2-NORMLU UZAYLARDA

İDEAL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mukaddes ARSLAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS,2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-NORMLU UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Mukaddes ARSLAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS, 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Mukaddes ARSLAN tarafından hazırlanan "2-Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklık Üzerine"adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/08/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Özer TALO
Celal Bayar Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatih KARAKUŞ
Afyon Kocatepe Üniv. Eğitim Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2015 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

...../...../2015

Mukaddes ARSLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

2-NORMLU UZAYLARDA
İDEAL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Mukaddes ARSLAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalıştığımız tez konusu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon, örnek ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarla ilgili tanım, kavram ve teoremler verildi ve 2-normlu uzaylarla ilgili bazı önemli özellikler incelendi. Dördüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık incelendi ve 2-normu kullanarak bazı yeni dizi uzayları tanımlandı. Daha sonra, 2-normlu uzaylarda (AP) özelliğini kullanarak $\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizileri ve bunlar arasındaki ilişkiler verildi. Ayrıca, 2-normlu uzaylarda bir dizinin $\mathcal{I}$-yığılma noktaları ile alışılmış limit noktaları arasındaki ilişkiler araştırıldı.

2015, v+41 sayfa

Anahtar Kelimeler : 2-normlu uzaylar, ideal, ideal yakınsaklık, ideal Cauchy, ideal yığılma noktaları.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON IDEAL CONVERGENCE
IN 2-NORMED SPACES

Mukaddes ARSLAN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, historical development of related notions of the thesis subject was mentioned. In the second chapter, some basic definitions, notions, examples and theorems related to study were given. In the third chapter, definitions, concepts and theorems related to 2-normed spaces were given and some important properties about 2-normed spaces were examined. In the fourth chapter, the concept of $\mathcal{I}$-convergence was investigated in 2-normed spaces and some new sequences spaces were defined by using 2-normed. After, the concepts of $\mathcal{I}$-convergence, $\mathcal{I}^*$-convergence, $\mathcal{I}$-Cauchy and $\mathcal{I}^*$-Cauchy sequences and relations between these concepts were given by using (AP) condition in 2-normed spaces. Also, the relations between $\mathcal{I}$-cluster points and ordinary limit points of sequences were examined in 2-normed spaces.

2015, v+41 pages

Key Words : 2-normed spaces, ideal, ideal convergence, ideal Cauchy, ideal cluster points.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği geçen ve bu branşı seçmemde katkısı olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mukaddes ARSLAN

AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{R}^d$	d-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathcal{I}$	İdeal
$\mathcal{F}$	Süzgeç
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	İdeal ile birleştirilmiş süzgeç
$\Vert .,.\Vert$	2-norm fonksiyonu
$\Vert .\Vert_p$	$2 \leq p \leq \infty$ olmak üzere baz ile elde edilen norm
$\Vert .\Vert_\infty$	2-normların maksimumu olan sonsuz norm fonksiyonu
$\Vert .,...,.\Vert$	n-norm fonksiyonu
$\Vert .,...,.\Vert_\infty$	(n-1) boyutlu-norm fonksiyonu
$\{u_1,...,u_d\}$	d-boyutlu baz
$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x,r)$	$\{u_1,...,u_d\}$ bazı altındaki x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
(X,d)	Metrik uzay
$(X,\Vert .,.\Vert)$	2-Banach uzayı
$(C,\Vert .\Vert)$	Banach cebiri
$\vert K\vert$	K kümesinin kardinelitesi
$< .,. >$	İç çarpım uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_n)	Reel sayı dizisi
F	Sınırlı lineer 2-fonksiyonel
$st-\lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{I}_f$	Doğal sayılar cümlesinin tüm sonlu alt cümlelerinin sınıfı
$\mathcal{I}_\delta$	Doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerin sınıfı

1 GİRİŞ

Limit, yakınsaklık ve süreklilik gibi kavramlar analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturan en önemli kavramlardır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahiptir. 1951' de Fast'in istatistiksel yakınsak kavramını tanımlanmasından bu yana istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları ile ilgili çalışmalar Connor (1989), Schoenberg (1959), Maddox (1970), Šalát (1980), Fridy (1985, 1993), Fridy ve Orhan (1997), Nuray ve Ruckle (2000), Rath ve Tripathy (1994) ve daha birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır.

Kostyrko vd. (2000) istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan $\mathcal{I}$-yakınsaklığı tanımlamış ve ayrıca $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizilerinin tanımlarını yapıp, bunlar arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Kostyrko vd. (2005) $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-limit noktaları ile ilgilendiler. Demirci (2001) $\mathcal{I}$-limit superior and limit inferior tanımlarını yapıp ilgili teoremleri ispatladılar.

2-metrik uzay ve 2-normlu uzay kavramları ilk önce Gähler (1963, 1965) tarafından tanıtıldı. Daha sonra bu kavramlar Açıkgöz (2007), Gunawan ve Mashadi (2001), Gürdal ve Pehlivan (2004, 2009), Gürdal ve Açık (2008), Gürdal (2006), Lewandowska (2001, 2003), Rezapour (2005), Mursaleen ve Alotaibi (2011), Sarabadan ve Talebi (2011), Şahiner vd. (2007), Tripathy vd. (2012), White (1969) ve birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Gunawan ve Mashadi (2001) sonlu boyutlu 2-normlu uzayları çalıştılar ve 2-normdan türetilen belli bir normu kullanarak 2-normlu uzayların topolojilerinin tam olarak tanımlanabileceğini gösterdiler. 2-Banach uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterdiler ve bu gerçeği kullanarak Sabit Nokta teoremini ispatladılar. Dahası, elde ettikleri sonuçların bazı sonsuz boyutlu 2-normlu uzaylara genişletilebileceğini gösterdiler.

Şahiner vd. (2007) 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklığı ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizisini tanımlayıp bazı özelliklerini araştırdılar. Ayrıca, 2-normu kullanarak bazı yeni dizi uzaylarını incelediler.

Gürdal ve Açık (2008) 2-normlu uzaylarda diziler için (AP) özelliğine sahip bir uygun $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen bir $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ süzgeci boyunca $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile alışılmış yakınsaklık arasındaki ilişkiyi incelediler. Ayrıca $\mathcal{I}^*$-yakınsaklığı tanımlayıp, $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile arasındaki ilişkiyi araştırdılar. Daha sonra, 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizilerini tanımlayıp bazı özelliklerini incelediler.

Gürdal (2006) 2-normlu uzaylarda bir dizinin $\mathcal{I}$-yığılma noktaları ile alışılmış limit noktaları arasındaki ilişkiyi inceledi.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, matematik alanında önemli ve bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere ve örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından yapılan çalışmadaki 2-normlu uzaylarda temel tanım, teorem, özellikler ve örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, Şahiner vd. (2007), Gürdal ve Açık (2008) ve Gürdal (2006) ın çalışmalarındaki 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık ile ideal Cauchy dizisi ve bu iki kavram ile ilgili özellikler, teoremler ve bir dizinin $\mathcal{I}$-yığılma noktaları ile alışılmış limit noktaları arasındaki ilişki verilmiştir.

Son olarak, tez için temel kaynak olarak kullandığımız kitap, makale ve tezler kaynaklar kısmında verilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay ve alt uzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik ve Metrik Uzay). X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, x) = 0$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

(M1) $d(x, x) = 0$ şartı yerine (M1)$'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şartını alırsak d fonksiyonuna *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Bir lineer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).

Bu çalışmamızda, $\mathbb{R}$ reel uzay üzerinde

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan alışılmış mutlak değer metriğini göz önüne alacağız. Burada $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2 (Dizi Uzayı). Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞ , c , c_0 , ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary and Nanda 1989).

Tanım 2.1.3 (Yarı Norm ve Norm). X bir lineer uzay ve $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|\theta\| = 0$,

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *yarı normlu uzay* denir.

Burada (N2) şartı yerine

$$(N2)^{'} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

şartı sağlanırsa, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.4 (x_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

1) Her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa, (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

2) $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir x vektörü varsa (yani, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) (x_n) dizisi x e *yakınsaktır*, denir. Bu x vektörü (x_n) dizisi tarafından bir tek olarak belirtilir.

3) $m, n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise (yani, verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.5 (Normlu Cebir, Banach Cebiri). C bir cebir ve C de bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olsun. Bu norm, her $x, y \in C$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

şartını sağlıyorsa ve C nin birim elemanı olması halinde de

$$\|e\| = 1$$

ise C ye *normlu cebir* denir. $(C, \|.\|)$ normlu cebiri, normlu lineer uzay olarak tam ise bu normlu cebire *Banach cebiri* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.6 (Açık ve Kapalı Yuvar). (X, d) metrik uzayında, x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için;

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

cümlelerine sırasıyla, x_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* ve *kapalı yuvar* denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.7 (Kompakt Uzay, Dizisel Kompaktlık). Bir topolojik uzayın her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahip ise bu uzaya *kompakt uzay* denir.

Bir metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut ise bu metrik uzaya *dizisel kompakttır*, denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.8 (Lineer Bağımsızlık, Lineer Bağımlılık). L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de L nin sonlu bir alt cümlesi olsun. $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa S cümlesine veya $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) *lineer bağımsızdır*, denir.

Lineer bağımsız olmayan kümeye *lineer bağımlı küme* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.9 (Baz (Taban)). L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, L cümlesinin bir alt cümlesi olsun. B lineer bağımsız ve B, L yi geriyorsa, yani $< B >= L$ ise B ye (F üzerinde) L nin bir *bazı (tabanı)* denir (Bayraktar 2006).

2.2 İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, yoğunluk kavramını, istatistiksel ve ideal yakınsaklık tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.2.1 (Doğal Yoğunluk). $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ cümlelerini alalım. $|K| = card\, K$ (K cümlesinin kardinalitesi) olmak üzere,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine, sırasıyla, K cümlesinin *alt ve üst yoğunlukları* denir. $\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin *limiti mevcuttur*, denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K cümlesinin *doğal yoğunluğu* denir. $K \subset \mathbb{N}$ cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven *et al.* 1991).

Tanım 2.2.2 (İstatistiksel Yakınsaklık). Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise, x dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır*, denir (Fast 1951).

Tanım 2.2.3 [**İdeal**] X boş olmayan bir cümle olsun. $\mathcal{I} \subset 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

ii) $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$

iii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlarsa, $\mathcal{I}$ ya X üzerinde bir *idealdir,* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer, $X \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$' ya bir *gerçek (aşikar olmayan) ideal* adı verilir (Kostyrko *et al.* 2000).

Bundan sonraki kısımlarda geçen idealleri gerçek (aşikar olmayan) ideal olarak göz önüne alacağız.

Tanım 2.2.4 [**Süzgeç**] $X \neq \emptyset$ olsun. $\emptyset \neq\subset 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ için $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlarsa, $\mathcal{F}$ ye X üzerinde bir *süzgeçtir (filtre)*, denir (Kostyrko *et al.* 2000).

$\mathcal{I}$, X üzerinde bir gerçek ideal ise,

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : \exists A \in \mathcal{I}, M = X \backslash A\}$$

sınıfı X üzerinde bir süzgeç olup, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ süzgecine $\mathcal{I}$ *idealine karşılık gelen süzgeç* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.2.5 [**Uygun İdeal**] X üzerinde $\mathcal{I}$ gerçek ideali her bir $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ şartını sağlıyorsa, $\mathcal{I}$ ya bir *uygun ideal* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.2.6 [**$\mathcal{I}$-Yakınsaklık**] (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. X uzayının bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

şartını sağlıyorsa, x dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-*yakınsaktır*, denir ve

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

ile gösterilir.

$\mathcal{I}$ bir uygun ideal ise adi yakınsaklık $\mathcal{I}$-yakınsaklığı gerektirir (Kostyrko *et al.* 2000).

Şimdi $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilgili iki örnek verelim:

1) $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin tüm sonlu alt cümlelerinin sınıfı $\mathcal{I}_f$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_f$ gerçek uygun idealdir ve $\mathcal{I}_f$ -yakınsaklık, X uzayındaki ρ metriğine göre adi yakınsaklık ile çakışır.

2) $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ sınıfını tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{I}_\delta$ bir gerçek uygun idealdir ve $\mathcal{I}_\delta$ -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.2.7 [**$\mathcal{I}^*$-Yakınsaklık**] (X, ρ) bir metrik uzay , (x_n) X uzayında bir dizi ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun.Bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

cümlesi için

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, L) = 0$$

sağlanıyorsa, (x_n) dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}^*$- *yakınsaktır* , denir ve

$$\mathcal{I}^* - \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = L$$

ile gösterilir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.2.8 [**$\mathcal{I}$-Cauchy**] (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. X uzayının bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her $\varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

şartını sağlıyorsa, x dizisi X de *$\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir*, denir (Nabiev vd. 2007).

Tanım 2.2.9 [**$\mathcal{I}^*$-Cauchy**] (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. X uzayının bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}, \quad M \in \mathcal{F}$$

kümesi var öyle ki $x_M = (x_{m_k})$ alt dizisi X de bir alışılmış Cauchy dizisi, yani,

$$\lim_{k,p\to\infty} \rho(x_{m_k}, x_{m_p}) = 0$$

sağlanıyor ise, x dizisi X de *$\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir*, denir (Nabiev vd. 2007).

Tanım 2.2.10 [**$\mathcal{I}$-Limit Noktası**] $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. Bir $L \in \mathbb{R}$ elemanını alalım. Eğer, bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi vardır öyle ki

$$M \notin \mathcal{I} \;\; ve \;\; \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = L$$

ise $L \in \mathbb{R}$ sayısı $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin *$\mathcal{I}$-limit noktasıdır* (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.2.11 [**$\mathcal{I}$-Yığılma Noktası**] $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. Bir $L \in \mathbb{R}$ elemanı $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin *$\mathcal{I}$-yığılma noktasıdır* ancak ve ancak her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{k : |x_k - L| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

dır (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.2.12 [**(AP) Şartı**] $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cümleler ailesi için, $A_n \triangle B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sonlu cümle ve

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}$$

şartlarını sağlayan sayılabilir $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cümleler ailesi varsa, $\mathcal{I}$ ideali *(AP) şartını sağlar*, denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Lemma 2.2.13 $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\mathbb{N}$ 'in sayılabilir alt dizilerinin birleşimi olsun öyle ki $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ bir uygun ideal olan $\mathcal{I}$ tarafından (AP) özelliği ile birleştirilmiş bir filtre olmak üzere, her bir i için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$' dır. Bu durumda, bir $P \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $P \setminus P_i$ kümesi tüm i ler için sonludur (Nabiev vd. 2007).

3 2-NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde, Gunawan ve Mashadi (2001) tarafından incelenen 2-normlu uzaylar ile ilgili temel tanım, lemma ve teoremleri vereceğiz.

3.1 Sonlu Boyutlu 2-Normlu Uzaylar ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.1 $2 \leq d < \infty$ olmak üzere X, d boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde

$$\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\|.,.\|$ fonksiyonuna bir *2-norm* denir.

(i) $\|x, y\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır;

(ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$;

(iii) $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

$(X, \|.,.\|)$ çiftine *2-normlu uzay* denir.

2-normlu uzayın bir standart örneği aşağıdaki 2-normla donatılmış $\mathbb{R}^2$ dir:

$\|x, y\| :=$ köşeleri $\theta = (0, 0)$, x ve y vektörleri olan üçgensel bölge.

Herhangi bir $(X, \|.,.\|)$ 2 normlu uzayında her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|x, y\| \geq 0 \quad ve \quad \|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$$

özelliklerinin sağlandığı görülür. Aynı zamanda, x, y ve z lineer bağımlı ise (bu, örneğin $d = 2$ olduğunda olur) o zaman,

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\| \quad veya \quad \|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

dir.

2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayı verilsin. Aşağıda tanımlanan bir dizinin limit kavramından faydalanılarak bir topoloji elde edilebilir.

Her $y \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

ise X deki bir (x_n) dizisine x değerine *yakınsaktır*, denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ile gösterilir ve (x_n) *dizisinin limiti* x *dir*, denir.

2-normlu uzaylarda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim.(x_n) dizisi X deki iki farklı x ve y limitlerine yakınsıyor olsun. $\|x-y,z\| \neq 0$ olacak şekilde $z \in X$ seçelim ve aynı anda

$$\|x_N - x, z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\| \text{ ve } \|x_N - y, z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\|$$

olacak şekilde yeterince büyük $N(\varepsilon, z) \in X$ alalım. O zaman üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|x-y,z\| &\leq \|x-x_N,z\| + \|x_N - y, z\| \\ &< \frac{1}{2}\|x-y,z\| + \frac{1}{2}\|x-y,z\| \\ &= \|x-y,z\| \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece, eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

varsa tek olmalıdır.

Bundan sonra $(X, \|.,.\|)$ ikilisini 2-normlu uzay olarak alacağız. Aksi belirtilmedikçe X in d boyutunun $2 \leq d < \infty$ olduğunu kabul edeceğiz. Sabit $\{u_1, ..., u_d\}$, X için bir baz olsun. O zaman aşağıdakileri yazabiliriz:

Lemma 3.1.2 X de bir (x_n) dizisi X de bir x elemanına yakınsaktır ancak ve ancak her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

dır.

İspat 3.1.3 Eğer her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

ise bu durumda, her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Açık olarak her $y \in X$ ve bazı $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$ için

$$y = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_d u_d$$

yazılabilir ve üçgen eşitsizliğinden her $n \in X$ için

$$\|x_n - x, y\| \leq |\alpha_1| \|x_n - x, u_1\| + ... + |\alpha_d| \|x_n - x, u_d\|$$

elde edilir.

Lemma 3.1.4 X de bir (x_n) dizisi X de bir x elemanına yakınsaktır ancak ve ancak

$$\lim_{n\to\infty} \max\{\|x_n - x, u_i\| : i = 1, ..., d\} = 0$$

dır.

Bu basit gerçek bizi X üzerindeki bir normun tanımına götürür. X üzerinde $\{u_1, ..., u_d\}$ bazıyla bir norm tanımlayabiliriz. $\|.\|_\infty$ normunu

$$\|x\|_\infty := \max\{\|x, u_i\| : i = 1, ..., d\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Gerçekten de;

(i) $\|x\|_\infty = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.

(ii) $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \|x\|_\infty$ dir.

(iii) Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ dir.

Genelde $1 \leq p \leq \infty$ için X üzerinde $\|.\|_p$ fonksiyonunu

$$\|x\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^{d} \|x, u_i\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Fakat X sonlu boyutlu olduğundan tüm bu normlar denktir. Bu nedenle aksi belirtilmedikçe bu bölüm boyunca sadece $\|.\|_\infty$ ile çalışacağız.

Burada bazın seçimi önemli değildir. Eğer X için $\{v_1, ..., v_d\}$ şeklinde başka bir baz seçer ve $\|.\|_\infty$ normunu bu baza bağlı olarak tanımlarsak sonuçta elde edilen norm, $\{u_1, ..., u_d\}$ bazına göre tanımlanan norma denk olacaktır.

Türetilmiş $\|.\|_\infty$ normunu kullanarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 3.1.5 X de bir (x_n) dizisinin $x \in X$ e yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$$

olmasıdır.

Türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu yardımıyla, x noktasında r yarıçaplı (x, r) merkezli $B_{\{u_1,\ldots,u_d\}}$ açık yuvarları

$$B_{\{u_1,\ldots,u_d\}}(x,r) := \{y : \|x - y\|_\infty < r\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yuvarlar kullanılarak Lemma 3.1.5 aşağıdaki gibi verilebilir:

Lemma 3.1.6 X de bir (x_n) dizisinin $x \in X$ e yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için en az bir } N \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\{u_1,\ldots,u_d\}}(x, \varepsilon)$$

olmasıdır.

Tüm sonuçları özetleyerek aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.1.7 Herhangi bir sonlu boyutlu 2-normlu uzay bir normlu uzaydır ve onun topolojisi, türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu tarafından üretilen topoloji ile bağdaşır (uyuşur).

Aşağıda göstereceğimiz gibi, bir normlu uzaydaki bir çok sonuç, türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu veya onun birleşmiş yuvarları kullanılarak 2-normlu uzaylarda doğrulanabilir. Önce bazı örnekleri inceleyelim:

Örnek 3.1.8 $X = \mathbb{R}^2$, $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarsal bölge (Aynı zamanda $\theta = (0, 0)$,x ve y vektörlerinin oluşturduğu üçgensel bölge) 2-normu ile donatılmış olsun. Bu açıkca

$$\|x, y\| = |x_1y_2 - x_2y_1|, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

formülü ile verilebilir. $\mathbb{R}^2$ için $\{i, j\}$ standart bazını alalım. Bu durumda

$$\|x, i\| = |x_2| \text{ ve } \|x, j\| = |x_1|$$

ve böylece $\{i,j\}$ bazı ile türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}, x = (x_1,x_2)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, burada tanımlanan $\|.\|_\infty$ normu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki düzgün norm ile tamamen aynıdır. Bundan dolayı $B_{\{i,j\}}(x,r)$ yuvarı x merkezli r yarıçaplı bir karedir. Türetilen norm, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklid normuna denk olduğundan yukarıdaki 2-norm ile donatılan $\mathbb{R}^2$ düzlemi Öklid düzleminden başka birşey değildir.

Daha genel olarak;

Uyarı 3.1.9 $\|x,y\| :=$ x ve y vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarsal bölge olmak üzere 2-normlu $(\mathbb{R}^d, \|.,.\|)$ uzayı, normu Öklid normuna denk olan bir normlu uzaydır.

İspat 3.1.10 Her $x = (x_1,...,x_d)$ ve $y = (y_1,...,y_d) \in \mathbb{R}^d$ için, $\|x,y\|$ 2-normlu uzayı açık olarak

$$\|x,y\| = \left\{\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{d} y_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 y_i^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile verilebilir.

$\mathbb{R}^d$ için $(e_1,e_2,...,e_d)$ standart bazını alalım. $j = 1,...,d$ için

$$\|x,e_j\| = \left\{\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) - x_j^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir ve böylece $\{e_1,...,e_2\}$ bazı ile türetilmiş $\|.\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = max\left\{\left\{\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) - x_j^2\right\}^{\frac{1}{2}} : j = 1,...,d\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi $\|.\|_E$ yi $\mathbb{R}^d$ de bir Öklid normu olarak alalım.

Her $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_E \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

olduğunu doğrulayarak türetilmiş normun Öklid normuna eşit olduğunu göstermek kolaydır.

Uyarı 3.1.11

Yukarıdaki $(\mathbb{R}^d, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı için,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d} \|x, e_j\|^2 = (d-1)\sum_{i=1}^{d} x_i^2$$

olduğu gözlemlenir yani, $\|.\|_2$ normu Öklid normunun bir katıdır.

Şimdi sonlu boyutlu 2-Banach uzayları için Sabit Nokta Teoremini kanıtlayalım. (Hatırlayalım ki ,eğer X uzayında her Cauchy dizisi herhangi bir $x \in X$e yakınsaksa,yani her $y \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, y\| = 0$$

olacak şekilde bir $(x_n) \in X$ varsa, $(X, \|.\|)$ 2-Banach uzayıdır.)

Fakat öncelikle aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var :

Lemma 3.1.12 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayının bir 2-Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart $(X, \|.\|_\infty)$ un bir Banach uzayı olmasıdır.

İspat 3.1.13 Lemma 3.1.4 te 2-normdaki yakınsaklık türetilmiş normdakine eş değer olduğundan, 2-norma göre (x_n) nin Cauchy olması için gerek ve yeter şart türetilmiş normda Cauchy olduğunu göstermektir. Fakat 2-norma göre (x_n) Cauchy dir ancak ve ancak her $y \in X$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, y\| = 0$$

ancak ve ancak her $i = 1, ..., d$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n, u_i\| = 0$$

ancak ve ancak

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\|_\infty = 0$$

ancak ve ancak (x_n) türetilmiş norma göre bir Cauchy olduğundan, bu açıktır.

Sonuç 3.1.14 (Sabit Nokta Teoremi). $(X, \|.,.\|)$ bir 2-Banach uzayı olsun. k, $(0,1)$ aralığında bir sabit olmak üzere; her $x, y, z \in X$ için

$$\|T_x - T_y, z\| \le k\|x - y, z\|$$

olacak şekilde T, X in kendi kendine eşlemesi olsun. Bu durumda T, X de tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat 3.1.15

$\|.\|_\infty$ türetilmiş normuna göre, her $x, y \in X$ için T eşlemesi

$$\|T_x - T_y\|_\infty \leq k\|x - y\|_\infty$$

eşitsizliğini sağlar. $(X, \|.\|_\infty)$ aynı zamanda bir Banach uzayı olduğundan, Banach uzayları için Sabit Nokta Teoreminden, T nin X de tek bir sabit noktası olduğu sonucuna ulaşırız.

3.2 Bazı Ek Sonuçlar

Şimdi, sonuçlarımızın $\langle ., . \rangle$ bir iç çarpım ve $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ onun X üzerinde uyarlanmış normu olmak üzere, üzerinde standart

$$\|x, y\| = \left\{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

2-normu tanımlanmış herhangi ayrılabilir bir X iç çarpım uzayına (sonsuz boyut olabilir) genişleyebileceğini göreceğiz.

(e_i) sayılabilir $I \supseteq \{1, 2\}$ kümesine endeksli, X için ortonormal taban olsun.

Bu durumda, her bir $i \in I$ için

$$\|x, e_i\| = \left\{\|x\|^2 - \langle x, e_i\rangle^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|$$

elde ederiz. Dolayısıyla (e_i) ye göre türetilmiş $\|.\|_\infty$ normunu

$$\|x\|_\infty := \sup\{\|x, e_i\| : i \in I\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Her $x \in X$ için

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|$$

olduğu açıktır. Tersine, *Bessel* eşitsizliğini kullanarak

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - \langle x, e_1\rangle^2 + \|x\|^2 - \langle x, e_2\rangle^2 = \|x, e_1\|^2 + \|x, e_2\|^2 \leq 2\|x\|_\infty^2$$

elde ederiz ve buradan her $x \in X$ için

$$\|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

bulunur. Bu da $\|.\|_\infty$ normunun X deki mevcut $\|.\|$ normuna eşit olduğunu gösterir.

Ayrıca, Lemma 3.1.2' nin hala geçerli olduğunu görürüz. Yani X deki bir (x_n) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i\| = 0$$

olmasıdır. Gerçekten, her $i \in I$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i\| = 0$$

vererek her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

olduğunu gösterebiliriz. Her $y \in X$ için

$$\|x_n - x, y\| \leq \|x_n - x\| \|y\|$$

olduğunu gözlemleyebiliriz. Yeniden *Bessel* eşitsizliğini ele alırsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_n - x\|^2 \leq \|x_n - x, e_1\|^2 + \|x_n - x, e_2\|^2$$

elde ederiz. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

ve bu sebepten dolayı her $y \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

dır. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Uyarı 3.2.1 X deki bir (x_n) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter şart yalnız $i = 1$ ve 2 için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i\| = 0$$

olmasıdır.

Buna göre $\{e_1, e_2\}$ ile X de $\|.\|_2$ basit normunu

$$\|x\|_2 := \{\|x, e_1\|^2 + \|x, e_2\|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlayabiliriz.

Herhangi bir 2-normlu uzayda bir norm tanımlarken genellikle lineer bağımlı iki vektörü kullandığımız için, bu şaşırtıcı değildir. Burada dikkate değer olan şey $\|.\|_2$ tarafından üretilen topolojinin 2-norm tarfından üretilenle bağdaşmasıdır. Dikkat edilirse her $x \in X$ için,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

dir. $\|.\|_2$ ve $\|.\|_\infty$ eşitliği doğrulamaktadır ve her ikiside X deki mevcut $\|.\|$ normuna eşdeğerdir. Bu nedenle Lemma 3.1.4 (ve benzerleri), Lemma 3.1.12 ve Sonuç 3.1.14, X in $\|.\|_\infty$,$\|.\|_2$ veya $\|.\|$ ile donatılmış olup olmadığını göstermek için hala geçerlidir.

Sonuç 3.2.2 Bir önceki bölümde 2-norm tartışmasının

$$\|x+y,z\|^2 + \|x-y,z\|^2 = 2(\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2)$$

paralelkenar tanımını sağladığı fark edilebilir.

Türetilmiş $\|.\|_2$ 2-normu hakkındaki bir başka gerçek onun

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

tanımı sağlamasıdır.

4 2-NORMLU UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK VE İDEAL CAUCHY DİZİLERİ

Bu bölümde öncelikle Şahiner vd. (2007) tarafından incelenen 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık ile ilgili tanım, teorem ve özellikleri vereceğiz. Daha sonra, Gürdal ve Açık (2008) tarafından yapılan çalışmadaki 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy dizileri ile ilgili tanım, teorem ve özellikleri inceleyeceğiz. Son olarak, Gürdal (2006) tarafından yapılan çalışmadaki 2-normlu uzaylarda bir dizinin ideal yığılma noktaları ile alışılmış limit noktaları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

4.1 2-Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklık

Bu çalışma boyunca $\mathbb{N}$ pozitif tam sayıların kümesi olarak alınacaktır. $2 \leq d < \infty$ olacak şekilde X uzayı d boyutuna sahip 2-normlu bir uzay kabul edilecektir.

Tanım 4.1.1 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek (aşikar olmayan) ideal olsun. Eğer, her bir $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise, X e ait (x_n) dizisi $x \in X$'e *$\mathcal{I}$-yakınsaktır*, denir.

Eğer (x_n) dizisi x'e $\mathcal{I}$-yakınsak ise o zaman

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = 0 \text{ veya } \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|x, z\|$$

dir. x sayısı (x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limitidir.

Şimdi 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklığa bir örnek verelim:

Örnek 4.1.2

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ olsun. $X = \mathbb{R}^2$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında (x_n) tanımlayalım:

$$x_n = \begin{cases} (0, n), & n = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ (0, 0), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $L = (0, 0)$ ve $z = (z_1, z_2)$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...\}$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

elde ederiz. Bu durum ise

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|L, z\|$$

olması anlamına gelir. Fakat (x_n) dizisi L'ye yakınsak değildir.

Teorem 4.1.3 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Her $z \in X$ için ,

(i) Eğer,

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| = \|x, z\| \text{ ve } \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|y_n, z\| = \|y, z\|$$

ise bu durumda,

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n, z\| = \|x + y, z\|$$

elde edilir.

(ii) $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|ax_n, z\| = \|ax, z\|$$

dir.

İspat 4.1.4 (i) $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman her bir $z \in X$ için

$$K_1 = K_1(\varepsilon, z) := \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

ve

$$K_2 = K_2(\varepsilon, z) := \{n \in \mathbb{N} : \|y_n - y, z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

olmak üzere $K_1, K_2 \in \mathcal{I}$ 'dır.

$$K = K_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : \|(x_n + y_n) - (x + y), z\| \geq \varepsilon\}$$

alalım. Bu durumda,

$$K \subset K_1 \cup K_2$$

kapsaması, dolayısıyla da

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n,z\|=\|x+y,z\|$$

elde edilir.

(ii) $\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n,z\|=\|L,z\|, a\in\mathbb{R}$ ve $a\neq 0$ olsun. Bu durumda ,

$$\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-L,z\|\geq\frac{\varepsilon}{|a|}\}\in\mathcal{I}$$

dır. Tanım gereği,

$$\{n\in\mathbb{N}:\|ax_n-aL,z\|\geq\varepsilon\}=\left\{n\in\mathbb{N}:\|x_n-L,z\|\geq\frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\in\mathcal{I}$$

elde edilir. Böylece her $z\in X$ için

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|ax_n,z\|=\|aL,z\|$$

olur.

$u=\{u_1,u_2,...,u_d\}$, X için bir baz olsun. Bu durumda, aşağıdaki lemmayı elde ederiz:

Lemma 4.1.5 $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $(x_n)\in X$ dizisi $x\in X$'e $\mathcal{I}$-yakınsaktır gerek ve yeter şart her $i=1,2,...,d$ için

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,u_i\|=0$$

dır.

Bu lemmayı ve $\|.\|_\infty$ normunu kullanarak aşağıdaki lemmayı elde ederiz:

Lemma 4.1.6 $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Bir $(x_n)\in X$ dizisi $x\in X$'e $\mathcal{I}$-yakınsaktır ancak ve ancak

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_\infty=0$$

dır.

Bu lemma ve $B_u(x,\varepsilon)$ açık yuvarları kullanılarak :

Lemma 4.1.7 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. X' de bir (x_n) dizisi $x \in X$' e $\mathcal{I}$-yakınsaktır ancak ve ancak

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_u(x, \varepsilon)\} \in \mathcal{I}$$

dır.

Şimdi 2-normlu X uzayında $\mathcal{I}$-Cauchy dizisini tanımlayacağız :

Tanım 4.1.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek(aşikar olmayan) ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı varsa, X' e ait bir (x_n) dizisi X' de bir $\mathcal{I}$-*Cauchy dizisidir*, denir.

Teorem 4.1.9 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\|.,.\|$ veya $\|.\|_\infty$ normlarının herhangi biriyle X' de verilen bir (x_n) $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi için aşağıdakiler denktir:

(i) (x_n), $(X, \|.,.\|)$ uzayında $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

(ii) (x_n), $(X, \|.\|_\infty)$ uzayında $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat 4.1.10

Lemma 4.1.6' dan, 2-normdaki $\mathcal{I}$-yakınsaklık $\|.\|_\infty$ normundaki ile denktir. Yani,

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = 0, \;\; \forall z \in X \Leftrightarrow \mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$$

dır. (x_n) dizisinin 2-normlu uzayda $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğunu göstermek için gerek ve yeter şart $\|.\|_\infty$ normunda $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğunu göstermektir. Ancak bu ispat Lemma 3.1.2' de idealleri kullanarak çok benzer bir şekilde elde edilebilir.

4.2 Yeni Dizi Uzayları

Bu kısımda, bazı yeni dizi uzayları sunacağız ve bunların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

$(X, \|.,.\|)$ herhangi bir 2-normlu uzay ve $S(2-X)$, X-değerli dizi uzayı olsun. Açık olarak $S(2-X)$ toplama ve skaler çarpma işlemi altında bir lineer uzaydır.

$g : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, X üzerinde bir *paranorm* olarak adlandırılır:

(i) $g(\theta) = 0$ (burada θ, uzayın sıfırıdır)

(ii) $g(x) = g(-x)$

(iii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

(iv) $\lambda^n \to \lambda(n \to \infty)$ ve $g(x^n - x) \to 0(n \to \infty)$ olması her $x, y \in X$ için

$$g(\lambda^n.x^n - \lambda.x) \to 0(n \to \infty)$$

olması anlamına gelir(Maddox 1970). Şimdi sıradaki dizi uzayını tanımlayalım :

Tanım 4.2.1 $l(2-p) = \{x \in S(2-X) : \sum_k \|x_k, z\|^{p_k} < \infty, \forall z \in S(2-X)\}$.

Lemma 4.2.2 $l(2-p)$ dizi uzayı bir lineer uzaydır.

İspat 4.2.3 $p_k > 0, (\forall k), H = \sup p_k$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ (kompleks sayılar) olsun. O zaman,

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\},\ C = \max\{1, 2^{H-1}\}$$

dir (Maddox 1970). Buradan, eğer

$$|\lambda| \leq L \text{ ve } |\mu| \leq M;$$

L,M tam sayılar, $x, y \in l(2-p)$ (k indisi ihmal edilerek) ise bu durumda elde ederiz ki,

$$\|\lambda.x - \mu.y, z\|^{p_k} \leq C.L^H(\|x, z\|)^{p_k} + C.M^H(\|y, z\|)^{p_k}$$

dır. İstenen sonuç k üzerinden toplam alınarak elde edilir.

Tanım 4.2.4 $t_k = \sum_{i=1}^{k} \|x_i, z\|^{p_i}$ ve $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. O zaman aşağıdaki gibi yeni dizi uzayı tanımlayabiliriz:

$$l^{\mathcal{I}}(2-p) = \{x \in S(2-X) : \{k \in \mathbb{N} : \|t_k - t, z\| \geq \varepsilon\ \ \forall z \in S(2-X)\} \in \mathcal{I}\}.$$

Teorem 4.2.5 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. $l^{\mathcal{I}}(2-p)$ dizi uzayı bir lineer uzaydır.

İspat 4.2.6 İdealin özellikleri ve dizilerin kısmi toplamları kullanılarak Lemma 4.2.2 deki gibi kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 4.2.7 $0 < p_k \leq \sup p_k = H, M = \max(1, H)$ olmak üzere $l(2-p)$ uzayı, $g : l(2-p) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \left(\sum_k \|x_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

paranormu ile tanımlanmış bir paranormlu uzaydır.

İspat 4.2.8

(i) $g(\theta) = \left(\sum_k \|\theta_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} = 0$

(ii) $g(-x) = \left(\sum_k \| -x_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} = \left(\sum_k |-1|.\|x_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} = g(x)$

(iii) İyi bilinen eşitsizlikler kullanılarak ;

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \left(\sum_k \|x_k + y_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\ &\leq \left(\sum_k \left(\|x_k, z\|^{\frac{p_k}{M}} \right)^M \right)^{\frac{1}{M}} + \left(\sum_i \left(\|y_k, z\|^{\frac{p_k}{M}} \right)^M \right)^{\frac{1}{M}} \\ &= g(x)) + g(y). \end{aligned}$$

(iv) Şimdi $\lambda^n \to \lambda$ ve $g(x^n - x) \to 0 (n \to \infty)$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g(\lambda^n x^n - \lambda x) &= \left(\sum_k \|\lambda^n . x_k^n - \lambda . x_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \\ &\leq |\lambda|^{\frac{H}{M}} \left(\sum_k \|x_k^n - x_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} + \left(\sum_k |\lambda^n - \lambda|.\|x_k, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte, $g(x^n - x) \to 0 \ (n \to \infty)$ olduğundan, sağ tarafın ilk terimi 0'a gider. Diğer taraftan, $\lambda^n \to \lambda \ (n \to \infty)$ olduğu için ikinci terim de Lemma 4.2.2' den dolayı sıfıra gider.

Teorem 4.2.9 Eğer $(X, \|.,.\|)$ sonlu boyutlu bir 2-Banach uzayı ise o zaman, $(l(2-p), g)$ uzayı tamdır.

İspat 4.2.10 (x^n), $(l(2-p), g)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n > N_0$ için

$$g(x^n - x^m) = \left(\sum_k \|x_k^n - x_k^m, z\|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} < \varepsilon$$

olur ki bu da

$$\left(\|x_k^n - x_k^m, z\|^{p_n}\right)^{\frac{1}{M}} < \varepsilon$$

olmasını sağlar. Böylece, (x^n) dizisi $(X, \|.,.\|)$ uzayında bir Cauchy dizisi ve $(X, \|.,.\|)$ bir 2-Banach uzayı olduğundan, her $z \in X$ için

$$\|x_k^n - x_k, z\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

4.3 2-Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsaklığın Bazı Sonuçları

Bu kısımda, Gürdal ve Açık (2008) tarafından yazılan makaledeki 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklığın bazı sonuçlarını ve $\mathcal{I}$-Cauchy diziler ile ilgili tanım, teorem ve özellikleri inceleyeceğiz.

Lemma 4.3.1 Eğer X'e ait elemanların bir $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\xi \in X$ 'e $\mathcal{I}$-yakınsaksa, $P = \{p_1 < p_2 < ... < p_k < ...\}$ olacak şekilde bir $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır öyle ki sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x_{p_k} - \xi, z\| = 0$$

dır.

İspat 4.3.2 Sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - \xi, z\| = 0$$

olsun. O zaman tanımdan, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

dır. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$P_i = \{n : \|x_n - \xi, z\| < \frac{1}{i}\}$$

kümesini tanımlayalım. Her bir $i \in \mathbb{N}$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$H_i = \mathbb{N}\backslash P_i = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| \geq \frac{1}{i}\} \in \mathcal{I}$$

olduğundan, $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I}), i \in \mathbb{N}$ olur. Lemma 4.3.1 den $P = \{p_1 < p_2 < ... < p_k < ...\}$ olacak şekilde $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ elde ederiz. Her bir $n \in P$ için $y_n = x_n$ ve $n \notin P$ için $y_n = \xi$ olacak şekilde $y \in X$ dizisini tanımlayalım. O zaman, sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|y_n - \xi, z\| = 0$$

olması

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x_{p_k} - \xi, z\| = 0$$

olmasını sağlar.

Şimdi $2-$ normlu uzaylarda $\mathcal{I}^*-$ yakınsaklığın tanımını vereceğiz:

Tanım 4.3.3 X'in elemanlarının bir $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\xi \in X$' ye $\mathcal{I}^*-$*yakınsaktır* ancak ve ancak $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$ olmak üzere $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır öyle ki sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x_{m_k} - \xi, z\| = 0$$

dır.

Lemma 4.3.1 gösteriyor ki, eğer $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal ise o zaman sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - \xi, z\| = 0$$

olması

$$\mathcal{I}^* - \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - \xi, z\| = 0$$

olmasını gerektirir.

Lemma 4.3.4 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}, (AP)$ özelliğine sahip bir uygun ideal ve (X, ρ) keyfi bir $2-$normlu uzay olsun. O zaman sıfırdan farklı her $z \in X$ için,

$$\mathcal{I} - \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - \xi, z\| = 0$$

olur ancak ve ancak $P = \{p_1 < p_2 < ... < p_k < ...\}$ olacak şekilde bir $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır öyle ki her $z \in X$ için

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x_{p_k} - \xi, z\| = 0$$

dır.

Uyarı 4.3.5 $\{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ ve $d(A)$, $A \subset \mathbb{N}$ dizisinin doğal yoğunluğu olmak üzere, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ ve X bir 2-normlu uzay olsun. O zaman, Lemma 4.3.1, $2-$normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklığı verir.

4.4 2-Normlu Uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy Dizileri

Şimdi 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}-$Cauchy ve $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizilerini ele alacağız. Aynı zamanda ikisi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 4.4.1 $(X, \|.,.\|)$ bir 2-normlu lineer uzay ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \subset \mathbb{N}$ olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi var öyle ki $x_M = (x_{m_k})$ X' de bir Cauchy dizisi, yani, sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{k,p\to\infty} \|x_{m_k} - x_{m_p}, z\| = 0$$

ise bu durumda $(x_n) \in X$ dizisine $\mathcal{I}^*$-*Cauchy dizisi* denir.

Aşağıdaki teorem $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisinin $\mathcal{I}-$Cauchy dizisini gerektirdiğini göstermektedir.

Teorem 4.4.2 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $2-$normlu uzaylarda $x = (x_n)$ $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisi ise o zaman $x = (x_n)$ $\mathcal{I}-$Cauchy dizisidir.

İspat 4.4.3 $x = (x_n)$ dizisi $2-$normlu uzaylarda $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisi olsun. O zaman tanımdan; $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \subset \mathbb{N}$ olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır öyle ki her $\varepsilon > 0$, sıfırdan farklı her $z \in X$ ve $k, p > k_0(\varepsilon)$ için

$$\|x_{m_k} - x_{m_p}, z\| < \varepsilon$$

dur.

$N = N(\varepsilon, z) = m_{k_0+1}$ olsun. O zaman, her $\varepsilon > 0$, sıfırdan farklı her $z \in X$ ve $k > k_0$ için

$$\|x_{m_k} - x_N, z\| < \varepsilon$$

elde ederiz.

Şimdi $H = \mathbb{N} \setminus M$ alalım. Açık olarak, $H \in \mathcal{I}$ ve

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_N, z\| \geq \varepsilon\} \subset H \cup \{m_1 < m_2 < ... < m_{k_0}\} \quad (3.1)$$

dır. (3.1)' in sağ kısmı $\mathcal{I}$' ya aittir. Bundan dolayı, her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon, z)$ bulabiliriz yani, (x_n) dizisi 2-normlu uzayda $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Şimdi 2− normlu uzaylarda $\mathcal{I}^*-$yakınsaklığın $\mathcal{I}-$Cauchy koşulunu gerektirdiğini ispatlayacağız.

Teorem 4.4.4 $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ve $x = (x_n) \in X$ ve $\xi \in X$ olmak üzere,

$$\mathcal{I}^* - \lim_{n\to\infty} \|x_n - \xi, z\| = 0$$

olsun. O zaman, (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu uzayında $\mathcal{I}-$Cauchy dizisidir.

İspat 4.4.5 Kabulden $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$ olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır öyle ki sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - \xi, z\| = 0$$

dır. Bu gösterir ki, her $\varepsilon > 0$, sıfırdan farklı her $z \in X$ ve $k > k_0$ için $k = k_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\|x_{m_k} - \xi, z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Her $\varepsilon > 0$, sıfırdan farklı $z \in X$ ve $k > k_0, p > k_0$ için

$$\begin{aligned}
\|x_{m_k} - x_{m_p}, z\| &< \|x_{m_k} - \xi, z\| + \|x_{m_p} - \xi, z\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{k,p\to\infty} \|x_{m_k} - x_{m_p}, z\| = 0$$

elde ederiz. Böylece (x_n) X' de bir $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir. O zaman, Teorem 4.4.2 ten (x_n) X' de bir $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Teorem 4.4.4 ve Lemma 4.3.4 ten aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.4.6 $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal olsun. O zaman sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \xi, z\| = 0$$

olması, (x_n)' in bir $\mathcal{I}-$Cauchy dizisi olmasını gerektirir.

Teorem 4.4.7 $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal ve $(X, \|.,.\|)$, 2-normlu lineer bir uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{I}-$Cauchy dizisi ile $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisi çakışır.

İspat 4.4.8 $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisi Teorem 4.4.2 den (Bu durumda $\mathcal{I}$' nın (AP) özelliğine sahip olması gerekmez) $\mathcal{I}-$Cauchy dizisini sağlar. Bu durumda, $x = (x_n) \in X$ dizisini bir $\mathcal{I}-$Cauchy dizisi kabul edip $\mathcal{I}^*-$Cauchy dizisi olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$x = (x_n) \in X$ bir $\mathcal{I}-$Cauchy dizisi olsun. O zaman tanımdan her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $N = N(\varepsilon, z)$ vardır öyle ki

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_N, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

dır. $m_i = N(\frac{1}{i})$ olmak üzere,

$$P_i = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_{m_i}, z\| < \frac{1}{i}\}, \quad i = 1, 2, ...,$$

alalım. $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$, $i = 1, 2, ...,$ olduğu açıktır. Madem ki $\mathcal{I}$ (AP) özelliğine sahip, o zaman Lemma 4.3.1 den bir $P \subset \mathbb{N}$ vardır öyle ki $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve tüm i ler için $P \setminus P_i$ sonludur. Şimdi sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{\substack{n,m\to\infty \\ m,n\in P}} \|x_n - x_m, z\| = 0$$

olduğunu gösterelim. Bunun için, $\varepsilon > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ olsun öyle ki $j > \frac{2}{\varepsilon}$. Eğer $m, n \in P$ ise o zaman $P \setminus P_j$ sonlu bir kümedir, böylece $k = k(j)$ vardır öyle ki tüm $m, n > k_j$ için $m \in P_j$ ve $n \in P_j$ dir. Bundan dolayı tüm $m, n > k_j$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için,

$$\|x_n - x_{m_j}, z\| < \frac{1}{j} \quad ve \quad \|x_m - x_{m_j}, z\| < \frac{1}{j}$$

dır. Buradan, $m, n > k(j)$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m, z\| &< \|x_n - x_{m_j}, z\| + \|x_m - x_{m_j}, z\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için $k = k(\varepsilon)$ vardır öyle ki $n, m > k(\varepsilon)$ ve $n, m \in P \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ için, sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\|x_n - x_m, z\| < \varepsilon$$

dur. Bu da $(x_n) \in X$ dizisinin X'de bir $\mathcal{I}^*-$ Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

4.5 2-Normlu Uzaylarda İdeal Yakınsak Diziler

Bu kısımda, Gürdal (2006) tarafından yapılan çalışmada verilen tanım, teorem ve özellikleri inceleyeceğiz.

Verilen bir dizinin istatistiksel yığılma noktaları ve alışılmış adi limit noktaları arasında güçlü bir bağıntı olduğu bilinmektedir. 2-normlu uzaylarda verilen bir dizinin $\mathcal{I}$-yığılma ve $\mathcal{I}$-limit noktalarının kümeleri için bu gerçekleri inceleyeceğiz.

Uyarı 4.5.1 Eğer $\{x_n\}$, X' de herhangi bir dizi ve ξ, X' in herhangi bir elemanı ise, o zaman eğer $z = \overrightarrow{0}$ (0 vektörü) ise

$$\|x_n - \xi, z\| = 0 \ngeq \varepsilon$$

olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| \geq \varepsilon, \text{ her } z \in X \text{ için } \} = \emptyset$$

olur.

Tanım 4.5.2 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu lineer uzayında bir dizi olsun.

(i) Eğer $M \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi var ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - \xi, z\| = 0$$

oluyorsa, ξ sayısına x dizisinin bir $\mathcal{I}$-*limit noktası* denir. Tüm $\mathcal{I}$-limit noktalarının kümesi $\mathcal{I}(\Lambda_x^2)$ ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

ise, ξ sayısı x dizisinin bir $\mathcal{I}$-*yığılma noktası* olarak adlandırılır. Tüm $\mathcal{I}$-yığılma noktalarının kümesi $\mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ ile gösterilir.

Önerme 4.5.3 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. O zaman X'e ait her $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\mathcal{I}(\Lambda_x^2) \subset \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$$

elde ederiz ve $\mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ kümesi kapalı bir kümedir.

İspat 4.5.4 $\xi \in \mathcal{I}(\Lambda_x^2)$ olsun. O zaman, bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \notin \mathcal{I}$ kümesi vardır öyle ki sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - \xi, z\| = 0 \tag{4.1}$$

olur.

$\delta > 0$ alalım. (4.1)' e göre, $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $k > k_0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\|x_{m_k} - \xi, z\| < \delta$$

elde ederiz. Buradan,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < \delta\} \supset M \backslash \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$$

ve böylece

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < \delta\} \notin \mathcal{I}$$

elde edilir ki bu da $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ anlamına gelir.

$y \in \overline{\mathcal{I}(\Gamma_x^2)}$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım.

$$\xi_0 \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2) \cap B_u(y, \varepsilon)$$

vardır.

$$B_u(\xi_0, \delta) \subset B_u(y, \varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim. Açık olarak

$$\{n \in \mathbb{N} : \|y - x_n, z\| < \varepsilon\} \supset \{n \in \mathbb{N} : \|\xi_0 - x_n, z\| < \delta\}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|y - x_n, z\| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \text{ ve } y \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$$

olur.

Tanım 4.5.5 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu lineer uzayında bir dizi olsun.

Eğer $K = \{k_1 < k_2 < ...\} \in \mathcal{I}$ ise, o zaman $x_k = (x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi x dizisinin *$\mathcal{I}$-ince alt dizisi* olarak adlandırılır.

Eğer $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \notin \mathcal{I}$ ise, o zaman $x_M = (x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi x' in *$\mathcal{I}$-ince olmayan alt dizisi* olarak adlandırılır.

Açıktır ki, eğer ξ x için bir $\mathcal{I}$-limit noktası ise, o zaman ξ' ye yakınsak bir $\mathcal{I}$-ince olmayan x_M alt dizisi vardır.

L_x^2, x dizisinin tüm adi limit noktalarının bir kümesi olsun. Açıktır ki

$$\mathcal{I}(\Lambda_x^2) \subseteq L_x^2$$

dır. $\xi \notin L_x^2$ alalım, o zaman bir $\varepsilon^{'} > 0$ vardır öyle ki $(\xi - \varepsilon^{'}, \xi + \varepsilon^{'})$ aralığı x'in sadece sonlu sayıda elemanını içerir. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < \varepsilon^{'}\} \in \mathcal{I}$$

olur fakat bu $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olması ile çelişir. Buradan,

$$x \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$$

dir. Bu durumda, $x \in L_x^2$ ve böylece

$$\mathcal{I}(\Gamma_x^2) \subseteq L_x^2$$

elde edilir.

Lemma 4.5.6 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu lineer uzayında bir dizi olsun. Eğer x, 2-normlu uzayda $\mathcal{I}$-yakınsaksa, o zaman $\mathcal{I}(\Lambda_x^2)$ ve $\mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ ikisi de sıfırdan farklı her $z \in X$ için $\{\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\|\}$ tek nokta kümesine eşittir.

İspat 4.5.7

Sıfırdan farklı her $z \in X$ için $\{\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\|\}$ olsun. $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{I}$-yakınsaklık tanımından, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olur. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan, $M = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesini seçebiliriz öyle ki $n_k \notin A(\frac{1}{k})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\|x_{n_k} - \xi, z\| < \frac{1}{k}.$$

Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n_k} - \xi, z\| = 0$$

olur. $M \in \mathcal{I}$ olduğunu kabul edelim. Sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$M \subset \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < 1\}$$

olduğundan, bu durumda

$$(\mathbb{N} \backslash M) \cap \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < 1\} = \emptyset$$

olur fakat $\mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < 1\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olur. Bu çelişki $M \notin \mathcal{I}$ 'yı verir. Buradan $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ ve $M \notin \mathcal{I}$ öyle ki

$$\lim_{n \to \infty} \|x_{n_k} - \xi, z\| = 0$$

elde ederiz. Yani, $\xi \in \mathcal{I}(\Lambda_x^2)$ dır. $\mathcal{I}(\Lambda_x^2) \subset \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olduğundan, $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ dir.

Şimdi $\eta \neq \xi$ olacak şekilde $\eta \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olduğunu varsayalım. Açıktır ki, sıfırdan farklı her $z \in X$ için,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| \geq \frac{|\eta - \xi|}{2}\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi\| < \frac{|\eta - \xi|}{2}\} \notin \mathcal{I}$$

dır. Diğer taraftan her $n \in B$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\|x_n - \xi, z\| \geq \||x_n - \eta| - |\eta - \xi|, z\| > \frac{|\eta - \xi|}{2}$$

olduğundan, $B \subset A \in \mathcal{I}$ elde ederiz. Bu çelişki gösterir ki,

$$\mathcal{I}(\Gamma_x^2) = \{\xi\} \text{ ve } \mathcal{I}(\Lambda_x^2) = \mathcal{I}(\Gamma_x^2) = \{\xi\}$$

dir.

Teorem 4.5.8 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu lineer uzayında diziler olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{I}(\Lambda_x^2) = \mathcal{I}(\Lambda_y^2) \text{ ve } \mathcal{I}(\Gamma_x^2) = \mathcal{I}(\Gamma_y^2)$$

olur.

İspat 4.5.9 $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$ olsun. Eğer $\xi \in \mathcal{I}(\Lambda_x^2)$ ise, o zaman

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|x_{k_n} - \xi, z\| = 0$$

olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < ...\} \notin \mathcal{I}$ kümesi vardır.

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \in K \wedge x_n \neq y_n\} \subset M \in \mathcal{I}$$

olduğundan, bu durumda

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \in K \wedge x_n = y_n\} \notin \mathcal{I}$$

(gerçekten, eğer $K_2 \in \mathcal{I}$ ise o zaman $K = K_1 \cup K_2 \in \mathcal{I}$ ama $K \notin \mathcal{I}$'dır) olur. Buradan, $y_{K_2} = (y_n)_{n\in K_2}$ dizisi $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{I}$-ince olmayan alt dizisidir ve y_{K_2}, 2-normlu uzayda ξ'ye yakınsaktır. Yani, $\xi \in \mathcal{I}(\Lambda_y^2)$.

Şimdi $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olsun. O zaman, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için

$$K_3 = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - \xi, z\| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

ve

$$K_4 = \{n \in \mathbb{N} : n \in K_3 \wedge x_n = y_n\} \notin \mathcal{I}$$

olur. Böylece sıfırdan farklı her $z \in X$ için,

$$K_4 \subset \{n \in \mathbb{N} : \|y_n - \xi, z\| < \varepsilon\}$$

olur. Bu gösterir ki, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - \xi, z\| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$$

yani $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma_y^2)$ dır.

Sıradaki teorem verilen bir dizinin $\mathcal{I}$-yakınsak olduğu noktalar ile sıradan limit noktaları arasında güçlü bir bağıntı olduğunu ispatlamaktadır.

Teorem 4.5.10 $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$, (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu lineer uzayında bir dizi olsun. O zaman L_y^2, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sıradan limit noktaları olmak üzere, $L_y^2 = \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olacak şekilde bir $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ve

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$$

dır. Dahası

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olur.

İspat 4.5.11 Eğer $\mathcal{I}(\Gamma_x^2) = L_x^2$ ise o zaman, $y = x$ ve bu durum aşikardır. $\mathcal{I}(\Gamma_x^2)$, L_x^2 nin bir tam alt dizisi olsun ($\mathcal{I}(\Gamma_x^2) \subset L_x^2$). O zaman,

$$L_x^2 \backslash \mathcal{I}(\Gamma_x^2) \neq \emptyset$$

dir ve her bir $\xi \in L_x^2 \backslash \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{n \to \infty} \|x_{j_k} - \xi, z\| = 0$$

olacak şekilde bir $E_\xi = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ açık aralığı vardır. Böylece, $E_\xi = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ açık aralığı vardır öyle ki

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k \in E_\xi\} \in \mathcal{I}.$$

Açıktır ki, tüm E_ξ aralıklarının kolleksiyonu $L_x^2 \backslash \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ in bir açık kapsamıdır. Böylece Kapsama Teoreminden sayılabilir ve karşılıklı olarak ayrık bir alt kapsam $\{E_\xi\}_{j=1}^{\infty}$ vardır öyle ki her bir E_j, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$'in bir $\mathcal{I}$-ince alt dizisini içerir.

Şimdi,

$$A_j = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in E_j, j \in \mathbb{N}\}$$

kümesini alalım. $A_j \in \mathcal{I}$ $(j = 1, 2, ...)$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$ olduğu açıktır. O halde $\mathcal{I}$, (AP) özelliğine sahip olduğundan, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin sayılabilir $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ kolleksiyonu vardır öyle ki $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \backslash B$ sonlu kümedir.

$M = \mathbb{N} \backslash B = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ olsun. Şimdi, $y = (y_k)$ dizisi, $k \in B$ iken $y = y_k$ ve $k \in M$ iken $y_k = x_k$ şeklinde tanımlansın. Açık olarak

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\} \subset B \in \mathcal{I}$$

elde edilir, böylece Teorem 4.5.8 den

$$\mathcal{I}(\Gamma_y) = \mathcal{I}(\Gamma_x)$$

olur. $A_j \backslash B$ bir sonlu küme olduğundan, $y_B = (y_k)_{k\in B}$ alt dizisi bir limit noktasına sahip değildir yani aynı zamanda y nin $\mathcal{I}$-limit noktası yoktur, yani,

$$L_y^2 = \mathcal{I}(\Gamma_y^2).$$

Böylece, $L_y^2 = \mathcal{I}(\Gamma_x^2)$ olduğu ispatlandı. Dahası, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yapısı

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlandı.

5 KAYNAKLAR

Açıkgöz, M. (2007). A Review on 2-Normed Structures, *International Journal of Mathematics Analysis*, **1(4):** 187–191.

Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Choudhary, B. and Nanda, S. (1989). Functional Analysis with Applications, John wiley-Sons, NewYork.

Connor, J. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canadian Mathematical Bulletin*, **32:** 194–198.

Demirci, K. (2001). I-limit superior and limit inferior, *Mathematical Communications*, **6:** 165–172.

Fast, H. (1951). Sur la convergenc statistique, *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis*, **5:** 301–313.

Fridy, J. A. (1993). Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118:** 1187–1192.

Fridy, J. A. and Orhan C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American Mathema tical Society* **125:** 3625–3631.

Gähler, S. (1963). 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur, *Mathematische Nachrichten* **26:** 115–148.

Gähler,S. (1965). Lineare 2-normietre Räume, *Mathematische Nachrichten*, **28:**

1–43.

Gähler,S. (1965). Uber der Uniformisierbarkeit 2-metrische Räume, *Mathematische Nachrichten*, **28:** 235–244.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On n-normed spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **27(10):** 631–639.

Gunawan, H. and Mashadi, M. (2001). On Finite Dimensional 2 -normed spaces, *Soochow Journal of Mathematics*, **27(3):** 321–329.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2009). The Statistical Convergence in 2-Normed Spaces, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **33:** 257–264.

Gürdal, M. and Pehlivan, S. (2004). The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces, *Thai Journal of Mathematics*, **2(1):** 107–113.

Gürdal, M. and Açık, I. (2008). On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences in 2-normed spaces, *Mathematical Inequalities and Applications,* **11(2):** 349–354.

Gürdal, M. (2006). On ideal convergent sequences in 2-normed spaces, *Thai Journal of Mathematics* **4(1):** 85–91.

Kostyrko, P., Šalát, T., and Wilczyński, W. (2000). I-convergence, *Real Analysis Exchange*, **26(2):** 669-686.

Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T. and Sleziak, M. (2005). I-convergence and extremal I-limit points, *Mathematica Slovaca*, **55:** 443–464.

Lewandowska, Z. (2001). Generalized 2-normed spaces, *Stuspskie Prace Matematyyczno Fizyczne*, **1:**, 33–40.

Lewandowska, Z. (2003). On 2-normed sets, *Glasnik Matematicki Series III*, **38(1):** 99–110.

Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). On $\mathcal{I}$-convergence in random 2-normed spaces, *Mathematica Slovaca,* **61(6):** 933–940.

Musayev, B. ve Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

Nabiev, A., Pehlivan, S. and Gürdal, M. (2007). On I-Cauchy sequence, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11(2):** 569–576.

Niven, I., Zuckermann, H.S. and Montgomery, H.L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley and Sons Incorporated Company, New York.

Nuray, F. and Ruckle, W.H. (2000). Generalized statistical convergence and con vergence free spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 245(2), 513-527:.

Rath, D. and Tripaty, B. C. (1994). On statistically convergence and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25(4):** 381–386.

Rezapour, Sh. (2005). Quasi-Chebyshew Subspaces in generalized 2-normud spaces, *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences*, **2(1):** 53–61.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca* **30:** 139–150.

Sarabadan, S. and Talebi, S. (2011). Statistical convergence and ideal convergence of sequences of functions in 2-normed spaces, *International Journal of Mathematics and indent Mathematical Sciences*, **vol(2011):** 10 pages.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly,* **66:** 361–375.

Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S. and Gunawan, H. (2007). Ideal convergence in 2-normed spaces, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11:** 1477–1484.

Tripathy, B. C., Sen, M. and Nath, S. (2012). $\mathcal{I}$-convergence in probabilistic n-normed space, *Soft Computing*, **16:** 1021–1027.

White, A. (1969). 2-Banach spaces, *Mathematische Nachrichten* **42:** 43–60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Mukaddes ARSLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Bolvadin, 25/04/1989
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	:	mukaddes-arslan@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Afyon Anadolu Öğretmen Lisesi, 2007
Lisans	:	Dokuz Eylül Üniversitesi, 2012

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Konya Doğanhisar Anadolu Lisesi, 2013-2014

İhsaniye Anadolu İmam Hatip Lisesi,2014-...