $\{e_1, e_2, ..., e_d\}$ standart bazını alalım. $j = 1, ..., d$ için

$$\|x, e_j\| = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) - x_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir ve böylece $\{e_1, ..., e_d\}$ bazına ait türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\left\{ \left\{ \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) - x_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} : j = 1, ..., d \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi $\|.\|_E$ yi $\mathbb{R}^d$ de bir Öklid normu olarak alalım.

Tüm $x \in \mathbb{R}^d$ ler için

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_E \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

olduğunu göstermek ve türetilmiş normun Öklid normuna eşit olduğunu doğrulamak kolaydır.

Uyarı 3.1.11

Yukarıdaki $(\mathbb{R}^d, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı için,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d} \|x, e_j\|^2 = (d-1)\sum_{i=1}^{d} x_i^2$$

olduğu gözlemlenir yani, $\|.\|_2$ öklid normunun bir katıdır.

Şimdi sonlu boyutlu 2-Banach uzayları için Sabit Nokta Teoremini kanıtlayalım. X de her Cauchy dizisi için $(X, \|.\|)$ nin 2-Banach uzayı olduğunu yani, her $y \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, y\| = 0$$

şartını sağlayan X deki herhangi bir (x_n) dizisinin X de bazı x lere yakınsak olduğunu hatırlayalım.

Lemma 3.1.12 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayının bir 2-Banach uzay olması için gerek ve yeter şart $(X, \|.\|_\infty)$ Banach uzayı olmasıdır.

İspat 3.1.13 *Lemma 3.1.4* de 2-normdaki yakınsaklık türetilmiş normdakine eş değer olduğundan, 2-norma göre (x_n) nin Cauchy olması için gerek ve yeter şart türetilmiş normda Cauchy olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat 2-norma göre (x_n) Cauchy dir ancak ve ancak her $y \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, y\| = 0$$

ancak ve ancak her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, u_i\| = 0$$

ancak ve ancak

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\|_\infty = 0$$

ancak ve ancak (x_n) türetilmiş norma göre bir Cauchy olduğundan, bu açıktır.

Sonuç 3.1.14 (Sabit Nokta Teoremi) Kabul edelim ki $(X, \|.,.\|)$ 2-Banach uzayı olsun. Şimdi T, X in kendi kendine eşlemesi olsun öyle ki, T , X in biricik sabit noktası olmak üzere, tüm $x, y, z \in X$ için

$$\|T_x - T_y, z\| \leq k\|x - y, z\|$$

dir.

İspat 3.1.15

$\|.\|_\infty$ türetilmiş normuna göre, X de her x, y için T eşlemesi

$$\|T_x - T_y\|_\infty \leq k\|x - y\|_\infty$$

eşitsizliğini sağlar. $(X, \|.\|_\infty)$ ayrıca bir Banach uzayı olduğundan, Banach uzayları için Sabit Nokta Teoreminden, T nin X de biricik sabit nokta olduğu sonucuna ulaşırız.

3.2 Ek Sonuçlar

Şimdi, sonuçlarımızın $\langle .,. \rangle$ bir iç çarpım ve $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ onun normu olmak üzere, üzerinde standart 2-norm

$$\|x, y\| = \left\{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanmış herhangi ayrılabilir bir X iç çarpım uzayına (sonsuz boyut olabilir) genişleyebileceğini göreceğiz.

Şimdi (e_i) sayılabilir $I \supseteq \{1, 2\}$ kümesine endeksli, X için ortonormal taban olsun.

Bu durumda, her bir $i \in I$ için

$$\|x, e_i\| = \left\{\|x\|^2 - \langle x, e_i \rangle^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|$$

elde ederiz. Dolayısıyla (e_i) ye göre $\|.\|_\infty$ türetilmiş normunu

$$\|x\|_\infty := \sup\{\|x, e_i\| : i \in I\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Her $x \in X$ için

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|$$

olduğu açıktır. Tersine *Bessel* eşitsizliğini kullanarak

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - \langle x, e_1\rangle^2 + \|x\|^2 - \langle x, e_2\rangle^2 = \|x, e_1\|^2 + \|x, e_2\|^2 \leq 2\|x\|_\infty^2$$

elde ederiz ve buradan her $x \in X$ için

$$\|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

bulunur. Bu da $\|.\|_\infty$ un, X deki mevcut $\|.\|$ normuna eşit olduğunu gösterir.

Ayrıca, *Lemma 3.1.2* nin hala geçerli olduğunu görürüz. Yani X deki bir (x_n) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i\| = 0$$

olmasıdır. Gerçekten, her $i \in I$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i\| = 0$$

vererek her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

olduğunu gösterebiliriz. Her $y \in X$ için

$$\|x_n - x, y\| \leq \|x_n - x\|\|y\|$$

olduğunu gözlemleyebiliriz. Yeniden *Bessel* eşitsizliğini ele alırsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_n - x\|^2 \leq \|x_n - x, e_1\|^2 + \|x_n - x, e_2\|^2$$

elde ederiz. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

ve bu sebepten dolayı her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

dır. Buradan aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Uyarı 3.2.1 X deki bir (x_n) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerekli ve yeter şart yalnız $i = 1$ ve 2 için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i\| = 0$$

olmasıdır.

Buna göre $\{e_1, e_2\}$ ile X de $\|.\|_2$ basit normunu

$$\|x\|_2 := \{\|x, e_1\|^2 + \|x, e_2\|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlayabiliriz.

Bu şaşırtıcı değildir. Çünkü herhangi 2-normlu uzayda bir norm tanımlanırken lineer bağımlı iki vektörü kullabiliriz. Burada dikkate değer şey $\|.\|_2$ tarafından üretilen topoloji 2-norm tarfından üretilenle bağdaşmalıdır. Dikkat edilirse her $x \in X$ için,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

dir. $\|.\|_2$ ve $\|.\|_\infty$ eşitliği doğrulamaktadır ve her ikiside X deki $\|.\|$ mevcut normuna eşdeğerdir. Bu nedenle *Lemma 3.1.4* (ve benzerleri) *Lemma 3.1.12* ve *Sonuç 3.1.14* X için hala geçerlidir.

Sonuç 3.2.2 Bir önceki bölümde 2-norm tartışmasının

$$\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2(\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2)$$

paralelkenar tanımını sağladığı fark edilebilir.

Türetilmiş $\|.\|_2$ 2-norm hakkındaki bir başka gerçek onun

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

tanımı sağlamasıdır.

3.3 2-Normlu Yapılar Üzerine

Şimdi Açıkgöz (2007) tarafından 2-normlu uzay ve onun yapısı hakkındaki tanım ve teoremleri ve 2-normlu uzayın genelleştilmesini ele alacağız.

Şimdi X karmaşık veya kompleks sayılarda olan Φ nın üzerinde Φ in boyutundan daha büyük boyutlu bir vektör uzayı olsun. Farz edelim ki, $N(.,.)$, $X \times X$ üzerinde aşağıdaki şartları yerine getiren negatif olmayan reel bir fonksiyon olsun:

(i) $N(x,y) = 0$ ancak ve ancak x ve y lineer bağımlı vektörlerdir,

(ii) Her $x, y \in X$ için $N(x,y) = N(y,x)$,

(iii) Her $\lambda \in \emptyset$ ve $x, y, z \in X$ için $N(\lambda x, y) = |\lambda| N(x,y)$,

(iv) Her $x, y, z \in X$ için $N(x+y, z) \leq N(x,z) + N(y,z)$

dir. $N(.,.)$, X üzerinde 2-norm ve $(X, N(.,.))$ 2-normlu lineer uzay olarak adlandırılır. Her 2-normlu uzay yerel konveks bir topolojik uzaydır. Aslında $x \in X$ ve sabit bir $b \in X$ için ve her $x \in X$ için

$$P_b(x) = N(x,b)$$

bir yarı normdur ve $P = \{P_b\}_{b \in x}$ dir.

Bazı örnekler verelim;

Örnek 3.3.1 $X = \mathbb{R}^3$ alalım ve X üzerinde aşağıdaki 2-normu düşünelim. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere,

$$N(x,y) = |x \times y| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Bu durumda, $(X, N(.,.))$ 2-normlu uzaydır.

Örnek 3.3.2 P_n derecesi n den küçük olan $[0,1]$ aralığındaki tüm gerçek polinomların kümesini göstersin. Geleneksel toplama ve çarpmayı dikkate alırsak, P_n reel üzerinde lineer vektör alanıdır. Şimdi $[0,1]$ aralığında $\{x_0, x_1, ..., x_{2n}\}$ sabit farklı noktalar alalım ve f ve g lineer bağımsız olmak üzere P_n üzerinde aşağıdaki 2-normlu uzayını tanımlayalım:

$$N(f,g) = \sum_{k=0}^{2n} |f(x_k) g(x_k)|.$$

Bu durumda $(P_n, N(.,.))$ 2-normlu uzaydır.

Örnek 3.3.3 $X = \mathbb{Q}^3$ alalım ve X üzerinde aşağıdaki 2-normu düşünelim:

$$N(x,y) = |x \times y| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Bu durumda, $(X, N(.,.))$ 2-normlu uzaydır.

Tanım 3.3.4

(i) 2-normlu $(X, N(.,.))$ uzayındaki bir $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dizisi, eğer X de lineer bağımsız y ve z elemanları var öyle ki $\{N(x_n, y)\}$ ve $\{N(x_n, z)\}$ reel Cauchy dizileri ise, *Cauchy dizisidir.*

(ii) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 2-normlu $(X, N(.,.))$ uzayındaki bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ ve her $y \in X$ için $\{N(x_n - x, y)\}_{n\geq 1}$ sıfıra giderse $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dizisine yakınsaktır, denir.

(iii) 2-normlu $(X, N(.,.))$ uzayında bir Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *2-Banach uzayı* denir.

Lemma 3.3.5

(i) 2 boyutlu her lineer 2-normlu uzay tanımladığı cisim altında tam ise bir *2-Banach uzayıdır.*

(ii) Eğer 2-normlu $(X, N(.,.))$ uzayında $\{x_n\}_{n\geq 1}$ bir dizi ve

$$\lim_{n\to\infty} N(x_n - x, y) = 0$$

ise bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} N(x_n, y) = N(x, y)$$

dir.

Tanım 3.3.6 $(X, N(.,.))$ 2-normlu uzay olsun. $F : X \times X \longrightarrow \Phi$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme 2-fonksiyonel denir:

(i) Tüm $x, y, c, d \in X$ için $F(x+y, c+d) = F(x,c) + F(x,d) + F(y,c) + F(y,d)$ dir.

(ii) $x, y \in X$ ve tüm $\lambda, \lambda' \in \Phi$ için $F(\lambda x, \lambda' y) = \lambda\lambda' F(x,y))$.

2-fonksiyonel $F : X \times X \longrightarrow \Phi$ için onun normunu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$N(F) = \inf\{M \geq 0 | N(F(x,y)) \leq M.N(x,y), \text{ her } x, y \in X\}.$$

Teorem 3.3.7 $(X, N(.,.))$ 2-normlu uzayını alalım. W, X in bir alt uzayı ve $b \in X$ olsun. Eğer $x_0 \in X$ ve

$$\delta = \underset{w \in W}{Inf}\{N(x_0 - w, b)\} > 0$$

oluyorsa bir sınırlı $F : X \times \langle b \rangle \longrightarrow \Phi$ 2-fonksiyonel vardır öyle ki

$$F|_{w \times \langle b \rangle} = 0, \;\; F(x_0, b) = 1 \text{ ve } N(F) = \frac{1}{\delta}$$

elde edilir.

Lemma 3.3.8 $(X, N(.,.))$ 2-normlu uzay, W , X in bir alt uzayı, $b \in X$ ve $\overline{W}$, (x, P_b) yarı normunda X in kapanışı olmak üzere $x \in X \setminus \overline{W}$ olsun. Bu durumda, $w_0 \in W$ elemanı

$$N(x - w_0, b) = \inf_{w \in W} N(x - w, b)$$

olmasını sağlar ancak ve ancak bir sınırlı

$$F : X \times \langle b \rangle \longrightarrow \Phi$$

2-fonksiyonel vardır öyle ki

$$F|_{w \times \langle b \rangle} = 0, \quad N(F) = 1 \text{ ve } F(x_0 - w_0, b) = N(x_0 - w_0, b)$$

dir.

3.4 Genelleştirilmiş 2-Normlu Uzaylar

Tanım 3.4.1 X ve Y lineer uzaylar olsun. Bir

$$N(.,.) : X \times Y \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona genelleştirilmiş 2-norm denir:

(i) Her $x, y \in X$ için $N(x, y) = N(y, x)$

(ii) Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \Phi$ için $N(\lambda x, y) = |\lambda| N(x, y)$

(iii) Her $x, y \in X$ için $N(x + y, z) \leq N(x, z) + N(y, z)$

Eğer $X = Y$ ise genelleştirilmiş 2-normlu uzay $(X, N(.,.))$ tarafından tanımlanır.

Örneğin; A bir Banach cebiri ve her $x, y \in A$ için $N(x, y) = N(xy)$ olsun. Buradan $(A, N(.,.))$ genelleştirilmiş bir 2-normlu uzaydır. Ayrıca $(X, N(.))$ normlu uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$N(x, y) = N(x).N(y),$$

$X \times X$ üzerinde bir 2-normdur. Buradan $(X, N(.,.))$ genelleştirilmiş 2-normdur.

Bu örnekler normlu uzay teorileri ve Banach Cebiri teorilerinin genelleştirilmiş 2-normlar tarafından kapsandığını göstermektedir.

Tanım 3.4.2 (i) $(X \times Y, N(.,.))$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay olsun. W_1, X in W_2 de Y nin alt uzayları olsunlar. Her $(x, y) \in X \times Y$ için $(w_0, g_0) \in W_1 \times W_2$ varsa $W_1 \times W_2$ ye *2-yakınsak denir.* Öyle ki

$$N(x - w_0, y - g_0) = \inf\{N(x - w, y - g) : (w, g) \in W_1 \times W_2\}$$

Bu durumda (w_0, g_0), (x, y) nin $W_1 \times W_2$ de en iyi yaklaşımıdır ve $W_1 \times W_2$ de (x, y) nin tüm 2-en iyi yaklaşımlarının kümesi $P^2_{W_1 \times W_2}(x, y)$ ile tanımlanır.

Biz $X = Y$ ve $W_1 = W_2$ ve $x = y$ özel durumunu göz önüne alabiliriz.

(ii) $(X \times Y, N(.,.))$ genelleştirilmiş 2-norm ve f, $X \times Y$ üzerinde bir reel değerli dönüşüm olsun. Bu durumda, her $x_1, x_2, x \in X$ ve $y_1, y_2, y \in Y$ için eğer

$$f(x_1 + x_2, y) \leq f(x_1, y) + f(x_2, y), \quad f(x, y_1 + y_2) \leq f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

oluyorsa f *ye 2-alt toplam* denir.

Ayrıca, pozitif bir M sayısı mevcut öyleki her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$|f(x, y)| \leq M.N(x, y)$$

ise f ye *sınırlıdır*, denir.

Bu durumda, f nin normu,

$$N(f) = \inf\{M > 0 | \ |f(x, y)| \leq M.N(x, y), \ \ her \ \ (x, y) \in X \times Y \ \ için\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.4.3 $(X \times Y, N(.,.))$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay, $W_1 \subset X$ in , $W_2 \subset Y$ ve $(x, y) \in X \times Y$ olsun. $M \subseteq P^2_{w_1 \times w_2}(x, y)$ ancak ve ancak $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-alt toplamsal dönüşüm vardır öyle ki her $m_1, m_2 \in M$ için

$$f|_{W_1 \times \{y\}} = f|_{\{x\} \times W_2} = f|_{W_1 \times W_2} = 0, N(f) \leq 1$$

ve

$$f(x - m_1, y - m_2) = N(x - m_1, y - m_2)$$

dir.

Örnek 3.4.4 $X = Y = \mathbb{R}^2$ ve

$$W_1 = \{(x_1, x_2) \in X : x_1 = x_2\},\ \ W_2 = \{(y_1, y_2) \in Y : y_1 = y_2\}$$

alalım ve tüm $(x_1, x_2) \in X$, $(y_1, y_2) \in Y$ için

$$N((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

ile

$$N(.,.) = X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $W_1 \times W_2$, $X \times Y$ için 2-proximinal alt uzaydır.

Örnek 3.4.5 $(X, N(.)_1)$ ve $(Y, N(.)_2)$ nin sırasıyla proximinal alt uzayları olan W_1 ve W_2 yi alalım. Bu durumda,

$$N(x, y) = N(x)_1 . N(y)_2,$$

$X \times Y$ üzerinde genelleştirilmiş 2-norm ve

$$P_{W_1}(x) \times P_{W_2}(y) \subseteq P^2_{W_1 \times W_2}(x, y)$$

dir. Bu 2-proximinality nin genelleştirilmiş proximinality olduğunu gösterir.

4 2-NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, öncelikle Gürdal ve Pehlivan (2009) tarafından yapılan 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık üzerinde çalışacağız. Daha sonra Gürdal ve Pehlivan (2004) tarafından yapılan 2-Banach uzaylarında istatistiksel yakınsaklık ile ilgili yapılan çalışmaları inceleyeceğiz.

4.1 2-Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Aşağıdaki teorem bu bölümdeki teoremler için oldukça faydalı olacaktır.

Teorem 4.1.1 Aşağıdaki ifadeler eş değerdir.

(i) x istatistiksel yakınsak dizidir.

(ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) $x_n = y_n$ h.h.h. n,ise y dizisinin yakınsak olduğu yerde x diziside yakınsaktır (Fridy, 1985).

Tanım 4.1.2 $\{x_n\}$, 2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için X de sıfırdan farklı her bir z için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır ise $\{x_n\}$ dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır*, denir.

Başka bir değişle, X deki sıfırdan farklı her z için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $\{x_n\}$ dizis 2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayında L' ye yakınsaktır, denir. Bunun anlamı her $z \in X$ için

$$\|x_n - L, z\| < \varepsilon, \quad h.h.h.\ n,$$

dur. Bu durumda,

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| := \|L, z\|$$

yazabiliriz (Gürdal ve Pehlivan 2009).

Uyarı 4.1.3 $\{x_n\}$, X de herhangi bir dizi ve L de X in herhangi bir elemanı olsun. $z = \overrightarrow{0}$ (0 vektör) ise ,$\|x_n - L, z\| = 0 \ngeq \varepsilon$ olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon, \text{ her } z \in X\} = \emptyset$$

olur.

$(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki diziler yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır çünkü herhangi bir sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bu iddianın tersi genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnekte bu görülebilir.

Örnek 4.1.4

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

ile formüle edilen $(X, \|.,.\|)$ 2-normu ile donatılmış $X = \mathbb{R}^2$ uzayını alalım.

2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} (1, n), & n = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ \left(1, \frac{n-1}{n}\right), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $L = (1, 1)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun. Eğer $z_1 = 0$ ise o zaman, X' deki her bir z için

$$K = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

dir. Böylece, $\delta(K) = 0$ dir. Buradan, $z_1 \neq 0$ elde ederiz. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : n \neq k^2, k \leq \frac{|z_1|}{\varepsilon}\right\}$$

bir sınırlı kümedir ve bu yüzden

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} = \left\{n \in \mathbb{N} : n = k^2, k \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{|z_1|} + 1}\right\} \cup \{\text{ sınırlı kume }\}$$

dir. Buradan X deki her bir z için

$$\frac{1}{n}|\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{n}\left|\left\{n \in \mathbb{N} : n = k^2, k \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{|z_1|} + 1}\right\}\right| \cup \frac{1}{n}0(1)$$

dir. O halde, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

dır. Bunun anlamı

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

dir. Fakat $\{x_n\}$ dizisi L ye yakınsak değildir.

Örnek 4.1.5 Şimdi $L = (0,0)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun ve 2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayında $\{x_n\}$ dizini

$$x_n = \begin{cases} (0,n), \text{ ise, } n = k^2, k \in \mathbb{N} \\ (0,0), \text{ diğer durumlarda,} \end{cases}$$

tanımlayalım. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in X$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$$

dır. Bu ise

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

demektir. Fakat $\{x_n\}$ dizisi L ye yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsak dizinin sınırlı olması gerekmez. Bu gerçeği *Örnek 4.1.4* ve *4.1.5* de görülebiliriz.

İstatistiksel yakınsak bir dizinin limitinin tekliği aşağıda gösterilmiştir.

Teorem 4.1.6 $\{x_n\}$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki bir dizi ve $L, L' \in X$ olsun. Eğer

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\| \text{ ve } st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L', z\|$$

ise $L = L'$ dir.

İspat 4.1.7 Kabul edelim ki $L \neq L'$ olsun. Buradan $L - L' \neq \overrightarrow{0}$ ve böylece bir $z \in X$ vardır öyleki $L - L'$ ve z lineer bağımsızdır ($d \geq 2$ olduğundan z vardır). Buradan,

$$\|L - L', z\| = 2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

dur. Şimdi,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= \|(L - x_n) + (x_n - L'), z\| \\ &\leq \|x_n - L', z\| + \|x_n - L, z\| \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\{n : \|x_n - L', z\| < \varepsilon\} \subseteq \{n : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}.$$

Fakat

$$\delta(\{n : \|x_n - L', z\| < \varepsilon\}) = 0$$

olması $x_n \longrightarrow L'$(istatistiksel olarak) gerçeğiyle çelişir.

Teorem 4.1.8 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ iki dizi olsun. Eğer $\{y_n\}$ yakınsak öyleki $x_n = y_n$ (h.h.h. n) ise bu durumda $\{x_n\}$ istatistiksel yakınsak bir dizidir.

İspat 4.1.9 Kabul edelim ki

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}) = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|L, z\|$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$$

olur. Dolayısıyla

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) \leq \delta(\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) + \delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}) \quad (1)$$

dır. Her $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|L, z\|$$

olduğundan,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu sayıda tam sayı içerir. Böylece,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

dır. (1) eşitsizliğini kullanarak her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

dir.

Teorem 4.1.10 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri ile $L, L' \in X$ ve $a \in \mathbb{R}$ alalım. Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\| \text{ ve } st - \lim_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|L', z\|$$

ise

(i) Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n, z\| = \|L + L', z\|$$

(ii) Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|ax_n, z\| = \|aL, z\|$$

dır.

İspat 4.1.11 Kabul edelim ki sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\| \text{ ve } st - \lim_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|L', z\|$$

olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \|y_n - L', z\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere

$$\delta(K_1) = 0 \text{ ve } \delta(K_2) = 0$$

dir. Şimdi

$$K = K(\varepsilon) := \{ n \in \mathbb{N} : \|x_n + y_n - (L + L'), z\| \geq \varepsilon \}$$

kümesini alalım. $\delta(K) = 0$ olduğunu kanıtlayalım. Bunun için $K \subset K_1 \cup K_2$ olduğunu göstermek yeterlidir. Farz edelim ki $n_0 \in K$ olsun. Bu durumda,

$$\|x_{n_0} + y_{n_0} - (L + L'), z\| \geq \varepsilon \qquad (2)$$

olur. Aksine varsayalım ki $n_0 \notin K_1 \cup K_2$ olsun. Bu durumda $n_0 \notin K_1$ ve $n_0 \notin K_2$ dir. $n_0 \notin K_1$ ve $n_0 \notin K_2$ ise

$$\|x_{n_0} - L, z\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|y_{n_0} - L', z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Biz buradan

$$\begin{aligned}\|x_{n_0}+y_{n_0}-(L+L'),z\| &\leq \|x_{n_0}-L,z\|+\|y_{n_0}-L',z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu (2) ile çelişmektedir. O halde $n_0 \in K_1 \cup K_2$ yani $K \subset K_1 \cup K_2$ dir.

(ii) Şimdi $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

olsun. Bu durumda,

$$\delta\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\right) = 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\{n \in \mathbb{N} : \|ax_n - aL, z\| \geq \varepsilon\} &= \{n \in \mathbb{N} : |a|\|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \\ &= \left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu nedenle yukarıdaki eşitliğin sağ ve sol tarafları 0 a eşittir. Buradan sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|ax_n, z\| = \|aL, z\|$$

dir.

4.2 2-Normlu Uzaylarda İstatistiksel Cauchy Dizisi

Şimdi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki istatistiksel Cauchy dizisini ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgili kriteri tanımlayacağız.

Tanım 4.2.1 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $\{x_n\}$ dizisi alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için $N = N(\varepsilon, z)$ var öyle ki

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise, $\{x_n\}$ dizisi X de Cauchy dizisidir yani, sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| < \varepsilon \ \ h.h.h.\, n,$$

dur.

Teorem 4.2.2 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ sonlu boyutlu $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, $(X, \|.,.\|)$ de bir yakınsak $\{y_n\}_{n\geq 1}$ dizisi var öyle ki h.h.h. n için $x_n = y_n$ dır.

İspat 4.2.3 İlk olarak $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $(X, \|.\|_\infty)$ de bir istatistiksel Cauchy dizisi olsun. $N(1)$ doğal sayısını seçelim öyle ki

$$B_u^1 = B_u(x_{N(1)}, 1)$$

kapalı yuvarı h.h.h. n için x_n i içersin. Daha sonra $N(2)$ doğal sayısını seçelim öyle ki

$$B_2 = B_u(x_{N(2)}, \frac{1}{2})$$

kapalı yuvarı h.h.h. n için x_n i içerir. Dikkat edilirse

$$B_u^2 = B_u^1 \cap B_2$$

h.h. n için x_n i içerir. Böylece bu işlemler devam edilerek, iç içe kapalı yuvarların bir $\{B_u^m\}_{m\geq 1}$ dizisini elde edebiliriz ki

$$diam(B_u^m) \leq \frac{1}{2^m}$$

dır. Böylece

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} B_u^m = \{A\}$$

dır. Her B_u^m h.h.h. n için x_n i içerdiğinden biz kesin artan doğal sayılardan $\{T_m\}_{m\geq 1}$ dizisini seçebiliriz öyle ki $n > T_m$ ise

$$\frac{1}{n}|\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_u^m\}| < \frac{1}{m}$$

dır. Her $m \geq 1$ için

$$W_m = \{n \in \mathbb{N} : n > T_m, x_n \notin B_u^m\}$$

ve

$$W = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m$$

alalım. Şimdi $\{y_n\}_{n\geq 1}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$y_n = \begin{cases} A, \text{ ise } n \in W \\ x_n, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A$$

olduğunu not edelim. Aslında, her $\varepsilon > 0$ için m doğal sayısını seçelim öyle ki $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ dır. Böylece her $n > T_m$ ya da $y_n = A$ ya da $y_n = x_n \in B_u^m$ ve böylece herbir durumda

$$\|y_n - A\|_\infty \leq diam(B_u^m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

dir.

$$\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq x_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_u^m\}$$

olduğundan

$$\frac{1}{n}|\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq x_n\}| \leq \frac{1}{n}|\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_u^m\}| < \frac{1}{m}$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq x_n\}) = 0$$

dır. Böylece $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında

$$x_n = y_n$$

dır. Kabul edelim ki $\{u_1, \ldots, u_d\}$, $(X, \|., .\|)$ nın bazı olsun. Her $1 \leq i \leq d$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - A\|_\infty = 0 \text{ ve } \|y_n - A, u_i\| \leq \|y_n - A\|_\infty$$

ve her $z \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - A, z\|_\infty = 0$$

dir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.4 $\{x_n\}$, 2-normlu $(X, \|., .\|)$ uzayında bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $\{x_n\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat 4.2.5 Kabul edelim ki sıfırdan farklı her $z \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

olsun. Bu durumda, her $z \in X$ için

$$\|x_n - L, z\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad h.h.n$$

ve eğer $N := N(\varepsilon, z)$ seçilirse böylece $\|x_{N(\varepsilon,z)} - L, z\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| &\leq \|x_n - L, z\| + \|L - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \quad h.h.h.\, n \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $\{x_n\}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

Aksine kabul edelim ki $\{x_n\}$ istatistiksel Cauchy dizisi olsun. *Teorem 4.2.2* den $(X, \|.,.\|)$ de $\{y_n\}$ gibi yakınsak bir dizi vardır öyle ki $x_n = y_n$ dir. *Teorem 4.1.8* den X deki her z için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

elde ederiz.

Teorem 4.2.6 Eğer, $\{x_n\}$ 2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayında bir dizi öyle ki sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

ise bu durumda, $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_i}\}$ gibi bir alt dizisi vardır öyle ki sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$st - \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i}, z\| = \|L, z\|$$

dir.

4.3 2-Banach Uzaylarında İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, üstteki kısımlardan farklı olarak Gürdal ve Pehlivan (2004) tarafından 2-Banach uzaylarında yapılan çalışmayı inceleyeceğiz.

Lemma 4.3.1 Eğer $\delta(A_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots)$ ise bu durumda, $B_i, i = 1, 2, \ldots$ kümeleri var öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu bir kümedir ve

$$\delta(B) = \delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 0.$$

Şimdi 2-Banach uzayında $x = \{x_k\}$ dizisini alalım. $y_{k,j} = x_k - x_j$ ile bir çift dizi tanımlayalım.

Lemma 4.3.2 $(X, \|.,.\|)$ 2-Banach uzayında $\{y_{k,j}\}$ çift dizisini alalım. Aşağıdaki iki ifade birbirine denktir.

(i) Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için $N = N(\varepsilon, z)$ dizisi vardır öyle ki

$$\delta(\{K : \|y_{k,N}, z\| \geq \varepsilon\}) = 0;$$

(ii) Sonsuz indisli bir $K = (k_i)$ kümesi vardır öyle ki $\delta(K) = 1$ ve her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için $l = l(\varepsilon, z)$ ve $k_0 = k_0(\varepsilon, z)$ vardır öyle ki

$$\|y_{k,l}, z\| < \varepsilon, \quad (k \in K,\ \ k > k_0).$$

İspat 4.3.3 Varsayalım ki (ii) sağlansın. $\varepsilon > 0$ ve $H = \mathbb{N} \setminus K$ alalım. Varsayımdan $\delta(K) = 1$ olacak şekilde $K = \{k_1 < k_1 < \ldots\}$ kümesi ve $k_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $k \in K$, $k > k_0$ ve $z \in X$ için

$$\|y_{k,l}, z\| < \varepsilon$$

olur. Açıkca

$$\{k \in \mathbb{N} : \|y_{k,l}, z\| \geq \varepsilon\} \subset H \cup \{k_1 < k_1 < \ldots < k_0\} \ldots\ldots (1)$$

olur. (1) ifadesinin sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Buradan,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|y_{k,l}, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde ederiz. Böylece, $N = l$ ile (ii), (i) yi sağlar.

Varsayalım ki (i) doğru olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|y_{k,N}, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

dır. Şimdi, her $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ ve her $z \in X$ için

$$S_m = \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ k \in \mathbb{N} : \|y_{k,N(\frac{1}{j})}, z\| < \frac{1}{m-1} \right\}$$

olmak üzere,

$$A_1 = \{k \in \mathbb{N} : \|y_{k,N(1)}, z\| \geq 1\}$$

alalım ve

$$A_m = \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} \leq \|y_{k,N(\frac{1}{m})}, z\| < \frac{1}{m-1} \right\} \cap S_m$$

alalım. Açıktır ki $i \neq j$ için $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ dır. *Lemma 4.3.1* den bir $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ kümelerinin dizileri mevcuttur öyle ki $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu kümelerdir ve

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

olmak üzere $\delta(B) = 0$ dır.

Eğer $k \in K = \mathbb{N} \setminus B$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için $N = N(\varepsilon, z)$ vardır öyle ki

$$\|y_{k,N}, z\| < \varepsilon$$

olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$\eta > 0$ alalım. $n \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki $\frac{1}{n+1} < \eta$ olsun. O halde, $N = N\left(\frac{1}{n+1}, z\right)$ vardır öyle ki

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \|y_{k,N}, z\| \geq \frac{1}{n+1} \right\} \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$$

olur. $A_i \Delta B_i$, $i = 1, 2, ..., n+1$ sonlu kümeler olduğundan $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i \right) \cap \{k \in \mathbb{N} : k > k_0\} = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) \cap \{k \in \mathbb{N} : k > k_0\} \ldots\ldots (2)$$

elde edilir.

Eğer $k > k_0$ ve $k \notin B$ ise o zaman $k \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i$ ve (2) den $k \notin (\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)$ dır. Fakat bu durumda,

$$\|y_{k,N}, z\| < \frac{1}{n+1}$$

elde edilir. $\frac{1}{n+1} < \eta$ olduğundan, her $\eta > 0$ için $N = N(\eta, z)$ vardır öyle ki

$$\|y_{k,N}, z\| < \eta$$

olur. Böylece, $l = N$ ile (ii) elde edilir.

5 KAYNAKLAR

Açıkgöz, M. (2007). A Review on 2-Normed Structures, *International Journal of Mathematics Analysis*, **1(4):** 187–191.

Bayraktar, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Choudhary, B. and Nanda, S. (1989). Functional Analysis with Applications, John wiley-Sons, NewYork.

Connor, J. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canadian Mathematical Bulletin*, **32:** 194–198.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique, *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis*, **5:** 301–313.

Fridy, J. A. (1993). Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118:** 1187–1192.

Fridy, J. A. and Orhan C. (1993) Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics* 160 (1993), **1:** 43–51

Fridy, J. A. and Orhan C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American Mathematical Society* **125:** 3625–3631.

Gähler, S. (1963). 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur, *Mathematische Nachrichten* **26:** 115–148.

Gähler, S. (1965). Lineare 2-normietre Räume, *Mathematische Nachrichten*, **28:**

1–43.

Gähler, S. (1965). Uber der Uniformisierbarkeit 2-metrische Räume, *Mathematische Nachrichten*, **28:** 235–244.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On n-normed spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **27(10):** 631–639.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On Finite Dimensional 2 -normed spaces, *Soochow Journal of Mathematics*, **27(3):** 321–329.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2009). The Statistical Convergence in 2-Normed Spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **33:** 257–264.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2004). The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces, *Thai Journal of Mathematics*, **2(1):** 107–113.

Gürdal, M. and Açik, I. (2008). On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences in 2-normed spaces, *Mathematical Inequalities and Applications,* **11(2):** 349–354.

Gürdal, M. (2006). On ideal convergent sequences in 2-normed spaces, *Thai Journal of Mathematics* **4(1):** 85–91.

Lewandowska, Z. (2001). Generalized 2-normed spaces, *Stuspskie Prace Matematyyczno Fizyczne*, **1:**, 33–40.

Lewandowska, Z. (2003). On 2-normed sets, *Glasnik Matematicki Series III*, **38(1):** 99–110.

Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). On $\mathcal{I}$-convergence in random 2-normed spaces, *Mathematica Slovaca,* **61(6):** 933–940.

Musayev, B., Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

Niven, I., Zuckermann, H.S. and Montgomery, H.L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley and Sons Incorporated Company, New York.

Nuray, F. and Ruckle, W.H. (2000). Generalized statistical convergence and con vergence free spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 245(2), 513-527:.

Rath, D. and Tripaty, B. C. (1994). On statistically convergence and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25(4):** 381–386.

Rezapour, Sh. (2005). Quasi-Chebyshew Subspaces in generalized 2-normud spaces, *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences*, **2(1):** 53–61.

Šalát, T., Tripaty, B. C. and Ziman, M. (2005). On I-convergence field, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **17:** 45–54.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca* **30:** 139–150.

Sarabadan, S. and Talebi, S. (2011). Statistical convergence and ideal convergence of sequences of functions in 2-normed spaces, *International Journal of Mathematics and indent Mathematical Sciences*, **vol(2011)**: 10 pages.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly,* **66:** 361–375.

Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S. and Gunawan, H. (2007). Ideal convergence in 2-normed spaces, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11:** 1477–1484.

Tripathy, B. C., Sen, M. and Nath, S. (2012). $\mathcal{I}$-convergence in probabilistic n-normed space, *Soft Computing*, **16:** 1021–1027.

White, A. (1969). 2-Banach spaces, *Mathematische Nachrichten* **42:** 43–60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Sevim YEGÜL
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 19/03/1989
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: sevimyegull@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 2007.
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2012.