ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hakan TEMİZ

Danışman
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Hakan TEMİZ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Hakan TEMİZ tarafından hazırlanan "Zaman Skalasında Lineer Olmayan İntegral Eşitsizlikleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Başkan **:** Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23/06/2014

Hakan TEMİZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Hakan TEMİZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Bu tez çalışmasında, zaman skalasındaki tanımlara ve bu tanımlarla ilgili örneklere yer verildi. $p \geq q > 0$, $a \geq 0$ ve $K > 0$ için

$$a^{q/p} \leq \left(\frac{q}{p} K^{(q-p)/p} a + \frac{p-q}{p} K^{q/p}\right)$$

eşitsizliği ile $u, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^{+}$ ve $u^{\Delta}(t) \leq a(t)u(t) + b(t)$, $t \geq t_0$, $t \in T^{\kappa}$ olmak üzere

$$u(t) \leq u(t_0)e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a\big(t, \sigma(\tau)\big) b(\tau)\Delta\tau,\ t \geq t_0,\ \ t \in T^{\kappa}$$

karşılaştırmalı teoremin incelemesi yapıldı. Üçüncü bölümde ise karşılaştırmalı teoremin diğer bazı lineer olmayan integral eşitsizlikler üzerine yeni sonuçları elde edildi. Daha sonra dördüncü bölümde de gecikmeli integral eşitsizliklerinin incelemesi yapıldı.

2014, v + 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Lineer Olmayan İntegral Eşitsizlikleri, Gecikmeli İntegral Eşitsizlikleri

ABSTRACT

M.Sc Thesis

NONLINEAR INTEGRAL INEQUALITIES ON TIME SCALES

Hakan TEMİZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

In this thesis, descriptions in the time scale are stated and and examples relevant to these descriptions are given. $p \geq q > 0,\ a \geq 0$ and for $K > 0$

$$a^{q/p} \leq \left(\frac{q}{p} K^{(q-p)/p} a + \frac{p-q}{p} K^{q/p}\right)$$

with the inequality $u,\ b \in C_{rd},\ a \in \Re^{+}$ ve $u^{\Delta}(t) \leq a(t)u(t) + b(t),\ t \geq t_0,\ t \in T^{\kappa}$ be about

$$u(t) \leq u(t_0)e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a\big(t, \sigma(\tau)\big)b(\tau)\Delta\tau,\ t \geq t_0,\ \ t \in T^{\kappa}$$

the comparative theorem of analyzed. In the third part, new results of the comparative theorem to some other nonlinear integral inequalities are derived. In the four part delay integral inequalities is analyzed.

2014, v + 50 pages

Key Words: Time Scale, Nonlinear Integral Inequalities, Delay Integral Inequalities.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ' a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme özellikle anneme ve akrabalarıma, değerli dostlarıma ve arkadaşlarıma, araştırma sürecinde yardımlarını benden esirgemeyen öğretmen arkadaşım sayın Serkan KAYA ya sonsuz teşekkür ederim.

Hakan TEMİZ

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\int$	Belirli İntegral
β	Beta fonksiyonu
σ	Sigma fonksiyonu
Δ	Delta fonksiyonu
ρ	Ro fonksiyonu
μ	Mü fonksiyonu
$e_p(t,s)$	Üstel fonksiyon
$\delta/\delta t$	Kısmi türev
T	Zaman skalası kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	$[0,\infty)$
$\Re^+$	Pozitif azalan fonksiyonların kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
C_{rd}	rd-continuous fonksiyonlar kümesi
$\in$	Elemanıdır
ε	Epsilon
$\emptyset$	Boş küme

1. GİRİŞ

Son zamanların dikkat çeken yeni çalışmalarından birisi zaman skalası teorisidir. Zaman skalası 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Stefan Hilger diskret analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla bu teoriyi ortaya atmıştır. Bunun için de her ikisini kapsayan bir küme almış ve bu kümeye zaman skalası demiştir. Göreceğiz ki zaman skalasını reel sayılar aldığımızda sürekli analiz ile, tam sayılar aldığımızda ise diskret analiz ile çakışmaktadır.

Sürekli analizdeki ve diskret analizdeki hemen hemen her şey örneğin süreklilik, türev integral, sınır değer problemleri ve tümevarım gibi kavramlar zaman skalasında tekrar tanımlanmıştır. Buradan da anlaşılacağı gibi zaman skalası bildiklerimizi daha genele taşımıştır.

Zaman skalası diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. $\mathbb{R}$ de tanımlı diferansiyel veya $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri için bir sonuç vermek yerine reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olan T zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem göz önüne alınabilir. Bu nedenle zaman skalası sadece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için değil aynı zamanda mümkün diğer uzaylar içinde sonuç verme imkanı sağlar. İntegral eşitsizlikleri analiz ve uygulamalarında önemli bir rol oynar. Bohner ve Peterson (2001) tarafından bazı temel integral eşitsizliklerinin zaman skalası versiyonları elde edilmiştir. Son zamanlarda zaman skalaları üzerinde de bir çok çalışma yapılmıştır.

Bu tezde amaç, zaman skalasında $p \geq q > 0, a \geq 0$ ve $K > 0$ için

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} K^{(q-p)/p}\, a + \frac{p-q}{p} K^{q/p}$$

eşitsizliği ile $u, b \in C_{rd}, a \in \mathfrak{R}^{+}$ ve

$$u^{\Delta}(t) \leq a(t)u(t) + b(t), \quad t \geq t_0\,, \quad t \in T^{\kappa}$$

olmak üzere

$$u(t) \leq u(t_0)e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a\big(t, \sigma(\tau)\big) b(\tau)\Delta\tau, \;\; t \geq t_0, \;\; t \in T^{\kappa}$$

karşılaştırmalı teoremin incelemesi yapıldıktan sonra diğer bazı lineer olmayan integral eşitsizlikleri üzerine yeni sonuçlar elde etmektir.

2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

Bu çalışmamızda S kümesi ile birlikte M kümesinde belirtilen tüm sürekli fonksiyonların kümesi C(M,S) ile gösterilecektir.

Tanım 2.1: Reel sayıların keyfi, boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.2: $\mathbb{R}$, kapalı, boştan farklı ve $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olduğundan zaman skalasıdır. Benzer şekilde $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$, $[0,1] \cup [2,3]$ kümeleri de birer zaman skalasıdır.

Tanım 2.3: T zaman skalasında σ ileri sıçrama operatörü;

$$\sigma(t) = inf\{s \in T: s > t\} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda $inf\emptyset = supT$ dir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.4: $T = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınsın. $\sigma(2) = ?$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sigma(2) &= inf\{s > 2 : \ s \in [0,1] \cup \{2,3\}\} \\ &= inf\{\{3\}\} \\ &= 3\end{aligned}$$

olacaktır.

Tanım 2.5: Eğer $\sigma(t) > t$ ise o zaman t sağ sıçramalıdır denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.6: $T = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınsın. $t = 1$ için

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= inf\{s > 1 : \ s \in [0,1] \cup \{2,3\}\} \\ &= inf\{\{2,3\}\} \\ &= 2\end{aligned}$$

olup $\sigma(1) = 2 > 1$ yani $\sigma(t) > t$ olduğundan $t = 1$ noktasında sağ sıçrama özelliği sağlanmış olur.

Tanım 2.7: Eğer $\sigma(t) = t$ ve $t < supT$ ise o zaman t sağ yoğundur denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.8: $T = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınsın. $t = \frac{1}{2}$ için

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = inf\left\{s > \frac{1}{2} : \ s \in [0,1] \cup \{2,3\}\right\}$$

$$= inf\left\{(\frac{1}{2}, 1] \cup \{2,3\}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

olduğundan $t = \frac{1}{2}$ noktasında sağ yoğun olma özelliği sağlanır.

Tanım 2.9: T zaman skalasında ρ geri sıçrama operatörü;

$$\rho(t) = sup\{s \in T : s < t\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda $sup\emptyset = infT$ dir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.10: $T = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınsın. $\rho(3) =$?

Çözüm:

$$\rho(3) = sup\big\{s < 3 : s \in [0,1] \cup \{2,3\}\big\}$$

$$= sup\big\{[0,1] \cup \{2\}\big\}$$

$$= 2$$

olacaktır.

Tanım 2.11: Eğer $\rho(t) < t$ ise o zaman t noktası sol sıçramalıdır denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.12: $T =$ $[0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınırsa

$$\rho(2) = sup\big\{s < 2 : s \in [0,1] \cup \{2,3\}\big\}$$

$$= sup\{[0,1]\}$$

$$= 1$$

olup $\rho(2) = 1 < 2$ olduğundan $t = 2$ noktasının sol sıçramalı nokta olduğu görülür.

Tanım 2.13: Eğer $\rho(t) = t$ ve $t > infT$ ise t noktası sol yoğun nokta olarak tanımlanır (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.14: $T = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası ele alınırsa;

$$\rho\left(\frac{1}{2}\right) = sup\left\{s < \frac{1}{2} : s \in [0,1] \cup \{2,3\}\right\}$$

$$= sup\left\{[0, \frac{1}{2})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

olduğundan $t = \frac{1}{2}$ noktası sol yoğun nokta olacaktır.

Tanım 2.15: $\mu : T \to [0, \infty)$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon graininess fonksiyonu olarak tanımlanır. T den türetilmiş T^{κ} kümesi ise; eğer T sol sıçramalı maksimum m noktasına sahip ise $T^{\kappa} = T - \{m\}$, aksi halde $T^{\kappa} = T$ şeklinde tanımlanır (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.16: $T = \mathbb{R}$ ve $T = \mathbb{Z}$ için granininess fonksiyonunu bulalım.

Çözüm: $T = \mathbb{R}$ olsun. O zaman $t \in T$ için

$$\sigma(t) = \inf(t, \infty) = t$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \sigma(t) - t \\ &= t - t \\ &= 0 \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Benzer şekilde $T = \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\big\{\{t+1, t+2, \dots\}\big\} = t + 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \sigma(t) - t \\ &= t + 1 - t \\ &= 1 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.17: $T = [0,1] \cup \{2,3\}$ zaman skalası için

$$\begin{aligned} \rho(3) &= sup\big\{s < 3 : s \in [0,1] \cup \{2,3\}\big\} \\ &= sup\big\{[0,1] \cup \{2\}\big\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} T^{\kappa} &= [0,1] \cup \{2,3\} - \{3\} \\ &= [0,1] \cup \{2\} \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir.

Tanım 2.18: $f : T \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in T^{\kappa}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $s \in U_t = (t - \delta, t + \delta)$ olacak biçimde $\exists \delta > 0$ var ve

$$\big|\big[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\big] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\big| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f nin t deki türevi olan $f^{\Delta}(t)$ türevi vardır denir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.19: Eğer $T = \mathbb{R}$ ise f^{Δ} nin bilinen türev olan f', eğer $T = \mathbb{Z}$ ise f^{Δ} nin ileri fark operatörü Δf olduğu görülür.

Çözüm: $T = \mathbb{R}$ ise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

elde edilebilir. $T = \mathbb{Z}$ ise $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = t + 1 > t$ olduğundan

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}$$

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(t+1) - f(t)}{(t+1) - t} \\ &= f(t+1) - f(t) \\ &= \Delta f(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.20: $f : T \to \mathbb{R}$ fonksiyonu T kümesinde sağ yoğun noktalarda sürekli ve $\rho(t_1) = t_1$ olduğu noktalarda $\lim_{t \to t_1^-}$ var ve sonlu ise f fonksiyonuna 'rd-continuous' denir. Genellikle "rd-continuous" fonksiyonları C_{rd} olarak ifade edilir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.21: $F : T \to \mathbb{R}$, $f : T \to \mathbb{R}$, $\forall t \in T^{\kappa}$

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

eşitliğini sağlayan F fonksiyonuna f fonksiyonunun anti türevi denir ve Cauchy integrali ise $a,\ b \in T$ için

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.22: $T = \mathbb{Z}$ için aşağıdaki belirsiz integral hesaplansın;

$$\int a^t \Delta t$$

Burada $a \neq 1$ bir sabittir.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğunda dolayı

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

eşitliği elde edilir. Burada C keyfi bir sabittir.

Tanım 2.23: $p : T \to \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ için

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$$

eşitliğini sağlayan p fonksiyonları azalan fonksiyonlar olarak tanımlanır. Tüm azalan ve rd-continuous fonksiyonların kümesi ise $\mathfrak{R}$ ile gösterilir. Tüm pozitif azalan fonksiyonların kümesi ise

$$\mathfrak{R}^+ = \{p \in \mathfrak{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0,\ \ \forall t \in T\ için\ \}$$

şeklinde ifade elde edilir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.24: $h > 0$ için silindir dönüşüm, $\xi_h :\ \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} Log(1 + zh) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Log doğal logaritma fonksiyonudur ve

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_h &= \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\} \\ \mathbb{Z}_h &= \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < Im(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

olup $h = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ için $\xi_0(z) = z$ dir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.25: Eğer $p \in\ \mathfrak{R}$ ise o zaman üstel fonksiyon, $s, t \in T$ için

$$e_p(t, s) = exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big) \Delta\tau \right) \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.26: Eğer $p \in\ \mathfrak{R}$ ve $t_0 \in T$ ise o zaman $e_p(., t_0)$ üstel fonksiyonu, T zaman skalasında

$$x^\Delta = p(t)x,\ \ x(t_0) = 1 \tag{2.9}$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür (Bohner and Peterson 2001).

İspat:

1. Durum: $\sigma(t) > t$ olsun.

$${\xi_h}^{-1}(z) = \frac{1}{h}(e^{zh} - 1)$$

eşitliği ve $\forall r,\ s,\ t \in T$ için

$$e_p(t, r) e_p(r, s) = e_p(t, s)$$

ifadesinden

$$
\begin{aligned}
e_p{}^{\Delta}(t,t_0) &= \frac{exp\left(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)}{\mu(t)} \\
&= \frac{exp\left(\int_{t}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{\mu(t)} e_p(t,t_0) \\
&= \frac{e^{\xi_{\mu(t)}(p(t))\mu(t)} - 1}{\mu(t)} e_p(t,t_0) \\
&= \frac{\xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(\tau)}p(t)) - 1}{\mu(t)} e_p(t,t_0) \\
&= p(t)e_p(t,t_0)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

2. Durum: $\sigma(t) = t$ olsun. Eğer $y(t) :=\ e_p(t,t_0)$ ise o zaman

$$
y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) \tag{2.10}
$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilsin. $\forall r,s,t \in T$ için

$$
e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s)
$$

eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| &= \left|e_p(t,t_0) - e_p(s,t_0) - p(t)e_p(t,t_0)(t-s)\right| \\
&= \left|e_p(t,t_0)\right|\left|1 - e_p(s,t) - p(t)(t-s)\right| \\
&= \left|e_p(t,t_0)\right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - e_p(s,t) \right. \\
&\quad \left. + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq \left|e_p(t,t_0)\right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - e_p(s,t) \right| \\
&\quad + \left|e_p(t,t_0)\right| \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq \left|e_p(t,t_0)\right| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - e_p(s,t) \right|
\end{aligned}
$$

$$+\left|e_p(t,t_0)\right|\left|\int_s^t \left[\xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)-\xi_0\big(p(t)\big)\right]\Delta\tau\right|$$

ifadesi elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun. Şimdi son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin t nin bir U komşuluğundaki $\varepsilon|t-s|$ ifadesine eşit veya daha küçük olduğu gösterilirse ispat tamamlanacaktır. $\sigma(t) = t$ ve $p \in C_{rd}$ olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\lim_{\tau\to t} \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big) = \xi_0\big(p(t)\big)$$

Bu ifadede t nin bir U_1 komşuluğu vardır öyle ki $\forall\tau \in U_1$ için

$$\left|\xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)-\xi_0\big(p(t)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{3e_p(t,t_0)}$$

eşitsizliği sağlanır. $s \in U_1$ olarak alınsın. O halde

$$\left|e_p(t,t_0)\right|\left|\int_s^t \left[\xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)-\xi_0\big(p(t)\big)\right]\Delta\tau\right| \le \frac{\varepsilon}{3}|t-s|$$

olduğu görülür. Şimdi ise L'Hospital kuralı kullanılarak

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-z-e^{-z}}{z} = 0$$

eşitliği elde edilebilir. Bu nedenle t nin bir U_2 komşuluğu vardır öyle ki, eğer $s \le t$ ve $s \in U_2$ ise o zaman

$$\frac{1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - e_p(s,t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau} < \epsilon^*$$

ifadesi yazılabilir. Burada

$$\epsilon^* = min\left\{1,\frac{\epsilon}{1+3\left|p(t)e_p(t,t_0)\right|}\right\}$$

dır. $s \in U_1 \cap U_2$ olsun. O halde

$$\left|e_p(t,t_0)\right|\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau - e_p(s,t)\right| \le \left|e_p(t,t_0)\right|\epsilon^*\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau\right|$$

$$\le \left|e_p(t,t_0)\right|\epsilon^*\left|\left\{\int_s^t \left[\xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)-\xi_0\big(p(t)\big)\right]\Delta\tau\right|\right.$$

$$\left.+p(t)|t-s|\right\}$$

$$\leq |e_p(t,t_0)| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))]\Delta\tau \right|$$
$$+|e_p(t,t_0)|\epsilon^*|p(t)||t-s|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + |e_p(t,t_0)|\epsilon^*|p(t)||t-s|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + \frac{\varepsilon}{3}|t-s| = \frac{2\varepsilon}{3}|t-s|$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.27: Eğer $p \in \Re$ ise

i) $e_p(t,t) = 1$ ve $e_0(t,s) = 1$

ii) $e_p(\sigma(t),s) = \big(1+\mu(t)p(t)\big)e_p(t,s)$

iii) Eğer T^κ kümesinde $p \in \Re^+$ ise o zaman $\forall t \in T$ için $e_p(t,t_0) > 0$ olur (Bohner and Peterson 2001).

İspat:

i) Aşikardır.

ii) Eğer f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f\big(\sigma(t)\big) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten yola çıkılarak

$$\begin{aligned} e_p(\sigma(t),s) &= e_p^\sigma(t,s) \\ &= e_p(t,s) + \mu(t)e_p^\Delta(t,s) \\ &= e_p(t,s) + \mu(t)p(t)\, e_p(t,s) \\ &= (1+\mu(t)p(t))e_p(t,s) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

iii) $1+\mu(t)p(t) > 0$ olduğundan dolayı $\forall t \in T^\kappa$ için

$$Log[1+\mu(t)p(t)] \in \mathbb{R}$$

olacaktır ve bu son ifadeden dolayı da $\forall t \in T^\kappa$ için

$$\xi_{\mu(\tau)}p(\tau) \in \mathbb{R}$$

ifadesi elde edilir. (2.8) eşitliğinden, $\forall t \in T^\kappa$ için

$$e_p(t,t_0) > 0$$

olduğu görülür.

Uyarı 2.28: Açıkça üstel fonksiyon $s,t \in \mathbb{R}$ için, $T = \mathbb{R}$ ise

$$
\begin{aligned}
e_p(t,s) &= e^{\int_s^t p(\tau)\Delta\tau} \\
e_\alpha(t,s) &= e^{\alpha(t-s)} \qquad\qquad (2.11) \\
e_\alpha(t,0) &= e^{\alpha t}
\end{aligned}
$$

şeklinde verilebilir. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit ve $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur. $s, t \in \mathbb{Z}$ ile $s < t$ için $T = \mathbb{Z}$ ise, üstel fonskiyon

$$
\begin{aligned}
e_p(t,s) &= \prod_{\tau=s}^{t-1} [1 + p(\tau)] \\
e_\alpha(t,s) &= (1+\alpha)^{t-s} \qquad\qquad (2.12) \\
e_\alpha(t,0) &= (1+\alpha)^t
\end{aligned}
$$

şeklinde olacaktır. Burada $\alpha \neq -1$ bir sabit ve $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $p(t) \neq -1$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.29: Eğer $p \in \Re$ ve $a, b, c \in T$ ise o zaman

$$
\int_a^b p(t) e_p\big(c, \sigma(t)\big) \Delta t = e_p(c,a) - e_p(c,b) \qquad\qquad (2.13)
$$

dir (Bohner and Peterson 2001)

İspat:

$$
\begin{aligned}
p(t) e_p\big(c, \sigma(t)\big) &= p(t) e_{\theta p}(\sigma(t), c) \\
&= p(t)[1 + \mu(t)(\theta p)(t)] e_{\theta p}(t,c) \\
&= p(t)[1 - \frac{\mu(t)p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}]\, e_{\theta p}(t,c) \\
&= p(t) \frac{1}{1 + \mu(t)p(t)} e_{\theta p}(t,c) \\
&= -(\theta p)(t) e_{\theta p}(t,c) \\
&= -{e_{\theta p}}^{\Delta}(t,c) \\
&= \big[e_p(c,t)\big]^{\Delta}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Burada Δ, t değişkenine göre türevi ifade etmektedir. Bu nedenle

$$
\begin{aligned}
\int_a^b p(t) e_p\big(c, \sigma(t)\big) \Delta t &= -\int_a^b \big[e_p(c,.)\big]^{\Delta}(t) \Delta t \\
&= e_p(c,a) - e_p(c,b)
\end{aligned}
$$

olur ki buda istenilen sonucu vermektedir.

Teorem 2.30: $t_0 \in T^{\kappa}$ ve $w : T \times T^{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $t > t_0$ ve $t \in T^{\kappa}$ olmak üzere (t, t) aralığında sürekli olsun. $w_1^{\Delta}(t, .), [t_0, \sigma(t)]$ aralığında rd-continuous olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğu var, öyle ki $\tau \in [t_0, \sigma(t)], \forall s \in U$ için

$$\left|w(\sigma(t), \tau) - w(s, \tau) - w_1^{\Delta}(t, \tau)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \qquad (2.14)$$

eşitsizliği sağlansın. Burada w_1^{Δ}, w nin birinci değişkene göre türevini ifade etmektedir. O halde

$$v(t) := \int_{t_0}^{t} w(t, \tau)\Delta\tau \qquad (2.15)$$

eşitliğinden

$$v^{\Delta}(t) = \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t, \tau)\Delta\tau + (\sigma(t), t) \qquad (2.16)$$

olduğu görülebilir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.31 (Karşılaştırmalı Teorem): $u, b \in C_{rd}$ ve $a \in \mathfrak{R}^{+}$ olsun. O zaman $\forall t \in T$ için

$$u^{\Delta}(t) \leq a(t)u(t) + b(t) \qquad (2.17)$$

eşitsizliğinden, $\forall t \in T$ için

$$u(t) \leq u(t_0)e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a\big(t, \sigma(\tau)\big)b(\tau)\Delta\tau \qquad (2.18)$$

ifadesi elde edilebilir (Bohner and Peterson 2001).

İspat:

$$\begin{aligned}
[ue_{\theta a}(., t_0)]^{\Delta}(t) &= u^{\Delta}(t)e_{\theta a}(\sigma(t), t_0) + u(t)(\theta a)(t)e_{\theta a}(t, t_0) \\
&= u^{\Delta}(t)e_{\theta a}(\sigma(t), t_0) + u(t)\frac{(\theta a)(t)}{1 + \mu(t)(\theta a)(t)}e_{\theta a}(\sigma(t), t_0) \\
&= [u^{\Delta}(t) - \theta(\theta a)(t)u(t)]e_{\theta a}(\sigma(t), t_0) \\
&= [u^{\Delta}(t) - a(t)u(t)]e_{\theta a}(\sigma(t), t_0)
\end{aligned}$$

dır. $a \in \mathfrak{R}^{+}$ olduğundan $\theta a \in \mathfrak{R}^{+}$ olur. $\theta a \in \mathfrak{R}^{+}$ olduğundan $e_{\theta a} > 0$ olur. O halde

$$u(t)e_{\theta a}(t, t_0) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} [u^{\Delta}(\tau) - a(\tau)u(\tau)]e_{\theta a}(\sigma(\tau), t_0)\Delta\tau$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} b(\tau)e_{\ominus a}(\sigma(\tau),t_0)\Delta\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} e_a(t_0,\sigma(\tau))b(\tau)\Delta\tau$$

olduğu görülür. Buradan da istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 2.32 (Gronwall Eşitsizliği): $y,\ f \in C_{rd}$ ve $p \in \Re^+,\ p \geq 0$ olsun. O halde $\forall t \in T$ için

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau$$

eşitsizliğinden, $\forall t \in T$ için

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau)p(\tau)\Delta\tau$$

ifadesi elde edilir (Bohner and Peterson 2001).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau$$

şeklinde ifade edilsin. O zaman $z(t_0) = 0$ ve

$$z^{\Delta}(t) = y(t)p(t) \leq [f(t) + z(t)]p(t) = p(t)z(t) + p(t)f(t)$$

olduğu görülebilir. Karşılaştırmalı teorem kullanılarak $\forall t \in T$ için

$$z(t) \leq \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau)p(\tau)\Delta\tau$$

eşitsizliği elde edilebilir ve

$$y(t) \leq f(t) + z(t)$$

ifadesinden yararlanılarak istenilen sonuca ulaşılır.

3. ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde p,q,r,m reel sabitler, $p \geq q > 0$, $p \geq m > 0$, $p \geq r > 0$ ve $t \geq t_0$ $t_0 \in T^\kappa$ olarak ele alınacaktır.

Lemma 3.1: $a \geq 0$ olsun. Bu durumda $\forall K > 0$ için

$$a^{q/p} \leq \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \tag{3.1}$$

dir (Li and Sheng 2007).

İspat: Eğer $a = 0$ ise o zaman kolaylıkla (3.1) ifadesinin sağlandığı görülebilir. Bu nedenle $a > 0$ olması durumunda (3.1) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. O halde $\forall K > 0$ için

$$f(K) = \frac{q}{p} K^{(q-p)/p} a + \frac{p-q}{p} K^{q/p} \tag{3.2}$$

eşitliğini ele alırsak, bu eşitlikten

$$f'(K) = \frac{q(p-q)}{p^2} K^{q-2p/p} (K - a) \tag{3.3}$$

olduğu elde edilir. Bu son eşitsizlikten dolayı da

$$\begin{aligned} f'(K) &\geq 0, \qquad K > a \\ f'(K) &= 0, \qquad K = a \\ f'(K) &\leq 0, \qquad 0 < K < a \end{aligned} \tag{3.4}$$

ifadeleri elde edilir. Bu nedenle

$$f(K) \geq f(a) = a^{q/p} \tag{3.5}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece Lemma 3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2: u, a, b, g, $h \in C_{rd}$, $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $\forall K > 0$, $t \in T^\kappa$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} [g(\tau)u(\tau) + h(\tau)]\Delta\tau \tag{3.6}$$

eşitsizliğinden yararlanarak

$$u(t) \leq \{a(t) + b(t)F(t)e_B(t,t_0)\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

olduğu görülür. Burada

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \left[g(\tau) \left(\frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(\tau)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \right) + h(\tau) \right] \Delta\tau \tag{3.8}$$

ve $\forall t \in T^{\kappa}$ için

$$B(t) = \frac{b(t)g(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \tag{3.9}$$

dır (Li 2006).

İspat: Açıkça eğer $t = t_0$ ise o zaman (3.6) eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle ispatın $t > t_0$, $t \in T^{\kappa}$ için yapılması yeterli olacaktır. $z(t)$ fonksiyonu

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} [g(\tau)u(\tau) + h(\tau)]\Delta\tau \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlansın. Bu nedenle

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t) \tag{3.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.1 ve son elde edilen eşitsizlikten, $\forall K > 0$ için

$$u(t) \leq \left(a(t) + b(t)z(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} + \frac{b(t)z(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \tag{3.12}$$

olduğu görülür. (3.10) ve (3.12) eşitsizlikleri birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \int_{t_0}^{t} \left[g(\tau) \left(\frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(\tau)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} + \frac{b(\tau)z(\tau)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \right) + h(\tau) \right] \\ &= F(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)g(\tau)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} z(\tau)\, \Delta\tau \end{aligned} \tag{3.13}$$

olduğu görülür. Burada $F(t)$ fonksiyonu (3.8) eşitliğinde tanımlandığı gibidir. Ayrıca $F(t)$ negatif olmayan, sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

1. Durum: $F(t) > 0$ olsun. (3.13) ifadesinden

$$\frac{z(t)}{F(t)} \leq 1 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)g(\tau)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \frac{z(\tau)}{F(\tau)} \Delta\tau \tag{3.14}$$

olduğu görülür.

$$y(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)g(\tau)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \frac{z(\tau)}{F(\tau)} \Delta\tau \tag{3.15}$$

olarak ele alınırsa

$$y^{\Delta}(t)=\frac{b(t)g(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}\frac{z(t)}{F(t)}\leq\frac{b(t)g(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}y(t) \tag{3.16}$$

olduğu görülür. Karşılaştırmalı teorem ve $y(t_0)=1$ eşitliği ile (3.16) ifadesinden

$$y(t)\leq\ e_B(t,t_0) \tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $B(t)$ ise (3.9) eşitliğinde tanımlandığı gibidir. (3.14), (3.15) ve (3.17) ifadelerinden

$$z(t)\leq F(t)e_B(t,t_0)$$

olduğu görülür. Bu durumda elde edilen son eşitsizlik ve (3.11) eşitsizliğinden (3.7) eşitsizliği kolayca elde edilir.

2. Durum: $F(t)\equiv 0$ olsun. $F(t)$ fonksiyonunun tanımı ve teorem (3.2) den (3.7) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Sonuç 3.3: $T=\mathbb{R}$ ve $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t)\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ olsun. O halde $\forall K>0, t\in\mathbb{R}_+$ için

$$u^p(t)\leq a(t)+b(t)\int_0^t[g(s)u(s)+h(s)]ds$$

ifadesinden

$$u(t)\leq\left\{a(t)+b(t)\bar{F}(t)exp\left(\int_0^t\frac{b(s)g(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}ds\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\bar{F}(t)=\int_0^t\left[g(s)\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{P}}+\frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}\right)+h(s)\right]ds$$

dir (Li 2006).

Sonuç 3.4: $T=\mathbb{Z}$ ve $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t)$; $t\in\mathbb{N}_0$ için negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. O halde $\forall K>0, t\in\mathbb{N}_0$ için

$$u^p(t)\leq a(t)+b(t)\sum_{s=0}^{t-1}[g(s)u(s)+h(s)]$$

eşitsizliğinden

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)\check{F}(t) \prod_{s=0}^{t-1} \left(1 + \frac{b(s)g(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\check{F}(t) = \sum_{s=0}^{t-1} \left[g(s)\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}\right) + h(s)\right]$$

dir (Li 2006).

Teorem 3.5: $u,\ a,\ b,\ g,\ h \in C_{rd}$, $u(t)\,, a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. O halde $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} [g(\tau)u^p(\tau) + h(\tau)u^q(\tau)]\Delta\tau \tag{3.18}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \{a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} \left[a(\tau)g(\tau) + h(\tau)\left(\frac{K(p-q) + qa(\tau)}{pK^{\frac{p-q}{p}}}\right)\right] \tag{3.19}$$
$$\times\, e_F(t, \sigma(\tau))\Delta\tau\}^{1/p}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$F(t) = b(t)\left(g(t) + \frac{qh(t)}{pK^{\frac{p-q}{p}}}\right) \tag{3.20}$$

dır (Li and Sheng 2007).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} [g(\tau)u^p(\tau) + h(\tau)u^q(\tau)]\Delta\tau \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $z(t_0) = 0$ olur ve (3.18) eşitsizliği ise $t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t) \tag{3.22}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Lemma 3.1 kullanılarak (3.22) eşitsizliğinden $\forall K > 0$ için

$$u^q(t) \leq (a(t) + b(t)z(t))^{q/p}$$
$$\leq \frac{K(p-q) + qa(t)}{pK^{(p-q)/p}} + \frac{qb(t)z(t)}{pK^{(p-q)/p}} \tag{3.23}$$

olduğu kolayca görülür. (3.21) – (3.23) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) &= g(t)u^{p}(t) + h(t)u^{q}(t) \\
&\leq g(t)[\,a(t) + b(t)z(t)] + h(t)\frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}} + \frac{qb(t)z(t)}{pK^{(p-q)/p}} \qquad (3.24) \\
&= \left[a(t)g(t) + \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}h(t)\right] + F(t)z(t)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Burada $F(t)$, (3.20) eşitliğinde tanımlatıldığı gibidir. O halde $F(t) \in \mathfrak{R}^{+}$ olduğu kolayca görülür. Bu nedenle Karşılaştırmalı teorem ile $z(t_0) = 0$ eşitliği ve (3.24) ifadesinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
z(t) \leq \int_{t_0}^{t} \left[a(\tau)g(\tau) + \frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}h(\tau)\right] e_F\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau \qquad (3.25)
$$

elde edilir. İstenilen (3.19) eşitsizliğine (3.22) ve (3.25) ifadelerinden kolaylıkla ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.6: $T = \mathbb{R}$ ve $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t) \in C(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}_{+})$ olsun. O halde $\forall K > 0, t \in \mathbb{R}_{+}$ için

$$
u^{p}(t) \leq a(t) + b(t)\int_{0}^{t} [g(s)u^{p}(s) + h(s)u^{q}(s)]ds \qquad (3.26)
$$

ifadesinden

$$
\begin{aligned}
u(t) \leq \{a(t) + b(t)\int_{0}^{t} &\left[a(\tau)g(\tau) + h(\tau)\left(\frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right] \\
&\times exp\left(\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right)d\tau\Bigg\}^{1/P} \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $F(t)$, Teorem 3.5 de tanımlatıldığı gibidir (Li and Sheng 2007).

Sonuç 3.7: $T = \mathbb{Z}$ ve $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t)$; $t \in \mathbb{N}_0$ için negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. O halde $\forall K > 0, t \in \mathbb{N}_0$ için

$$
u^{p}(t) \leq a(t) + b(t)\sum_{s=0}^{t-1} [g(s)u^{p}(s) + h(s)u^{q}(s)] \qquad (3.28)
$$

ifadesinden

$$
u(t) \leq \{a(t) + b(t)\sum_{\tau=0}^{t-1} \left[a(\tau)g(\tau) + h(\tau)\left(\frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right]
$$

$$\times \prod_{s=\tau+1}^{t-1}(1+F(s))\Bigg\}^{1/p} \tag{3.29}$$

olduğu görülür. Burada $F(t)$, Teorem 3.5 tanımlandığı gibidir (Li and Sheng 2007).

Sonuç 3.8: $u, h \in C_{rd},\ u(t)$ ve $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. Eğer $\beta \geq 0$ bir gerçel sayı ise o halde $\forall K > 0,\ t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq \beta + \int_{t_0}^{t} h(\tau)u^q(\tau)\Delta\tau \tag{3.30}$$

ifadesi

$$u(t) \leq \left\{\frac{1}{q}\left[(K(p-q)+q\beta)e_{\bar{F}}(t,t_0) - K(p-q)\right]\right\}^{1/p} \tag{3.31}$$

eşitsizliğine dönüşecektir. Burada

$$\bar{F}(t) = \frac{qh(t)}{pK^{(p-q)/p}} \tag{3.32}$$

dır (Li and Sheng 2007).

İspat: Teorem 3.5 den yararlanılarak (3.30) eşitsizliğinden $\forall K > 0,\ t \in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq \left\{\beta + \int_{t_0}^{t} h(\tau)\frac{K(p-q)+q\beta}{pK^{(p-q)/p}}e_{\bar{F}}\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau\right\}^{1/p} \\
&\leq \left\{\beta + \left(\frac{K(p-q)}{q}+\beta\right)\int_{t_0}^{t} \bar{F}(t)e_{\bar{F}}\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau\right\}^{1/p} \\
&\leq \left\{\beta + \left(\frac{K(p-q)}{q}+\beta\right)\left[e_{\bar{F}}(t,t_0) - e_{\bar{F}}(t,t)\right]\right\}^{1/p} \qquad (3.33) \\
&\leq \left\{\beta + \left(\frac{K(p-q)}{q}+\beta\right)e_{\bar{F}}(t,t_0) - \frac{K(p-q)}{q} - \beta\right\}^{1/p} \\
&\leq \left\{\frac{1}{q}\left[(K(p-q)+q\beta)e_{\bar{F}}(t,t_0) - K(p-q)\right]\right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Teorem 2.29 dan dolayı üçüncü denklem ve Teorem 2.27 nin i. şıkkından dolayı da dördüncü denklem sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.9: Aşağıdaki başlangıç değer problemi $t \in T^{\kappa}$ için ele alınsın:

$$(u^p(t))^{\Delta} = H\big(t, u^q(t)\big), \quad u(t_0) = C \tag{3.34}$$

Burada $C,\ p$ ve q sabitler, $p \geq q > 0$ ve $H : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur. $t \in T^{\kappa}$ için

$$\left|H\big(t, u^q(t)\big)\right| \leq h(t)|u^q(t)| \tag{3.35}$$

olsun. Eğer $u(t)$, (3.34) başlangıç değer probleminin çözümü ise, o halde $\forall K > 0$ ve $t \in T^{\kappa}$ için

$$|u(t)| \leq \left\{\frac{1}{q}\left[(K(p-q) + q|C|^p)e_{\bar{F}}(t, t_0) - K(p-q)\right]\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.36}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $h(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $\bar{F}(t)$, (3.32) ifadesinde tanımlandığı gibidir.

Gerçekten de (3.34) ün bir çözümü olan $u(t)$, $t \in T^{\kappa}$ için aşağıdaki denklemi sağlar:

$$u^p(t) = C^p + \int_{t_0}^{t} H\big(t, u^q(t)\big)\Delta\tau \tag{3.37}$$

(3.35) eşitsizliğinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$|u^p(t)| \leq |C|^p + \int_{t_0}^{t} h(\tau)|u(\tau)|^q \Delta\tau \tag{3.38}$$

olduğu kolayca görülebilir. Son bulunan (3.38) ifadesi ve Sonuç 3.8 den istenilen (3.36) ifadesi elde edilir.

Teorem 3.10: $u, a, b, g, h_i \in C_{rd}$, $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ ve $h_i(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar ve $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$, $p \geq q_i > 0$ için pozitif bir gerçel sayının q_1, $q_2, \dots, q_n$ şeklinde dizisi mevcutsa, o halde $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\int_{t_0}^{t}\left[g(\tau)u^p(\tau) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)u^{q_i}(\tau)\right]\Delta\tau \tag{3.39}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)\int_{t_0}^{t}\left[a(\tau)g(\tau) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)\left(\frac{K(p-q_i) + q_i a(\tau)}{pK^{(p-q_i)/p}}\right)\right]\right.$$
$$\left. \times\, e_{F^*}(t, \sigma(\tau))\Delta\tau\right\}^{1/p} \tag{3.40}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$F^*(t) = b(t)\left(g(t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i h_i(t)}{pK^{(p-q_i)/p}}\right) \tag{3.41}$$

dir (Li and Sheng 2007).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \left[g(\tau)u^p(\tau) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)u^{q_i}(\tau) \right] \Delta\tau \tag{3.42}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $z(t_0) = 0$ eşitliği ile Teorem 3.5 in ispatındaki (3.22) eşitsizliği yeniden yazılabilir ve $\forall K > 0$ için, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$u^{q_i}(t) \leq \frac{K(p - q_i) + q_i a(t)}{pK^{\frac{p-q_i}{p}}} + \frac{q_i b(t) z(t)}{pK^{\frac{p-q_i}{p}}} \tag{3.43}$$

olduğu görülür. Bu nedenle $t \in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= g(t)u^p(t) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t)u^{q_i}(t) \\ &\leq g(t)[a(t) + b(t)z(t)] \sum_{i=1}^{n} h_i(t) \frac{K(p - q_i) + q_i a(t)}{pK^{\frac{p-q_i}{p}}} + \frac{q_i b(t) z(t)}{pK^{\frac{p-q_i}{p}}} \qquad (3.44) \\ &= \left[a(t)g(t) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t) \frac{K(p - q_i) + q_i a(t)}{pK^{\frac{p-q_i}{p}}} \right] + F^*(t)z(t) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $F^*(t)$, (3.41) eşitliğinde tanımlandığı gibidir. Teoremin kalan ispatı, Teorem 3.5 in ispatındaki benzer yolla yapılır.

Teorem 3.11: $u, a, b, g, h \in C_{rd}$, $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar, $w(t, s)$ Teorem 2.30 da tanımlandığı gibi öyle ki $s \leq t$ ve $t, s \in T$ için $w(t, s) \geq 0$ ve $w_1^{\Delta}(t, s) \geq 0$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğunda $\tau \in [t_0, \sigma(t)]$ var ve $s \in U$ için

$$\left| w(\sigma(t), \tau) - w(s, \tau) - w_1^{\Delta}(t, \tau)(\sigma(t) - s) \right| \left| g(\tau)u^p(\tau) + h(\tau)u^q(\tau) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \tag{3.45}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} w(t, \tau)[g(\tau)u^p(\tau) + h(\tau)u^q(\tau)] \Delta\tau \tag{3.46}$$

ifadesi

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} e_A\big(t, \sigma(\tau)\big) B(\tau) \Delta\tau \right\}^{1/p} \tag{3.47}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada $t \in T^{\kappa}$ için

$$A(t) = w(\sigma(t), t) b(t) \left(g(t) + \frac{qh(t)}{pK^{(p-q)/p}} \right) + \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t, \tau) b(\tau) \left(g(\tau) + \frac{qh(\tau)}{pK^{(p-q)/p}} \right) \Delta\tau$$

$$B(t) = w(\sigma(t), t) \left[a(t) g(t) + h(t) \frac{K(p-q) + qa(t)}{pK^{(p-q)/p}} \right] \tag{3.48}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t, \tau) b(\tau) \left(a(\tau) g(\tau) + h(\tau) \frac{K(p-q) + qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}} \right) \Delta\tau$$

dır (Li and Sheng 2007).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, \tau) \Delta\tau \tag{3.49}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $t \in T^{\kappa}$ için

$$k(t, \tau) = w(t, \tau)[g(\tau) u^p(\tau) + h(\tau) u^q(\tau)] \tag{3.50}$$

dır. O halde $z(t_0) = 0$ dır. Teorem 3.5 in ispatındaki gibi (3.22) ve (3.23) eşitsizlikleri kolayca elde edilebilir . (3.50) eşitliğinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$k(\sigma(t), t) = w(\sigma(t), t)[g(t) u^p(t) + h(t) u^q(t)] \tag{3.51}$$

$$k_1^{\Delta}(t, \tau) = w_1^{\Delta}(t, \tau)[g(\tau) u^p(\tau) + h(\tau) u^q(\tau)] \tag{3.52}$$

ifadeleri elde edilir. Bu nedenle (3.45) koşulu altında Teorem 2.27 kullanılarak (3.49)-(3.52) ifadelerinden, (3.22) ve (3.23) eşitsizliklerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$z^{\Delta}(t) = k(\sigma(t), t) + \int_{t_0}^{t} k_1^{\Delta}(t, \tau) \Delta\tau$$

$$= w(\sigma(t), t)[g(t) u^p(t) + h(t) u^q(t)] + \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t, \tau)[g(\tau) u^p(\tau) + h(\tau) u^q(\tau)] \Delta\tau$$

$$\leq w(\sigma(t), t) \left[a(t) g(t) + h(t) \left(\frac{K(p-q) + qa(t)}{pK^{(p-q)/p}} \right) + b(t) \left(g(t) + \frac{qh(t)}{pK^{(p-q)/p}} \right) z(t) \right]$$

$$+\int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau)\left(a(\tau)g(\tau)+h(\tau)\left(\frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right.$$

$$\left.b(\tau)\left(g(\tau)+\frac{qh(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)z(\tau)\right)\Delta\tau \;+\left[w(\sigma(t),t)b(t)\left(g(t)+\frac{qh(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau)b(\tau)\left(g(\tau)+\frac{qh(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\Delta\tau\right]z(t)$$

$$+w(\sigma(t),t)\left[a(t)g(t)+h(t)\left(\frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right]$$

$$+\int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau)\left[a(\tau)g(\tau)+h(\tau)\left(\frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right]\Delta\tau$$

$$=A(t)z(t)+B(t) \tag{3.53}$$

eşitliği elde edilir. Bu nedenle Karşılaştırmalı teorem ve $z(t_0)=0$ eşitliği kullanılarak $t\in T^{\kappa}$ için

$$z(t)\le\int_{t_0}^{t} e_A\big(t,\sigma(\tau)\big)B(\tau)\Delta\tau \tag{3.54}$$

olduğu görülür. (3.22) ve (3.53) ifadelerinden istenilen (3.47) eşitsizliğine ulaşılır. Böylece Teorem 3.11 in ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.12: $T=\mathbb{R}$ ve $u(t),\ a(t),\ b(t),\ g(t),\ h(t)\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ olsun. Eğer $t,s\in\ \mathbb{R}_+,\ s\le t$ için $w(t,s)$ ve $(\lambda/\lambda t)w(t,s)$ kısmi türevli ve reel değerli negatif olmayan fonksiyonlar ise o zaman $\forall K>0,\ t\in\mathbb{R}_+$ için

$$u^p(t)\le a(t)+b(t)\int_0^t w(t,\tau)[g(\tau)u^p(\tau)+h(\tau)u^q(\tau)]d\tau \tag{3.55}$$

ifadesinden

$$u(t)\le\left\{a(t)+b(t)\int_0^t exp\left(\int_\tau^s \bar{A}(s)ds\right)\bar{B}(\tau)\Delta\tau\right\}^{1/p} \tag{3.56}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t\in\mathbb{R}_+$ için

$$\bar{A}(t)=w(t,t)b(t)\ \left(g(t)+\frac{qh(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right)+\int_0^t\frac{\lambda w(t,\tau)}{\lambda t}b(\tau)\left(g(\tau)+\frac{qh(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\Delta\tau$$

$$\bar{B}(t) = w(t,t)\left[a(t)g(t) + h(t)\frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{\frac{p-q}{p}}}\right] \tag{3.57}$$

$$+\int_{0}^{t}\frac{\lambda w(t,\tau)}{\lambda t}\left[a(\tau)g(\tau)+h(\tau)\frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right]d\tau$$

dır (Li and Sheng 2007).

Sonuç 3.13: $T=\mathbb{Z}$ ve $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t)$; $t \in \mathbb{N}_0$ için negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. Eğer $w(t,s)$ ve $\Delta_1 w(t,s), s \leq t$ ile birlikte $t,\ s \in \mathbb{N}_0$ için reel değerli azalmayan fonksiyonlar ise o zaman $\forall K>0$, $t \in \mathbb{N}_0$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\sum_{\tau=0}^{t-1} w(t,\tau)[g(\tau)u^p(\tau) + h(\tau)u^q(\tau)] \tag{3.58}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t)\sum_{\tau=0}^{t-1}\tilde{B}(\tau)\prod_{s=\tau+1}^{t-1}\left(1+\tilde{A}(s)\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.59}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $s \leq t$ ile $t, s \in \mathbb{N}_0$ için

$$\Delta_1 w(t,s) = w(t+1,s) - w(t,s),$$

$$\tilde{A}(t) = w(t+1,t)b(t)\left(g(t)+\frac{qh(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) + \sum_{\tau=0}^{t-1}\Delta_1 w(t,\tau)b(\tau)\left(g(\tau)+\frac{qh(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right)$$

$$\tilde{B}(t) = w(t+1,t)\left[a(t)g(t)+h(t)\left(\frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\right]$$

$$+\sum_{\tau=0}^{t-1}\Delta_1 w(t,\tau)\left[a(\tau)g(\tau)+h(\tau)\frac{K(p-q)+qa(\tau)}{pK^{(p-q)/p}}\right] \tag{3.60}$$

dır (Li and Sheng 2007).

Sonuç 3.14: $\alpha \geq 0$ bir sabit, $u(t)$ ve $w(t,s)$ fonskiyonları Teorem 3.11 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğunda $\tau \in [t_0, \sigma(t)]$ var ve $s \in U$, $\forall K > 0$ $t \in T^{\kappa}$ için

$$\left|u^q(\tau)\left[w(\sigma(t),\tau) - w(s,\tau) - w_1^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t)-s\right]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t)-s| \tag{3.61}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa

$$u^p(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} w(t,\tau)u^q(\tau)\Delta\tau \tag{3.62}$$

ifadesinden

$$u(t) \le \left\{\frac{1}{q}[(K(p-q)+q\alpha)e_{\hat{A}}(t,t_0) - K(p-q)]\right\}^{1/p} \tag{3.63}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\hat{A}(t) = \frac{q}{pK^{(p-q)/p}}\left(w(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\right) \tag{3.64}$$

dır (Li and Sheng 2007).

İspat: $b(t)=1,\ g(t)=0$ ve $h(t)=1$ eşitlikleri Teorem 3.11 de yerine yazılırsa $t \in T^{\kappa}$ için

$$A(t) = \frac{q}{pK^{(p-q)/p}}\left(w(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\right) := \hat{A}(t)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{K(p-q)+q\alpha}{pK^{(p-q)/p}}\left\{w(\sigma(t),t) + \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\right\} \\ &= \frac{K(p-q)+q\alpha}{q}\hat{A}(t) \end{aligned} \tag{3.65}$$

olduğu görülür. Bu nedenle Teorem 3.11 kullanılarak (3.65) eşitliklerinden $\forall K > 0$ $t \in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned} u(t) &\le \left\{\alpha + \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))B(\tau)\Delta\tau\right\}^{1/p} \\ &= \left\{\alpha + \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(\tau))\frac{K(p-q)+q\alpha}{q}\hat{A}(\tau)\Delta\tau\right\}^{1/p} \\ &= \left\{\alpha + \frac{K(p-q)+q\alpha}{q}\int_{t_0}^{t} e_{\hat{A}}(t,\sigma(\tau))\hat{A}(\tau)\Delta\tau\right\}^{1/p} \qquad (3.66) \\ &= \left\{\alpha + \frac{K(p-q)+q\alpha}{q}[e_{\hat{A}}(t,t_0) - e_{\hat{A}}(t,t)]\right\}^{1/p} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{K(p-q)+q\alpha}{q} e_{\hat{A}}(t,t_0) - \frac{K(p-q)}{q} \right\}^{1/p}$$

eşitsizliği kolayca elde edilebilir. Böylece Sonuç 3.14 ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.15: $u, a, b, g, h_i \in C_{rd}$, $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ ve $h_i(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar ve $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$, $p \geq q_i > 0$ için pozitif bir gerçel sayının $q_1, q_2, \dots, q_n$ şeklinde bir dizisi mevcut olsun. $w(t,s)$ Teorem 2.30 da tanımlandığı gibi öyle ki $s \leq t$ ve $t, s \in T$ için $w(t,s) \geq 0$ ve $w_1^{\Delta}(t,s) \geq 0$ olacak şekilde ele alınsın. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğunda $\tau \in [t_0, \sigma(t)]$ var ve $s \in U$, $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$\left| \left[w(\sigma(t),\tau) - w(s,\tau) - w_1^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t)-s) \right] \left[g(\tau)u^p(\tau) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)u^{q_i}(\tau) \right] \right| \\ \leq \varepsilon |\sigma(t)-s| \quad (3.67)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} w(t,\tau) \left[[g(\tau)u^p(\tau) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)u^{q_i}(\tau) \right] \Delta\tau \quad (3.68)$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} e_{A^*}(t,\sigma(\tau)) B^*(\tau) \Delta\tau \right\}^{1/p} \quad (3.69)$$

eşitsizliği elde edilebilir. Burada $t \in T^{\kappa}$ için

$$A^*(t) = w(\sigma(t),t)b(t) \left(g(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i h_i(t)}{pK^{(p-q_i)/p}} \right)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau) b(\tau) \left(g(\tau) + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i h_i(\tau)}{pK^{(p-q_i)/p}} \right) \Delta\tau,$$

$$B^*(t) = w(\sigma(t),t) \left[a(t)g(t) + \sum_{i=1}^{n} h_i(t) \frac{K(p-q_i)+q_i a(t)}{pK^{(p-q_i)/p}} \right] \quad (3.70)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} w_1^{\Delta}(t,\tau) b(\tau) \left[a(\tau)g(\tau) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau) \frac{K(p-q_i)+q_i a(\tau)}{pK^{(p-q_i)/p}} \right] \Delta\tau$$

dır (Li and Sheng 2007).

Teorem 3.16: $u,\ a,\ b,\ g,\ h \in C_{rd},\ u(t)\ ,a(t),\ b(t),\ f(t),\ g(t)$ ve $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. O halde $\forall K > 0,\ t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} \left[f(s)u^q(s) + g(s)u^r(s) + \int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s \qquad (3.71)$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} B(\tau)e_{A(\tau)}\big(t, \sigma(\tau)\big)\Delta\tau \right\}^{1/p} \qquad (3.72)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t \in T^{\kappa}$ için

$$A(t) = \left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}f(t) + \frac{r}{p}K^{(r-p)/p}g(t)\right] b(t) + \frac{m}{p}K^{(m-p)/p} \int_{t_0}^{t} b(\tau)h(\tau)\Delta\tau,$$

$$B(t) = f(t)\left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}a(t) + \frac{p-q}{p}K^{q/p}\right] + g(t)\left[\frac{r}{p}K^{(r-p)/p}a(t) + \frac{p-r}{p}K^{p/r}\right]$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\frac{m}{p}K^{\frac{m-p}{p}}a(\tau) + \frac{p-m}{m}K^{\frac{m}{p}}\right] h(\tau)\Delta\tau \qquad (3.73)$$

dır (Meng *et al*. 2010).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s)u^q(s) + g(s)u^r(s) + \int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s \qquad (3.74)$$

şeklinde tanımlansın. O halde $z(t_0) = 0$ ve (3.71) eşitsizliğinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t) \qquad (3.75)$$

eşitsizliği yani (3.22) eşitsizliği elde edilir. Teorem 2.26 gereği $\forall K > 0$ için

$$u^q(t) \leq [a(t) + b(t)z(t)]^{q/p} \leq \frac{q}{p}K^{(q-p)/p}[a(t) + b(t)z(t)] + \frac{p-q}{p}K^{q/p}$$

$$u^r(t) \leq [a(t) + b(t)z(t)]^{\frac{r}{p}} \leq \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}[a(t) + b(t)z(t)] + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}} \qquad (3.76)$$

$$u^m(t) \leq [a(t) + b(t)z(t)]^{\frac{m}{p}} \leq \frac{m}{p}K^{\frac{m-p}{p}}[a(t) + b(t)z(t)] + \frac{p-m}{p}K^{\frac{m}{p}}$$

olduğu görülür. (3.74) ve (3.76) eşitsizliklerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) &= f(t)u^q(t) + g(t)u^r(t) + \int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau \\
&\le f(t)\left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}[a(t)+b(t)z(t)] + \frac{p-q}{p}K^{q/p}\right] \\
&\quad + g(t)\left[\frac{r}{p}K^{(r-p)/p}[a(t)+b(t)z(t)] + \frac{p-r}{p}K^{r/p}\right] \qquad (3.77) \\
&\quad + \int_{t_0}^{s} h(\tau)\left[\frac{m}{p}K^{(m-p)/p}[a(t)+b(t)z(t)] + \frac{p-m}{p}K^{m/p}\right]\Delta\tau \\
&\le B(t) + A(t)z(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $A(t)$ ve $B(t)$, (3.73) ifadesinde tanımlandığı gibidir. Karşılaştırmalı teorem ve (3.77) eşitsizliği ile $z(t_0) = 0$ eşitliğinden

$$
z(t) \le \int_{t_0}^{t} B(\tau)e_{A(\tau)}\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau \qquad (3.78)
$$

olduğu görülür. Bu nedenle (3.75) ve (3.78) ifadelerinden istenilen (3.72) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 3.17: $T = \mathbb{Z}$ ve $u(t),\ a(t),\ b(t), f(t),\ g(t),\ h(t);\ t \in \mathbb{N}_0$ için negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. O zaman $\forall K > 0$, $t \in \mathbb{N}_0$ için

$$
u^p(t) \le a(t) + b(t)\sum_{s=0}^{t-1}\left[f(s)u^q(s) + g(s)u^r(s) + \sum_{\tau=0}^{s-1} h(\tau)u^m(\tau)\right] \qquad (3.79)
$$

ifadesinden

$$
u(t) \le \left\{a(t) + b(t)\sum_{s=0}^{t-1}\bar{B}(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}\big(1+\bar{A}(\tau)\big)\right\}^{1/p} \qquad (3.80)
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t \in \mathbb{N}_0$ için

$$
\begin{aligned}
\bar{A}(t) &= \left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}f(t) + \frac{r}{p}K^{(r-p)/p}g(t)\right]b(t) + \frac{m}{p}K^{(m-p)/p}\sum_{\tau=0}^{t-1} b(\tau)h(\tau) \\
\bar{B}(t) &= f(t)\left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}a(t) + \frac{p-q}{p}K^{q/p}\right] + g(t)\left[\frac{r}{p}K^{(r-p)/p}a(t) + \frac{p-r}{p}K^{p/r}\right] \\
&\quad + \sum_{\tau=0}^{t-1}\left[\frac{m}{p}K^{(m-p)/p}a(\tau) + \frac{p-m}{p}K^{m/p}\right]h(\tau) \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

dır (Meng *et al*. 2010).

Teorem 3.18: $u(t), a(t), b(t), f(t)$ ve $g(t)$ Teorem 3.16 da, $w(t,s)$ Teorem 2.30 da tanımlandığı gibi öyle ki $s \leq t$ ve $t, s \in T$ için $w(\sigma(t), t) \geq 0$ ve $w^{\Delta}(t,s) \geq 0$ olacak şekilde ele alınırsa $\forall K > 0,\ t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} w(t,s) \left[f(s)u^q(s) + g(s)u^r(s) + \int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s \tag{3.82}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} B_1(\tau) e_{A_1(\tau)}\big(t, \sigma(\tau)\big)\Delta\tau \right\}^{1/p} \tag{3.83}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t \in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned} A_1(t) = {} & w(\sigma(t), t) \left[\left(\frac{q}{p} K^{(q-p)/p} f(t) + \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} g(t) \right) b(t) \right. \\ & \left. + \frac{m}{p} K^{(m-p)/p} \int_{t_0}^{t} b(\tau)h(\tau)\Delta\tau \right] \\ & + \int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(t,s) \left[\left(\frac{q}{p} K^{(r-p)/p} f(s) + \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} g(s) \right) b(s) \right. \\ & \left. + \frac{m}{p} K^{(m-p)/p} \int_{t_0}^{s} b(\tau)h(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1(t) = {} & w(\sigma(t), t) \left[f(t) \left(\tfrac{q}{p} K^{(q-p)/p} a(t) + \tfrac{p-q}{p} K^{q/p} \right) \right. \\ & + g(t) \left(\frac{r}{p} K^{(r-p)/p} a(t) + \frac{p-r}{p} K^{r/p} \right) \\ & + \int_{t_0}^{t} h(\tau) \left[\frac{m}{p} K^{(m-p)/p} a(\tau) + \frac{p-m}{p} K^{m/p} \right] \Delta\tau \\ & + \int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(t,s) \left[f(s) \left(\frac{q}{p} K^{(q-p)/p} a(s) + \frac{p-q}{p} K^{q/p} \right) \right. \\ & + g(s) \left(\frac{r}{p} K^{(r-p)/p} a(s) + \frac{p-r}{p} K^{r/p} \right) \end{aligned}$$

$$+\int_{t_0}^{s} h(\tau)\left(\frac{m}{p}K^{(m-p)/p}a(\tau)+\frac{p-m}{p}K^{m/p}\right)\Delta\tau\Bigg]\Delta s \tag{3.84}$$

dır (Meng *et al.* 2010).

İspat: $z(t)$ fonskiyonu

$$z(t)=\int_{t_0}^{t} w(t,s)\left[f(s)u^q(s)+g(s)u^r(s)+\int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s \tag{3.85}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $z(t_0)=0$ ve (3.82) ifadesinden (3.22) eşitsizliği tekrardan yazılabilir. Bu nedenle (3.76) ve (3.85) ifadelerinden $t\in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned}
z^{\Delta}(t)= {} & w(\sigma(t),t)\left[f(t)u^q(t)+g(t)u^r(t)+\int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau\right] \\
& +\int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(t,s)\left[f(s)u^q(s)+g(s)u^r(s)+\int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s \\
\le {} & w(\sigma(t),t)\Bigg[f(t)\left(\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}(a(t)+b(t)z(t))+\frac{p-q}{p}K^{q/p}\right) \\
& +g(t)\left(\frac{r}{p}K^{(r-p)/p}\big(a(t)+b(t)z(t)\big)+\frac{p-r}{p}K^{r/p}\right) \\
& +\int_{t_0}^{t} h(\tau)\left(\frac{m}{p}K^{(m-p)/p}\big(a(\tau)+b(\tau)z(\tau)\big)+\frac{p-m}{p}K^{m/p}\right)\Delta\tau\Bigg] \qquad (3.86) \\
& +\int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(t,s)\Bigg[f(s)\left(\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}(a(t)+b(t)z(t))+\frac{p-q}{p}K^{q/p}\right) \\
& +g(s)\left(\frac{r}{p}K^{(r-p)/p}\big(a(s)+b(s)z(s)\big)+\frac{p-r}{p}K^{r/p}\right) \\
& +\int_{t_0}^{s} h(\tau)\left(\frac{m}{p}K^{(m-p)/p}(a(\tau)+b(\tau)z(\tau))+\frac{p-m}{p}K^{m/p}\right)\Delta\tau\Bigg]\Delta s \\
\le {} & B_1(t)+A_1(t)z(t)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $A_1(t)$ ve $B_1(t)$ (3.84) ifadesinde tanımlandığı gibidir. Karşılaştırmalı teorem ve (3.86) ifadesi ile $z(t_0)=0$ eşitliğinden

$$z(t)\le \int_{t_0}^{t} B_1(\tau)e_{A_1(\tau)}\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau \tag{3.87}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle (3.22) ve (3.87) eşitsizliklerinden istenilen (3.83) eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi ise aşağıdaki başlangıç değer problemini $t \in T^{\kappa}$ için ele alalım:

$$[u^p(t)]^{\Delta} = F\left(t, U\big(t, u(t)\big), \int_{t_0}^{t} H(s, u(s))\Delta s\right), \quad u^p(t_0) = C \tag{3.88}$$

Burada C bir sabit, $F : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve ayrıca $U : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $H : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlardır.

Örnek 3.19: $t \in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned} |F(t, U, V)| &\le |U| + |V|, \\ |U(t, u)| &\le f(t)|u|^q + g(t)|u|^r, \\ |H(t, u)| &\le h(t)|u|^m \end{aligned} \tag{3.89}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Burada p, q, r ve m sabitler, $p \ge q > 0$ ve $p \ge m > 0$ $p \ge r > 0$ dır. $f, g, h \in C_{rd}, f(t), g(t)$ ve $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. O zaman (3.88) in her çözümü olan $u(t)$ aşağıdaki eşitsizliği $\forall K > 0$ ve $t \in T^{\kappa}$ için sağlar:

$$|u(t)| \le \left\{|C| + \int_{t_0}^{t} B(\tau) e_{A(\tau)}\big(t, \sigma(\tau)\big)\Delta\tau\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.90}$$

Burada A, B (3.73) ifadesinde tanımlandığı gibi, $a(t) = |C|, b(t) = 1$ dir. Gerçekten de (3.88) in çözümü olan $u(t)$ aşağıdaki denklemi $t \in T^{\kappa}$ için sağlar;

$$u^p(t) = C + \int_{t_0}^{t} F\left(t, U\big(\tau, u(\tau)\big), \int_{t_0}^{\tau} H\big(s, u(s)\big)\Delta s\right)\Delta\tau \tag{3.91}$$

(3.89) ve (3.91) ifadelerinden de

$$\begin{aligned} |u^p(t)| &\le |C| + \int_{t_0}^{t} \left|F\left(t, U\big(\tau, u(\tau)\big), \int_{t_0}^{\tau} H\big(s, u(s)\big)\Delta s\right)\right| \Delta\tau \\ &\le |C| + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau)|u(\tau)|^q + g(\tau)|u(\tau)|^r + \int_{t_0}^{\tau} h(s)|u(s)|^m \Delta s\right]\Delta\tau \end{aligned} \tag{3.92}$$

olduğu görülür. Teorem 3.16 dan yararlanılarak (3.92) eşitsizliğinden (3.90) ifadesi elde edilir.

Örnek 3.20: $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
&|F(t,U_1,V_1)| - |F(t,U_2,V_2)| \le |U_1 - U_2| + |V_1 - V_2|, \\
&|U(t,u_1)| - |U(t,u_2)| \qquad \le f(t)\left|u_1^p - u_2^p\right|, \\
&|H(t,u_1)| - |H(t,u_2)| \qquad \le h(t)\left|u_1^p - u_2^p\right|
\end{aligned} \tag{3.93}
$$

eşitsizlikleri sağlansın. p, f ve h örnek 3.19 da tanımlandığı gibidir. Eğer $p = (m/n),\ m, n \in \mathbb{N}$ ve m tek sayı ise o zaman (3.88) tek bir çözüme sahiptir; aksi halde $u_1^p(t) = u_2^p(t)$ şeklinde $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ çözümlerine sahip olur.

Çözüm: $u_1(t)$ ve $u_2(t)$, (3.88) in iki çözümü olsun. O halde $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
u_1^p(t) - u_2^p(t) = \int_{t_0}^{t} \Bigg[& F\left(t, U\big(\tau, u_1(\tau)\big), \int_{t_0}^{\tau} H\big(s, u_1(s)\big)\Delta s\right) \\
& - F\left(t, U\big(\tau, u_2(\tau)\big), \int_{t_0}^{\tau} H\big(s, u_2(s)\big)\Delta s\right)\Bigg]\Delta\tau
\end{aligned} \tag{3.94}
$$

olduğu görülür. (3.93) ve (3.94) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\left|u_1^p(t) - u_2^p(t)\right| \le \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau)\left|u_1^p(\tau) - u_2^p(\tau)\right| + \int_{t_0}^{\tau} h(s)\left|u_1^p(s) - u_2^p(s)\right|\Delta s \right]\Delta\tau \tag{3.95}
$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.16 dan yararlanılarak $t \in T^{\kappa}$ için

$$
u_1^p(t) - u_2^p(t) \equiv 0
$$

olduğu görülür. Buradan da istenilen sonuca ulaşılır.

Örnek 3.21: Aşağıdaki denklem $t \in T^{\kappa}$ için ele alınsın;

$$
u^p(t) = a(t) + b(t)\int_{t_0}^{t} F\left(t, s, U(s,u), \int_{t_0}^{\tau} H(\tau,u)\Delta\tau\right)\Delta s \tag{3.96}
$$

$t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
&|F(t,s,U,V)| \le w(t,s)(|U| + |V|)\,, \\
&|U(t,u)| \qquad \le f(t)|u|^q + g(t)|u|^r, \\
&|H(t,u)| \qquad \le h(t)|u|^m
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

eşitsizlikleri sağlansın. Burada $p,\ q,\ r$ ve m sabitler, $p \ge q > 0$ ve $p \ge m > 0$ $p \ge r > 0$ dır. $a,\ b,\ f,\ g,\ h \in C_{rd},\ a(t),\ b(t),\ f(t),\ g(t)$ ve $h(t)$ negatif olmayan fonksiyonlardır. $w(t,s)$ Teorem 2.30 da gibi tanımlı, öyle ki $s \le t$ ve $t, s \in T$ için

$w(\sigma(t),t) \geq 0$ ve $w^{\Delta}(t,s) \geq 0$ olduğunda (3.96) ifadesinin bir çözümü olan $u(t)$ fonskiyonu $\forall K > 0,\ t \in T^{\kappa}$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$|u(t)| \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} B_1(\tau) e_{A_1(\tau)}\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.98}$$

Burada A_1, B_1 (3.84) tanımlandığı gibidir.

Çözüm: (3.97) ve (3.96) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$|u(t)|^p \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} w(t,s) \left[f(s)|u(s)|^q + g(s)|u(s)|^r + \int_{t_0}^{s} h(\tau)|u(\tau)|^m \Delta\tau \right] \Delta s \tag{3.99}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.18 den yararlanılarak (3.98) ifadesi elde edilir.

Teorem 3.22: $u, a, b \in C_{rd}, u(t), a(t)$ ve $b(t)$ negatif olmayan fonksiyon olsunlar. $f : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon öyle ki $t \in T^{\kappa}$ ve $x \geq y \geq 0$ için

$$0 \leq f(t,x) - f(t,y) \leq \varphi(t,y)(x-y) \tag{3.100}$$

olsun. Burada $\varphi : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$sürekli bir fonksiyondur. O halde $\forall K > 0,\ t \in T^{\kappa}$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, u^q(\tau)\big)\Delta\tau \tag{3.101}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} e_M\big(t,\sigma(\tau)\big) f\left(\tau, \frac{K(p-q) + qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\Delta\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.102}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$M(t) = \varphi\left(\tau, \frac{K(p-q) + qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right)\frac{qb(t)}{pK^{(p-q)/p}} \tag{3.103}$$

dir (Li and Sheng 2007).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, u^q(\tau)\big)\Delta\tau \tag{3.104}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $z(t_0) = 0$ ve (3.101) eşitsizliğinden (3.22) eşitsizliği yazılabilir. Teorem 3.5 in ispatındaki gibi (3.22) eşitsizliğinden kolayca (3.23) ifadesi elde edilir. Açıkça (3.104), (3.23) ve (3.100) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) &= f(t, u^{q}(t)) \\
&\le f\left(t, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}} + \frac{qb(t)}{pK^{(p-q)/p}} z(t)\right) - f\left(t, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) \\
&\quad + f\left(t, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) \\
&\le \varphi\left(t, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) \frac{qb(t)}{pK^{(p-q)/p}} z(t) + f\left(t, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) \\
&= M(t)z(t) + f\left(t, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) \qquad (3.105)
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür. Burada $M(t)$, (3.103) ifadesinde tanımlandığı gibidir. Karşılaştırmalı teorem ve $z(t_0) = 0$ eşitliği kullanılarak, (3.105) ifadesinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
z(t) \le \int_{t_0}^{t} e_M(t, \sigma(\tau)) f\left(\tau, \frac{K(p-q)+qa(t)}{pK^{(p-q)/p}}\right) \Delta\tau \qquad (3.106)
$$

eşitsizliği elde edilir. İstenilen (3.102) eşitsizliğinin (3.22) ve (3.106) ifadelerinden kolayca elde edilebileceği görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.23: $u,\ a,\ b \in C_{rd},\ u(t),\ a(t)$ ve $b(t)$ negatif olmayan fonksiyon olsunlar. $f_i : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon öyle ki $t \in T^{\kappa}$ ve $x \ge y \ge 0$ için

$$
0 \le f_i(t, x) - f_i(t, y) \le \varphi_i(t, y)(x - y) \qquad (3.107)
$$

olsun. Burada $\varphi_i :\ T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$sürekli bir fonksiyon, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$, $p \ge q_i > 0$ için pozitif bir gerçel sayının $q_1,\ q_2, \dots, q_n$ şeklinde bir dizisi mevcutsa, o halde $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$
u^{p}(t) \le a(t) + b(t) \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, u^{q_i}(\tau)) \Delta\tau \qquad (3.108)
$$

ifadesinden

$$
u(t) \le \left\{ a(t) + b(t) \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} e_{M^*}(t, \sigma(\tau)) f_i\left(\tau, \frac{K(p-q_i)+q_i a(\tau)}{pK^{(p-q_i)/p}}\right) \Delta\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (3.109)
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$M^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(t, \frac{K(p-q_i) + q_i a(t)}{pK^{(p-q_i)/p}} \right) \frac{q_i b(t)}{pK^{(p-q_i)/p}} \tag{3.110}$$

dır (Li and Sheng 2007).

Teorem 3.24: u, a, b, f, h fonksiyonları Teorem 3.16 da tanımlandığı gibi $L(t,y), M(t,y) : T^\kappa \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyonlar $L(t,y)$ ikinci değişkene göre azalmayan ve aşağıdaki eşitsizliği $t \in T^\kappa$ ve $x \geq y \geq 0$ için sağlayan bir fonksiyon olsun;

$$0 \leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \tag{3.111}$$

O halde $\forall K > 0$, $t \in T^\kappa$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} \left[f(s)u^q(s) + L\big(s, u^r(s)\big) + \int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s \tag{3.112}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} B_2(\tau) e_{A_2(\tau)}\big(t, \sigma(\tau)\big)\Delta\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.113}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t \in T^\kappa$ için

$$\begin{aligned} A_2(t) = {} & \frac{q}{p} K^{(q-p)/p} f(t) + \frac{m}{p} K^{(m-p)/p} \int_{t_0}^{t} b(\tau)h(\tau)\Delta\tau \\ & + \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} M\left(t, \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} a(t) + \frac{p-r}{p} K^{r/p} \right) b(t), \\ B_2(t) = {} & f(t) \left(\tfrac{q}{p} K^{(q-p)/p} a(t) + \tfrac{p-q}{p} K^{q/p} \right) \\ & + \int_{t_0}^{t} h(\tau) \left(\frac{m}{p} K^{(m-p)/p} a(\tau) + \frac{p-m}{p} K^{m/p} \right) \Delta\tau \\ & + L\left(t, \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} a(t) + \frac{p-r}{p} K^{r/p} \right) \end{aligned} \tag{3.114}$$

dır (Meng *et al.* 2010).

İspat: $z(t)$ fonksiyonu

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s)u^q(s) + L\big(s, u^r(s)\big) + \int_{t_0}^{s} h(\tau)u^m(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s \tag{3.115}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $z(t_0) = 0$ ve (3.112) eşitsizliğinden (3.22) eşitsizliği tekrardan yazılabilir. Bu nedenle (3.23) ve (3.115) eşitsizliklerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$
\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) = {} & f(t)u^{q}(t) + L\big(t, u^{r}(t)\big) + \int_{t_0}^{t} h(\tau)u^{m}(\tau)\Delta\tau \\
& \leq f(t)\left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}(a(t)+b(t)z(t)) + \frac{p-q}{p}K^{q/p}\right] \\
& +L\left(t, \frac{r}{p}K^{(r-p)/p}(a(t)+b(t)z(t)) + \frac{p-r}{p}K^{r/p}\right) \\
& -L\left(t, \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right) \\
& + \int_{t_0}^{t} h(\tau)\left[\frac{m}{p}K^{\frac{m-p}{p}}\big(a(\tau)+b(\tau)z(\tau)\big) + \frac{p-m}{p}K^{\frac{m}{p}}\right]\Delta\tau \\
& +L\left(t, \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t) + \frac{p-r}{p}K^{r/p}\right) \\
& \leq f(t)\left[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right] + \int_{t_0}^{t} h(\tau)\left[\frac{m}{p}K^{(m-p)/p}a(\tau) + \frac{p-m}{p}K^{m/p}\right]\Delta\tau \\
& + \left[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}f(t)b(t) + \frac{m}{p}K^{\frac{m-p}{p}}\int_{t_0}^{t} h(\tau)b(\tau)\Delta\tau\right]z(t) \\
& +M\left(t, \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b(t)z(t) \\
& +L\left(t, \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right) = A_2(t)z(t) + B_2(t)
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

olduğu görülür. Burada $A_2(t)$ ve $B_2(t)$, (3.114) ifadesinde tanımlandığı gibidir. Karşılaştırmalı teorem ve (3.116) eşitliği ile $z(t_0) = 0$ eşitliğinden

$$
z(t) \leq \int_{t_0}^{t} B_2(\tau)e_{A_2(\tau)}\big(t, \sigma(\tau)\big)\Delta\tau \tag{3.117}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da (3.22) ve (3.117) ifadelerinden istenilen (3.113) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 3.25: $T = \mathbb{Z}$ ve $u(t),\ a(t),\ b(t), f(t),\ g(t),\ h(t);\ t \in \mathbb{N}_0$ için negatif olmayan fonksiyonlar olsunlar. $L, M \in C(\mathbb{R}_{+}^{2}, \mathbb{R})$ fonksiyonları ise $x \geq y \geq 0$ için

$$
0 \leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \tag{3.118}
$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca $L(t,y)$ ikinci değişkene göre azalmayan bir fonksiyondur.

O halde $\forall K > 0,\, t \in \mathbb{N}_0$ için

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \sum_{s=0}^{t-1} \left[f(s) u^q(s) + L\big(s, u^r(s)\big) + \sum_{\tau=0}^{s-1} h(\tau) u^m(\tau) \right] \tag{3.119}$$

ifadesinden

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \sum_{s=0}^{t-1} \overline{B_1}(\tau) \prod_{\tau=0}^{s-1} \big(1 + \overline{A_1}(\tau)\big) \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.120}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Burada $t \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
\overline{A_1}(t) &= \frac{q}{p} K^{(q-p)/p} f(t) b(t) + \frac{m}{p} K^{(m-p)/p} \sum_{\tau=0}^{t-1} b(\tau) h(\tau) \\
&\quad + \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} M \left(t, \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} a(t) + \frac{p-r}{p} K^{p/r} \right) b(t), \\
\overline{B_1}(t) &= f(t) \left(\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a(t) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \right) \\
&\quad + \sum_{\tau=0}^{t-1} h(\tau) \left(\frac{m}{p} K^{(m-p)/p} a(\tau) + \frac{p-m}{p} K^{m/p} \right) \\
&\quad + L \left(t, \frac{r}{p} K^{(r-p)/p} a(t) + \frac{p-r}{p} K^{p/r} \right)
\end{aligned} \tag{3.121}$$

dır (Meng *et al*. 2010).

4. ZAMAN SKALASINDA GECİKMELİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

İlk önce $t \in T^{\kappa}$ için

$$x^{p}(t) \leq a(t) + c(t) \int_{t_0}^{t} \left[f(s)x\big(\tau(s)\big) + g(s)\right]\Delta s \tag{4.1}$$

gecikmeli integral eşitsizliği $t \in T^{\kappa}$, $\tau(t) \leq t_0$ için

$$\begin{cases} x(t) & = \varphi(t), \quad t \in [\alpha, t_0] \cap T \\ \varphi\big(\tau(t)\big) & \leq \big(a(t)\big)^{1/p} \end{cases} \tag{4.2}$$

başlangıç değer koşulu ile birlikte zaman skalasında ele alınsın. Burada $p \geq 1$ sabit $\tau : T^{\kappa} \to T$, $\tau(t) \leq t, -\infty < \alpha = inf\{\tau(t),\ t \in T^{\kappa}\} \leq t_0$, $\varphi(t) \in C_{rd}([\alpha, t_0] \cap T, \mathbb{R}_+)$ dır.

Teorem 4.1: $x(t), a(t), c(t), f(t), g(t) \in C_{rd}(T, \mathbb{R}_+)$ olsun. Eğer $a(t)$ ve $c(t)$, $t \in T^{\kappa}$ için azalmayan fonksiyonlar ise o zaman (4.1) ifadesi (4.2) başlangıç koşulu altında $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq \left[a(t) + c(t)\left(h(t) + \int_{t_0}^{t} e_B\big(t, \sigma(\tau)\big)h(s)B(s)\Delta\tau\right)\right]^{1/p} \tag{4.3}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s)\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right) + g(s)\right]\Delta s \tag{4.4}$$

ve $t \in T^{\kappa}$ için

$$B(t) = \frac{c(t)f(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}} \tag{4.5}$$

dır (Li 2009 b).

İspat: $t^* \in T^{\kappa}$ herhangi bir sayı olarak ele alınarak, $z(t)$ fonksiyonu $t \in [t_0, t^*] \cap T$ için

$$z(t) = \left\{a(t^*) + c(t) \int_{t_0}^{t} \left[f(s)x\big(\tau(s)\big) + g(s)\right]\Delta s\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlansın. $z(t)$ fonksiyonu azalmayan ve negatif olmayan fonksiyon olduğu kolayca görülebilir, ayrıca $t \in [t_0, t^*] \cap T$ için

$$x(t) \leq z(t)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $t \in [t_0, t^*] \cap T$ ile $\tau(t) \geq t_0$ için

$$x(\tau(t)) \leq z(\tau(t)) \leq z(t) \tag{4.7}$$

dır. Diğer yandan (4.2) başlangıç koşulu kullanılarak $t \in [t_0, t^*] \cap T$ ile $\tau(t) \leq t$ için

$$x(\tau(t)) = \varphi(\tau(t)) \leq (a(t))^{1/p} \leq (a(t^*))^{1/p} \leq z(t) \tag{4.8}$$

olduğu görülür. (4.7) ve (4.8) ifadelerinden $t \in [t_0, t^*] \cap T$ için

$$x(\tau(t)) \leq z(t) \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.6) ve (4.9) ifadelerinden $t \in [t_0, t^*] \cap T$ için

$$z^p(t) \leq a(t^*) + c(t) \int_{t_0}^{t} [f(s)z(s) + g(s)]\Delta s \tag{4.10}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.10) eşitsizliğinde $t = t^*$ olarak alınırsa

$$z^p(t^*) \leq a(t^*) + c(t^*) \int_{t_0}^{t^*} [f(s)z(s) + g(s)]\Delta s \tag{4.11}$$

olduğu görülür. $t^* \in T^\kappa$ sayısını keyfi olarak alırsak, (4.11) ifadesinden $t \in T^\kappa$ için

$$z^p(t) \leq a(t) + c(t) \int_{t_0}^{t} [f(s)z(s) + g(s)]\Delta s \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $t \in T^\kappa$ için

$$x(t) \leq z(t) \tag{4.13}$$

eşitsizliği elde edilir. $u(t)$ fonksiyonu $t \in T^\kappa$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s)z(s) + g(s)]\Delta s \tag{4.14}$$

O halde (4.12) ifadesi $t \in T^\kappa$ için

$$z^p(t) \leq a(t) + c(t)u(t) \tag{4.15}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Lemma 3.1 kullanılarak (4.15) ifadesinden $\forall K > 0$, $t \in T^\kappa$ için

$$z(t) \leq (a(t) + c(t)u(t))^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} + \frac{c(t)u(t)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \tag{4.16}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.14) ve (4.16) ifadelerinden $t \in T^\kappa$ için

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} \left[f(s) \left(\frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} + \frac{c(s)u(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} \right) + g(s) \right] \Delta s$$

$$= h(t) + \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)\Delta s \tag{4.17}$$

olduğu görülür. Burada $h(t)$ ve $B(t)$ sırası ile (4.4) ve (4.5) de tanımlandığı gibidir. Burada $h \in C_{rd}, B \in \Re^{+}$ ve $B(t) \geq 0$ dır. Gronwall eşitsizliği kullanılarak (4.17) ifadesinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$u(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} e_B\big(t, \sigma(\tau)\big)h(s)B(s)\Delta s \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde istenilen (4.13), (4.15) ve (4.18) den (4.3) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2: Teorem 4.1 deki koşullar geçerli olsun. O halde (4.1) eşitsizliği, (4.2) başlangıç koşulu altında $\forall K > 0$, $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq [a(t) + c(t)h(t)e_B(t, t_0)]^{1/p} \tag{4.19}$$

ifadesine dönüşür. Burada $h(t)$ ve $B(t)$ sırası ile (4.4) ve (4.5) ifadelerinde tanımlandığı gibidir (Li 2009 b).

İspat: Teorem 4.1 in ispatındaki gibi (4.18) ifadesi elde edilir. $t \in T^{\kappa}$ için $h(t)$ fonksiyonunun azalmayan fonksiyon olduğu kolayca görülür. O halde (4.18) ifadesi $t \in T^{\kappa}$ için

$$\begin{aligned} u(t) &\leq h(t) + h(t) \int_{t_0}^{t} e_B\big(t, \sigma(\tau)\big)B(s)\Delta s \\ &= h(t)\left[1 + \int_{t_0}^{t} e_B\big(t, \sigma(\tau)\big)B(s)\Delta s\right] \end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Ayrıca $t \in T^{\kappa}$ için

$$\int_{t_0}^{t} e_B\big(t, \sigma(\tau)\big)B(s)\Delta s = e_B(t, t_0) - e_B(t, t) = e_B(t, t_0) - 1 \tag{4.21}$$

olduğu görülür. (4.20) ve (4.21) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$u(t) \leq h(t)e_B(t, t_0) \tag{4.22}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (4.13), (4.15) ve (4.22) den (4.29) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi ise zaman skalasında $t \in T^{\kappa}$ için

$$x^p(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, x^p(s)\Delta s + \int_{t_0}^{t} \left[f(s)x\big(\tau(s)\big) + g(s)\right]\Delta s \tag{4.23}$$

gecikmeli integral eşitsizliği ile (4.2) başlangıç koşulu sağlansın. Burada $p \geq 1$ sabit ve $\tau(t)$ ise (4.1) eşitsizliğindeki gibi tanımlansın.

Teorem 4.3: $x(t), a(t), c(t), f(t), g(t) \in C_{rd}(T^{\kappa}, \mathbb{R}_+)$ ve $a(t)$, $t \in T^{\kappa}$ için azalmayan bir fonksiyon olsun. O halde (4.23) eşitsizliği (4.2) başlangıç koşulu altında $\forall K > 0$ $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq \left[e_b(t,t_0)\left(a(t) + F(t)\int_{t_0}^{t} e_G\big(t,\sigma(s)\big)F(s)G(s)\Delta\tau\right)\right]^{1/p} \tag{4.24}$$

ifadesine dönüşür. Burada

$$F(t) = \int_{t_0}^{t}\left[f(s)[e_b(s,t_0)]^{1/p}\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right) + g(s)\right]\Delta s \tag{4.25}$$

ve

$$G(t) = \frac{f(t)[e_b(t,t_0)]^{1/p}}{pK^{\frac{p-1}{p}}} \tag{4.26}$$

dır (Li 2009 b).

İspat: $t^* \in T^{\kappa}$ herhangi bir sayı olmak üzere ve $z(t)$ fonksiyonu $t \in [t_0, t^*] \cap T$ için

$$z(t) = \left\{a(t^*) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, x^p(s)\Delta s + \int_{t_0}^{t}\left[f(s)x\big(\tau(s)\big) + g(s)\right]\Delta s\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{4.27}$$

şeklinde ifade edilsin. Teorem 4.1 in ispatındaki gibi $z(t)$ fonksiyonunun negatif ve azalmayan olduğu kolayca görülür. O halde $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq z(t) \tag{4.28}$$

ve

$$z^p(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, z^p(s)\Delta s + \int_{t_0}^{t}[f(s)z(s) + g(s)]\Delta s \tag{4.29}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $u(t)$ fonksiyonu

$$u(t) = a(t) + v(t) \tag{4.30}$$

olarak ifade edilsin. Burada

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s)z(s) + g(s)]\Delta s \tag{4.31}$$

dir. O halde (4.29) ifadesi

$$z^p(t) \le u(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, z^p(s)\Delta s \tag{4.32}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Gronwall eşitsizliği kullanılarak (4.32) ifadesinden $t \in T^\kappa$ için

$$z^p(t) \le u(t) + \int_{t_0}^{t} e_b\big(t, \sigma(s)\big)u(s)b(s)\,\Delta s \tag{4.33}$$

eşitsizliği elde edilir. $u(t)$ fonksiyonu azalmayan olup (4.33) ifadesinden yararlanılarak $t \in T^\kappa$ için

$$z^p(t) \le u(t)e_b(t, t_0)$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlikten de

$$z(t) \le [e_b(t, t_0)]^{\frac{1}{p}}[a(t) + v(t)]^{\frac{1}{p}} \tag{4.34}$$

ifadesi elde edilir. Lemma 3.1 kullanılarak $\forall K > 0$ için (4.34) eşitsizliği

$$z(t) \le [e_b(t, t_0)]^{\frac{1}{p}}[a(t) + v(t)]^{\frac{1}{p}} \le [e_b(t, t_0)]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{v(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right] \tag{4.35}$$

şeklinde düzenlenebilir. (4.31) ve (4.35) ifadelerinden $t \in T^\kappa$ için

$$v(t) \le \int_{t_0}^{t}\left[f(s)[e_b(s, t_0)]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{P}} + \frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}} + \frac{v(s)}{pK^{\frac{p-1}{P}}}\right) + g(s)\right]\Delta s$$

$$= F(t) + \int_{t_0}^{t} G(s)v(s)\Delta s \tag{4.36}$$

olduğu görülür. Burada $F(t)$ ve $G(t)$ sırası ile (4.25) ve (4.26) ifadelerinde tanımlandığı gibidir. Gronwall eşitsizliği kullanılarak (4.36) ifadesinden $t \in T^\kappa$ için

$$v(t) \leq F(t) + \int_{t_0}^{t} e_G\big(t, \sigma(s)\big)F(s)G(s)\,\Delta s \tag{4.37}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.34) ve (4.37) ifadelerinden

$$z(t) \leq \left[[e_b(t, t_0)] \left(a(t) + F(t) + \int_{t_0}^{t} e_G\big(t, \sigma(s)\big)F(s)G(s)\,\Delta s \right) \right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.38}$$

ifadesi elde edilir. O halde (4.28) ve (4.38) eşitsizliklerinden (4.24) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4: Teorem 4.3 deki koşullar geçerli olsun. O halde (4.23) eşitsizliği (4.2) başlangıç koşulu altında $\forall K > 0$ $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq \left[e_b(t, t_0)\big(a(t) + F(t)e_G(t, t_0)\big) \right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.39}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada $F(t)$ ve $G(t)$ sırası ile (4.25) ve (4.26) ifadelerinde tanımlandığı gibidir (Li 2009 b).

İspat: Teorem 4.3ün ispatındaki gibi (4.38) eşitsizliği elde edilebilir. $t \in T^{\kappa}$ için $F(t)$ fonksiyonunun azalmayan olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle (4.38) eşitsizliğinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) \leq \left[[e_b(t, t_0)]\big(a(t) + F(t) + e_G(t, t_0)\big) \right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.40}$$

ifadesi elde edilir. O halde istenilen (4.28) ve (4.40) eşitsizliklerinden (4.39) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de zaman skalasında $t \in T^{\kappa}$ için

$$x^p(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, x^p(s)\Delta s + \int_{t_0}^{t} L(s, x(\tau(s)))\Delta s \tag{4.41}$$

gecikmeli integral eşitsizliği ile (4.2) başlangıç koşulu sağlansın. Burada $p \geq 1$ sabit ve $\tau(t)$ ise (4.1) eşitsizliğinde ifade edildiği gibidir. Ayrıca $L : T^{\kappa} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 4.5: $x(t), a(t), b(t) \in C_{rd}(T^{\kappa}, \mathbb{R}_+)$ ve $a(t)$, $t \in T^{\kappa}$ için azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $x \geq y \geq 0$ için

$$0 \leq L(t, x) - L(t, y) \leq K(t, y)(x - y) \tag{4.42}$$

ifadesi sağlanıyor ise o halde (4.41) ifadesi (4.2) başlangıç koşulu altında $\forall K > 0$

$t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq \left[[e_b(t,t_0)] \left(a(t) + H(t) \int_{t_0}^{t} e_J\big(t,\sigma(s)\big) H(s) J(s)\, \Delta s \right) \right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.43}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada $K: T^{\kappa} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} \left[L\big(s, [e_b(s,t_0)]^{1/p}\big) \left(\frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}} + \frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right] \Delta s \tag{4.44}$$

ve

$$J(t) = K\left(t, [e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}} + \frac{a(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right) \frac{[e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}}}{pK^{\frac{p-1}{p}}} \tag{4.45}$$

dır (Li 2009 b).

İspat: $t^* \in T^{\kappa}$ herhangi bir sayı olmak üzere, $z(t)$ fonksiyonu $t \in [t_0, t^*] \cap T$ için

$$z(t) = \left\{ a(t^*) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, z^p(s) \Delta s + \int_{t_0}^{t} L\left(s, x\big(\tau(s)\big)\right) \Delta s \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{4.46}$$

şeklinde ifade edilsin. Teorem 4.1 in ispatındaki gibi benzer şekilde (4.42) ifadesi ile birlikte $z(t)$ fonksiyonun negatif ve azalmayan fonksiyon, $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq z(t) \tag{4.47}$$

ve

$$z^p(t) \leq \; a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, z^p(s) \Delta s + \int_{t_0}^{t} L(s, z(s)) \Delta s \tag{4.48}$$

olduğu kolayca görülür. $r(t)$ fonskiyonu

$$t(t) = a(t) + w(t) \tag{4.49}$$

şeklinde ifade edilsin. Burada

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} L(s, z(s)) \Delta s \tag{4.50}$$

dir. O halde (4.48) ifadesi $t \in T^{\kappa}$ için

$$z^p(t) \leq r(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, z^p(s) \Delta s \tag{4.51}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Teorem 4.3 ün ispatındaki gibi benzer yolla, (4.51) eşitsizliğinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) \leq [e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}}[a(t)+w(t)]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq [e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}+\frac{a(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}+\frac{w(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right] \tag{4.52}$$

ifadesi elde edilir. (4.50) ve (4.54) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$w(t) \leq \left\{\int_{t_0}^{t} L\left(s,[e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}+\frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}+\frac{w(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right.$$
$$-L\left(s,[e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}+\frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right)$$
$$\left.+L\left(s,[e_b(t,t_0)]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}+\frac{a(s)}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\right\}\Delta s \tag{4.53}$$
$$\leq H(t)+\int_{t_0}^{t} J(s)w(s)\,\Delta s$$

olduğu görülür. Burada $H(t)$ ve $J(t)$ sırası ile (4.44) ve (4.45) de ifade edildiği gibidir. Gronwall eşitsizliği kullanılarak (4.53) ifadesinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$w(t) \leq \; H(t)+\int_{t_0}^{t} e_J\big(t,\sigma(s)\big)H(s)J(s)\,\Delta s \tag{4.54}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.52) ve (4.54) ifadelerinden $t \in T^{\kappa}$ için

$$z(t) \leq \left[[e_b(t,t_0)]\left(a(t)+H(t)\int_{t_0}^{t} e_J\big(t,\sigma(s)\big)H(s)J(s)\,\Delta s\right)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.55}$$

olduğu görülür. O halde (4.47) ve (4.55) eşitsizliklerinden (4.43) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6: Teorem 4.5 deki koşullar geçerli olsun. (4.41) eşitsizliği (4.2) başlangıç koşulu altında $\forall K>0$ $t \in T^{\kappa}$ için

$$x(t) \leq \left[e_b(t,t_0)\left(a(t)+H(t)e_J(t,t_0)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.56}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada $H(t)$ ve $J(t)$ sırası ile (4.44) ve (4.45) ifadelerinde tanımlandığı gibidir (Li 2009 b).

Şimdi ise $t \in T^{\kappa}$ için

$$\left(x^{p}(t)\right)^{\Delta} = M\left(t, x\left(\tau(t)\right)\right) \tag{4.57}$$

gecikmeli dinamik denklemi ile $t \in T^{\kappa}, \tau(t) \leq t_0$ için

$$\begin{cases} x(t) & = \omega(t), \quad t \in [\alpha, t_0] \cap T \\ \omega\left(\tau(t)\right) & \leq C^{1/p} \end{cases} \tag{4.58}$$

başlangıç koşulu sağlansın. Burada $M : T^{\kappa} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon , $C = x^{p}(t_0)$ ve $p \geq 1$ sabitler, α ve $\tau(t)$, (4.2) başlangıç koşulunda tanımlandığı gibi ve $\omega(t) \in C_{rd}([\alpha, t_0] \cap T, \mathbb{R}_{+})$ dir.

Örnek 4.7:

$$\left|M\left(t, x\left(\tau(t)\right)\right)\right| \leq \mathrm{f(t)}\left|x\left(\tau(t)\right)\right| + \mathrm{g(t)} \tag{4.59}$$

olsun. Burada $f(t), g(t) \in C_{rd}(T^{\kappa}, \mathbb{R}_{+})$ dır. $x(t)$, (4.57) denklemini (4.58) başlangıç koşulu altında sağlasın. O halde $\forall K > 0$ $t \in T^{\kappa}$ için

$$|x(t)| \leq \left[|C| + \bar{h}(t) \int_{t_0}^{t} e_{\bar{B}}\left(t, \sigma(s)\right)\bar{h}(s)\bar{B}(s)\,\Delta s\right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.60}$$

olduğu görülür. Burada

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{t_0}^{t} \left[f(s)\left(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} + \frac{|C|}{pK^{\frac{p-1}{p}}}\right) + g(s)\right]\Delta s \\ J(t) &= \frac{f(t)}{pK^{\frac{p-1}{p}}} \end{aligned} \tag{4.61}$$

dir (Li 2009 b).

Çözüm: Açıkça $x(t)$, (4.57) denkleminin (4.58) başlangıç koşulu altında çözümü ise $t \in T^{\kappa}$ için aşağıdaki denklemi de sağlar:

$$x^{p}(t) = C + \int_{t_0}^{t} M\left(s, x\left(\tau(s)\right)\right)\Delta s \tag{4.62}$$

(4.59) dan (4.58) başlangıç koşulu altında $t \in T^{\kappa}$ için

$$|x^p(t)| \le |C| + \int_{t_0}^{t} \left[\mathrm{f(s)} \left| x\big(\tau(s)\big) \right| + \mathrm{g(s)} \right] \Delta s \tag{4.63}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde Teorem 4.1 kullanılarak (4.63) eşitsizliğinden (4.60) eşitsizliği kolayca görülür.

KAYNAKLAR

Agarwal, R., Bohner, M. and Peterson, A. (2007). "Inequalities on time scales: a survey," Mathematical, Birkhäuser, Boston, Berlin, Mass USA.

Agarwal, R., Bohner, M. and Peterson, A. (2001). "Inequalities on time scales: a survey," Mathematical Inequalities & Applications, 4, **no. 4**: 535–557.

Agarwal, R., Bohner, M., O'Regan, D. and Peterson, A. (2000). Dynamic equations on time scales: A survey.

Akin, E., Bohner, M. and Akin, F. (2005). "Pachpatte inequalities on time scales" Journal of Inequalities in Pure Applied Mathematics, 6, **no. 1**, article 6, 23 pages.

Anderson, D. R. (2008). "Nonlinear dynamic integral inequalities in two independent variables on time scale Pairs," Advances in Dynamical Systems and Applications 3, **no. 1**: 1–13.

Bohner, M. and Peterson, A. (2001). Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, An introduction with application, Birkhäuser Boston, Mass, USA.

Bohner, M., Erbe, L. and Peterson, A. (2005). Oscillation for nonlinear second order dynamic equations on a time scale, J. Math. Anal. Appl. **301**: 491–507.

Bohner, M. and Peterson, A. (2003) Advances in Dynamic Equations on Time Scales Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2003.

Chang, Y. K., Li, W.T. (2007). Existence results for second-order dynamic inclusion with m-point boundary value conditions on time scales, Appl. Math**. Lett. 20** 885–891.

Hilger, S. (1990). "Analysis onmeasure chains a unified approach to continuous and discrete calculus,"Results in Mathematics, 18, **no. 1-2**: 18–56.

Li, W. N. (2006). "Some new dynamic inequalities on time scales," Journal of Mathematical Analysis and Applications, 319, **no. 2**: 802–814.

Li, W. N. and Sheng, W. (2007). "Some nonlinear integral inequalities on time scales" Journal of Inequalities and Applications, Article ID **70465**, 15 pages.

Li, W. N. (2009 a). "Some Pachpatte type inequalities on time scales," Computers Mathematics with Applications 57, **no. 2**: 275–282.

Li, W. N. (2009 b). Some delay integral inequalities on time scales, Department of

Applied Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, PR China

Li, W. N. (2005). Some new dynamic inequalities on time scales, *Department of Mathematics, Binzhou University, Shandong 256600, PR China*.

Meng, F. W and Li, W. N. (2003). On some newnonlinear discrete inequalities and their applications, *J.Comput. Appl. Math.* **158**: 407–417.

Meng, F. W., Xu, R. and Song, C. (2010). On Some Integral Inequalities on Time Scales and Their Applications, Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications Volume, Article ID **464976**, 13 pages

Ozgun, S. A., Zafer, A., and Kaymakcalan, B. (1997). Gronwall-Bihari type inequalities on time scales. In Conference Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations pages 481–490, Amsterdam. Gordon and Breach.

Wong, F. H., Yeh, C. C. and Hong, H. (2006). “Gronwall inequalities on time scales” Mathematical Inequalities & Applications 9, **no. 1**: 75–86.

Yuan, Z., Yuan, X., Meng, F. and Zhang, H. (2009). “Some new delay integral inequalities and their applications,” Applied Mathematics and Computation, 208 **no. 1**: 231–237.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı-Soyadı : Hakan TEMİZ

Doğum Tarihi : 07.10.1989

Doğum Yeri : TOKAT

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Bilgileri

Lise : 75.Yıl Erbaa Lisesi (2003-2006)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Böl. (2007-2011)

Pedagojik Formasyon : Uşak Üniversitesi (2012-2013)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2011-)

Yüksek Lisans Ana Bilim Dalı : Matematik

Yüksek Lisans Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

Çalıştığı Kurum

Milli Eğitim Bakanlığı Karayazı Anadolu Lisesi (2013-)

İletişim Bilgileri

Tel. No : 0543 621 44 35

Mail : sevdam_sonsuzdur@windowslive.com