KÜME DİZİLERİNİN
LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Uğur ULUSU

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mart, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KÜME DİZİLERİNİN
LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Uğur ULUSU

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MART, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Uğur ULUSU tarafından hazırlanan "Küme Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15/03/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan	:	Prof. Dr. Feyzi BAŞAR	
		Fatih Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.	....
Üye	:	Prof. Dr. Fatih NURAY	
		Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.	....
Üye	:	Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ	
		İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.	....
Üye	:	Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE	
		Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.	....
Üye	:	Doç. Dr. Murat PEKER	
		Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fak.	....

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/03/2013

Uğur ULUSU

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DİZİLERİNİN
LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalıştığımız konu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, yeni tanımlanan Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilme kavramı ile Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramı ve Wijsman hemen hemen yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak, bu kavram ile Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler verilmiştir. Beşinci bölümde, reel diziler için Cauchy kriteri kavramının Wijsman lacunary istatistiksel benzeri tanımlanmış ve bu kavramın Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin toplanabilme özellikleri de ele alınmıştır. Son bölüm olan altıncı bölümde ise, Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme kavramı tanımlanmış ve bu kavramın Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2013, v+68 sayfa.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Lacunary toplanabilme, Hemen hemen yakınsaklık, Cauchy dizisi, İstatistiksel lacunary toplanabilme, Küme dizisi, Wijsman yakınsaklık, Hausdorff yakınsaklık.

ABSTRACT

PhD Thesis

LACUNARY STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF SETS

Uğur ULUSU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, historical development of related notions of the subject is mentoined. In the second chapter, some basic definitions, notations and theorems related to our study are given. In the third chapter, the relalionship between newly defined Wijsman strongly lacunary summable, Wijsman strongly Cesàro summable and Wijsman almost convergence for sequence of sets is discussed. In the fourth chapter, after introducing the concept of Wijsman lacunary statistical convergence the relationship between this concept and Wijsman statistical convergence is given. In the fifth chapter, Cauchy criteria for sequence of real numbers is extended to the Wijsman lacunary statistical convergence and its equivalence to Wijsman lacunary statistical convergence is proved. Also, summability properties of Wijsman lacunary statistical convergent sequences are examined in this chapter. In the sixth chapter which is the last chapter, the concept of Wijsman lacunary statistical summability is defined and its relationship with Wijsman lacunary statistical convergence is discussed.

2013, v+68 pages.

Key Words: Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Cesàro summability, Lacunary summability, Almost convergence, Cauchy sequence, Statistical lacunary summability, Sequence of sets, Wijsman convergence, Hausdorff convergence.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Doktora çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Prof. Dr. Fatih NURAY'a;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Doktora çalışmalarım boyunca bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Ayrıca doktora çalışmamın her aşamasında maddi-manevi desteğini gördüğüm eşim ve öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum maddi-manevi destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Uğur ULUSU
AFYONKARAHİSAR, 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
(X,ρ)	Metrik uzay
$\|K\|$	K kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_k)	Reel sayı dizisi
$st-\lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
$\theta=\{k_r\}$	Lacunary dizisi
$S_\theta-\lim x_k$	(x_k) dizisinin lacunary istatistiksel limiti
$S_\theta(K)$	K kümesinin lacunary yoğunluğu
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
$\{A_k\}$	Küme dizisi
$K-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Kuratowski limiti
$W-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman limiti
$H-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Hausdorff limiti
$st-\mathrm{Lim} A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Kuratowski istatistiksel limiti
$st-\lim_W A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman istatistiksel limiti
WS	Wijsman istatistiksel yakınsak dizi uzayı
$st-\lim_H A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Hausdorff istatistiksel limiti
$[W\sigma_1]$	Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzayı
$[WN_\theta]$	Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayı
$[WAC]$	Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak dizi uzayı
$S_\theta-\lim_W A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel limiti
WS_θ	Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak dizi uzayı
L_∞	Sınırlı kümelerin dizi uzayı
$S_\theta-\lim_H A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Hausdorff lacunary istatistiksel limiti
$W\theta_s-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin istatistiksel lacunary limiti
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturmaktadır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahiptir. 1951'de Fast'ın istatistiksel yakınsak kavramını tanımlamasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi Buck (1953), Schoenberg (1959), Maddox (1978), Salat (1980), Fridy (1985), Fridy & Orhan (1993) ve daha pek çok matematikçi tarafından günümüze kadar verilmeye devam etmiştir.

Freedman & Sember & Raphael (1978) yaptıkları bir çalışmada θ lacunary dizi yardımıyla tanımlanan N_θ kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayı ile $|\sigma_1|$ kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzayı arasındaki ilişkileri derinlemesine incelemişler ve ayrıca araştırmacılar bu çalışmada N_θ dizi uzayı ile $|AC|$ kuvvetli hemen hemen yakınsaklık dizi uzayı arasındaki ilişkiden de bahsetmişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkiler Connor tarafından 1988'de yapılan bir araştırmada verilmiştir.

İlerleyen zamanlarda Fridy & Orhan (1993), lacunary dizi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla arasında önemli ilişkiler bulunan ve yine yakınsaklık alanında önemli bir yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Fridy & Orhan bu çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Yine Fridy & Orhan (1993) başka bir çalışmalarında ise reel sayı dizileri için Cauchy kriteri kavramının lacunary istatistiksel benzerini tanımlamışlar ve bu kavramla lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Ayrıca Fridy & Orhan bu çalışmalarında lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin toplanabilme özelliklerini de incelemişlerdir.

Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının bir benzeri ise Mursaleen, M. & Alotaibi, A. (2011) tarafından verilmiştir. Araştırmacılar bu çalışmalarında istatistiksel lacunary toplanabilme kavramını tanımlamışlar ve bu kavramın lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisini incelemişlerdir.

Küme dizileri için yakınsaklık kavramı ise daha çok 1980'li yıllarda araştırmalara konu olmaya başlamış ve bu konudaki çalışmalar başta Beer, G. (1985, 1994, 2002) olmak üzere; Wijsman (1964, 1966), Effros (1965), Salinetti & Wets (1979), Lucchetti (1985), De Blasi & Myjak (1986), Lechicki & Levi (1987), Baronti & Papini (1986) ve diğer birçok matematikçi tarafından yakın zamana kadar yapılmıştır. Araştırmacılar tarafından yapılan bu çalışmalarda küme dizileri için verilen yakınsaklık kavramlarından en yaygın olarak kullanılanlar ve bizim araştırmamız için de temel oluşturacak olan birkaç tanesi; "Hausdorff yakınsaklık (H)", "Kuratowski yakınsaklık (K)" ve "Wijsman yakınsaklık (W)" tır. Bu yakınsaklık tiplerinden (K) ve (H) uzun zaman önce araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. (W) yakınsaklık için, Wijsman (1964, 1966), Lechicki & Levi (1987) ve Beer (1994) de bazı çalışmalar yapmışlardır. Baronti & Papini (1986) küme dizileri için (K), (H) ve (W) yakınsaklık arasındaki ilişkileri göstermişlerdir.

Son olarak Nuray & Rhoades (2012) tarafından yapılan bir çalışmada küme dizileri için Wijsman istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Ayrıca Nuray & Rhoades (2012) bu çalışmalarında küme dizilerinin toplanabilirliğini de incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasındaki temel amacımız, daha önce sayı dizileri için verilmiş olan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını küme dizilerine aktarmaktır. Bu bağlamda, küme dizileri için daha önce verilmiş olan yakınsaklık tanımları (Hausdorff, Kuratowski, Wijsman), bu yakınsaklıkların kendilerine özgü özellikleri ve bunlar arasındaki ilişkiler yeniden ele alınarak, küme dizileri için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu kavrama dayanarak yeni teoremler ispatlanmıştır. Bu sebeple tez çalışmasında öncelikle;

İkinci bölümde (temel kavramlar kısmında); istatistiksel yakınsaklık kavramının doğmasına sebep olan doğal yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, lacunary dizisi, hemen hemen yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, lacunary toplanabilme, küme dizisi, küme dizileri için daha önceden verilen bazı yakınsaklık kavramları ve küme dizileri için yakın zamanda Nuray & Rhoades (2012) tarafından verilen istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde; yeni tanımlanan Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilme kavramı ile daha önceden Nuray & Rhoades (2012) tarafından tanımlanan Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramı ve Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlanmış ve bu kavram ile yine Nuray & Rhoades (2012) tarafından verilen Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı ve Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca bu bölümün sonunda, Hausdorff lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bu kavramın Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını gerektirdiği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde; reel diziler için Cauchy kriteri kavramının Wijsman lacunary istatistiksel benzeri tanımlanmış ve bu kavramın Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bu bölümde Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin toplanabilme özelliklerinden de bahsedilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme kavramı tanımlanmış ve bu kavramın Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız boyunca geçecek olan tanım, notasyon ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme olsun.

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için,

(i) $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

şartları sağlanıyorsa, ρ ya X üzerinde bir *metrik* ve ρ ile birlikte X e *metrik uzay* denir ve genellikle (X,ρ) ile gösterilir (Maddox, 1970).

$K \subset \mathbb{N}$ olsun. K kümesinin eleman sayısını $|K|$ ile gösterelim. Yani,

$$|K| = \text{card}K$$

olsun.

Tanım 2.2. $K \subset \mathbb{N}$ ve

$$K_n = \{k \leq n : k \in K\}$$

olsun. Buna göre K kümesinin sırasıyla *alt* ve *üst yoğunluğu*,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}, \quad \overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

olarak verilir. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda, bu limite K kümesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani,

$$\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

eşitliklerinin sağlanması halinde $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.3. $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için,

$$K = K(\varepsilon) = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geqslant \varepsilon\}|$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim x = L$$

biçiminde gösterilir (Fast, 1951).

Adi anlamda yakınsak olan her dizi, istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak olan her dizi, adi anlamda yakınsak olmayabilir.

Tanım 2.4. $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *Cesàro toplanabilirdir* denir (Volkov, 2001).

Tanım 2.5. $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir (Freedman vd., 1978).

Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı;

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.6. $x = (x_k)$ bir dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli* $p-$*Cesàro toplanabilirdir* denir (Connor, 1988).

Tanım 2.7. Eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+i} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *hemen hemen yakınsaktır* denir (Boss, 2000).

Tanım 2.8. Eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+i} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir (Freedman vd., 1978).

Tanım 2.9. Eğer, $0 < p < \infty$ olmak üzere, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+i} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli* $p-$*hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 2.10. Eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_{k+i} - L| \geq \varepsilon| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir (Et vd., 2005).

Tanım 2.11. $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

olacak biçimde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine *lacunary dizisi* denir. Ayrıca,

$$I_r = (k_{r-1}, k_r]$$

olarak belirtilir (Freedman vd., 1978).

Örnek 2.1. $\theta = \{k_r\} = 2^r - 1$ dizisi bir lacunary dizisidir. Çünkü bu dizi için; $k_0 = 2^0 - 1 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} = (2^r - 1) - \left(2^{r-1} - 1\right) = 2^{r-1} \to \infty$$

olur. Ayrıca $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 7$, $k_4 = 15, ...$ olduğundan, bu dizi negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisidir.

Tanım 2.12. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer, $x = (x_k)$ dizisi için $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\theta - \lim x = L \quad \text{veya} \quad x_k \to L(S_\theta)$$

ile gösterilir (Fridy & Orhan, 1993).

Literatürde, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının, kullanım yerine göre birkaç farklı ifade ediliş şekli vardır. Bunlardan ikisi aşağıdaki gibidir:

(i) $K \subseteq \mathbb{N}$ için,

$$\delta_\theta(K) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} |\{j \in I_r : j \in K\}|$$

ifadesi K kümesinin $\theta-$yoğunluğunu göstermek üzere eğer,

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin $\theta-$yoğunluğu 0 ise, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir (Mursaleen & Alotaibi, 2011).

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$K(\varepsilon) = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geqslant \varepsilon\}|$$

olmak üzere eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|I_r \cap K(\varepsilon)|}{h_r} = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir (Fridy & Orhan, 1993).

Tanım 2.13. $x = (x_k)$ dizisi için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary toplanabilirdir* denir (Mursaleen & Alotaibi, 2011).

Tanım 2.14. $x = (x_k)$ dizisi için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir (Freedman vd., 1978).

Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayı;

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.15. $x = (x_k)$ dizisi için, $0 < p < \infty$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli $p-$lacunary toplanabilirdir* denir.

Tanım 2.16. $x = (x_k)$ dizisi için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_{k+i} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray, 1997).

Tanım 2.17. $x = (x_k)$ dizisi için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_{k+i} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir (Das & Mishra, 1983).

Tanım 2.18. $x = (x_k)$ dizisi için, $0 < p < \infty$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_{k+i} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 2.19. $x = (x_k)$ dizisi için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_{k+i} - L| \geq \varepsilon| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir (Altınok vd., 2004).

Şimdi ise küme dizileri için gerekli olan tanımları verelim.

Tanım 2.20. $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere,

$$f : \mathbb{N} \to P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(k) = A_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, ...$ kümelerinin oluşturduğu diziye *küme dizisi* denir.

Tanım 2.21. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve boş kümeden farklı herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, A)$$

ile tanımlanır (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.22. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$ bu metrik uzayda bir küme dizisi olsun.

$$\text{Liminf} A_k = \{x \in X : \ \exists (a_k) \subset \{A_k\}, \ a_k \to x\}$$

ve

$$\text{Limsup} A_k = \{x \in X : \ \exists (k_i), \ \exists (a_{k_i}) \subset \{A_{k_i}\}, \ a_{k_i} \to x\}$$

olmak üzere eğer,

$$A = \text{Liminf} A_k = \text{Limsup} A_k = \text{Lim} A_k$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *yakınsaktır* veya $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Kuratowski yakınsaktır* denir ve

$$A_k \to A \ \text{ veya } \ A_k \xrightarrow{K} A \ \text{ ya da sadece } \ K - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Baronti & Papini, 1986).

Yukarıdaki tanımda, X in boş kümeden farklı A_k altkümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için,

$$\text{Liminf}A_k = \left\{x \in X : \limsup_{k\to\infty} d(x, A_k) = 0\right\}$$

$$= \left\{x \in X : \lim_{k\to\infty} d(x, A_k) = 0\right\}$$

ve

$$\text{Limsup}A_k = \left\{x \in X : \liminf_{k\to\infty} d(x, A_k) = 0\right\}$$

olarak da verilebilir.

Tanım 2.23. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer herbir $x \in X$ için,

$$\lim_k d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman yakınsaktır* denir ve

$$A_k \xrightarrow{W} A \text{ veya } W - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Baronti & Papini, 1986).

Tanım 2.24. (X, ρ) bir metrik uzay, A kümesi X in kapalı bir altkümesi ve $\{A_k\}$, X in kapalı altkümelerinin bir dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Hausdorff yakınsaktır* denir ve

$$A_k \xrightarrow{H} A \text{ veya } H - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Baronti & Papini, 1986).

Kuratowski yakınsaklık, Wijsman yakınsaklık ve Hausdorff yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.1. *Bir $\{A_k\}$ dizisi için,*

$$\textit{Hausdorff yakınsak} \Longrightarrow \textit{Wijsman Yakınsak} \Longrightarrow \textit{Kuratowski yakınsak}$$

ilişkisi vardır (Baronti & Papini, 1986).

Tanım 2.25. (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun.

$$st - \text{Liminf} A_k = \left\{ x \in X : \ st - \limsup_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

$$st - \text{Limsup} A_k = \left\{ x \in X : \ st - \liminf_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

olmak üzere eğer,

$$st - \text{Liminf} A_k = st - \text{Limsup} A_k = A$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Kuratowski istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \text{Lim} A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.26. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

veya hemen hemen her k için,

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim{}_W A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray & Rhoades, 2012).

Wijsman istatistiksel yakınsak küme dizilerinin uzayı;

$$WS = \left\{ \{A_k\} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.27. (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$\sup_k d(x, A_k) < \infty$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi *sınırlıdır* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.28. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

veya hemen hemen her k için,

$$\sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Hausdorff istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st_H - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray & Rhoades, 2012).

Kuratowski istatistiksel yakınsaklık, Wijsman istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.2. *Bir $\{A_k\}$ dizisi için,*

Hausdorff ist. yakınsak $\Longrightarrow$ Wijsman ist. yakınsak $\Longrightarrow$ Kuratowski ist. yakınsak

ilişkisi vardır (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.29. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Herbir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.30. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Herbir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir küme dizilerin uzayı;

$$[W\sigma_1] = \left\{ \{A_k\} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.31. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere herbir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Teorem 2.3. (X,ρ) *bir metrik uzay ve* $0 < p < \infty$ *olsun.* X *in boş kümeden farklı, kapalı* A *ve* A_k *altkümeleri için,*

(i) $\{A_k\}$ *dizisi bir* A *kümesine Wijsman kuvvetli* $p-$*Cesàro toplanabilir ise o zaman* $\{A_k\}$ *dizisi* A *kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır;*

(ii) $\{A_k\}$ *dizisi sınırlı ve bir* A *kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak ise o zaman* $\{A_k\}$ *dizisi* A *kümesine Wijsman kuvvetli* $p-$*Cesàro toplanabilirdir*

(Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.32. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, herbir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.33. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, herbir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.34. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere eğer, herbir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} |d(x, A_k) - d(A, x)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ küme dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli* $p-$*hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.35. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve herbir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir (Nuray & Rhoades, 2012).

Tanım 2.36. X ve Y Banach uzayları ve $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y ye lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Eğer, her $x = (x_n) \in X$ dizisi için,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

ifadesi Y de tanımlı norma göre yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k) \in Y$$

oluyorsa A matrisine X den Y ye bir matris dönüşümü denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir (Maddox, 1980).

Tanım 2.37. Yakınsak dizileri yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştüren matrislere regüler matrisler adı verilir (Boos, 2000).

Tanım 2.38. $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir A kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_A ile gösterilir ve

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \in A \\ 0 & , \quad k \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. KÜME DİZİLERİNİN LACUNARY TOPLANABİLİRLİĞİ

3.1 Wijsman Kuvvetli Lacunary Toplanabilir Dizi Uzayı

Tanım 3.1.1. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary toplanabilirdir* denir.

Tanım 3.1.2. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir.

Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilir küme dizilerinin uzayı;

$$[WN]_\theta := \left\{ \{A_k\} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0 \right\}$$

ile gösterilecektir.

Örnek 3.1.1. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k := \begin{cases} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{k} \right\} & , \text{ eğer } k_{r-1} < k < k_{r-1} + [\sqrt{h_r}] \text{ ise,} \\ \{(0,0)\} & , \text{ diğer } k \text{ lar için.} \end{cases}$$

Burada,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| \le \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} .2\sqrt{k_r - k_{r-1}} = 0,$$

olduğundan dolayı, bu dizi $A = \{(0,0)\}$ kümesine Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilirdir. Yani, $\{A_k\} \in [WN]_\theta$ dır.

Tanım 3.1.3. (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $0 < p < \infty$ olmak üzere eğer, herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli $p-$lacunary toplanabilirdir* denir.

$[W\sigma_1]$ ve $[WN]_\theta$ dizi uzayları arasındaki bazı ilişkiler aşağıdaki gibidir:

Lemma 3.1.1. $q_r = \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ olmak üzere, $[W\sigma_1] \subseteq [WN]_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

İspat: $(\Longleftarrow)$ $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda her $r \geq 1$ için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır.

$$q_r \geq 1 + \delta \ \text{ ve } \ h_r = k_r - k_{r-1}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta \ &\Rightarrow \ \frac{k_{r-1}}{k_r} \leq \frac{1}{1+\delta} \\ &\Rightarrow \ 1 - \frac{k_{r-1}}{k_r} \geq 1 - \frac{1}{1+\delta} \\ &\Rightarrow \ \frac{k_r - k_{r-1}}{kr} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \\ &\Rightarrow \ \frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \end{aligned}$$

işlemleri sonucunda,

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta} \tag{3.1}$$

elde edilir. Şimdi

$$\{A_k\} \in [W\sigma_1]$$

olduğunu kabul edelim.

Burada,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)| = \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_r}|d(x,A_i)-d(x,A)|$$

$$-\frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|d(x,A_i)-d(x,A)|$$

$$= \frac{k_r}{h_r}\left(\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}|d(x,A_i)-d(x,A)|\right)$$

$$-\frac{k_{r-1}}{h_r}\left(\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|d(x,A_i)-d(x,A)|\right) \tag{3.2}$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte $\{A_k\}\in[W\sigma_1]$ olduğu düşünülür ve limite geçilirse,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}|d(x,A_i)-d(x,A)|=0$$

ve

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|d(x,A_i)-d(x,A)|=0$$

olacaktır. Böylece, (3.1) deki eşitsizlikler de dikkate alındığında (3.2) eşitliğinden

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|=0$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}\in[WN]_\theta$ olduğunu gösterir. O zaman, $\liminf_r q_r>1$ iken

$$[W\sigma_1]\subseteq[WN]_\theta$$

elde ederiz.

($\Longrightarrow$) $[W\sigma_1]\subseteq[WN]_\theta$ ve $\liminf_r q_r=1$ olsun. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olduğundan, θ lacunary dizisinin $r_j\geq r_{j-1}+2$ olmak üzere,

$$\frac{k_{r_j}}{k_{r_j-1}}<1+\frac{1}{j} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r_j-1}}{k_{r_{j-1}}}>j$$

şartlarını sağlayan bir $\{k_{r_j}\}$ altdizisini seçebiliriz.

Şimdi, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k := \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{k^4}\right\} & ,\ \text{eğer } k \in I_{r_j} \text{ ise} \qquad j = 1, 2, ... \\ \{(0,0)\} & ,\ \text{eğer } k \notin I_{r_j} \text{ ise} \qquad j = 1, 2, ... \end{cases}$$

O zaman,

$$\frac{1}{h_{r_j}} \sum_{k \in I_{r_j}} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| = T, \quad j = 1, 2, ... \quad (T \in \mathbb{R}^+)$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| = 0, \qquad r \neq r_j$$

elde ederiz. Bu ise,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| \neq 0$$

demektir. Yani

$$\{A_k\} \notin [WN]_\theta$$

elde edilir. Fakat

$$\{A_k\} \in [W_{\sigma_1}]$$

dir. Çünkü, n yeteri kadar büyük herhangi bir tamsayı ise

$$k_{r_j - 1} < n < k_{r_{j+1} - 1}$$

şartını sağlayan bir tek j bulunabilir ve böylece,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\}| &\leq \frac{k_{r_{j-1}} + h_{r_j}}{k_{r_j - 1}} \\ &\leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $n \to \infty$ iken aynı zamanda $j \to \infty$ olacağından

$$\{A_k\} \in [W_{\sigma_1}]$$

elde ederiz. Bu durum kabulümüzle çelişir. O halde

$$\liminf_r q_r \neq 1 \Rightarrow \liminf_r q_r > 1$$

elde edilir. ∎

Lemma 3.1.2. $[WN]_\theta \subseteq [W\sigma_1]$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \geq 1$ için $q_r < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. $\{A_k\} \in [WN]_\theta$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Burada,

$$\tau_r = \frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|d(x,A_k) - d(x,A)|$$

olmak üzere her $i = 1,2,3,...$ tamsayısı için,

$$\sup_{i\geq R} \tau_i < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \tau_i < K$$

olacak şekilde $R > 0$ ve $K > 0$ sayıları bulabiliriz. Böylece, $r > R$ olmak üzere

$$k_{r-1} < t \leq k_r$$

şartını sağlayan herhangi bir t tamsayısı için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|d(x,A_i) - d(x,A) \quad | \leq & \quad \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_r}|d(x,A_i) - d(x,A)| \\
= & \quad \frac{1}{k_{r-1}}\Bigg(\sum_{I_1}|d(x,A_i) - d(x,A)| + \sum_{I_2}|d(x,A_i) - d(x,A)| + \cdots \\
& \quad + \sum_{I_r}|d(x,A_i) - d(x,A)|\Bigg) \\
= & \quad \frac{k_1}{k_{r-1}}\tau_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}}\tau_2 + \cdots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}}\tau_R \\
& \quad + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}}\tau_{R+1} + \cdots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}}\tau_r \\
\leq & \quad \left(\sup_{i\geq 1}\tau_i\right)\frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{i\geq R}\tau_i\right)\frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\
< & \quad K.\frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon.M
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani,

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|d(x,A_i) - d(x,A)| < K.\frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon.M \tag{3.3}$$

elde ederiz. $t \to \infty$ iken $k_{r-1} \to \infty$ olacağından (3.3) eşitsizliğinde limite geçilirse,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} |d(x, A_i) - d(x, A)| < \lim_{k_{r-1}\to\infty} \left(K.\frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon.M \right) = 0$$

olacağından,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} |d(x, A_i) - d(x, A)| = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\{A_k\} \in [W\sigma_1]$$

olduğu anlamına gelir.

($\Longrightarrow$) $[WN]_\theta \subseteq [W\sigma_1]$ ve $\limsup_r q_r = \infty$ olduğunu kabul edelim. İspat için $[WN]_\theta$ uzayında olan fakat Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir olmayan bir dizi oluşturalım. Öncelikle $q_{r_j} > j$ olacak şekilde bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) altdizisini seçelim ve aşağıdaki gibi sınırlı bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k = \begin{cases} \{1\} & , \text{ eğer } k_{r_j-1} < k \leq 2k_{r_j-1} \qquad j = 1, 2, ... \\ \{0\} & , \text{ diğer } k \text{ lar için.} \end{cases}$$

O zaman,

$$\begin{aligned} \tau_{r_j} &= \frac{1}{h_{r_j}} \sum_{I_{r_j}} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| \\ &= \frac{k_{r_j-1}}{k_{r_j-1} - k_{r_{j-1}}} < \frac{1}{j-1} \end{aligned}$$

ve

$$\tau_r = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| = 0, \qquad r \neq r_j$$

elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\{A_k\} \in [WN]_\theta$$

demektir. $[W\sigma_1]$ uzayında sadece $\{0\}$ ve $\{1\}$ lerden oluşan herhangi bir dizi için Wijsman kuvvetli Cesàro limit $\{0\}$ veya $\{1\}$ dir.

Yukarıda tanımladığımız $\{A_k\}$ dizisi için; $k = 1, 2, ..., k_{r_j}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{k_{r_j}} \sum_k |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| \geq \frac{1}{k_{r_j}}(k_{r_j} - 2k_{r_j - 1})$$

$$= 1 - \frac{2k_{r_j-1}}{k_{r_j}} > 1 - \frac{2}{j}$$

ve $k = 1, 2, ..., 2k_{r_j - 1}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2k_{r_j-1}} \sum_k |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| \geq \frac{k_{r_j-1}}{2k_{r_j-1}} = \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Bu ise

$$\{A_k\} \notin [W\sigma_1]$$

olduğunu gösterir. Bu durum kabulümüzle çelişir. O halde,

$$\limsup_r q_r \neq \infty \Rightarrow \limsup_r q_r < \infty$$

dur. ■

Teorem 3.1.1. *θ bir lacunary dizisi olsun. $[WN]_\theta = [W\sigma_1]$ olması için gerek ve yeter şart*

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır.

İspat: Yukarıdaki Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2 birlikte düşünülürse istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.1.2. *$\{A_k\} \in [W\sigma_1] \cap [WN]_\theta$ olsun. $A_k \overset{[W\sigma_1]}{\rightarrow} A$ ve $A_k \overset{[WN]_\theta}{\rightarrow} B$ ise $A = B$ dir.*

İspat: $\{A_k\} \in [W\sigma_1] \cap [WN]_\theta$ olsun.

$$A_k \overset{[W\sigma_1]}{\rightarrow} A, \quad A_k \overset{[WN]_\theta}{\rightarrow} B \text{ ve } A \neq B$$

olduğunu kabul edelim.

$$\upsilon_r = \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| \quad \text{ve} \quad \tau_r = \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, B)|$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\upsilon_r + \tau_r &= \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)| + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,B)| \\
&\geq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A)-d(x,B)| \\
&= |d(x,A)-d(x,B)|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{A_k\} \in [WN]_\theta$ olduğundan $\tau_r \to 0$ dır. Böylece yeteri kadar büyük r için,

$$\upsilon_r > \frac{1}{2}|d(x,A)-d(x,B)|$$

olur. Ayrıca yine yeteri kadar büyük r için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}|d(x,A_i)-d(x,A)| &\geq \frac{1}{k_r}\sum_{I_r}|d(x,A_i)-d(x,A)| \\
&= \frac{k_r-k_{r-1}}{k_r}.\upsilon_r \\
&= \left(1-\frac{1}{q_r}\right).\upsilon_r \\
&> \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q_r}\right).|d(x,A)-d(x,B)| \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\{A_k\} \in [W\sigma_1]$ olduğundan $r \to \infty$ iken (3.4) eşitsizliğinin sol tarafı 0 a gider. Bu yüzden $r \to \infty$ iken (3.4) eşitsizliğinden dolayı $q_r \to 1$ elde edilir. Bu ise Lemma 3.1.2 den dolayı

$$[WN]_\theta \subset [W\sigma_1]$$

olmasını gerektirir. Yani,

$$A_k \xrightarrow{[WN]_\theta} B \Rightarrow A_k \xrightarrow{[W\sigma_1]} B$$

elde edilir. O halde,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|d(x,A_i)-d(x,B)| = 0$$

olur. Burada,

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|d(x,A_i)-d(x,B)| + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|d(x,A_i)-d(x,A)| \geq |d(x,A)-d(x,B)| > 0 \qquad (3.5)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.5) eşitsizliğinde sol taraftaki her iki terimde $t \to \infty$ iken 0 a gittiğinden bu durum,

$$|d(x,A) - d(x,B)| = 0$$

olmasını gerektirir. Bu ise $A \neq B$ olması ile çelişir. O halde

$$A = B$$

elde ederiz. ■

3.2 Wijsman Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık

Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini $[WAC]$ ile gösterirsek aşağıdaki lemma ve teoremi verebiliriz.

Lemma 3.2.1. Her θ lacunary dizisi için $[WAC] \subset [WN]_\theta$ dır.

İspat: (X,ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. $A_k \in [WAC]$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda, herbir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} |d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon, \quad m = 1,2,...$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı ve $A \subset X$ olacak şekilde kapalı bir $A \neq \emptyset$ kümesi vardır. θ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > N$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı seçebiliriz. Dolayısıyla,

$$\tau_r = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece,

$$A_k \in [WN]_\theta$$

elde edilir.

$$A_k \notin [WAC] \quad \text{ve} \quad A_k \in [WN]_\theta$$

olacak şekilde bir A_k dizisini;

$$A_k = \begin{cases} \{1\} & , \text{ eğer } k_{r-1} < k \leq k_{r-1} + \sqrt{h_r} \text{ ise} \qquad r = 1,2,... \\ \{0\} & , \text{ diğer } k \text{ lar için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada A_k dizisinin elemanları keyfi çoklukta $\{1\}$ ve $\{0\}$ lardan oluşmaktadır. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak olmadığını gösterir. Bununla birlikte,

$$\lim_{r\to\infty} \tau_r = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|d(x,A_k)-d(x,\{0\})| = \lim_{r\to\infty} \frac{\left[|\sqrt{h_r}|\right]}{h_r} = 0$$

olduğundan

$$\{A_k\} \in [WN]_\theta$$

elde ederiz. Böylece, $[WAC]$ dizi uzayı $[WN]_\theta$ uzayının alt kümesidir. ∎

Teorem 3.2.1. $[WAC] = \bigcap [WN]_\theta$ *dır.*

İspat: Bunun için,

$$\{A_k\} \notin [WAC] \quad \text{iken} \quad \{A_k\} \notin [WN]_\theta$$

olacak şekilde bir θ lacunary dizisi olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir olduğunu kabul edelim (Aksi takdirde,

$$\{A_k\} \notin [WN]_{(\theta=2^r)}$$

olur). Böylece,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} |d(x,A_k)-d(x,A)| = 0$$

olacak şekilde bir tek A kümesi vardır.

$$\{A_k\} \notin [WAC]$$

olduğundan; herbir N için $n > N$ olmak üzere,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} |d(x,A_k)-d(x,A)| \geq \varepsilon, \quad m = 1,2,...$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. O zaman $n_r \to \infty$ iken,

$$\frac{1}{n_r}\sum_{k=m_r+1}^{m_r+n_r} |d(x,A_k)-d(x,A)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde (m_r) ve (n_r) dizileri seçebiliriz.

$$\{A_k\} \in [W\sigma_1]$$

olduğundan, $m_r \to \infty$ dur (Aksi takdirde, bazı sabit b ler için,

$$\frac{1}{n_r}\sum_{i=b+1}^{b+n_r} |d(x, A_i) - d(x, A)| \geq \varepsilon \qquad r = 1, 2, ...$$

olur). Şimdi,

$$\begin{array}{lll} k_1 = m_1, & & \\ k_2 = m_1 + n_1, & k_3 = m_{r_2}, & m_{r_2} > 2k_2 \\ k_4 = m_{r_2} + n_{r_2}, & k_5 = m_{r_3}, & m_{r_3} > 2k_4 \\ k_6 = m_{r_3} + n_{r_3}, & \vdots & \\ \vdots & k_{2i-1} = m_{r_i}, & m_{r_i} > 2k_{2i-2} \\ k_{2i} = m_{r_i + n_{r_i}}, & & \\ \vdots & & \end{array}$$

şeklinde bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi oluşturalım. Gerçekten θ nın bir lacunary dizisi olduğu açıktır. Burada $r = 2j$ için,

$$\tau_r = \frac{1}{n_r}\sum_{k=m_{r_j}+1}^{m_{r_j}+n_{r_j}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon$$

olur. Bu ise, Teorem 3.1.2 dikkate alındığında

$$\{A_k\} \notin [WN]_\theta$$

olması demektir. ■

Tanım 3.2.1. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. θ nın bir lacunary inceltilmişi; $(k_r) \subseteq (k'_r)$ şartını sağlayan bir $\theta' = (k'_r)$ lacunary dizisidir.

Lemma 3.2.2. Eğer $b_1, b_2, ..., b_n$ pozitif reel sayılar ve eğer $a_1, a_2, ..., a_n$

$$\frac{|a_1 + a_2 + ... + a_n|}{b_1 + b_2 + ... + b_n} > \varepsilon > 0$$

şartını sağlayan reel sayılar ise, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere bazı i ler için

$$\frac{|a_i|}{b_i} > \varepsilon$$

dur.

Lemma 3.2.3. θ', bir θ lacunary dizisinin bir lacunary inceltilmişi olsun. Bu durumda,

$$\{A_k\} \notin [WN]_\theta \implies \{A_k\} \notin [WN]_{\theta'}$$

dür.

İspat: Her kapalı A kümesi için $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\tau_{r_j} = \frac{1}{h_{r_j}} \sum_{k=1}^{k_{r_j}} |d(x, A_k)| - \frac{1}{h_{r_j}} \sum_{k=1}^{k_{r_j-1}} |d(x, A)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde (k_r) nin bir (k_{r_j}) altdizisi vardır.

$$k_{r_j-1} = k'_s < k'_{s+1} < ... < k'_{s+p} = k_{r_j}$$

olmak üzere

$$I_{r_j} = I'_{s+1} \cup I'_{s+2} \cup ... \cup I'_{s+p}$$

şeklinde yazalım. O halde,

$$\tau_{r_j} = \frac{\sum_{I'_{s+1'}} |d(x, A_k) - d(x, A)| + \sum_{I'_{s+2'}} |d(x, A_k) - d(x, A)| + ... + \sum_{I'_{s+p'}} |d(x, A_k) - d(x, A)|}{h'_{s+1} + h'_{s+2} + ... + h'_{s+p}}$$

yazabiliriz. Burada Lemma 3.2.2 yi dikkate alırsak bazı j ler için,

$$\frac{1}{h'_{s+j}} \sum_{I_{s+j'}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon$$

elde ederiz. O halde sonuç olarak

$$\{A_k\} \notin [WN]_{\theta'}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2.2. $[WAC] = \bigcap \left\{ [WN]_\theta : \lim_r q_r = 1 \right\}$

İspat: Eğer, $\{A_k\} \notin [WAC]$ ise o zaman, Teorem 3.2.1 den dolayı

$$\{A_k\} \notin [WN]_\theta$$

olacak şekilde bir θ lacunary dizisi vardır.

Eğer,

$$\theta' = (k'_r) = (k_r) \cup \left\{n^2 : [(n-1)^2, (n+1)^2] \cap (k_r) = \emptyset\right\}$$

olarak tanımlarsak, θ' bir lacunary dizisi ve

$$\lim_r q'_r = 1$$

olur. Dolayısıyla, Lemma 3.2.3 den

$$\{A_k\} \notin [WN]_{\theta'}$$

elde edilir. ■

4. KÜME DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp, bu kavramın Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilme ve Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı ile arasındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca Hausdorff lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramından da kısaca bahsedilecektir.

Tanım 4.1. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. θ bir lacunary dizisi olmak üzere eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\theta - \lim{}_W A_k = A \quad \text{veya} \quad A_k \to A(WS_\theta)$$

ile gösterilir.

Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak küme dizilerinin uzayı;

$$WS_\theta := \left\{\{A_k\} : S_\theta - \lim{}_W A_k = A\right\}$$

ile gösterilecektir.

Örnek 4.1. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq k\} & , \quad \begin{array}{l} \text{eğer } \; k \geq 2, \;\; k_{r-1} < k \leq k_r \\ \text{ve } \; k \; \text{ tam kare sayı ise,} \end{array} \\ \{1\} & , \quad \text{diğer } k \text{ lar için} \end{cases}$$

Bu dizi sınırlı olmadığından, Wijsman lacunary toplanabilir değildir. Fakat,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{\sqrt{k_r - k_{r-1}}}{h_r} = 0$$

olduğundan dolayı, bu dizi $A = \{1\}$ kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 4.2. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{k}\} & , \begin{array}{l} \text{eğer } \ k_{r-1} < k < k_{r-1} + [\sqrt{h_r}] \\ \text{ve } \ k \ \text{ tam kare sayı ise,} \end{array} \\ \{(0,0)\} & , \ \text{diğer } k \text{ lar için} \end{cases}$$

Burada,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olduğundan dolayı, bu dizi $A = \{(0,0)\}$ kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.1. *(X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. O zaman L_∞ sınırlı küme dizilerinin kümesini göstermek üzere,*

(i) *(a)* $A_k \to A([WN]_\theta) \Rightarrow A_k \to A(WS_\theta)$;

(b) $[WN]_\theta \subset WS_\theta$;

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ *ve* $A_k \to A(WS_\theta) \Rightarrow A_k \to A([WN]_\theta)$;

(iii) $WS_\theta \cap L_\infty = [WN]_\theta \cap L_\infty$ *dur.*

İspat:

(i) (a) $A_k \to A([WN]_\theta)$ verilmiş olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| &= \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \\ &+ \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|<\varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| &\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)| \\ &\geq \varepsilon. \left|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| \end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq \varepsilon.\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki taraf pozitif $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve limite geçilirse,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq \varepsilon.\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k\to A([WN]_\theta)$ olduğundan, eşitsizliğin sol tarafının $r\to\infty$ iken limiti 0 dır. Böylece,

$$\varepsilon.\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|\leq 0$$

ise

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

elde edilir. Bu ise

$$A_k\to A(WS_\theta)$$

olduğunu gösterir.

(b) $[WN]_\theta\subset WS_\theta$ kapsamasının eşitlik durumunu içermediğini ($\subsetneq$) göstermek için, θ bir lacunary dizisi olmak üzere,

$$A_k\to A(WS_\theta)\ \text{ iken }\ A_k\nrightarrow A([WN]_\theta)$$

olacak şekilde bir örnek göstermemiz yeterli olacaktır. Öncelikle aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k=\begin{cases}\{k\} & ,\ \text{eğer }\ k_{r-1}<k\leq k_{r-1}+\left[\sqrt{h_r}\right] \qquad r=1,2,...\\ \{0\} & ,\ \text{diğer } k \text{ lar için}\end{cases}$$

Tanımladığımız $\{A_k\}$ dizisinin sınırlı olmadığı açıktır. Burada $A=\{0\}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|$$
$$=\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,\{0\})|\geq\varepsilon\}\right|\leq\frac{\left[\left|\sqrt{h_r}\right|\right]}{h_r}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte limite geçilirse,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|\leq\lim_{r\to\infty}\frac{\left[\left|\sqrt{h_r}\right|\right]}{h_r}=0$$

elde ederiz. Yani,

$$A_k\to A(WS_\theta)$$

elde edilir. Ayrıca burada,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum\nolimits_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)| &= \frac{1}{h_r}\sum\nolimits_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,\{0\})|\\ &= \frac{1}{h_r}\frac{\left[\sqrt{h_r}\right].\left(\left[\sqrt{h_r}\right]+1\right)}{2}\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte limite geçilirse,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\frac{\left[\sqrt{h_r}\right].\left(\left[\sqrt{h_r}\right]+1\right)}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

elde edilir. Bu ise $A_k\nrightarrow A([WN]_\theta)$ olduğu anlamına gelir.

(ii) $\{A_k\}\in L_\infty$ ve $A_k\to A(WS_\theta)$ olduğunu kabul edelim. $\{A_k\}\in L_\infty$ olduğundan, herbir $x\in X$ ve her k için,

$$|d(x,A_k)-d(x,A)|<M$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon>0$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}}|d(x,A_k)-d(x,A)|\\ &\quad+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d(x,A_k)-d(x,A)|<\varepsilon}}|d(x,A_k)-d(x,A)|\\ &\leq \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|\\ &\quad+\varepsilon.\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|<\varepsilon\}\right|\\ &= \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz.

Yani,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)| \leq \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlikte limite geçilirse,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}&|d(x,A_k)-d(x,A)| \\ &\leq \lim_{r\to\infty}\left(M.\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon\right)\end{aligned} \tag{4.1}$$

bulunur. $A_k \to A(WS_\theta)$ olduğundan (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafındaki limit değeri ε a eşittir. Böylece,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|\leq\varepsilon \Rightarrow \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|=0$$

elde ederiz ki, bu

$$A_k \to A(WN_\theta)$$

olması demektir.

(iii) Bu teoremin (i) ve (ii) şıkları birlikte düşünülürse,

$$WS_\theta \cap L_\infty = [WN]_\theta \cap L_\infty$$

olduğu elde edilir. ■

Lemma 4.1. Her $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi için, $WS\subseteq WS_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r>1$ olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $\liminf_r q_r>1$ olsun. O halde, yeteri kadar büyük r için $q_r\geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Böylece,

$$q_r\geq 1+\delta \;\text{ ve }\; h_r=k_r-k_{r-1}$$

olduğundan, Lemma 3.1.1 in ispatındaki benzer işlemler sonucunda,

$$\frac{h_r}{k_r}\leq\frac{\delta}{1+\delta}$$

elde edilir.

$\{A_k\} \in WS$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ ve yeteri kadar büyük r için,

$$\frac{1}{k_r}|\{k \leq k_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{k_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\geq \frac{h_r}{k_r}.\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|\right)$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta}.\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|\right)$$

olur. Yani,

$$\frac{1}{k_r}|\{k \leq k_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\delta}{1+\delta}.\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|\right) \tag{4.2}$$

elde ederiz. (4.2) eşitsizliğinde limite geçilirse,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r}|\{k \leq k_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \geq \lim_{r\to\infty}\frac{\delta}{1+\delta}.\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|\right) \tag{4.3}$$

elde ederiz. $\{A_k\} \in WS$ olduğundan (4.3) eşitsizliğinin sol tarafındaki limit 0 a eşittir. O halde,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\delta}{1+\delta}.\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

ise

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise, $\{A_k\} \in WS_\theta$ olması demektir. Yani,

$$WS \subseteq WS_\theta$$

elde edilmiş olur.

($\Longrightarrow$) $WS \subseteq WS_\theta$ ve $\liminf_r q_r = 1$ olsun. $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin; $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere,

$$\frac{k_{r_j}}{k_{r_j-1}} < 1 + \frac{1}{j} \qquad \text{ve} \qquad \frac{k_{r_j-1}}{k_{r_{j-1}}} > j$$

şartlarını sağlayan bir $\{k_{r_j}\}$ altdizisini seçelim.

Şimdi, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k := \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{k^4}\right\} & , \text{ eğer } k \in I_{r_j} \text{ ise} \quad j = 1,2,... \\ \{(0,0)\} & , \text{ eğer } k \notin I_{r_j} \text{ ise} \quad j = 1,2,... \end{cases}$$

O zaman,

$$\frac{1}{h_{r_j}} \sum_{k \in I_{r_j}} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| = T, \quad j = 1,2,... \quad (T \in \mathbb{R}^+)$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| = 0, \qquad r \neq r_j$$

elde ederiz. Bu ise,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\})| \neq 0$$

demektir. Yani,

$$\{A_k\} \notin [WN]_\theta$$

elde edilir. Fakat

$$\{A_k\} \in [W_{\sigma_1}]$$

dir. Çünkü, n yeteri kadar büyük herhangi bir tamsayı ise

$$k_{r_j - 1} < n < k_{r_{j+1} - 1}$$

şartını sağlayan bir tek j bulunabilir ve böylece,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, \{(0,0)\}| \;\; \leq \;\; \frac{k_{r_{j-1}} + h_{r_j}}{k_{r_j - 1}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

yazabiliriz. Burada, $n \to \infty$ iken aynı zamanda $j \to \infty$ olacağından,

$$\{A_k\} \in [W_{\sigma_1}]$$

elde ederiz. Yukarıda Teorem 4.1 in (ii) şıkkından dolayı,

$$\{A_k\} \in L_\infty \text{ ve } \{A_k\} \notin WN_\theta \Longrightarrow \{A_k\} \notin WS_\theta$$

olur.

Ayrıca, Teorem 2.3 den

$$\{A_k\} \in [W_{\sigma_1}] \Longrightarrow \{A_k\} \in WS$$

olduğu görülür. Yani,

$$WS \nsubseteq WS_\theta$$

elde ederiz. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$$\liminf_r q_r > 1$$

dir. ■

Lemma 4.2. Her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için, $WS_\theta \subseteq WS$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. O zaman her r için $q_r < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır.

$$\{A_k\} \in WS_\theta$$

olduğunu kabul edelim. Burada,

$$U_r := |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)|$$

olarak tanımlayalım. $\{A_k\} \to A(WS_\theta)$ ise,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon| = 0$$

olacağından, $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $r > r_0$ için,

$$\frac{U_r}{h_r} < \varepsilon$$

olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$M := \max\{U_r : 1 \leq r \leq r_0\}$$

olarak tanımlayalım. t sayısı,

$$k_{r-1} < t \leq k_r$$

şartını sağlayan herhangi bir tamsayı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}}|\{k \leq k_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\{U_1 + U_2 + ... + U_{r_0} + U_{r_0+1} + ... + U_r\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}}.r_0 + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{h_{r_0+1}\frac{U_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + ... + h_r\frac{U_r}{h_r}\right\} \\
&\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{r>r_0}\frac{U_r}{h_r}\right)\{h_{r_0+1} + ... + h_r\} \\
&\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.\frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\
&\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.q_r \\
&\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.K
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani,

$$\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.K \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $k_{r-1} \to \infty$ iken $t \to \infty$ olacağından (4.4) eşitsizliğinde limite geçilirse,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{k_{r-1}\to\infty}\left(\frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.K\right) = 0$$

elde ederiz. Bu ise,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

demektir. Yani,

$$\{A_k\} \in WS_\theta$$

elde edilir. Böylece,

$$WS_\theta \subseteq WS$$

elde edilmiş olur.

($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki,

$$WS_\theta \subseteq WS \quad \text{ve} \quad \limsup_r q_r = \infty$$

olsun. Öncelikle Lemma 4.1 in ispatının ikinci kısmında olduğu gibi $q_{r_j} > j$ olacak şekilde bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) altdizisini seçelim ve aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k = \begin{cases} \{1\} & , \text{ eğer } k_{r_j-1} < k \leq 2k_{r_j-1} \qquad j = 1, 2, ... \\ \{0\} & , \text{ diğer } k \text{ lar için.} \end{cases}$$

O zaman,

$$\tau_{r_j} = \frac{1}{h_{r_j}} \sum_{I_{r_j}} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| = \frac{k_{r_j-1}}{k_{r_j-1} - k_{r_{j-1}}} < \frac{1}{j-1}$$

ve

$$\tau_r = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| = 0 \qquad r \neq r_j$$

elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| = 0$$

elde edilir ki, bu

$$\{A_k\} \in [WN]_\theta$$

demektir. O halde, Teorem 4.1 in $(i. - b)$ şıkkından dolayı,

$$\{A_k\} \in WS_\theta$$

olur. $[W\sigma_1]$ uzayında sadece $\{0\}$ ve $\{1\}$ lerden oluşan herhangi bir dizi için Wijsman kuvvetli Cesàro limit $\{0\}$ veya $\{1\}$ dir. Yukarıda tanımladığımız $\{A_k\}$ dizisi için; $k = 1, 2, ..., k_{r_j}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{r_j}} \sum_k |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| &\geq \frac{1}{k_{r_j}}(k_{r_j} - 2k_{r_j-1}) \\ &= 1 - \frac{2k_{r_j-1}}{k_r} > 1 - \frac{2}{j} \end{aligned}$$

olur ve $k = 1, 2, ..., 2k_{r_j-1}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2k_{r_j-1}} \sum_k |d(x, A_k) - d(x, \{0\})| \geq \frac{k_{r_j-1}}{2k_{r_j-1}} = \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Bu ise,

$$\{A_k\} \notin [W\sigma_1]$$

olduğunu gösterir. O halde, Teorem 2.3 den

$$\{A_k\} \notin WS$$

olduğu anlaşılır. Böylece,

$$WS_\theta \nsubseteq WS$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla,

$$\liminf_r q_r \neq \infty \Rightarrow \liminf_r q_r < \infty$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2. *θ bir lacunary dizisi olsun. $WS = WS_\theta$ olması için gerek ve yeter şart,*

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır.

İspat: Yukarıdaki Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 birlikte düşünülürse istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.3. *Eğer, $\{A_k\} \in WS \cap WS_\theta$ ise,*

$$S_\theta - \lim{}_W A_k = st - \lim{}_W A_k$$

dır.

İspat: $\{A_k\} \in WS \cap WS_\theta$ olsun.

$$st - \lim{}_W A_k = A, \quad S_\theta - \lim{}_W A_k = B \quad \text{ve} \quad A \neq B$$

olduğunu kabul edelim. $A \neq B$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ ve herbir $x \in X$ için,

$$\frac{1}{2}|d(x, A) - d(x, B)| > \varepsilon$$

alınabileceğinden,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}|=1 \tag{4.5}$$

elde ederiz.

$$\frac{1}{n}|\{k\le n:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}|$$

istatistiksel limit ifadesinin k_i inci terimini dikkate alırsak;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_i}&|\{k\le k_i:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}|\\
&=\frac{1}{k_i}\left|\{k\in\bigcup_{r=1}^{i}I_r:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}\right|\\
&=\frac{1}{k_i}\sum_{r=1}^{i}|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}|\\
&=\frac{1}{\sum\limits_{r=1}^{i}h_r}\sum_{r=1}^{i}|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}| \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$u_r:=\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}|$$

şeklinde ifade edersek, H matrisi

$$H=h_{rk}=\begin{cases}\frac{1}{h_r} &, \ k\in I_r\\ 0 &, \ k\notin I_r\end{cases}$$

olmak üzere, (4.6) eşitliğini

$$\frac{1}{k_i}\left|\left\{k\in\bigcup_{r=1}^{i}I_r:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\right\}\right|=\frac{1}{\sum_{r=1}^{i}h_r}\sum_{r=1}^{i}h_ru_r$$

$$=\frac{1}{k_i}\sum_{r=1}^{i}h_ru_r=(Hu)_r \tag{4.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$A_k\to B(WS_\theta)$$

olduğundan

$$u_r=\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r:|d(x,A_k)-d(x,B)|\ge\varepsilon\}|\to 0 \tag{4.8}$$

dır.

θ bir lacunary dizisi olduğundan, (4.7) ifadesi u nun bir regüler ağırlıklı ortalama matris dönüşümüdür. Regüler bir matris; 0 a yakınsak bir ifadeyi yine 0 a yakınsak bir ifadeye dönüştürdüğünden $i \to \infty$ iken (4.7) ifadesi de (4.8) ifadesindeki gibi 0 a yakınsar. Aynı zamanda,

$$\left\{ k \in \bigcup_{r=1}^{i} I_r : |d(x, A_k) - d(x, B)| \geq \varepsilon \right\}$$

dizisi

$$\left\{ \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, B)| \geq \varepsilon\} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

dizisinin altdizisi olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, B)| \geq \varepsilon\}| \neq 1$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise (4.5) ifadesi ile çelişir. Yani $A \neq B$ olamaz. Bu durumda $A = B$ elde ederiz. ∎

Teorem 4.4. *θ', bir θ lacunary dizisinin bir lacunary inceltilmişi olsun.*

$$A_k \to A(WS_{\theta'}) \implies A_k \to A(WS_{\theta})$$

dır.

İspat: θ lacunary dizisinin her bir I_r aralığının; $I'_{r,i} = (k'_{r,i-1}, k'_{r,i}]$ olmak üzere,

$$k_{r-1} < k'_{r,1} < k'_{r,2} < ... < k'_{r,v(r)} = k_r$$

olacak şekilde, θ' lacunary dizisinin $\{k'_{r,i}\}_{i=1}^{v(r)}$ noktalarını içerdiğini farzedelim. Burada,

$$\{k_r\} \subseteq \{k'_r\}$$

olduğundan, her r için $v(r) \geq 1$ olduğuna dikkat edelim.

$\{I^*_j\}_{j=1}^{\infty}$, sağ uç noktaları artırılarak sıralanmış $\{I'_{r,i}\}$ bitişik aralıklarının dizisi olsun.

$$A_k \to A(WS_{\theta'})$$

olduğundan, her bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_j \sum_{I^*_j \subset I_r} \frac{1}{h^*_r} |\{k \in I^*_j : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{4.9}$$

elde ederiz.

Burada,

$$h_r = k_r - k_{r-1}, \qquad h'_{r,i} = k'_{r,i} - k'_{r,i-1}$$

ve

$$h'_{r,1} = k'_{r,1} - k'_{r-1}$$

yazabiliriz. Böylece, her bir $\varepsilon > 0$ için χ_K,

$$K := \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin karakteristik fonksiyonu ve $C_{\theta'} := (C_{\theta'}[j,k])$ matrisi de

$$C_{\theta'}[j,k] := \begin{cases} \dfrac{1}{h_j^*} & , \text{ eğer } \; k \in I_j^* \; \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer } k \text{ lar için.} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{h_r} \sum_{I_j^* \subseteq I_r} h_j^* \frac{1}{h_j^*} |\{k \in I_j^* : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{h_r} \sum_{I_j^* \subseteq I_r} h_j^* (C_{\theta'} \chi_K)_j \tag{4.10}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.9) dan dolayı $C_{\theta'}\chi_K$ bir sıfır dizisidir. Ayrıca, (4.10) $C_{\theta'}\chi_K$ nın bir regüler ağırlıklı ortalama matris dönüşümüdür. Bundan dolayı (4.10) dönüşümü $r \to \infty$ iken sıfır a yakınsar. Böylece istenilen elde edilmiş olur. ■

L_∞, WS, WAC, $[WAC]$ sırasıyla bütün sınırlı, Wijsman istatistiksel yakınsak, Wijsman hemen hemen yakınsak ve Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak küme dizilerini göstermek üzere, bunlar arasında

$$WS \subset [WAC] \subset WAC \subset L_\infty$$

ilişkisi vardır.

Teorem 4.5. *Eğer Φ ile bütün lacunary dizilerin kümesini gösterirsek,*

$$[WAC] = L_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \Phi} WS_\theta \right)$$

dır.

İspat: L_∞ ve $[WAC]$ sırasıyla sınırlı diziler uzayını ve Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler uzayını göstermek üzere,

$$L_\infty \supset [WAC]$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca Teorem 3.2.1 de

$$[WAC] = \bigcap_{\theta \in \Phi} [WN]_\theta$$

olduğu ve Teorem 4.1 in *iii.* kısmında

$$WS_\theta \cap L_\infty = [WN]_\theta \cap L_\infty$$

olduğu gösterildi. Buradan

$$\begin{aligned}
L_\infty \supset [WAC] &= \bigcap_{\theta \in \Phi} [WN]_\theta \\
&= L_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \Phi} [WN]_\theta \right) \\
&= \bigcap_{\theta \in \Phi} (L_\infty \cap [WN]_\theta) \\
&= \bigcap_{\theta \in \Phi} (L_\infty \cap WS_\theta) \\
&= L_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \Phi} WS_\theta \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi ise Hausdorff lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını verip bu kavramın Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ile arasındaki ilişkiyi gösteren bir teorem ispatlayalım.

Tanım 4.2. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. θ bir lacunary dizisi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani,

$$\sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon \qquad \text{(h.h.k)}$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Hausdorff lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\theta - \lim{}_H A_k = A \;\text{ veya }\; A_k \to A(HS_\theta)$$

ile gösterilir.

Teorem 4.6. (X, ρ) *bir metrik uzay ve* $\{A_k\}$, X *in boş kümeden farklı kapalı altkümelerinin bir dizisi olsun. Eğer,* $\{A_k\}$ *Hausdorff lacunary istatistiksel yakınsak ise* $\{A_k\}$ *Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır.*

İspat: $\{A_k\}$ dizisi Hausdorff lacunary istatistiksel yakınsak olsun. O zaman,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olur.

$$|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \leq \left| \left\{ k \in I_r : \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olduğu dikkate alınır ve burada eşitsizliğin her iki tarafı pozitif $\dfrac{1}{h_r}$ ile çarpılıp limite geçilirse,

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \\ &\qquad\qquad \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \sup\nolimits_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde ederiz. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. ■

5. KÜME DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL TOPLANABİLİRLİĞİ

5.1 Wijsman Lacunary İstatistiksel Cauchy Kriteri

Tanım 5.1.1. (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer herbir r için $k'(r)\in I_r$, $W-\lim_r A_{k'(r)}=A$ ve herbir $x\in X$ için $\varepsilon>0$ olmak üzere,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})|\geq\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde $\{A_k\}$ dizisinin bir $\left\{A_{k'(r)}\right\}$ altdizisi varsa $\{A_k\}$ dizisine *Wijsman lacunary istatistiksel Cauchy* denir.

Teorem 5.1.1. *(X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel Cauchy olmasıdır.*

İspat: $(\implies)$ $A_k\to A(WS_\theta)$ olsun ve herbir $j\in\mathbb{N}$ için,

$$K^{(j)}:=\{k\in\mathbb{N}:|d(x,A_k)-d(x,A)|<\frac{1}{j}\}$$

olarak belirtelim. Böylece herbir j için, $K^{(j+1)}\subseteq K^{(j)}$ ve

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|K^{(j)}\cap I_r|}{h_r}=1$$

olur. Şimdi $r\geq m(1)$ iken,

$$\frac{|K^{(1)}\cap I_r|}{h_r}>0$$

yani,

$$K^{(1)}\cap I_r\neq\emptyset$$

olacak şekilde $m(1)$ seçelim. Bir sonraki seçimimizde ise $r\geq m(2)$ iken,

$$K^{(2)}\cap I_r\neq\emptyset$$

olacak şekilde $m(2) > m(1)$ seçelim.

Daha sonra $m(1) \leq r < m(2)$ şartını sağlayan herbir r için, $k'(r) \in I_r \cap K^{(1)}$ yani,

$$|d(x, A_{k'(r)}) - d(x, A)| < 1$$

olacak şekilde $k'(r) \in I_r$ seçelim. Genel olarak, $r > m(p+1)$ iken

$$I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$$

olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçelim.

Bütün bu seçimlerin sonunda $m(p) \leq r < m(p+1)$ şartını sağlayan bütün r ler için,

$$k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$$

seçelim. Yani,

$$|d(x, A_{k'(r)}) - d(A, x)| < \frac{1}{p} \tag{5.1}$$

olsun. Böylece, her r için $k'(r) \in I_r$ olur ve (5.1) ifadesinden dolayı,

$$W - \lim_r A_{k'(r)} = A$$

olduğu anlaşılır. Ayrıca, $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A_{k'(r)})| \geq \varepsilon\}| \\ &\qquad \leq \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \\ &\qquad\quad + \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_{k'(r)}) - d(x, A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned} \tag{5.2}$$

yazabiliriz. (5.2) eşitsizliğinde

$$A_k \to A(WS_\theta) \;\text{ ve }\; W - \lim_r A_{k'(r)} = A$$

olması dikkate alınarak limite geçilirse,

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A_{k'(r)})| \geq \varepsilon\}| \right) \\ &\qquad \leq \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \right. \\ &\qquad\quad \left. + \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_{k'(r)}) - d(x, A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \right) \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})|\geq\varepsilon\}|\right)\leq 0$$

ise,

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})|\geq\varepsilon\}|\right)= 0$$

elde ederiz. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel Cauchy olduğunu gösterir.

$(\Longleftarrow)$ $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel Cauchy olduğunu kabul edelim. O zaman, $\forall\varepsilon>0$ ve herbir $x\in X$ için,

$$\begin{aligned}&|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|\\ &\qquad\leq\left|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\right|\\ &\qquad\quad+\left|\{k\in I_r : |d(x,A_{k'(r)})-d(x,A)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\right|\end{aligned}\tag{5.3}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki (5.3) eşitsizliğinde, eşitsizliğin her iki tarafını pozitif $\frac{1}{h_r}$ ile çarpalım ve ayrıca $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary istatistiksel Cauchy olması ile

$$W-\lim_r A_{k'(r)}=A$$

olmasını dikkate alarak limite geçelim. O halde,

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|\\ &\qquad\leq\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left(\left|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\right|\right.\\ &\qquad\quad\left.+\left|\{k\in I_r : |d(x,A_{k'(r)})-d(x,A)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\right|\right)\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_r\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\leq 0$$

ise,

$$\lim_r\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|=0$$

elde edilir ki bu bize

$$A_k\to A(WS_\theta)$$

olduğunu verir. ■

Teorem 5.1.2. *(X,ρ) bir metrik uzay ve $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun.*

$$\Delta d(x,A_i)=d(x,A_i)-d(x,A_{i+1})$$

olmak üzere eğer, $A_k\to A(WS_\theta)$ ve $\lim_{r\to\infty} h_r.\left(\max\{|\Delta d(x,A_i)|:i\in I_r\}\right)=0$ ise o zaman, $W-\lim A_k=A$ dır.

İspat: $A_k\to A(WS_\theta)$ olduğunu kabul edelim. Böylece, Tanım 5.1.1 deki gibi, Teorem 5.1.1 yardımıyla,

$$W-\lim_r A_{k'(r)}=A,$$

yani, $r\to\infty$ iken,

$$\left|d(x,A_{k'(r)})-d(x,A)\right|\to 0$$

olacak şekilde A_k dizisinin bir $A_{k'(r)}$ altdizisini seçelim. $k'(r)\in I_r$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})| &\le \sum_{i=k}^{k'(r)-1}|d(x,A_i)-d(x,A_{i+1})|\\ &=\sum_{i=k}^{k'(r)-1}|\Delta d(x,A_i)|\\ &\le h_r.\left(\max\{|\Delta d(x,A_i)|:i\in I_r\}\right)\end{aligned} \tag{5.4}$$

yazabiliriz. (5.4) eşitsizliğinde limite geçilirse, kabulümüzden dolayı

$$\left|d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})\right|\le \lim_{r\to\infty} h_r.\left(\max\{|\Delta d(x,A_i)|:i\in I_r\}\right)=0$$

elde edilir. Yani, $r\to\infty$ iken,

$$\left|d(x,A_k)-d(x,A_{k'(r)})\right|\to 0$$

olur. Burada $r\to\infty$ iken,

$$\left|d(x,A_{k'(r)})-d(x,A)\right|\to 0$$

olduğu da dikkate alınırsa, $r\to\infty$ iken,

$$|d(x,A_k)-d(x,A)|\to 0$$

elde ederiz. Bu ise,

$$W-\lim_r A_k=A$$

olduğunu gösterir. ■

5.2 Wijsman Lacunary İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Toplanabilme Özellikleri

Teorem 5.2.1. *Eğer* $\{A_k\}$ *sınırlı bir dizi ve* $A_k \to A(WS_\theta)$ *ise,* $\{A_k\}$ *dizisi* A *kümesine Wijsman Cesàro toplanabilirdir.*

İspat: (X, ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $n \in I_r$ bir pozitif tamsayı olsun. O zaman,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(d(x,A_k)-d(x,A)\Big) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{k\in I_p}\Big(d(x,A_k)-d(x,A)\Big) + \frac{1}{n}\sum_{k=1+k_{r-1}}^{n}\Big(d(x,A_k)-d(x,A)\Big) \tag{5.5}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada,

$$t_p = \frac{1}{h_p}\sum_{k\in I_p}|d(x,A_k)-d(x,A)| \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edersek, H matrisi

$$H = h_{pk} = \begin{cases} \frac{1}{h_p} & , \quad k \in I_p \\ 0 & , \quad k \notin I_p \end{cases}$$

olmak üzere, (5.5) eşitliğinde, sağdaki ilk ifade için

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{k\in I_p}\Big(d(x,A_k)-d(x,A)\Big) \le \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{p=1}^{r-1}\sum_{k\in I_p}\Big|d(x,A_k)-d(x,A)\Big|$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{p=1}^{r-1} h_p.t_p = (Ht)_p \tag{5.7}$$

yazılabilir. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve $A_k \to A(WS_\theta)$ olduğundan, Teorem 4.1 in (ii) ifadesinden dolayı,

$$A_k \to A(WN_\theta)$$

olur. Bu ise $t_p \to 0$ olması anlamına gelir.

Ayrıca $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olduğundan $r \to \infty$ iken,

$$k_{r-1} = \sum_{p=1}^{r-1} h_p \to \infty$$

olur. Burada (5.7) ifadesi, t nin bir regüler ağırlıklı ortalama matris dönüşümüdür. Regüler bir matris; 0 a yakınsak bir ifadeyi yine 0 a yakınsak bir ifadeye dönüştürdüğünden $r \to \infty$ iken (5.7) ifadesi de (5.6) ifadesindeki gibi 0 a yakınsar. O halde $r \to \infty$ iken,

$$\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{p=1}^{r-1} h_p.t_p = (Ht)_p \to 0 \tag{5.8}$$

elde ederiz. Şimdi (5.5) eşitliğinde, sağdaki ikinci ifadeyi dikkate alalım. $\{A_k\}$ sınırlı olduğundan her k için,

$$|d(x, A_k) - d(x, A)| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bundan dolayı $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1+k_{r-1}}^{n} \Big(d(x, A_k) - d(x, A) \Big) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k_{r-1} < k \leq n \\ |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)|$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{\substack{k_{r-1} < k \leq n \\ |d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon}} |d(x, A_k) - d(x, A)|$$

$$\leq M.\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \tag{5.9}$$

elde ederiz. $A_k \to A(WS_\theta)$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, (5.9) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifade $r \to \infty$ iken 0 a yakınsar. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1+k_{r-1}}^{n} \Big(d(x, A_k) - d(x, A) \Big) = 0 \tag{5.10}$$

olduğu ortaya çıkar. Burada (5.5), (5.8) ve (5.10) ifadeleri birlikte düşünülürse,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(d(x, A_k) - d(x, A) \Big) = 0$$

elde ederiz. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman Cesàro toplanabilir olduğu anlamına gelir. ∎

Teorem 5.2.2. (X,ρ) *bir metrik uzay,* θ *bir lacunary dizisi ve* $0<p<\infty$ *olsun.* X *in boş kümeden farklı, kapalı* A, A_k *altkümeleri için,*

(i) $\{A_k\}$ *dizisi bir* A *kümesine Wijsman kuvvetli* $p-$*lacunary toplanabilir ise o zaman* $\{A_k\}$ *dizisi* A *kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır.*

(ii) $\{A_k\}$ *dizisi sınırlı ve bir* A *kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak ise o zaman* $\{A_k\}$ *dizisi* A *kümesine Wijsman kuvvetli* $p-$*lacunary toplanabilirdir.*

İspat: (i) Yakınsak her $\{A_k\}$ dizisi ve sabit $\varepsilon>0$ için,

$$\sum_{I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|^p \geq \varepsilon^p.|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|^p\geq\varepsilon\}|$$

dir. Burada her iki taraf pozitif $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılıp limite geçilirse,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|^p &\geq \varepsilon^p.\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|^p\geq\varepsilon\}|\\ &\geq \varepsilon^p.\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|\end{aligned}$$

elde edilir. $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman kuvvetli $p-$lacunary toplanabilir olduğundan, yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı 0 a eşittir. O halde,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|=0$$

elde ederiz. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

(ii) $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan,

$$\sup_k\{d(x,A_k)\}+d(x,A)=M$$

diyebiliriz. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olduğundan, her $\varepsilon>0$ için bir N_ε seçebiliriz öyle ki, her $r>N_\varepsilon$ için,

$$\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r : |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\}|<\frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olur.

Burada

$$L_r = \left\{ k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

ile belirtelim. O zaman, $r > N_\varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p &= \frac{1}{h_r} \left(\sum_{\substack{k \in I_r \\ k \in L_r}} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \notin L_r}} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \right) \\
&< \frac{1}{h_r} \cdot \frac{h_r . \varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{h_r} \cdot \frac{h_r . \varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli $p-$lacunary toplanabilir olduğu anlaşılır. ∎

5.3 Wijsman Lacunary Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık

Tanım 5.3.1. (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, her bir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(x, A_{k+i}) = d(x, A),$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 5.3.2. (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, herbir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| = 0,$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir.

Örnek 5.3.1. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{k}\} & , \text{ eğer } \ k_{r-1} < k < k_{r-1} + [\sqrt{h_r}] \ \text{ ise,} \\ \\ \{(1,0)\} & , \text{ diğer } k \text{ lar için} \end{cases}$$

Burada, i ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_{k+i}) - d(x, \{(1,0)\})| = 0,$$

olduğundan dolayı, bu dizi $A = \{(1,0)\}$ kümesine Wijsman lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsaktır.

Tanım 5.3.3. (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. p pozitif reel sayı olmak üzere eğer, herbir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p = 0,$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 5.3.4. (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, herbir $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \varepsilon| = 0,$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir.

Örnek 5.3.2. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere, aşağıdaki gibi bir $\{A_k\}$ dizisi tanımlayalım;

$$A_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{k}\} \quad , & \text{eğer, } k_{r-1} < k < k_{r-1} + [\sqrt{h_r}] \\ & \text{ve } k \text{ tam kare ise,} \\ \{(1,1)\} & , \text{ diğer } k \text{ lar için} \end{cases}$$

Burada, i ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_{k+i}) - d(x, \{(1,1)\})| \geq \varepsilon| = 0,$$

olduğundan dolayı, bu dizi $A = \{(1,1)\}$ kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.3.1. *(X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. X in boş kümeden farklı, kapalı A, A_k altkümeleri için,*

(i) $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman lacunary kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsak ise o zaman $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve bir A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak ise o zaman $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsaktır.

İspat: (i) $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman lacunary kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsak olsun. Bu durumda, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p = 0 \tag{5.11}$$

dır. Sabit bir $\varepsilon > 0$ ve herbir i için,

$$\sum_{I_r} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p . |\{k \in I_r : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon\}|$$

olup, burada her iki taraf $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılıp limite geçilirse,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p . \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Buradan ise (5.11) dikkate alınırsa $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğu anlaşılır.

(ii) $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve bir A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan, i ye göre düzgün olarak

$$M = \sup_k \{d(x, A_{k+i})\} + d(x, A)$$

yazabiliriz. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir N_ε seçebiliriz öyle ki, her $r > N_\varepsilon$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\}| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olur. Burada,

$$L_r = \left\{k \in I_r : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

ile belirtelim. Böylece, $r > N_\varepsilon$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p &= \frac{1}{h_r}\left(\sum_{\substack{k\in I_r \\ k\in L_r}}|d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p\right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{k\in I_r \\ k\notin L_r}}|d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p\right) \\
&< \frac{1}{h_r}.\frac{h_r.\varepsilon}{2M^p}M^p + \frac{1}{h_r}.\frac{h_r.\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary kuvvetli $p-$hemen hemen yakınsak olduğunu gösterir. ■

6. KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL LACUNARY TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde küme dizileri için Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme kavramı verilip, bu kavramın önceki bölümlerde tanıttığımız küme dizilerinin Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramı ile ilişkilerinden bahsedilecektir. Ayrıca bir $\{A_k\}$ küme dizisinin Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilmesi ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Önceki bölümlerde; (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olmak üzere, herbir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_k) = d(x, A)$$

ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary toplanabilirdir, demiştik. Şimdi,

$$T_r(A_k) := \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_k)$$

olmak üzere aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 6.1. (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Herbir $x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{r \leq n : |T_r(A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilirdir denir ve

$$W\theta_s - \lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Başka bir deyişle $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olması demek, $T_r(A_k)$ dizisinin $d(x, A)$ ifadesine Wijsman istatistiksel yakınsak olması demektir.

İlk olarak Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilme ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi belirten aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 6.1. *(X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer bir $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak ise o zaman $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilirdir.*

İspat: $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olsun.

$$K_\theta^W(\varepsilon) := \{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}$$

ile gösterelim. O zaman,

$$\begin{aligned}
|T_r(x) - d(x,A)| &= \left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} d(x,A_k) - d(x,A)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\Big(d(x,A_k) - d(x,A)\Big)\right| \\
&\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k) - d(x,A)| \\
&= \frac{1}{h_r}\left(\sum_{\substack{k\in I_r \\ k\in K_\theta^W(\varepsilon)}} |d(x,A_k) - d(x,A)|\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\substack{k\in I_r \\ k\notin K_\theta^W(\varepsilon)}} |d(x,A_k) - d(x,A)|\right) \\
&\leq \frac{1}{h_r}\left(\sup_k\{|d(x,A_k) - d(x,A)|\}.|K_\theta^W(\varepsilon)| + \varepsilon.h_r\right)
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$|T_r(x) - d(x,A)| \leq \frac{1}{h_r}\left(\sup_k\{|d(x,A_k) - d(x,A)|\}.|K_\theta^W(\varepsilon)| + \varepsilon.h_r\right) \tag{6.1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olduğundan, (6.1) eşitsizliğinin sağ tarafı $r \to \infty$ iken ε a eşit olur. Yani, $r \to \infty$ iken

$$|T_r(x) - d(x,A)| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Burada, Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilmenin tanımı dikkate alındığında; $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olduğu ortaya çıkar. ∎

Teorem 6.2. *(X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bir $\{A_k\}$ dizisinin bir A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olması için gerek ve yeter şart*

$$\delta(K) = 1 \ \ ve \ \ A_{r_n} \to A(WN_\theta)$$

olacak şekilde bir $K = \{r_1 < r_2 < ... < r_n < ...\}$ kümesinin var olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $\delta(K) = 1$ ve $A_{r_n} \to A(WN_\theta)$ olacak şekilde bir $K = \{r_1 < r_2 < ... < r_n < ...\}$ kümesinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $n > N$ için,

$$|T_{r_n}(A_k) - d(x,A)| < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

$$K_\varepsilon^W(\theta) := \{n \in \mathbb{N} : |T_{r_n}(A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}$$

ve

$$K' = \{r_{N+1}, r_{N+2}, ...\}$$

ile belirtelim. O zaman,

$$\delta(K') = 1 \ \text{ ve } \ K_\varepsilon^W(\theta) \subseteq \mathbb{N} - K'$$

olması,

$$\delta\left(K_\varepsilon^W(\theta)\right) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olur.

($\Longrightarrow$) Tersine, $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman istatistiksel lacunary toplanabilir olsun. $p = 1, 2, 3...$ için,

$$K_p^W(\theta) := \left\{j \in \mathbb{N} : |T_{r_j}(A_k) - d(x,A)| \geq \frac{1}{p}\right\}$$

ve

$$M_p^W(\theta) := \left\{j \in \mathbb{N} : |T_{r_j}(A_k) - d(x,A)| < \frac{1}{p}\right\}$$

ile belirtelim.

O zaman,

$$\delta\left(K_p^W(\theta)\right) = 0,$$

$$M_1^W(\theta) \supset M_2^W(\theta) \supset ... \supset M_i^W(\theta) \supset M_{i+1}^W(\theta) \supset ... \tag{6.2}$$

ve

$$\delta\left(M_p^W(\theta)\right) = 1, \quad p = 1, 2, 3, ... \tag{6.3}$$

olur.

Şimdi $j \in M_p^W(\theta)$ için $\{A_{k_j}\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary toplanabilir olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, $\{A_{k_j}\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary toplanabilir olmasın. O halde, sonsuz sayıda terim için

$$|T_{r_j}(A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

$$M_\varepsilon^W(\theta) := \left\{j \in \mathbb{N} : |T_{r_j}(A_k) - d(x, A)| < \varepsilon\right\} \qquad \text{ve} \qquad \varepsilon > \frac{1}{p} \qquad (p = 1, 2, 3, ...)$$

olsun. O zaman,

$$\delta\left(M_\varepsilon^W(\theta)\right) = 0$$

olur. Ayrıca, (6.2) ifadesinden dolayı,

$$M_p^W(\theta) \subset M_\varepsilon^W(\theta)$$

yazılabilir. Bu ise

$$\delta\left(M_p^W(\theta)\right) = 0$$

olması anlamına gelir. Bu durum (6.3) ifadesi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece, $\{A_{k_j}\}$ dizisinin A kümesine lacunary toplanabilir olduğu ortaya çıkar. Bu ise istenilen sonuçtur. ■

Önceki teoreme benzer olarak aşağıdaki teoremi de verebiliriz:

Teorem 6.3. *(X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bir $\{A_k\}$ dizisinin bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$\delta_\theta(K) = 1 \quad ve \quad W - \lim A_{k_n} = A$$

olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < ... < k_n < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin var olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $\delta_\theta(K) = 1$ ve $W - \lim A_{k_n} = A$ olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < ... < k_n < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $\varepsilon > 0$ olmak üzere, herbir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$|d(x, A_{k_n}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

$$K_\varepsilon^W := \{n \in \mathbb{N} : |d(x, A_{k_n}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}$$

ve

$$K' = \{k_{N+1}, k_{N+2}, ...\}$$

ile belirtelim. O zaman,

$$\delta_\theta(K') = 1 \text{ ve } K_\varepsilon^W \subseteq \mathbb{N} - K'$$

olması,

$$\delta_\theta\left(K_\varepsilon^W\right) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olur.

($\Longrightarrow$) Tersine, $\{A_k\}$ dizisi bir A kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak olsun. $q = 1, 2, 3...$ için,

$$K_q^W := \{j \in \mathbb{N} : |d(x, A_{k_j}) - d(x, A)| \geq \frac{1}{q}\}$$

ve

$$M_q^W := \{j \in \mathbb{N} : |d(x, A_{k_j}) - d(x, A)| < \frac{1}{q}\}$$

ile belirtelim.

O zaman,

$$\delta_\theta\left(K_q^W\right)=0,$$

$$M_1^W \supset M_2^W \supset ... \supset M_i^W \supset M_{i+1}^W \supset ... \tag{6.4}$$

ve

$$\delta_\theta\left(M_q^W\right)=1, \quad q=1,2,3,... \tag{6.5}$$

olur.

Şimdi $j \in M_q^W$ için $\{A_{k_j}\}$ dizisinin A kümesine Wijsman yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, $\{A_{k_j}\}$ dizisi A kümesine Wijsman yakınsak olmasın. O halde, sonsuz sayıda terim için,

$$|d(x, A_{k_j}) - d(x, A)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

$$M_\varepsilon^W := \{j \in \mathbb{N} : |d(x, A_{k_j}) - d(x, A)| < \varepsilon\} \qquad \text{ve} \qquad \varepsilon > \frac{1}{q} \qquad (q=1,2,3,...)$$

olsun. O zaman,

$$\delta_\theta\left(M_\varepsilon^W\right)=0$$

olur. Ayrıca, (6.4) ifadesinden dolayı,

$$M_q^W \subset M_\varepsilon^W$$

yazılabilir. Bu ise.

$$\delta_\theta\left(M_q^W\right)=0$$

olması anlamına gelir. Bu durum (6.5) ifadesi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece, $\{A_{k_j}\}$ dizisinin A kümesine Wijsman yakınsak olduğu ortaya çıkar. Bu ise istenilen sonuçtur. ∎

* * *

7. KAYNAKLAR

Altınok, H., Altin, Y. and Et, M. (2004). Lacunary almost statistical convergence of Fuzzy numbers. *Thai J. Math.*, **2**: 265-274.

Attouch, H., Lucchetti, R. and Wets, R. J.-B (1991). The topology of the $\rho-$Hausdorff distance. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **160**: 303-320.

Aubin, J.-P. and Frankowska, H. (1990). Set-valued analysis. Birkhauser, Boston.

Aze, D. and Penot, J.-P. (1990). Operations on convergent families of sets and functions. *Optimization*, **21:** 521-534.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets. In: Micchelli, C.A., Pai, D.V., Methods of functional analysis in approximation theory, ISNM 76, Birkhauser-Verlag, Basel, 133–155.

Beer, G. (1987). Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **35:** 81-96.

Beer, G. (2002). On the compactness theorem for sequences of closed sets. *Mathematica Balkanica*, **16:** 327-338.

Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **31:** 421-432.

Beer, G. (1989). Support and distance functionals for convex sets. *Numer. Func. Anal.*
Optim., **10:**.15-36.

Beer, G. (1993). Topologies on closed and closed convex sets. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Beer, G. (1994). Wijsman Convergence: A survey. *Set-Valued Var. Anal.*, **2:** 77-94.

Beer, G. (1994). Wijsman convergence of convex sets under renorming. *Nonlinear Anal.-Theor. Meth. App.*, **22**: 207-216.

Beer, G. and Diconcilio, A. (1991). Uniform continuity on bounded sets and the Attouch-Wets topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112:** 235-243.

Beer, G. and Lucchetti, R. (1993). Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335:** 805-822.

Borwein, J.M. and Vanderwerff, J. (1994). Dual Kadec-Klee norms and the relationship between Wijsman, slice and Mosco convergence. *Michigan Math. J.*, **41**: 371-387.

Boss, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press Inc., New York.

Burachik, R.S. and Iusem, A.N. (2008). Set-valud mapping and enlargements of monoton operators, Springer, New York.

Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *Amer. J. Math.*, **75:** 335-346.

Connor, J.S. (1988). The statistical and strong $p-$Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, **8:** 47-63.

Das, G. and Patel, B.K., (1989). Lacunary distribution of sequences. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **20:** 64-74.

Das, G. and Mishra, S.K., (1983). Banach limits and lacunary strongly almost convergence. *J. Orissa Math. Soc.,* **2:** 61-70.

De Blasi, F.S. and Myjak, J. (1986). Weak convergence of convex sets in Banach spaces. *Arch. Math.,* **47:** 448-456.

Edely, O.H.H. and Mursaleen, M. (2009). On statistical $A-$summability. *Math. Comput Modelling,* **49:** 672-680.

Effros, E.G. (1965). Convergence of closed subsets in a topological space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16:** 929-931.

Et, M., Altin, Y. and Altinok, H. (2005). On almost statistical convergence of generalized difference sequences of Fuzzy numbers. *Math. Model. Anal.*, **10**: 345-352.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.,* **2:** 241-244.

Fell, J.M.G. (1962). A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13:** 472-476.

Ferrera, J. (1998). Convergence of polinomial level sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350:** 4757-4773.

Freedman A.R., Sember, J.J. and Raphael, M. (1978). Some Cesàro type summability spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37:**.508-520.

Freedman, A.R. and Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pacific J. Math.* **95:** 293-305.

Freedman, A.R. and Sember, J.J. (1981). On summing sequences of 0's and 1's. *Rocky Mountain J. Math.*, **11:** 419-426.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5:** 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific J. Math.,* **160:** 43-51.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical summability. *J. Math. Anal. Appl.,* **173:** 497-504.

Hausdorff, F. (1914). Grundzugeder Mengenlehre, Verlag von Veit, Leipzig, Preprinted by Chelsea, New York.

Kuratowski, K. (1966). Topology, Vol. I., Academic Pres, New York.

Lechicki, A. and Levi, S. (1987). Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space. *Bull. Un. Mat. Ital.*, **7:** 439-452.

Lorentz, G.G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, **80:** 167-190.

Lucchetti, R. (1985). Convergence of sets and of projections. *Boll. Un. Mat. Ital.*, **4:** 477-483.

Maddox, I.J. (1978). A new type of convergence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **83:** 61-64.

Maddox, I.J. (1970). Elements of functional analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Maddox, I.J. (1967). Spaces of strongly summable sequences. *Q. J. Math.*, **18:** 345-355.

Maddox, I.J. (1979). On strongly almost convergence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **85:** 345-350.

Maddox, I.J. (1980). Infinite matrices of operators. In: Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. *Ann. Univ. Ferrara*, **57**: 373-381.

Mursaleen. M. and Mohiuddine, S.A. (2009). On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space. *J. Comput. Appl. Math.*, **233:** 142-149.

Niven, I., Zuckerman, H.S. and Montgomery, H.L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, Inc., Fifth edition, New York.

Nuray, F. (1997). $\theta-$almost summable sequences. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **20**: 741-744.

Nuray, F. and Rhoades, B.E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasc. Math.*, **49:** 87-99.

Patterson, R. F. and Savaş, E. (2006). On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Thai J. Math.*, **4:** 267-272.

Powel, R.E. and Shah, S.M. (1972). Summability theory and its applications. Van Nostrand-Rheinhold, London.

Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, **30:** 139-150.

Salinetti, G. and Wets, R.J.-B. (1979). On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions. *SIAM Review*, **21:** 18-33.

Savaş, E., and Karakaya, V. (2007). Some new sequence spaces defined by lacunary sequences. *Math. Slovaca*, **57:** 393-399.

Schoenberg, I.J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, **66:** 361-375.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1994). Convergences for sequences of sets and linear mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **188:** 616-640.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1993). Set convergences. An attempt of classification, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340:** 199-226.

Ulusu, U. (2007). Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklığı, Yüksek Lisans Tezi, Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Volkov, I.I. (2001). Cesàro summation methods. In: Hazewinkel, M., (Eds.), Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

Wijsman, R.A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70:** 186-188.

Wijsman, R.A. (1966). Convergence of Sequences of Convex Sets, Cones and Functions II. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **123:** 32-45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Uğur ULUSU
Doğum Yeri ve Tarihi	:	SİVAS - 12.01.1982
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	ulusu@aku.edu.tr

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Sivas Kongre Lisesi, 1999.
Lisans	:	Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2004,
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2007.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

M.E.B, Balıkesir/Savaştepe, Öğretmen, 2004-2005.

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2005-...

Yayınları (SCI ve Diğer)

Nuray, F., Gök, H. and Ulusu, U. (2011). I_σ- Convergence, *Mathematical Communication*, **16:** 531-538.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). Lacunary Statistical Convergence of Sequences of Sets, *Progress in Applied Mathematics*, **4**(2)**:** 99-109.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). On Asymtotically Lacunary Statistical Equivalent Set Sequences, *Journal of Mathematics*, **2013.** doi: 10.1155/2013/310438.