KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN
SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Senem KISALAR
DANIŞMAN
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Haziran, 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Senem KISALAR

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Senem KISALAR tarafından hazırlanan "Kesirli Fark Denklemlerin Salınımlılığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Başkan : Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......../......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15/06/2015

Senem Kısalar

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Senem KISALAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Bu tez çalışmasında, kesirli toplam operatörü olarak tanımlanan

$$\Delta_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s)$$

ve kesirli fark operatörü olarak tanımlanan

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta^m \Delta^{-(m-\alpha)} f(t) = \Delta^m \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-m+\alpha} (t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s)$$

operatörleri göz önüne alınmıştır. Ayrık kesirli hesap ile ilgili temel tanım ve teoremlere değinilmiştir. Üçüncü bölümde kesirli lineer olmayan fark denklemlerinin salınınmlılığı incelenmiştir. Bu tezde kesirli fark denklemleri için elde edilmiş olan salınımlılık şartları incelenerek, kesirli fark denklemleri için yeni salınımlılık şartları elde edilmiştir.

2015, v + 32 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli Toplamlar, Kesirli Farklar, Kesirli Fark Denklemleri, Kesirli Fark Denklemlerin Salınımlılığı

ABSTRACT

M.Sc Thesis

ON THE OSCILLATION OF FRACTIONAL DIFFERENCE EQUATIONS

Senem Kısalar

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

In this thesis, the operators considered which were defined fractional sum operator

$$\Delta_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s)$$

and fractional difference operator

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta^m \Delta^{-(m-\alpha)} f(t) = \Delta^m \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-m+\alpha} (t - \sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s)$$

The basic definitions and theorems related to the discrete fractional calculus have been mentioned. In the third chapter, the oscillation of the fractional nonlinear difference equations are studied. In this thesis, the oscillation criteria obtained for fractional difference equations have been examined and new oscillation conditions for fractional difference equations have been obtained.

2015, v + 32 pages

Key Words: Fractional Sums, Fractional Differences, Fractional Difference Equations, On the Oscillation of Fractional Difference Equations

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman, her konuda bana destek veren, bugünlere ulaşmama vesile olan aileme teşekkür ederim.

Senem KISALAR

AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
Δ	Fark Operatörü
$\int$	İntegral Operatörü
$\sum$	Toplam Operatörü
Δ^{α}	Riemann- Liouville Ayrık Kesirli Farkı
$\int_a^b$	Belirli İntegral
Γ	Gamma Fonksiyonu
$t^{(n)}$	Faktöriyel Fonksiyonu
$\prod$	Çarpım Operatörü
$\frac{d}{dt}$	Türev
$\in$	Elemanıdır
N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
$\lim$	Limit
$\limsup$	Limit Supremum
$\liminf$	Limit İnfimum

1. GİRİŞ

Türev ve integral operatörleri adi hesabın iki temel kavramıdır. Benzer olarak, fark ve toplam operatörleri de ayrık hesabın iki temel kavramıdır. Genellikle n bir tamsayı olmak üzere türev ve fark operatörleri n kez uygun bir fonksiyona uygulanabilir. Bunlar da türev $d^n f(x)/dx^n$, fark $\Delta^n f(x)$ şeklinde tanımlanmıştır. Aslında kesirli hesap, integral ya da türev operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabileceğini belirtir. Örneğin; bir fonksiyonun $1/2$-nci mertebeden türevi ya da $\sqrt{3}$. mertebeden integrali hesaplanabilir.

Keyfi mertebeden türevler ve integraller ile ilgilenen fractional hesap uygulamalı matematiğin bir alanıdır ve bunun uygulamaları, mühendislik, uygulamalı matematik, ekonomi ve birçok alanda görülür. Bilindiği gibi, $D = \dfrac{d}{dx}$ operatörü içeren diferansiyel hesabın özellikleri ve ileri fark operatörü olarak bilinen $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ operatörü içeren ayrık hesabın özellikleri arasında bir benzerlik vardır. Kesirli hesabın özellikleri ve ayrık kesirli hesabın özellikleri arasında da benzerlikler vardır.

İlk olarak 300 yıl önce, kesirli hesap, L'Hospital tarafından Leibnez'e gönderilen bir mektupta, L'Hospital'in "$n = 1/2$ olduğunda $d^n y / d^n x$ notasyonu ne anlama gelir? " sorusuyla gündeme gelmiştir. 30 Eylül 1695 tarihli cevapta, Leibniz "Bu paradoksun bir gün yararlı sonuçları olacaktır. " diye yazmıştır.

Sonra, Leibniz, Johann Bernoulli ile yazışarak, genel mertebenin türevlerinden bahsetti. $1/2$-nci mertebeden türevi $d^{1/2}y$ notasyonunu kullanarak gösterdi.

Kesirli mertebeden farka ilk kez Kuttner (1956) tarafından değinildi.

a_n kompleks sayıların herhangi bir dizisi ve s herhangi bir reel sabit olmak üzere, Kuttner, s-mertebeden farkı,

$$\Delta_{a_n}^{\ s} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s-1+m}{m} a_{n+m} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımladı. Diaz ve Osler (1974) kesirli farkı,

$$\Delta^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + \alpha - k) \tag{1.2}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1).k!}$$

şeklinde tanımlamışlardır, burada α herhangi bir reel ya da kompleks sayıdır.

Miller ve Ross (1989) kesirli mertebeden toplam ve fark operatörlerini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımladı.

$$\Delta^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s) \tag{1.3}$$

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta\Delta^{-(1-\alpha)} f(t) = \Delta \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-1+\alpha} (t-\sigma(s))^{(-\alpha)} f(s) \tag{1.4}$$

Burada $t \equiv \alpha \ (\mathrm{mod} 1)$ ve $0 < \alpha < 1$ dir.

Anastassiou (2009) Caputo ayrık kesirli farkını,

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta^{-(m-\alpha)} \Delta^{m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-m+a} (t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} \Delta^{m} f(s) \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Fark Operatörü

Tanım 2.1.1: $\mathrm{N}_a = \{a, a+1, a+2, ...\}$ ve $y : \mathrm{N}_a \to R$ olsun. Fark operatörü "Δ",

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yüksek mertebeden farklar, fark operatörünün kendisine tekrarlı olarak uygulanması ile elde edilir (Kelley and Peterson 2004). İkinci mertebeden fark,

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y(t) &= \Delta(\Delta y(t)) \\
&= \Delta(y(t+1) - y(t)) \\
&= \Delta y(t+1) - \Delta y(t) \\
&= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) \\
&= y(t+2) - 2y(t+1) - y(t)
\end{aligned}$$

dir. Tümevarım kullanılarak n-inci mertebeden fark,

$$\begin{aligned}
\Delta^n y(t) &= y(t+n) - ny(t+n-1) + \frac{n(n-1)}{2!} y(t+n-2) \\
&\quad + ... + (-1)^n y(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir (Charoenphon 2014).

2.2 Ayrık Hesap ve Adi Hesap Arasında Bir Benzerlik

Ayrık hesabın teorisi, adi hesabın teorisine paraleldir. Örneğin, diferansiyel operatörü "D", fark operatörü "Δ" ile, integral operatörü "$\int$ ", toplam operatörü "$\sum$ " ile benzerdir (Charoenphon 2014). Aşağıda bu kavramlar arasındaki benzerliği göstermek amacıyla Teorem 2.2.1 ve Lemma 2.2.1 verilmiştir.

Teorem 2.2.1 (Analizin Temel Teoremi) :

(i) $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$

(ii) $d\left(\int_a^b f(t)dt\right) = f(x)$

(Elaydi 2004).

Lemma 2.2.1: Aşağıdaki durumlar sağlanır;

(i) $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0)$

(ii) $\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n)$

(Elaydi 2004).

Ayrık hesap ve adi hesap arasındaki benzerlik açıkça görülmektedir.

2.3 Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ ile gösterilen özel bir transandantal fonksiyondur, ve tamsayı olmayan değerler için faktöriyel genelleştirmesi ilk kez Euler tarafından yapılmıştır (Sengul 2010).

Tanım 2.3.1: $\Gamma:(0,\infty)\to R$ fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

şeklinde tanımlanmıştır (Diethelm 2004).

$x=1$ için,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-t}dt = \lim_{z\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^z = \lim_{z\to\infty}\left(1-e^{-z}\right) = 1$$

olduğu görülür (Diethelm 2004).

Teorem 2.3.1 (Γ **için Fonksiyonel Denklem) :** Eğer $x>0$ ise,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

dir (Diethelm 2004).

İspat:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt=\lim_{z\to\infty,y\to 0+}\int_y^z t^x e^{-t}dt=\lim_{z\to\infty,y\to 0+}\left(\left[-e^{-t}t^x\right]_{t=y}^{t=z}+\int_y^z t^{x-1}e^{-t}dt\right)$$

$$=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x).$$

Teorem 2.3.2: $n\in N$ için, $\Gamma(n+1)=n!$ dir (Diethelm 2004).

İspat: Matematiksel tümvarım kullanılır. Sırasıyla, $\Gamma(1)=1$ ve Teorem 2.3.1 kullanılarak $x=1,2,3,...$ için,

$$\begin{aligned}
&\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1=1!\\
&\Gamma(3)=2.\Gamma(2)=2.1!=2!\\
&\Gamma(4)=3.\Gamma(3)=3.2!=3!\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots\\
&\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!
\end{aligned}$$

$\Gamma(n+1)=n!$ elde edilir (Podlubny 1999).

Teorem 2.3.3: $n\notin Z$ ve $k\in N_0$ olsun. O halde,

$$(-1)^k\Gamma(n-k)\Gamma(k+1-n)=\Gamma(-n)(n+1)$$

dir (Diethelm 2004).

Teorem 2.3.4 (Γ için Yansıma Formülü) : $0<x<1$ olsun.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$$

dir (Diethelm 2004).

Teorem 2.3.5 (Γ için Gauss Çarpım Formülü) : $x\in R,-x\notin N_0$ olsun. O halde,

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)....(x+n)}$$

dir (Diethelm 2004).

2.4 Faktöriyel Fonksiyonu

Faktöriyel fonksiyonu $t^{(n)}$, her $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$t^{(n)} = t(t-1)(t-2)...(t-(n-1)) = \prod_{k=0}^{n-1}(t-k) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$$

ile tanımlanır ve Γ, Gamma fonksiyonunu belirtir (Sengul 2010).

Teorem 2.4.1:
(i) $\Delta t^{(\alpha)} = \alpha . t^{(\alpha-1)}$**,** burada Δ fark operatörüdür.

(ii) $(t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$**,** burada $\mu \in \mathrm{R}$ dir.

(iii) $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$, burada $\mu \in R$ dir.

(iv) Eğer $t \leq r$ ise, her $v > r$ için $t^{(v)} \leq r^{(v)}$ dir.

(v) $t^{(\alpha+\beta)} = (t-\beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}$ dir.

(Sengul 2010).

İspat: Faktöriyel fonksiyonunun tanımına göre ispat aşağıdaki gibidir.

(i)

$$\begin{aligned}
\Delta t^{(\alpha)} &= \Delta \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma((t+1)+1)}{\Gamma((t+1)-\alpha+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-\alpha+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} = \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{(t-\alpha+1)\Gamma(t-\alpha+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)}\left(\frac{t+1}{t+1-\alpha} - 1\right) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+1)} . \frac{\alpha}{(t-\alpha+1)} = \alpha \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\alpha+2)} = \alpha . t^{(\alpha-1)}
\end{aligned}$$

(ii) $(t-\mu).t^{(\mu)} = (t-\mu)\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\mu)} = (t-\mu)\dfrac{\Gamma(t+1)}{(t-\mu)\Gamma(t-\mu)} = t^{(\mu+1)}$

(iii) $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$ tanımdan açıktır.

(iv) Herhangi bir $v > r$ için $t \leq r$ olsun.

Euler'in sonsuz çarpımı,

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{u}}{1+\left(\frac{u}{n}\right)}$$

şeklindedir. $t \leq r$ olduğundan, $\frac{-v}{t+1} \leq \frac{v}{r+1}$ yazılabilir. O halde, Euler'in sonsuz çarpımı da kullanılarak,

$$t^{(v)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)} = \frac{\dfrac{1}{t+1}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{t+1}}{1+\left(\frac{t+1}{n}\right)}}{\dfrac{1}{t+1-v}\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{t+1-v}}{1+\left(\frac{t+1-v}{n}\right)}} = \frac{t+1-v}{t+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\frac{\left(1+\frac{t+1-v}{n}\right)}{\left(1+\frac{t+1}{n}\right)}$$

$$= \left(1-\frac{v}{t+1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{v}{n+t+1}\right) \leq \left(1-\frac{v}{r+1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{v}{n+t+1}\right) \leq r^{(v)}$$

elde edilir.

(v) $t^{(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha-\beta)}$, $\Gamma(t-\beta+1)$ ile çarpılıp bölünerek,

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha-\beta)}\,\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\beta+1)} = (t-\beta)^{(\alpha)}t^{(\beta)}$$

elde edilir.

NOT 2.4.1: Her $\alpha > 0$ reel sayısı için, $\frac{d}{dt}t^{\alpha} = \alpha.t^{\alpha-1}$ ve ayrık hesapta $\Delta t^{(\alpha)} = \alpha.t^{(\alpha-1)}$ dir. Bundan dolayı adi hesaptaki x^n ile ayrık hesaptaki $x^{(n)}$ benzerlik gösterir (Sengul 2010).

2.5 Belirsiz Toplam

Tanım 2.5.1: Reel değerli bir $f(t)$ fonksiyonu için, belirsiz toplam $\sum f(t)$ şeklinde yazılmıştır,

$$\Delta\left(\sum f(t)\right) = f(t)$$

dir (Charoenphon 2014).

Sonuç 2.5.1: $a \in R$, olmak üzere, $F(t)$ fonksiyonu $\{a, a+1, ...\}$ kümesinde tanımlanmış olsun. $f(t)$, $F(t)$'nin belirsiz toplamı ve C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\sum F(t) = f(t) + C\,,\ \ \Delta C = 0$$

dır (Charoenphon 2014).

Teorem 2.5.1: α ve C sabitler olsun.

(i) $\sum \alpha^t = \dfrac{\alpha^t}{\alpha - 1} + C\,,\ \ \alpha \neq 1$

(ii) $\sum t^{(\alpha)} = \dfrac{t^{(\alpha+1)}}{\alpha + 1} + C\,,\ \ \alpha \neq -1$

dir (Charoenphon 2014).

Teorem 2.5.2: $F(t)$, $f(t)$'nin $[a,b]$ aralığı üzerinde belirli toplamı ve C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(t)\Big|_a^{b+1} = F(b+1) - F(a) + C\,,\ \ \Delta C = 0$$

dır (Kelley and Peterson 2004).

İspat: $\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(b+1) - F(a)$ olduğunu göstermeye ihtiyaç vardır. Δ, $\sum_{t=a}^{b} f(t)$ ye uygulanarak,

$$\begin{aligned}\Delta \sum_{t=a}^{b} f(t) &= \sum_{t=a}^{b+1} f(t) - \sum_{t=a}^{b} f(t)\\ &= f(b+1)\end{aligned}$$

elde edilir.

$F(b+1) - F(a)$ ya Δ uygulanarak,

$$\begin{aligned}\Delta\big(F(b+1) - F(a)\big) &= \Delta F(b+1) - \Delta F(a)\\ &= \Delta F(b+1)\\ &= f(b+1)\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde, $\Delta \sum_{t=a}^{b} f(t) = \Delta F(b+1) - F(a)$ dır. Buradan,

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(b+1) - F(a) + C\,, \quad \Delta C = 0$$

elde edilir.

2.6 Fark Operatörü İçin Çarpım ve Bölüm Kuralları

Teorem 2.6.1 (Çarpım Kuralı) :

$$\Delta(f(t)g(t)) = g(t)\Delta f(t) + f(\sigma(t))\Delta g(t) = g(\sigma(t))\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)$$

dir. Burada $\sigma(t) = t+1$ dir (Kelley and Peterson 2004).

İspat: Tanım 2.1.1 kullanılarak, ilk eşitlik için,

$$\begin{aligned}\Delta(f(t)g(t)) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)(g(t+1) - g(t)) + g(t)(f(t+1) - f(t))\\ &= f(\sigma(t))\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t)\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci eşitlik için,

$$\begin{aligned}\Delta(f(t)g(t)) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - g(t+1)f(t) + g(t+1)f(t) - f(t)g(t)\\ &= g(t+1)(f(t+1) - f(t)) + f(t)(g(t+1) - g(t))\\ &= g(\sigma(t))\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.6.2 (Bölüm Kuralı) :

$$\Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir. Burada $\sigma(t) = t+1$ dir (Kelley and Peterson 2004).

İspat: Tanım 2.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\Delta\frac{f(t)}{g(t)} &= \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)}\\ &= \frac{f(t+1)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}\\ &= \frac{f(t+1)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}\\ &= \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}\end{aligned}$$

elde edilir.

2.7 Tamsayı Mertebeden Toplamlar

N_0 doğal sayılar kümesini göstermek üzere, $f:\mathrm{N}_a \to R$ bir fonksiyon olsun. Burada $\mathrm{N}_a = \{a\} + \mathrm{N}_0 = \{a, a+1, a+2, ...\}$ $(a \in R)$ kümesini belirtir.

f fonksiyonunun n katlı belirli integrali,

$$y(t) = \int_a^t \int_a^s \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1})(d\tau_{n-1} ... d\tau_2 d\tau_1 ds)$$
$$= \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds\,, \qquad t \in [a, \infty) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın.

n-inci mertebeden başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t), & t \in [a, \infty) \\ y^{(i)}(a) = 0 \quad , & i = 0,1,...,n-1 \end{cases}$$

dir.

Benzer olarak, bir f ayrık fonksiyonunun n kez tekrarlanmış belirli toplamları

$$y(t) = \sum_{s=a}^{t-1} \sum_{\tau_1 = a}^{s-1} \cdots \sum_{\tau_{n-1}=a}^{\tau_{n-2}-1} f(\tau_{n-1})$$
$$= \sum_{s=a}^{t-n} \frac{\prod_{j=a}^{n-1} (t-s-1-j)}{(n-1)!} f(s)\,, \; t \in \mathrm{N}_a \tag{2.2}$$

dir.

Ayrık n-inci mertebeden başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$\begin{cases} \Delta^n y(t) = f(t), & t \in \mathrm{N}_a \\ \Delta^i y(a) = 0 \quad , & i = 0,1,...,n-1 \end{cases}$$

dir. Bundan dolayı, (2.2) toplamının çekirdeği Ayrık Cauchy fonsiyonudur. Bu çekirdek

$$(t-s-1)^{(n-1)} = \prod_{j=0}^{n-1} (t-s-1-j)$$

şeklinde tanımlanır.

$$y(a)=\Delta y(a)=...=\Delta^{n-1}y(a)=0$$

başlangıç şartlarından yararlanılarak

$$y(a)=y(a+1)=...=y(a+n-1)=0$$

olduğu görülür.

(2.2) toplamından, f 'nin n-inci mertebeden toplamı $\Delta_a^{-n} f$ ile gösterilmiştir ve

$$y(t)=\left(\Delta_a^{-n} f\right)(t)=\sum_{s=a}^{t-n}\frac{(t-s-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}f(s),\quad t\in \mathrm{N}_a$$

yazılır.

2.8 Kesirli Toplam Operatörü ve Kesirli Fark Operatörü

Bu kesimde bazı temel tanımlar ve sonuçlar verilecektir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun kesirli toplamı $\Delta_a^{-\alpha} f(x)$ şeklinde ve kesirli farkı da $\Delta^{\alpha} f(x)$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.8.1: a herhangi bir reel sayı ve α herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden kesirli toplamı

$$\Delta_a^{-\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-1)}f(s) \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada f, $s=a\ (\text{mod}1)$ için tanımlanır ve $\Delta_a^{-\alpha} f$, $t=a+\alpha\ (\text{mod}1)$ için tanımlanır. Özel olarak; $\Delta_a^{-\alpha}:\mathrm{N}\to\mathrm{N}_{a+\alpha}$ tanımlanır, burada $\mathrm{N}_t=\{t,t+1,t+2,...\}$ dir (Sengul 2010).

NOT 2.8.1: $\alpha=1$ için Tanım 2.8.1 e göre, ayrık toplam operatörü

$$\Delta_a^{-1} f(t)=\sum_{s=a}^{t-1} f(s)$$

şeklindedir (Sengul 2010).

Tanım 2.8.2: a herhangi bir reel sayı, m bir tamsayı ve α, $m-1<\alpha<m$ aralığında herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden kesirli farklı

$$\Delta^{\alpha} f(t)=\Delta^{m}\Delta^{-(m-\alpha)} f(t)=\Delta^{m}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{s=a}^{t-m+\alpha}(t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s) \qquad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Sengul 2010).

2.8.1 Kesirli Toplamlar İçin Üs Kuralı

Kesirli toplamların üs kuralı Atıcı ve Eloe tarafından aşağıdaki gibi ispatlanmıştır ve benzer tipte toplamların hesaplanması için çok kullanışlıdır (Sengul 2010).

Teorem 2.8.1.1: f bir reel değerli fonksiyon ve $\mu,\alpha>0$ olsun. $t=m+\alpha\ (\mathrm{mod}1)$ olmak üzere, bütün t ’ler için

$$\Delta^{-\alpha}\left[\Delta^{-\mu} f(t)\right]=\Delta^{-(\mu+\alpha)} f(t)=\Delta^{-\mu}\left[\Delta^{-\alpha} f(t)\right]$$

dir (Atıcı ve Eloe 2007).

İspat: Kesirli toplamın tanımından,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{-\mu}\sum_{r=0}^{t-\alpha}(t-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\alpha}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}\sum_{r=0}^{s-\alpha}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\alpha}^{t-\mu}\sum_{r=0}^{s-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\sum_{s=r+\alpha}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

elde edilir.

$x=s-(r+1)$ alınırsa, eşitlik

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\left(\sum_{x=\alpha-1}^{t-\sigma(r)-\mu}(t-\sigma(r)-\sigma(x))^{(\mu-1)} x^{(\alpha-1)}\right) f(r)$$

haline gelir. Kesirli toplam operatörünün tanımından,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\left(\Delta^{-\mu}(t-\sigma(r))^{(\alpha-1)}\right) f(r)$$

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\mu)}\left(t-\sigma(r)\right)^{(\alpha+\mu-1)} f(r)$$
$$=\Delta^{-(\mu+\alpha)} f(t)$$

elde edilir.

NOT 2.8.1.1: f , tamsayılar kümesinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olsun. Ayrık hesapta, $\Delta\Delta^{-1} f = f$ dir. Her pozitif reel α sayısı için, bu eşitlik ayrık kesirli hesapta da geçerlidir. Ayrık kesirli farkın tanımından,

$$\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha} f(x)=\Delta\Delta^{-(1-\alpha)}\Delta^{-\alpha} f(x)$$

dir. Burada $0<\alpha<1$ dir (Sengul 2010).
Bundan dolayı üs kuralı kullanılarak (Teorem 2.8.1.1) ,

$$\Delta\Delta^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)} f(x)=\Delta\Delta^{-1} f(x)= f(x)$$

yazılabilir.

2.8.2 Ayrık Kesirli Hesap İçin Kuvvet Fonksiyonu

Kuvvet fonksiyonu bir faktöriyel fonksiyonun α-inci mertebeden kesirli toplamını ifade eder (Sengul 2010).

Lemma 2.8.2.1:

$$\Delta^{-\alpha} t^{(\mu)}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} t^{(\mu+\alpha)}$$

dir (Atıcı ve Eloe 2007).

NOT 2.8.2.1: Her sabit c için, $\Delta^{\alpha} c$ sıfır değildir. Toplam operatörünün lineerlik özelliği ve kuvvet fonksiyonu kullanılarak, c sabitinin kesirli farkı

$$\Delta\Delta^{-(1-\alpha)} c=\Delta\frac{c}{\Gamma(2-\alpha)} t^{(1-\alpha)}=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{(-\alpha)}$$

bulunur, burada $0<\alpha<1$ dir (Sengül 2010).

2.8.3 Kesirli Toplam ve Kesirli Farkın Değişme Özelliği

Değişme özelliği, toplam ve fark operatörlerinin mertebesinin yer değiştirebileceğini ifade eder (Sengül 2010).

Teorem 2.8.3.1: $\alpha > 0$ için, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\Delta^{-\alpha}\Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \tag{2.5}$$

Burada, f , N_a 'da tanımlanmıştır (Atıcı ve Eloe 2007).

İspat: Parçalı formülden toplam hatırlanırsa,

$$\Delta_s\left((t-s)^{(\alpha-1)} f(s)\right) = (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta_s f(s) - (\alpha-1)(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s)$$

dir. Toplam kullanılarak,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta_s f(s) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s) + \left.\frac{(t-s)^{(\alpha-1)} f(s)}{\Gamma(\alpha)}\right|_a^{t+1-\alpha}$$

$$= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s) + \frac{(\alpha-1)^{(\alpha-1)} f(t+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{s=a}^{t-(\alpha-1)}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s) - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(s)$$

yazılır. Burada,

$$\Delta\Delta^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{s=a}^{t-(\alpha-1)}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s)$$

dir. İstenilen eşitlik sağlanır.

3. KESİRLİ LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^{\alpha}x(t)+f_1(t,x(t+\alpha))=v(t)+f_2(t,x(t+\alpha)), \qquad t\in \mathrm{N}_0\,, \qquad 0\le\alpha\le 1\\ &\Delta^{\alpha-1}x(t)\big|_{t=0}=x_0\end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

formundaki lineer olmayan kesirli fark denklemlerinin salınımlılık şartları verilecektir. Burada, Δ^{α} Riemann- Liouville ayrık kesirli farkı, $f_i:[0,+\infty]\times R\to R,\ i=1,2$ ve v, t ve x de sürekli, $\mathrm{N}_a=\{a,\ a+1,\ a+2,\ ...\}$ dir (Sagarayaj and Selvam 2012).

Bu bölümde önce bazı temel teoremler ve lemmalar verilecektir. Bu teoremler ve lemmalar kullanılarak, kesirli lineer olmayan fark denklemleri için salınımlılık şartları sunulmuştur.

Aşağıdaki şartlar göz önüne alınacaktır:

$$xf_i(t,x)>0,\ \ (\ i=1,2),\quad x\neq 0,\ \ t\ge t_0 \qquad (3.2)$$

ve

$$|f_1(t,x)|\ge|p_1(t)||x|^{\beta} \quad ve \quad |f_2(t,x)|\le|p_2(t)||x|^{\gamma},\quad x\neq 0,\quad t\ge t_0 \qquad (3.3)$$

burada, $p_1,\ p_2\in C([t_0,\infty),R^+)$ ve $\beta,\alpha>0$ reel sayılardır (Sagarayaj and Selvam 2012).

$f_2=0$ iken Teorem 3.2.1 i kanıtlanacaktır.

Teorem 3.1: f, N_a da reel değerli bir fonksiyon ve $\mu,v>0$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Atıcı ve Eloe 2007):

$$\Delta^{-v}\left[\Delta^{-\mu}f(t)\right]=\Delta^{-(\mu+v)}f(t)=\Delta^{-\mu}\left[\Delta^{-v}f(t)\right];$$

$$\Delta^{-v}\Delta f(t)=\Delta\Delta^{-v}f(t)-\frac{(t-a)^{(v-1)}}{\Gamma(v)}f(a)$$

Lemma 3.1: $\mu\neq 1$ ve $\mu+v+1$ in pozitif olmadığı varsayılsın.

$$\Delta^{-v}t^{(\mu)}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}t^{(\mu+v)}$$

dir (Atıcı ve Eloe 2009).

Lemma 3.2: $X \geq 0$ ve $Y > 0$ için

$$X^{\lambda} + (\lambda - 1)Y^{\lambda} - \lambda XY^{\lambda-1} \geq 0, \qquad \lambda > 1 \tag{3.4}$$

ve

$$X^{\lambda} - (1-\lambda)Y^{\lambda} - \lambda XY^{\lambda-1} \leq 0, \qquad \lambda < 1 \tag{3.5}$$

dir, burada eşitlik ancak $X = Y$ iken sağlanır (Hardy *et al.* 1959).

Lemma 3.3: (3.1) in kesirli Taylor Fark Formülü,

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} t^{(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + f_2(s, x(s+\alpha)) - f_1(s, x(s+\alpha)) \right], \; t \in \mathrm{N}_{\alpha} \tag{3.6}$$

dir (Atıcı ve Eloe 2009).

İspat: (3.1) in her iki tarafına $\Delta^{-\alpha}$ opearatörü uygulanarak,

$$\Delta^{-\alpha} \Delta^{\alpha} x(t) = \Delta^{-\alpha} \left[v(t) + f_2(t, x(t+\alpha)) - f_1(t, x(t+\alpha)) \right] \tag{3.7}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafına teorem uygulanarak

$$\begin{aligned} \Delta^{-\alpha} \Delta^{\alpha} x(t) &= \Delta^{-\alpha} \Delta \Delta^{-(1-\alpha)} x(t) \\ &= \Delta \Delta^{-\alpha} \Delta^{-(1-\alpha)} x(t) - \frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} x_0 \\ &= x(t) - \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} t^{(\alpha-1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 2.8.1'den $t \in \mathrm{N}_a$ için (3.7) eşitliğinin sağ tarafı,

$$\Delta^{-\alpha} \left[v(t) + f_2(t, x(t+\alpha)) - f_1(t, x(t+\alpha)) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + f_2(s, x(s+\alpha)) - f_1(s, x(s+\alpha)) \right]$$

olur.

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} t^{(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + f_2(s, x(s+\alpha)) - f_1(s, x(s+\alpha)) \right]$$

elde edilir.

Teorem 3.2: (3.2) şartının sağlandığı varsayılsın. Eğer

$$\liminf_{t \to \infty} t^{(1-\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s) = -\infty \tag{3.8}$$

ve

$$\limsup_{t \to \infty} t^{(1-\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s) = \infty \tag{3.9}$$

oluyorsa o zaman, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Sagarayaj and Selvam 2012).

İspat: $x(t)$, $f_2 = 0$ olduğunda (3.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun. $T > t_0$'ın yeterince büyük olduğunu varsayalım ki $t \geq T$ için $x(t) > 0$ dır. $F(t) = v(t) + f_2(t, x(t+\alpha)) - f_1(t, x(t+\alpha))$ olsun, (3.6) denkleminden

$$x(t) \leq \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} t^{(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{T-1} (t-s-1)^{(\alpha-1)} |F(s)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=T}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s), \qquad t \geq T$$

olduğu açıktır. Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\alpha) t^{(1-\alpha)}$ ile çarpılırsa,

$$\Gamma(\alpha) t^{(1-\alpha)} x(t) \leq x_0 + t^{(1-\alpha)} \sum_{s=0}^{T-1} (t-s-1)^{(\alpha-1)} |F(s)| + t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s), \qquad t \geq T$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\Gamma(\alpha) t^{(1-\alpha)} x(t) \leq C(T) + t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s), \qquad t \geq T \tag{3.10}$$

yazılabilir, burada

$$C(T) = x_0 + \sum_{s=0}^{T-1} \left(\frac{T}{T-s-1} \right)^{(1-\alpha)} |F(s)|$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = M < \infty, \qquad t \geq T$$

dir. (3.10) eşitsizliğinde her iki tarafının $\lim_{t\to\infty} \inf$ alınırsa, (3.8) denklemi elde edilir.

Teorem 3.3: $\beta > 1$ ve $\gamma = 1$ için (3.2) ve (3.3) şartları sağlansın. $H_\beta(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s)$ olmak üzere,

$$\lim_{t\to\infty} \inf t^{(1-\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + H_\beta(s) \right] = -\infty \tag{3.11}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \sup t^{(1-\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + H_\beta(s) \right] = \infty \tag{3.12}$$

oluyorsa, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Sagarayaj and Selvam 2012).

İspat: $x(t)$, (3.6) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun, yani $t \geq T > t_0$ için $x(t) > 0$ dır.

(3.3) şartı (3.6) denkleminde kullanılarak, $\gamma=1$ ve $\beta>1$ ve $t\geq T$ için,

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t)=x_0+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$=x_0+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{T-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$\leq x_0+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{T-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}|F(s)|+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$\leq C(T)+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t)\leq C(T)+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+p_2(s)x^{\gamma}(s+\alpha)-p_1(s)x^{\beta}(s+\alpha)\right] \tag{3.13}$$

elde edilir. Lemma 3.2 de,

$\lambda=\beta,\ X=p_1^{1/\beta}$ ve $Y=\left(p_2 p_1^{-1/\beta}/\beta\right)^{1/(\beta-1)}$ alınarak, (3.4) eşitliği uygulanırsa,

$$\left(p_1^{1/\beta}(t)x(t+\alpha)\right)^{\beta}+(\beta-1)\left(p_2(t)p_1^{-1/\beta}(t)/\beta\right)^{\beta/(\beta-1)}-\beta p_1^{1/\beta}(t)x(t+\alpha)\left(p_2(t)p_1^{-1/\beta}(t)/\beta\right)\geq 0$$

$$p_1(t)x^{\beta}(t+\alpha)+(\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)}p_1^{1/(1-\beta)}(t)p_2^{\beta/(\beta-1)}(t)-p_2(t)x(t+\alpha)\geq 0$$

$$p_2(t)x(t+\alpha)-p_1(t)x^{\beta}(t+\alpha)\leq(\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)}p_1^{1/(1-\beta)}(t)p_2^{\beta/(\beta-1)}(t),\qquad t\geq T \tag{3.14}$$

elde edilir.

(3.13) eşitsizliğinde (3.14) kullanılarak,

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t)\leq C(T)+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H_{\beta}(s)\right],\qquad t\geq T \tag{3.15}$$

(3.15)'te her iki tarafın $\liminf\limits_{t\to\infty}$ alınarak, (3.11) şartı ile çelişir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.4: $\beta=1$ ve $\gamma<1$ için (3.2) ve (3.3) şartları sağlansın. Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H_{\gamma}(s)\right]=-\infty, \tag{3.16}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H_{\gamma}(s)\right]=\infty, \tag{3.17}$$

oluyorsa, burada

$$H_\gamma(s)=(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dır. O zaman, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Sagarayaj and Selvam 2012).

İspat: $x(t)$, (3.6) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun. $t \ge T > t_0$ için $x(t) > 0$ dır. (3.6) denkleminde (3.4) şartını kullanırsak, $\beta = 1$ ve $\gamma < 1$ ile,

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t) \le C(T) + t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+p_2(s)x^\gamma(s+\alpha)-p_1(s)x(s+\alpha)\right]$$

bulunur. Lemma 3.2'de

$\lambda = \gamma,\ X = p_2^{1/\lambda}x$ ve $Y = \left(p_1 p_2^{-1/\gamma}/\gamma\right)^{1/(\gamma-)}$

alınarak, (3.5) kullanılırsa,

$$\left(p_2^{1/\gamma}(t)x(t+\alpha)\right)^\gamma - (1-\gamma)\left(p_1(t)p_2^{-1/\gamma}(t)/\gamma\right)^{\gamma/(\gamma-1)} - \gamma p_2^{1/\gamma}(t)x(t+\alpha)\left(p_1(t)p_2^{-1/\gamma}(t)/\gamma\right) \le 0$$

$$p_2(t)x^\gamma(t+\alpha) - p_1(t)x(t+\alpha) \le (1-\gamma)\gamma^{\gamma/(1-\gamma)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(t)p_2^{1/(1-\gamma)}(t) \quad t \ge T \tag{3.19}$$

(3.18) de (3.19) kullanılarak,

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t) \le C(T) + t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right], \quad t \ge T \tag{3.20}$$

elde edilir.

(3.20) eşitliğinde her iki tarafın $\liminf_{t\to\infty}$ alınarak, (3.16) şartı ile çelişir. Teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 3.5: $\beta > 1$ ve $\gamma < 1$ için (3.2) ve (3.3) şartlarının sağlandığı varsayılsın. Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right] = -\infty, \tag{3.21}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right] = \infty, \tag{3.22}$$

oluyorsa, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada,

$$H_{\beta,\gamma}(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)}\xi^{\beta/(\beta-1)}(s)p_1^{1/(1-\beta)}(s) + (1-\gamma)\gamma^{\gamma/(1-\gamma)}\xi^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

ve $\xi \in C\left([t_0,\infty], R^+\right)$ dır (Sagarayaj and Selvam 2012).

İspat: $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani, $t \ge T > t_0$ için $x(t) > 0$ dır. (3.6) denkleminde, (3.3) şartı kullanılarak,

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t) \le C(T) + t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s)$$
$$+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\xi(s)x(s+\alpha) - p_1(s)x^{\beta}(s+\alpha)\right]$$
$$+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[p_2(s)x^{\gamma}(s+\alpha) - \xi(s)x(s+\alpha)\right], \quad t \ge T \quad (3.23)$$

yazılabilir.

$\left(\xi x - p_1 x^{\beta}\right)$ ve $\left(p_2 x^{\gamma} - \xi x\right)$ sınırları (3.14) eşitsizliğinde $p_2 = \xi$, (3.19) eşitsizliğinde $p_1 = \xi$ için sırasıyla kullanılırsa,

$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t) \le C(T) + t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s)$$
$$+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\begin{bmatrix}\left[(\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)}\xi^{\beta/(\beta-1)}(s)p_1^{1/(1-\beta)}(s)\right]+\\ \left[(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(1-\gamma)}\xi^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)\right]\end{bmatrix}$$
$$\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)}x(t) \le C(T) + t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s) + H_{\beta,\gamma}(s)\right], \quad t \ge T \qquad (3.24)$$

(3.24)’te, $t \to \infty$ için her iki tarafın $\liminf$ ’i alınırsa, (3.21) şartı ile çelişir. İspat tamamlanmıştır.

4. YÜKSEK MERTEBEDEN KESİRLİ LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{\alpha} x(t) + f_1(t, x(t+\alpha)) = v(t) + f_2(t, x(t+\alpha)), \quad & t \in \mathrm{N}_{\alpha}, \quad m-1 < \alpha \leq m \\ \Delta^{\alpha-k}\Big|_{t=a} = x_k, \quad (k = 1,2,\ldots,m-1) & \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

formundaki, yüksek mertebeden lineer olmayan kesirli fark denklemleri göz önüne alınacaktır. Burada, Δ^{α}, $\alpha -$inci mertebeden ayrık Riemann- Liouville kesirli fark operatörü, $m \geq 1$ olan bir tamsayıdır. $f_i : [0,\infty) \times R \to R, i = 1,2$ ve v, t den x'e süreklidir, $\mathrm{N}_a = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$ dır.

Bu bölümde yüksek mertebeden kesirli lineer olmayan fark denklemleri için bazı salınımlılık teoremleri oluşturulacaktır. Öncelikle bu bölümde kullanılan bazı özellikler verilecektir.

Şu şartlar göz önüne alınacaktır:

$$x f_i(t, x) > 0 \ \ (i = 1, 2), \quad x \neq 0, \ t \geq a \qquad (4.2)$$

$$|f_1(t, x)| \geq p_1(t)|x|^{\beta} \quad ve \quad |f_2(t, x)| \leq p_2(t)|x|^{\gamma}, \ x \neq 0, t \geq a \qquad (4.3)$$

$$|f_1(t, x)| \leq p_1(t)|x|^{\beta} \quad ve \quad |f_2(t, x)| \geq p_2(t)|x|^{\gamma}, \ x \neq 0, t \geq a \qquad (4.4)$$

burada, $p_1, p_2 \in C([a,\infty), R^{+})$ ve $\beta, \gamma > 0$, reel sayılardır. Bu şartlar altında bazı salınımlılık teoremleri elde edilmiştir.

Lemma 4.1: (Young Eşitsizliği)

(i) $X, Y \geq 0$, $u > 1$ ve $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ olsun.

$$XY \leq \frac{1}{u} X^{u} + \frac{1}{v} Y^{v} \qquad (4.5)$$

dir, burada, eşitsizlik ancak ve ancak $Y = X^{u-1}$ iken sağlanır.

(ii) $X \geq 0$, $Y > 0$, $0 < u < 1$ ve $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ olsun.

$$XY \geq \frac{1}{u} X^{u} + \frac{1}{v} Y^{v} \qquad (4.6)$$

dir, burada, eşitlik $Y = X^{u-1}$ iken sağlanır.

Lemma 4.2: (4.1)'in kesirli Taylor fark formülü, $t \in \mathrm{N}_\alpha$ için,

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]+\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}x(a) \quad (4.7)$$

eşitliğine denktir.

İspat: Denklem,

$$\Delta^\alpha x(t)+f_1(t,x(t+\alpha))=v(t)+f_2(t,x(t+\alpha))$$

şeklindedir.

$$\Delta^\alpha x(t)=v(t)+f_2(t,x(t+\alpha))-f_1(t,x(t+\alpha)) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir.

Yüksek mertebeden Taylor fark formülünü bulmak için denklemin her iki tarafına da $\Delta^{-\alpha}$ operatörü uygulanmalıdır. O halde, 1.mertebe, 2.mertebe ve daha sonra yüksek mertebe için bir genelleştirme yapılabilir. Önce, 1.mertebe için Taylor fark formülü (4.8) denkleminde her tarafa $\Delta^{-\alpha}$ uygulanarak

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^\alpha x(t)=\Delta^{-\alpha}\left[v(t)+f_2(t,x(t+\alpha))-f_1(t,x(t+\alpha))\right]$$

elde edilir. Denklemin sağ tarafı tanımdan açıktır. Sol tarafı,

$$\begin{aligned}\Delta^{-\alpha}\Delta^\alpha x(t)&=\Delta^{-\alpha}\Delta\Delta^{-(1-\alpha)}x(t)\\&=\Delta\Delta^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\&=x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(t,x(t+\alpha))-f_1(t,x(t+\alpha))\right]$$

yani,

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]+\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}$$

elde edilir.

Şimdi, 2.mertebe için Taylor fark formülü için, (4.8) denklemine $\Delta^{-\alpha}$ operatörü uygulanırsa,

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}x(t)=\Delta^{-\alpha}\left[v(t)+f_2(t,x(t+\alpha))-f_1(t,x(t+\alpha))\right]$$

elde edilir. Sol taraf için,

$$\begin{aligned}
\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}x(t)&=\Delta^{-\alpha}\Delta^{2}\Delta^{-(2-\alpha)}x(t)\\
&=\Delta^{-\alpha}\Delta\Delta^{-(2-\alpha)}x(t)\\
&=\Delta\Delta^{-\alpha}\Delta\Delta^{-(2-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=\Delta^{1-\alpha}\Delta\Delta^{-(2-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1-1)}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta^{\alpha-1-1}-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-2)}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta^{\alpha-2}-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=x(t)-\sum_{k=1}^{2}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,s(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]+\sum_{k=1}^{2}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}$$

bulunur.

Benzer şekilde yüksek mertebe için işlem yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}x(t)&=\Delta^{-\alpha}\Delta^{m}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)\\
&=\Delta^{-\alpha}\Delta\Delta^{m-1}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)\\
&=\Delta\Delta^{-\alpha}\Delta^{m-1}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=\Delta^{1-\alpha}\Delta\Delta^{m-2}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=\Delta\Delta^{1-\alpha}\Delta^{m-2}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-2)}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta^{\alpha-2}-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=\Delta^{2-a}\Delta\Delta^{m-3}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-2)}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta^{\alpha-2}-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}\\
&=\Delta\Delta^{2-\alpha}\Delta^{m-3}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-3)}}{\Gamma(\alpha-2)}\Delta^{\alpha-3}-\frac{(t-a)^{(\alpha-2)}}{\Gamma(\alpha-1)}\Delta^{\alpha-2}-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu işlem tekrarlanarak;

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}x(t)=\Delta^{m-\alpha-1}\Delta\Delta^{m-m}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-m+1)}}{\Gamma(\alpha-m+2)}\Delta^{\alpha-m+1}-\ldots-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}$$

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}x(t)=\Delta\Delta^{m-\alpha-1}\Delta^{-(m-\alpha)}x(t)-\frac{(t-a)^{(\alpha-m)}}{\Gamma(\alpha-m+1)}\Delta^{\alpha-m}-\frac{(t-a)^{(\alpha-m+1)}}{\Gamma(\alpha-m+2)}\Delta^{\alpha-m+1}-\ldots-\frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{\alpha-1}$$
$$=x(t)-\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}$$

yazılır. Yüksek mertebe için Taylor fark formülü

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]+\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}$$

bulunur.

Teorem 4.1: $\beta>\gamma$ için (4.2) ve (4.3) şartlarının sağlandığı varsayılsın. Eğer yeterince büyük T 'ler için

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H(s)\right]=-\infty \tag{4.9}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)-H(s)\right]=\infty \tag{4.10}$$

oluyorsa, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Burada $H(s)=(\beta/\gamma-1)[\gamma p_2(s)/\beta]^{\beta/(\beta-\gamma)}\,p_1^{\gamma/(\gamma-\beta)}(s)$ dir.

İspat: x, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Varsayılsın ki x, (4.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. O zaman, $T_1>a$ vardır öyle ki $t\geq T_1$ için $x(t)>0$dır. $s\geq T_1$ olsun, $X=|x|^{\gamma}(s)$, $Y=\gamma p_2(s)/(\beta p_1(s))$, $u=\beta/\gamma$ ve $v=\beta/(\beta-\gamma)$ alınsın, Lemma 4.1 de (4.5) şartından

$$p_2(s)|x|^{\gamma}(s)-p_1(s)|x|^{\beta}(s)=\frac{\beta p_1(s)}{\gamma}\left[|x|^{\gamma}\frac{\gamma p_2(s)}{\beta p_1(s)}-\frac{1}{\beta/\gamma}\left(|x|^{\gamma}(s)\right)^{\beta/\gamma}\right]$$
$$=\frac{\beta p_1(s)}{\gamma}\left[XY-\frac{1}{u}X^{u}\right]\leq\frac{\beta p_1(s)}{\gamma}\frac{1}{v}Y^{v}=H(s),\quad s\geq T_1 \tag{4.11}$$

olduğu görülür.

(4.7), (4.2), (4.3), ve (4.11)’den

$$\Gamma(\alpha)x(t)=\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}+\sum_{s=a}^{T_1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$+\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]$$

$$\leq \Phi(t)+\Psi(t,T_1)+\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+p_2(s)x^{\gamma}(s)-p_1(s)x^{\beta}(s)\right]$$

$$\leq \Phi(t)+\Psi(t,T_1)+\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H(s)\right], \qquad t\geq T_1 \tag{4.12}$$

burada,

$$\Phi(t)=\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Delta^{\alpha-k}=\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}x_k \tag{4.13}$$

ve

$$\Psi(t,T_1)=\sum_{s=a}^{T_1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right] \tag{4.14}$$

dir. (4.12), $t\geq T_1$ için $t^{(1-\alpha)}$ ile çarpılarak,

$$0<t^{(1-\alpha)}\Gamma(\alpha)x(t)\leq t^{(1-\alpha)}\Phi(t)+t^{(1-\alpha)}\Psi(t,T_1)+t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+H(s)\right] \tag{4.15}$$

$T_2>T_1$ olsun. Sırasıyla, $0<\alpha\leq 1$ ve $\alpha>1$ durumları incelensin.

Durum (i) $0<\alpha\leq 1$ olsun. O halde, $m=1$, $\Phi(t)=x_1(t-a)^{(\alpha-1)}$,

$$\left|t^{(1-\alpha)}\Phi(t)\right|=|x_1|t^{(1-\alpha)}(t-a)^{(\alpha-1)}\leq |x_1|\left(\frac{T_2}{T_2-a}\right)^{(1-\alpha)}=c_1(T_2), \quad t\geq T_2 \tag{4.16}$$

ve

$$\left|t^{(1-\alpha)}\Psi(t,T_1)\right|=\left|t^{(1-\alpha)}\sum_{s=a}^{T_1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right]\right|$$

$$\leq \sum_{s=a}^{T_1}t^{(1-\alpha)}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left|v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right|$$

$$\leq \sum_{s=a}^{T_1}\left(\frac{T_2}{T_2-s-1}\right)\left|v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right|$$

$$=c_2(T_1,T_2), \qquad t\geq T_2 \tag{4.17}$$

olur.

(4.15), (4.16), (4.17)’den $t\geq T_2$ için

$$t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+H(s)]>-[c_1(T_2)+c_2(T_{1,}T_2)]$$

dir. Bundan dolayı,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+H(s)]\geq-[c_1(T_2)+c_2(T_1,T_2)]>\infty$$

olur, ki (4.12) ile çelişir.

Durum (ii) $\alpha>1$ olsun. O halde, $m\geq 2$ için,

$$\begin{aligned}\left|t^{(1-\alpha)}\Phi(t)\right| &= \left|t^{(1-\alpha)}\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{(\alpha-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}x_k\right| \\ &\leq \Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{m}\frac{|x_k|(T_2-a)^{(1-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \\ &= c_3(T_2), \quad t\geq T_2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

$$\begin{aligned}\left|t^{(1-\alpha)}\Psi(t,T_1)\right| &= \left|t^{(1-\alpha)}\sum_{s=a}^{T_1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))]\right| \\ &\leq \sum_{s=a}^{T_1}t^{(1-\alpha)}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left|v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right| \\ &\leq \sum_{s=a}^{T_1}\left|v(s)+f_2(s,x(s+\alpha))-f_1(s,x(s+\alpha))\right| \\ &= c_4(T_1), \quad t\geq T_2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.15), (4.18) ve (4.19)' dan $t\geq T_2$ için

$$t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+H(s)]>-[c_3(T_2)+c_4(T_1)]$$

olduğu görülür. Bundan dolayı,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)}\sum_{s=T_1}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+H(s)]\geq-[c_3(T_2)+c_4(T_1)]>-\infty$$

olur, ki (4.12) ile çelişir. Sırada, x'in (4.1)'in bir negatif çözümü olduğu varsayılsın. Benzer şekilde (4.13) ile çelişki oluşur. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2: $\alpha\geq 1$, $\beta<\gamma$ için (4.2) ve (4.4) sağlansın. Eğer, yeterince büyük T'ler için

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s)+H(s)] = \infty \tag{4.20}$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s)-H(s)] = -\infty \tag{4.21}$$

oluyorsa, (4.1) in her sınırlı çözümü salınımlıdır.

Burada, H, Teorem 4.1.1 de tanımlanmıştır.

İspat: x**,** (4.1)'in salınımlı olmayan sınırlı bir çözümü olsun. M_1 ve M_2 sabitleri vardır, öyle ki, $t \geq a$ için,

$$M_1 \leq x(t) \leq M_2 \tag{4.22}$$

dir. x' in (4.1) denkleminin bir sınırlı pozitif çözümü olduğu varsayılsın. O zaman, $t \geq T_1$ için, $T_1 > a$ vardır, öyle ki $x(t) > 0$ dır. (3.6) ispatına benzer olarak, (4.11)'den $s \geq T_1$ için,

$$p_2(s)|x|^{\gamma}(s) - p_1(s)|x|^{\beta} \geq H(s) \tag{4.23}$$

bulunur, burada H, Teorem 4.1.1 de tanımlanmıştır. Φ, Ψ sırasıyla, (4.13) ve (4.14) de tanımlanmıştır.

(4.19)'un ispatına benzer şekilde, (4.7) , (4.2) , (4.4) ve (4.23)'den, $t \geq T_1$ için,

$$t^{(1-\alpha)}\Gamma(\alpha)x(t) \geq t^{(1-\alpha)}\Phi(t) + t^{(1-\alpha)}\Psi(t,T_1) + t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T_1}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s)+H(s)] \tag{4.24}$$

elde edilir.

$T_2 > T_1$ alınsın. Şimdi, $\alpha = 1$ ve $\alpha > 1$ durumları göz önüne alınsın.

Durum (i) $\alpha = 1$ olsun. O halde, (4.18) ve (4.19) hala doğrudur. (4.22) , (4.18) , (4.19) ve (4.24)'den $t \geq T_2$ için,

$$M_2\Gamma(\alpha)t^{(1-\alpha)} \geq -c_3(T_2) - c_4(T_1) + t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T_1}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s)+H(s)]$$

dir. Bundan dolayı,

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T_1}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s)+H(s)] \leq c_1(T_2) + c_2(T_1,T_2) + M_2\Gamma(q) < \infty$$

elde edilir, (4.20) ile çelişir.

Durum (ii) $\alpha > 1$ olsun. (4.18), (4.19) sağlanır. (4.22), (4.20), (4.21) ve (4.24)'den $t \geq T_2$ için,

$$M_2 \Gamma(\alpha) t^{(1-\alpha)} \geq -c_3(T_2) - c_4(T_1) + t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T_1}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s) + H(s)]$$

dir. $\lim_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)} = 0$ olduğundan,

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-\alpha)} \sum_{s=T_1}^{t} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s) + H(s)] \leq c_3(T_2) + c_4(T_1) < \infty$$

elde edilir, (4.20) ile çelişir. Son olarak, x'in (4.1) in bir sınırlı negatif çözümü olduğu varsayılsın. Benzer şekilde (4.21) ile çelişki elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

4.1 Kesirli Caputo Ayrık Fark Operatörü İçin Sonuçlar

Bu bölümde, öncelikle, Caputo ayrık farkı için bir tanım verilecektir.

Tanım 4.1.1: $\mu > 0$ ve $m-1 < \mu < m$ olsun. Burada, m pozitif bir sayıyı gösterir, $m = \lceil \mu \rceil, \lceil . \rceil$ sayının tavanıdır. $v = m - \mu$ alınsın. μ-inci kesirli Caputo ayrık farkı,

$$\Delta_*^{\alpha} f(t) = \Delta^{-v}\left(\Delta^m f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} \left(\Delta^m f\right)(s), \quad \forall t \in N_{a+v}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, Δ^m, m-inci mertebeden ileri fark operatörüdür,

$$\left(\Delta^m f\right)(s) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} f(s+k)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu bölümde, başlangıç değer problemi

$$\left.\begin{aligned} \Delta_*^{\alpha} x(t) + f_1(t, x(t+\alpha)) = v(t) + f_2(t, x(t+\alpha)), \ t > a \geq 0 \\ \Delta^k x(t)\big|_{t=a} = x_k \qquad (k = 0,1,\ldots,m-1) \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

olan Caputo kesirli operatörünün salınımlılık şartları verilecektir. Burada, $\Delta_*^{\alpha} x(t)$, $m-1 < \alpha \leq m$ için α-inci mertebeden Caputo ayrık kesirli fark operatörüdür. $f_i : [0,\infty) \times R \to R, i = 1, 2$, v, t ve x de süreklidir. $\mathrm{N}_a = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$ dir.

Caputo ayrık kesirli farkı için Taylor fark formülü,

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\Delta_*^\alpha x(s), \quad t\in \mathrm{N}_{a+\alpha}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1: $\beta>\gamma$ için (4.2) ve(4.3) sağlansın. Eğer, yeterince büyük T ’ler için,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+H(s)]=-\infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)-H(s)]=\infty$$

ise, (4.1) in her çözümü salınımlıdır, burada H , Teorem 4.1.1 de tanımlandığı gibidir.

Teorem 4.1.2: $\alpha\geq 1$ olsun. (4.2) ve (4.4) şartlarının $\beta<\gamma$ ile sağlandığı varsayılsın. Eğer, yeterince büyük T ’ler için,

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+H(s)]=\infty$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)-H(s)]=-\infty$$

ise, (4.1) in her çözümü salınımlıdır, burada H , Teorem 4.1.1 de tanımlandığı gibidir.

KAYNAKLAR

Anastassiou, G.A. (2009). Discrete fractional Calculus and Inequalities, Department of Mathematical Sciences University of Memphis, Memphis, TN 38152, USA.

Atici, F.M. and Eloe, P.W. (2007). A transform method in discrete fractional calculus, *International Journal of Difference Equations*, **2 (2):** 165-176.

Atici, F.M. and Eloe, P.W. (2009). Initial value problems in discrete fractional calculus, *Proceedings of American Mathematical Society*, **137 (3):** 981-989.

Charoenphon, S. (2014). Green's Functions of Discrete Fractional Calculus Boundary Value Problems and an Application of Discrete Fractional Calculus to a Pharmacokinetic Model, Masters Theses & Specialists Projects, Paper 1328, Western Kentucky Univesity, Bowling Gren, Kentucky.

Chen, D., Qu, P. and Lan, Y. (2013). Forced oscillation of certain fractional differential equations, *Advances in Difference Equations*, **125 (1):** 1765-1776.

Diethelm, K. (2004). The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer, Berlin.

Elaydi, S. (2004). An Introduction To Difference Equations, Springer, San Antonio, Texas, USA.

Grace, S.R., Agarwal, R.P., Wong, P.J.Y., Zafer A. (2012). On the Oscillation of Fractional Differential Equations, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **15 (2):** 222-231.

Holm, M.T. (2011). The Theory Of Discrete Fractional Calculus: Development and Application, Theses and Student Research Papers in Mathematics, Paper 27, University of Nebraska- Lincoln, Nebraska.

Kelley, W.G., Peterson, A.C. (2004). Difference Equations; An Introduction with Applications, *Academic Pres*.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam.

Miller, K.S. and Ross, B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, USA.

Podlunby, I. (1999). Fractional Differential Equations, Academic Pres, San Diego, Calif, USA.

Sagarayaj, M.R., Selvam, A.G.M. (2012). Oscillation of Fractional Nonlinear Difference Equations, *Mathematica Aeterna*, **2 (9):** 805-813.

Sengul, S. (2010). Discrete Fractional Calculus and Its Applications to Tumor Growth, Masters Theses & Specialists Projects, Paper 161, Western Kentucky University, Bowling Green, Kentucky.

Miller, K.S. and Ross, B. (1989). Fractional difference calculus. Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications, Nihon University, Koriyama, Japan, May 198, 139-152.

Diaz, J.B. and Osler, T.J. (1974). Differences of Fractional Order, *American Mathematical Society*, **28:** 185-202.

Kuttner, B. (1957). On differences of fracional order, *Proceeding of the London Mathematical Society*, **3:** 453-466.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. (1959). Inequalities, Cambirdge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı- Soyadı : Senem KISALAR

Doğum Tarihi : 10.11.1991

Doğum Yeri : ANTALYA

Eğitim Bilgileri

Lise : Antalya Lisesi (2005- 2009)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2009-2013)

Pedagojik Formasyon : Afyon Kocatepe Üniversitesi (Şubat 2014- Haziran 2014)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2013-)

Yüksek Lisans Ana Bilim Dalı: Matematik

Yüksek Lisans Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

İletişim Bilgileri

Telefon: 0 543 780 39 99

Mail : snm.kslr@hotmail.com